

変化の割合の倍によるイメージ

上越教育大学

布川 和彦

中学校2年生で「変化の割合」を学習しました。これは、 y が x の関数であるときに、「 x の増加量に対する y の増加量の割合」のことでした。式では、次のように表されました。

$$\text{変化の割合} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$$

ただ、このような分数で表された式で示されると、変化の割合がどのようなものか、イメージがわきづらいという人もあるかもしれません。またそもそも小学校4年生や5年生のときに学習した「割合」が何かよくわからないという人もあるかもしれません。

そこで、ここでは、「割合」の考えを、もう少しイメージしやすい「倍」の考えとしてとらえなおして、「変化の割合」も「倍」の感覚でとらえなおしてみます。

目 次

「割合」の「倍」によるとらえなおし

変化の割合の倍によるイメージ

変化の割合と関数の特徴

(1) 変化の割合が変わらない関数

(2) 変化の割合が変わる関数

変化の割合の問題練習

その後の展開

まとめ

補足

「割合」の「倍」によるとらえなおし

まず、割合を「倍」の考えとしてとらえなおしてみます。

(1) 倍によるとらえなおし

小学校2年生のときに、2つ分、3つ分、…のことを2倍、3倍、…と呼ぶことを学習しました。4の2倍なら、4の2つ分なので8、4の3倍なら4の3つ分なので12ということでした。この「2倍」の「2」や「3倍」の「3」が割合です。

4の2倍は8 $\longleftrightarrow$ 4に対する8の割合は2

4の3倍は12 $\longleftrightarrow$ 4に対する12の割合は3

Xのa倍はY $\longleftrightarrow$ Xに対するYの割合はa

なお4の0.5倍であれば、まず4の0.1倍を作り、その5つ分と考えます。4の0.1倍は4の10分の1なので0.4となります。その5つ分ですから、 $0.4 \times 5 = 2$ となり、4の0.5倍は2となります。

また、4の3.5倍なら4の3倍と4の0.5倍をあわせて、 $12 + 2 = 14$ で14となります。これは「4に対する14の割合は3.5」と言うこともできます。

(参考：[割合の学び直し](#))

(2) 割合を求める

「2に対する8の割合」を求めることは、「8は2の何倍か」を求めることです。ここで何倍を□倍と表しておくと、「8は2の□倍」は次のように式で表すことができました。

$$8 = 2 \times \square$$

ここから $\square = 8 \div 2 = 4$ となるので、「8は2の4倍」とわかり、これを割合で言いかえると「2に対する8の割合は4」となります。

「5に対する14の割合」であれば「14は5の何倍か」を求めることです。何倍を□倍と表すと、「14は5の□倍」は次のように表すことができます。

$$14 = 5 \times \square$$

ここから $\square = 14 \div 5 = 2.8$ となり、「14は5の2.8倍」「5に対する14の割合は2.8」であることがわかります。

このように「Xに対するYの割合」を求めることは、「YはXの□倍」の□を求めることです。そして、「YはXの□倍」は「 $Y=X \times \square$ 」と表すことができるので、□を求めるには、次のような計算をすることになります。

$$\square = Y \div X = \frac{Y}{X}$$

わり算や分数がよくわからないときは、まず倍関係としてイメージして、それを□を使ったかけ算の式で表してみるとよいでしょう。

(参考：[割合の問題の解き方](#))

変化の割合の倍によるイメージ

上で復習した倍関係の式「 $Y=X \times \text{倍}$ 」で、Yの部分が「yの増加量」、Xの部分が「xの増加量」になったときに、倍に当たるのが「変化の割合」です。

$$(y \text{ の増加量}) = (x \text{ の増加量}) \times (\text{変化の割合}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

割合を求めるには、結局、 $\square = Y \div X = \frac{Y}{X}$ という計算をしましたが、この形で表現しているのが、教科書に出てくる次のような変化の割合の式になります。

$$\text{変化の割合} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$$

「4を2倍したら8」といった倍関係を思い出すと、①の式は次のようなことを表しています。

「xの増加量を何倍したらyの増加量になるか」

ですから、調べている関数について「xの値が1から3まで変わるときの変化の割合」を考えるということは、xの値が1から3まで2増加する部分では、xの増加量2を何倍したらyの増加量になるかを考えるということです。

もともと「割合」はある量が基準の量に対して「どの程度」の大きさかを表しています。（参考：[割合の意味](#)）関数の変化の割合は、xの増加量に対してyの増加量がどの程度の大きさであるかを表しています。要するに、関数の変化の程度を数値で表そうとするものです。

変化の割合の値が例えば2であれば、「 x の増加量を2倍したら y の増加量になる」ということです。ここから次のことがわかります。

- ・ x が増えると y の値も増えている。
- ・ x の増加量の2倍も y は増えており、
 x の増加量の割には y の増加の程度は大きい。

変化の割合の値が0.5であれば、「 x の増加量を0.5倍したら y の増加量になる」ということです。

- ・ x が増えると y の値も増えている。
- ・ x の増加量の0.5倍しか y は増えておらず、
 x の増加量の割には y の増加の程度はあまり大きくない。

変化の割合が負の値ならどうでしょう。

例えば変化の割合が-2であれば、 x の増加量を-2倍すると y の増加量になるということです。つまり、 y の増加量は負の数になります。「増加量」が負の数ということは、反対向きの“増加”ですから減少ということになります。（参考：[逆向きの量、負の数の学び直し](#)）

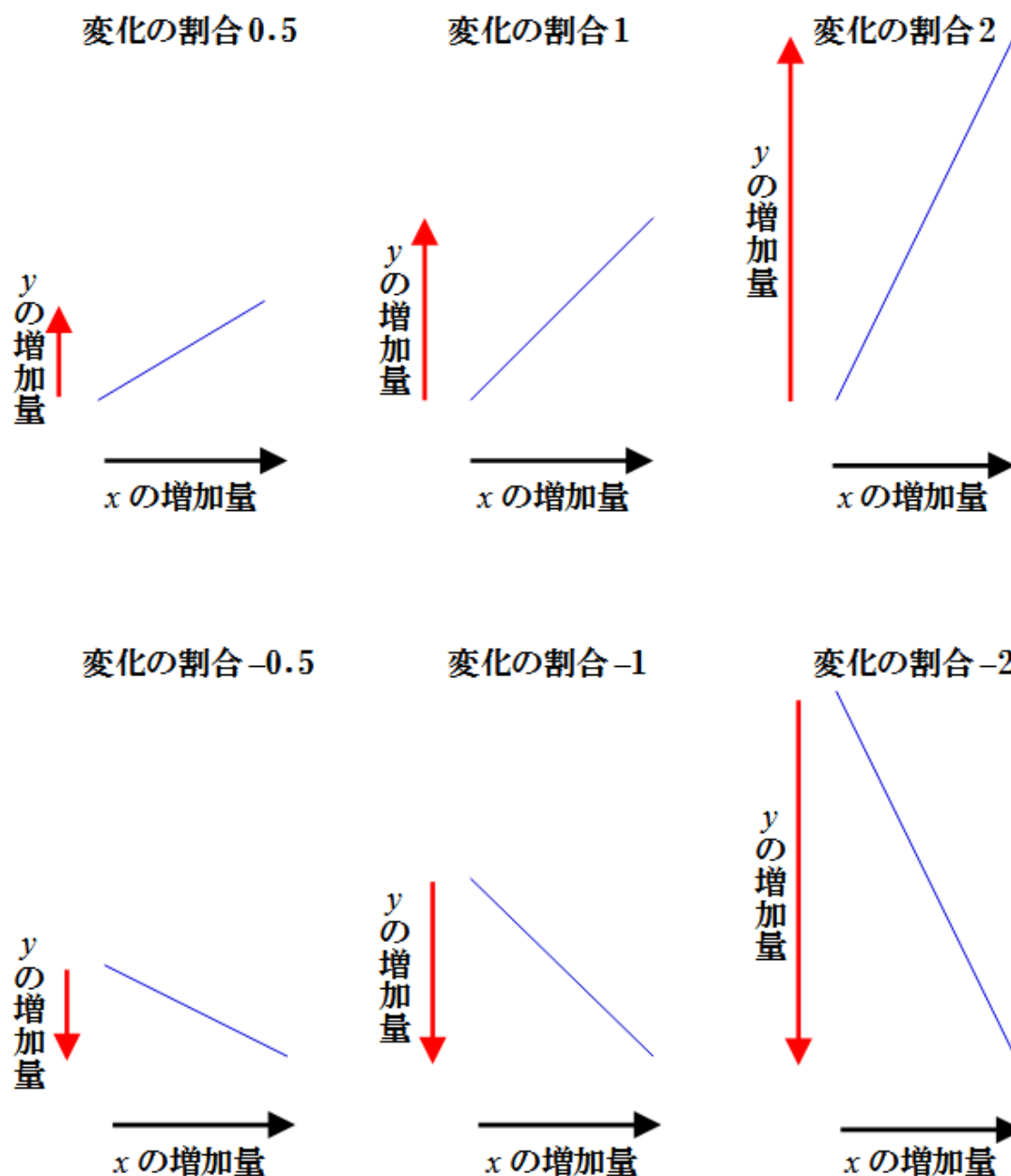
変化の割合の絶対値は $|-2|=2$ ですから、変化の程度は大きいことがわかります。つまり、変化の割合が-2のときは、大きく減少しているとわかります。

- ・ x が増えると y の値は減っている。
- ・ x の増加量の2倍だけ減る、つまり
 x の増加量の割には y の減少の程度は大きい。

もちろん変化の割合が2や-2のとき「大きな変化」だと言っても、変化の割合が1や-0.5のときに比べて「大きい」ということです。変化の割合が8や-15ならもっと「大きい」変化になります。

同様に、変化の割合が0.5のときには変化の程度が小さいとしても、それは変化の割合が1や2のときに比べて「小さい」ということであり、変化の割合が0.03なら、もっと「小さい」変化になります。

下の図は変化の割合のイメージを表しています。黒の矢印の長さは x の増加量を、赤い矢印の長さは y の増加量を表しています。下向きの矢印は減少を表します。青い線は変化の程度を表しますが、グラフのおよその形とんでもいいでしょう。変化の割合の絶対値が大きくなると、傾きが大きくなります。



変化の割合と関数の変化の程度

変化の割合と関数の特徴

変化の割合は、考えている x の値の範囲での関数の変化の程度を表しています。考える x の値や範囲を変えたときに、変化の割合が変わる関数と変わらない関数があります。また変化の割合が変わる関数でも、その変わり方に関数独自の特徴がある場合があります。

以下では中学校で学習する関数を、変化の割合の点から考えてみます。

(1) 変化の割合が変わらない関数

x の増加量を 2 として調べたときに、 x が 0 から 2 まで変化したときの変化の割合も 3、 x が 2 から 4 まで変化したときの変化の割合も 3、 x が 4 から 6 まで変化したときの変化の割合も 3、 $\cdots$ とずっと同じように続いたとしたら、この関数はどのような変化の仕方をするでしょうか。

$x=0$ のときの y の値を仮に 1 として、関数を表で表してみます。 x が 0 から 2 まで変化したときの変化の割合が 3 ということは、 x の増加量は 2 ですから、 y の増加量はその 3 倍で 6 となります。同様に、 x が 2 から 4 まで変化したときの y の増加量も 6 ですし、 x が 4 から 6 まで変化したときの y の増加量も 6 となります。したがって、関数を表で表すと、次のようになることがわかります。

x	0	2	4	6
y	1	7	13	19

変化の割合が x の範囲によらないとすれば、 x が 0 から 1 まで変化したときや 2 から 3 まで変化したときも、変化の割合は 3 のはずです。このときは x の増加量は 1 ですから、 y の増加量はその 3 倍で 3 となります。つまり、 x が 0 から 1 まで変化すると y は 3 だけ増え、2 から 3 まで変化しても y は 3 だけ増えることになります。

そうした情報も含めて、表を修正すると次のようになります。

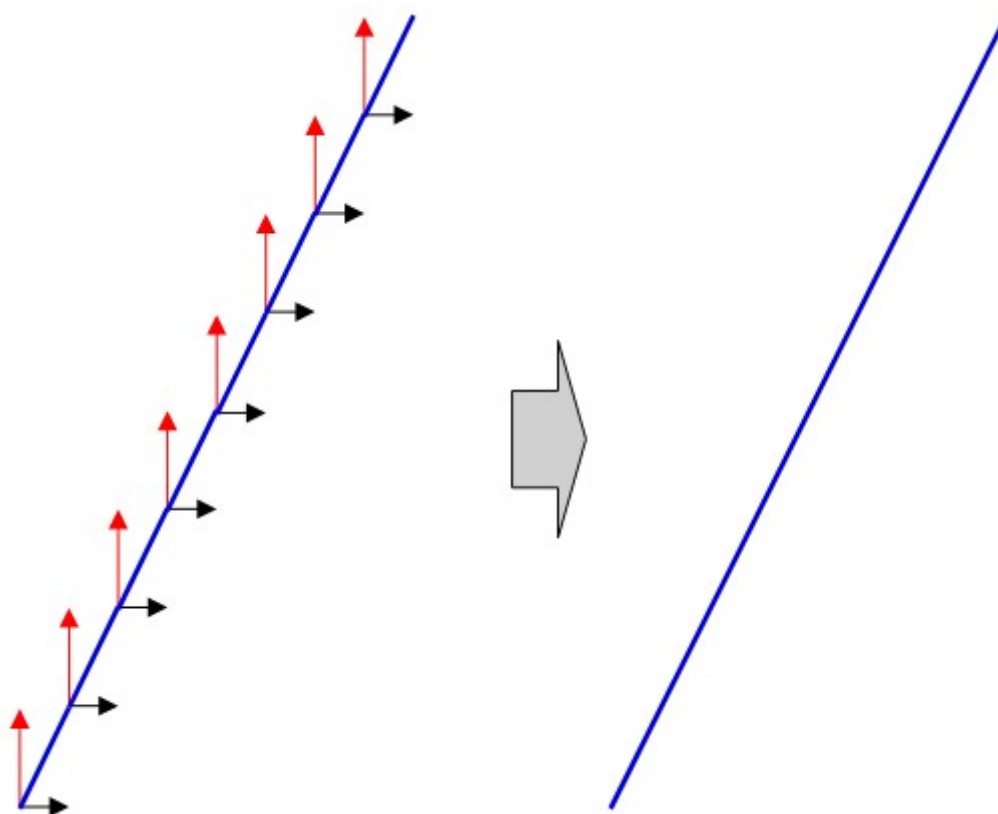
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	3	7	10	13	16	19	21

x の範囲として -4 から -2 までや、 -1 から 0 までを選んでも、変化の割合が変わらないのだとすれば、変化の割合は同じ 3 となります。そして x の増加量が 2 なら y の値はその 3 倍の 6 だけ増え、 x の増加量が 1 なら y の値はその 3 倍の 3 だけ増えます。

このよう変化の割合がいつも 3 になることを基にして、関数の表を作ってみると、次のようになります。

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-20	-17	-14	-11	-8	-5	-2	1	3	7	10	13	16	19	21

また、上で見た図を基に考えると、変化の割合が変わらないということは、グラフの傾きがいつも同じであるということになります。ここから、グラフは直線になるだろうと考えられます。



変化の割合が変わらない場合のグラフ

表のようすやグラフが直線になることから、どうやらこの関数は一次関数ら

しいことがわかってきます。実際、比例や一次関数では、 x の値や範囲をさまざまに選んでも、変化の割合がいつも同じになることがわかります。

考えている関数では変化の割合が変わらず、いつでも同じであるとわかると、この関数はどの部分でも同じように変化しているということがわかります。そのため、グラフも同じように増えていくので直線になります。

(2) 変化の割合が変わる関数

変化の割合がいつも同じではなく、例えば次のように変わっている場合を考えてみます。

x が 0 から 1 まで変化したときの変化の割合は 1

x が 1 から 2 まで変化したときの変化の割合は 3

x が 2 から 3 まで変化したときの変化の割合は 5

x が 3 から 4 まで変化したときの変化の割合は 7

x が 4 から 5 まで変化したときの変化の割合は 9

$x=0$ のときの y の値を仮に 0 として、今回も関数を表で表してみます。今は x の増加量はいずれも 1 なので、1 にそれぞれの変化の割合をかけた積が、 y の増加量になります。

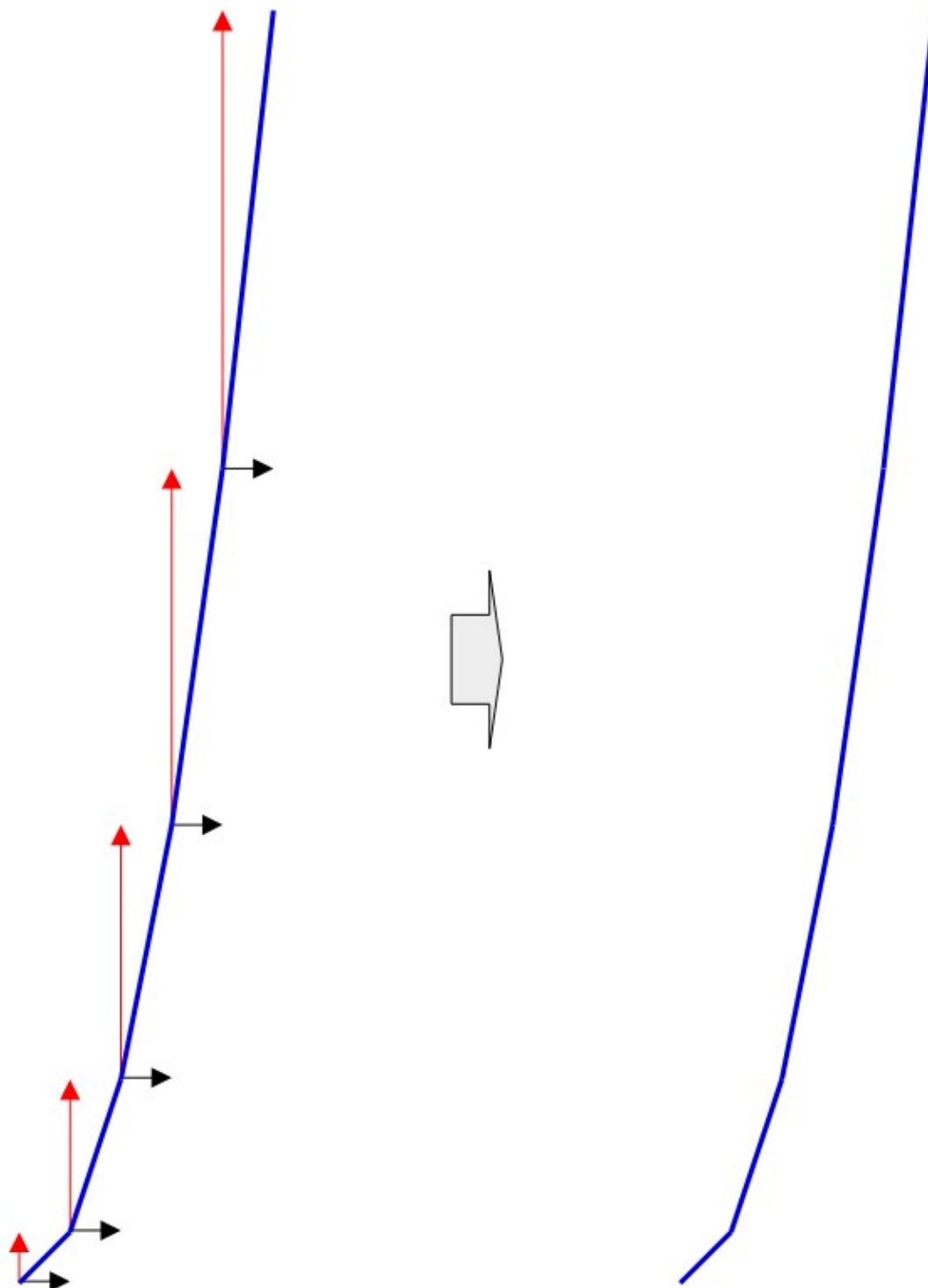
x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4	9	16	25

+1 +3 +5 +7 +9

x の値が大きくなるほど、 x の増加量に対する y の増加量が大きくなっているので、 y の値が大きく変化することがわかります。つまりこの関数では、 x の値が大きくなるほど y の値が大きく変化するような関数であること、したがって、 y の値の変化がどんどん加速するような関数であることがわかります。ですから $x=100$ や $x=1000$ の場合は、 x の値は 1 しか増えていないのに、 y の値は 200 近く増えたり、2000 近く増えたりする、ということが起こります。

このことは、グラフの傾きからも確かめられます。変化の割合が変わるという

ことは、グラフの傾きもどんどん変わっていくということです。変化の割合が徐々に大きくなると、グラフは次のようになると考えられます。



変化の割合が大きくなる場合のグラフ

x の値が大きくなると y の増加の程度が大きくなるので、グラフの右の方では傾きが垂直に近くなり、グラフ全体として直線ではなく曲線になりそうだと予想できます。

実はこれは、中学校3年生で学習する2乗に比例する関数になっています。逆に2乗に比例する関数では、 x の値が大きくなるほど変化の割合も大きくなりますが、それは、 x の値が大きくなるほど y の値の増え方の程度が大きくなること、 y の値の変化が激しくなっていくこと、 y の値の変化が加速していくことを示しています。

では変化の割合が次のように変わるとしたらどうでしょう。

x が1から2まで変化したときの変化の割合は-6

x が2から3まで変化したときの変化の割合は-2

x が3から4まで変化したときの変化の割合は-1

x が4から5まで変化したときの変化の割合は-0.6

x が5から6まで変化したときの変化の割合は-0.4

変化の割合はすべて負の数ですから、 y の値は減り続けていることがわかります。負の数ですが、それらの絶対値は6、2、1、0.6、0.4と小さくなっていますから、 y の値の減り方は徐々にゆるやかになり、変化は減速していきます。

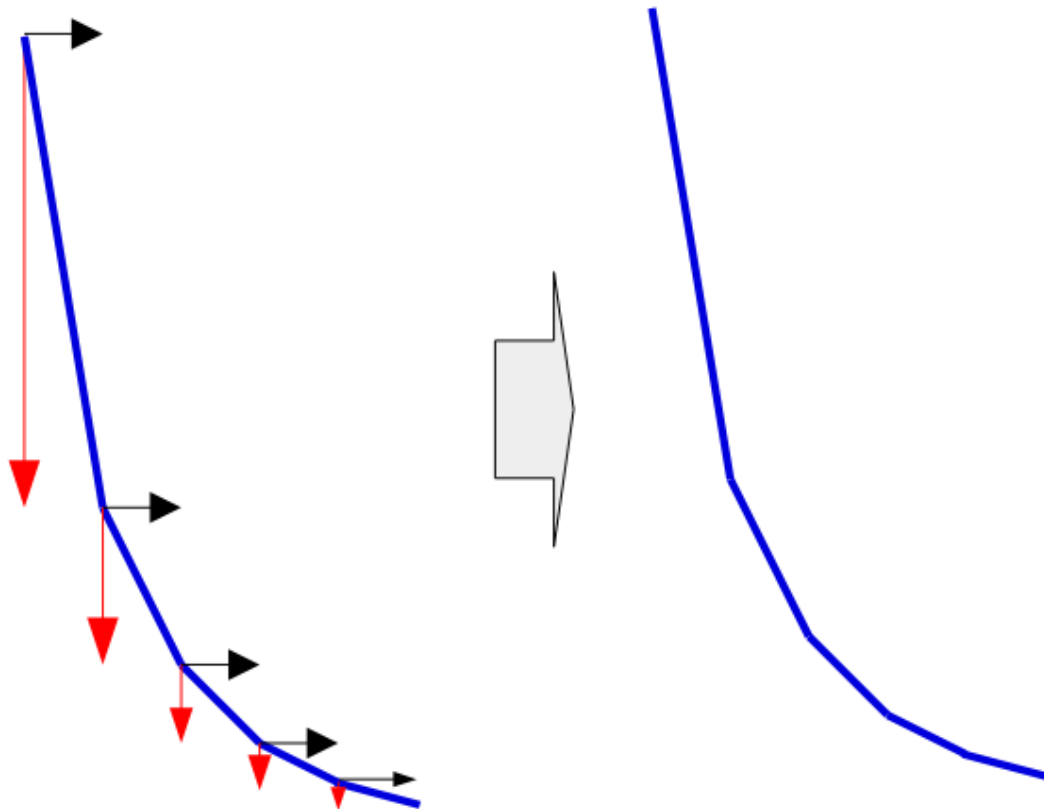
例えば $x=1$ のときの y の値を仮に12として、関数を表で表すと次のようになります。今回も x の増加量はいずれも1なので、1にそれぞれの変化の割合をかけた積が、 y の増加量になります。

x	1	2	3	4	5	6
y	12	6	4	3	2.4	2

-6 -2 -1 -0.6 -0.4

x の値が大きくなるほど、 x の増加量の割には y の変化は小さくなりますから、同じように変化していくと、 x が増加しても y の方はほんの少ししか減少しない、つまりほとんど変化しない状態になってしまうそうだとわかります。

さらに変化の割合をもとに、グラフの様子を予想すると次のようになります。



変化の割合が常に負の値で、絶対値は小さくなっていく場合のグラフ

変化の割合がすべて負の値なのでずっと減り続けますが、ただその絶対値は小さくなっていくので、減り方はゆるやかになっていきます。ここから、関数のグラフは上のような曲線になるだろうと予想されます。

実はこの関数は中学校1年生で学習する反比例です。変化の割合についてわかると、関数の変化のようすやグラフのおよその形について知ることができるのです。

変化の割合を求めると、関数の部分部分での変化のようすを数値で表すことができます。逆に、関数の変化の割合についてわかれば、その関数のおよその変化の仕方を予想することができます。特に、変化の割合が2ずつ増えるといったきまりがある場合は、変化の割合のきまりにより、関数全体の様子を考えることも可能になってきます。

(参考：[増え方からグラフをつくる](#))

変化の割合の問題練習

最後に変化の割合が「 x の増加量を何倍したら y の増加量 になるか」だとする考え方をを用いて、全国学力・学習状況調査で出題された変化の割合についての問題の類題にいくつか取り組んでみましょう。

問題：下の(a)から(d)までの表は、 y が x の一次関数である関係を表しています。この中から、変化の割合が3であるものを1つ選びなさい。

(a)

x	...	-6	-4	-2	0	2	4	6	...
y	...	-8	-5	-2	1	4	7	10	...

(b)

x	...	-6	-4	-2	0	2	4	6	...
y	...	-17	-11	-5	1	7	13	19	...

(c)

x	...	-6	-4	-2	0	2	4	6	...
y	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...

(d)

x	...	-6	-4	-2	0	2	4	6	...
y	...	-7	-4	-1	2	5	8	11	...

(令和4年度数学・問題4類題

平成26年度数学A・問題11(1)参照)

変化の割合が3ということは、「 x の増加量を3倍したら y の増加量 になる」ということです。

その点に注意をして表を観察します。どの表も x の値は-6、-4、-2、0、2、4、6と増えていますから、表の隣り合う x 値では、その増加量は2となります。

最初に確認したように、変化の割合が3ということは、「 x の増加量を3倍したら y の増加量 になる」ということですから、 x の増加量が2なので、 y の増加量は2の3倍で6となります。

表のうち、隣り合う y の増加量が6となっているものをさがせばよいことになります。そのようにしてさがすと、(b)が条件を満たしていることがわかります。

この関数では、 x の増加量の3倍だけ y が増加するので、変化の程度が比較的大きい関数だとわかります。

問題： y は x の一次関数で、 $x=1$ のとき $y=5$ 、 $x=3$ のとき $y=11$ です。このことから、 x の増加量が 2 のときの y の増加量が 6 であることがわかります。この一次関数の変化の割合を求めなさい。

(令和 2 年度数学・問題 4 類題)

平成 25 年度数学 A・問題 1 1 (2) 参照)

変化の割合は「 x の増加量を何倍したら y の増加量 になるか」ということですから、「 x の増加量が 2 のときの y の増加量が 6 である」という一次関数であれば、「 x の増加量が 2」を何倍したら「 y の増加量が 6」になるかを考えればよいでしょう。

2 を 3 倍すれば 6 になることはすぐわかりますから、この関数の変化の割合は 3 となります。

前に見てきたように、一次関数では変化の割合は変わらずに、ずっと同じになります。したがって、この一次関数では、 x の値や考える範囲を変えても、いつでも変化の割合は 3 であると考えられます。これは、関数がいつでもどこでも同じ程度だけ変化しているということを意味しています。

問題： 一次関数 $y=3x+2$ の変化の割合を求めなさい。

(平成 28 年度数学 A・問題 1 0 (2) 類題)

平成 22 年度数学 A・問題 1 1 (1) 参照)

前の問題とちがい、 x の増加量や y の増加量が与えられていませんが、

$$(y \text{ の増加量}) = (x \text{ の増加量}) \times (\text{変化の割合})$$

であることは変わりません。また一次関数では、変化の割合が一定、つまり x の値や x の増加量によって変化の割合の値は変わりませんから、自分で適当に x の値や x の増加量を決めて、それをもとに変化の割合を求めてよいことになります。

そこで $x=0$ から $x=1$ まで 1 増えた場合を考えます。 $x=0$ のときの y の値は、一

次関数の式 $y=3x+2$ に $x=0$ を代入すると、 $y=3\times 0+2=2$ より 2 となります。同じように $x=1$ のときの y の値は、 $y=3x+2$ に $x=1$ を代入すると、 $y=3\times 1+2=5$ より 5 となります。つまり、 y の増加量は $5-2=3$ で 3 となります。

x の増加量が 1 のとき y の増加量が 3 ですから、上の式に代入すると

$$3=1\times(\text{変化の割合})$$

これより変化の割合は 3 であることがわかります。

もちろん $(y \text{ の増加量})=(x \text{ の増加量})\times(\text{変化の割合})$ を変形した

$$\text{変化の割合}=\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$$

という式で考えてもかまいません。

上で用いた数値をこの式に入れてみると、次のようになります。

$$\begin{aligned}\text{変化の割合}&=\frac{(3\times 1+2)-(3\times 0+2)}{1-0} \\&=\frac{3\times 1+2-3\times 0-2}{1-0} \\&=\frac{3\times 1-3\times 0}{1-0} \\&=\frac{3\times(1-0)}{1-0} \\&=3\end{aligned}$$

$x=0$ や $x=1$ のときでなくても同じように計算できるはずです。このことから、一次関数の変化の割合は、式の x の係数に等しくなることがわかります。

その後の展開

変化の割合は、高等学校に進むと「平均変化率」と名前を変えて再び現れます。そして、変化の割合の精度を上げるために、 x の増加量を非常に小さくして、つまり x の値の範囲を非常に小さくして変化の割合を考えるようになります。

例えば $y=2x^2$ という関数で、 x が 1 から 2 まで変化したときの変化の割合を求めると、 x の増加量は 1、 y の値は 2 から 8 に増えるので y の増加量は 6 ですから、 $6=1 \times (\text{変化の割合})$ より変化の割合は 6 となります。

しかし、 x が 1 から 1.1 まで変化したときの変化の割合は、 x の増加量は 0.1、 y の値は 2 から 2.42 に増えるので y の増加量は 0.42 となります。したがってこのときの変化の割合は $0.42=0.1 \times (\text{変化の割合})$ で 4.2 となります。つまり、精度を上げて調べると、 $x=1$ の部分での変化の仕方は、変化の割合 6 よりももう少しゆるやかで、変化の割合 4.2 と表す方が正確だということです。

さらに精度を上げて、 x が 1 から 1.01 まで変化したときの変化の割合を求めてみると、 x の増加量は 0.01、 y の増加量は 0.0402 より変化の割合は 4.02 となり、 x が 1 から 1.001 まで変化したときの変化の割合は、 x の増加量は 0.001、 y の増加量は 0.004002 より変化の割合は 4.002 となります。

どんどん精度を上げていくと、変化の割合はどんどん 4 に近い値になっていきます。このように、精度を限りなく上げたときの変化の割合は微分係数と呼ばれ、高等学校以降の数学の学習でたいせつな考え方になります。

中学校 1 年生のときに円の接線について学習しましたが、学習が進むと関数のグラフについても接線を考えることができるようになります。そして、グラフのある点での接線の傾きが、この微分係数になります。

さらに、関数の x のある値の付近では、この微分係数について次のようなことが成り立ちます。

$$(y \text{ の増加量}) \doteq (x \text{ の増加量}) \times (\text{微分係数})$$

ここで「 $\doteq$ 」は「ほぼ等しい」ということを表します。これは変化の割合について考えてきた式と同じになっています。 x の増加量がとても小さい場合、つまり考えている x の値の付近の非常に狭い範囲では、 y の増加量を x の増加量に微分係数をかけた値で予測することが可能になります。

この式は小学校6年生の比例のところで学習した「 $y = \text{きまった数} \times x$ 」という式と似ています。つまり、微分係数が求まる関数では、ある x の値の近辺では、 y の増加量は x の増加量にほぼ比例していると見ることができるのです。

変化の割合は中学校の学習だけだと、何のために学習しているのかが見えづらいかもしれません。しかしここで見たように、変化の割合は平均変化率や微分係数を経由して、数学のさまざまなたいせつなアイデアにつながる重要な考え方なのです。

まとめ

変化の割合を「 x の増加量を何倍したら y の増加量になるか」のことだと考えて考えてきました。「割合」と言われたり、分数のような形で説明されると、何のことなのかわかりにくいかもしれません。しかし、ルーツは最初に見たように小学校2年生で学習した「倍」にあります。そして「倍」や「割合」が、ある量が基準の量と比べてどの程度の大きさなのかを表していたように、変化の割合は、 x の増加量と比べて y の増加量がどの程度の大きさなのかを、数値で表したものでした。つまり、 x の変化の程度に比べて y の変化の程度は大きめなのか小さめなのか、 x が増えると y も増えるのかそれとも減るのか、といった関数の変化のようすを数値で教えてくれるのです。

小学校2年生の「倍」の考え方の応用なのですから、変化の割合をそれほどおそれる必要はありません。しかし、最後に見たように、少し先の数学の学習では重要な役割を持つ将来有望なアイデアでもあります。まずは、変化の割合は関数の変化の様子を数値化したものと捉えた上で、変化の割合と仲良くなっていくとよいでしょう。

《補足》

一次関数の変化の割合

一次関数 $y=ax+b$ について、 x の値が x_1 から x_2 まで変化したときの変化の割合を求めてみます。ここで x_1 と x_2 はある値です。慣れない人は、 x_1 の代わりに 1 を、 x_2 の代わりに 3 を思い浮かべて読んでもらってかまいません。

x の増加量は x_2-x_1 となります。

$x=x_1$ のときの y の値は ax_1+b 、 $x=x_2$ のときの y の値は ax_2+b なので y の増加量は $(ax_2+b)-(ax_1+b)=a(x_2-x_1)$ となります。

$$(y \text{ の増加量}) = (x \text{ の増加量}) \times (\text{変化の割合})$$

であったので、 x の増加量と y の増加量に上の結果を入れると次のようになります。

$$a(x_2-x_1) = (x_2-x_1) \times (\text{変化の割合})$$

ここから変化の割合は a となります。これは x_1 と x_2 の値がいくつであっても同じことです。したがって、一次関数の変化の割合はいつでも x の係数である a となります。

2 乗に比例する関数の変化の割合

関数 $y=ax^2$ について、 x の値が x_1 から x_2 まで変化したときの変化の割合を求めてみます。

x の増加量は今回も x_2-x_1 となります。

$x=x_1$ のときの y の値は $a(x_1)^2$ 、 $x=x_2$ のときの y の値は $a(x_2)^2$ なので y の増加量は $a(x_2)^2 - a(x_1)^2 = a((x_2)^2 - (x_1)^2) = a(x_2+x_1)(x_2-x_1)$ となります。

$(y \text{ の増加量}) = (x \text{ の増加量}) \times (\text{変化の割合})$ の式の x の増加量と y の増加量に上の結果を入れると、次のようになります。

$$a(x_2+x_1)(x_2-x_1) = (x_2-x_1) \times (\text{変化の割合})$$

ここから変化の割合は $a(x_2+x_1)$ となります。これを見ると、関数 $y=ax^2$ の変化の割合の値は、考える x_1 と x_2 の値により変わってくることがわかります。 x_1 や x_2 の値が大きくなると変化の割合の値 $a(x_2+x_1)$ も大きくなります。また x_1 や x_2 の値が負の数だと変化の割合の値 $a(x_2+x_1)$ も負の数になるので、そこでは関数は減少していることがわかります。