

かなりわりきった
量のとらえ方のアップデート用テキスト

上越教育大学
布川 和彦

算数ではさまざまな量について学習してきました。そして、その量を通して数や計算についても学習してきました。1年生で最初に数を学習する時も個数や人数を通して学習し、たし算やひき算もブロックをあわせたり、とりさったりして、そのようすを式で表すことから学習がスタートしました。

小数や分数を学習する時は、テープの長さや水の量を考えて、そのはしたの量を表すために、小数や分数という新たな数を考えたのでした。

中学校1年生では負の数という新しい数を学びます。この時も、距離や温度、時間といった量を通して学習が始まります。ただ、負の数と量を結びつけるために、実は少しだけ量のとらえ方が変わっています。そこが見えないと、負の数の説明や、負の数を含む計算の仕方がわかりにくいかもしれません。

ここでは、負の数を学習する準備として、量のとらえ方の変化をあらためて考えてみます。教科書や先生の負の数についての説明がしっくりこないという人は、量のとらえ方がアップデートできていないかもしれませんから、まずそこを中学校向けにアップデートしてみましょう。

算数で学習した量

算数ではいろいろな量の表し方を学習してきました。長さ、面積、体積、重さについて、それを測ったり、 m 、 m^2 、 m^3 、 kg といった単位を用いて量を表したりしました。あるいはジュースの量などの液量を L を用いて表すことも学習しました。

これらの量は、次のようなある種の“大きさ”を問題にしています。

長さ：長い／短い

面積：広い／狭い

体積：大きい／小さい

重さ：重い／軽い

液量：多い／少ない

「多い／少ない」で言えば、個数や人数なども数により多さや少なさを表現することができました。

いちばん長い長さが何 m なのかはわかりませんし、いちばん重い重さが何 kg なのかもわかりません。しかし、いちばん短い長さは $0\ m$ であり、いちばん軽い重さは $0\ kg$ でした。 $0.0000000001\ m$ ($0.1\ nm$) は原子レベルのとても短い長さですが、それでも $0\ m$ よりはずっと長い長さです。

「量」を算数の学習と同じようにとらえていると、 $0\ m$ より短い長さは出てこないで、 0 より小さい数も出てくることはありません。「 0 より小さい数」である負の数を学習するためには、大きさだけでなく、向きもある「量」を考えることになります。

量のとらえ方の変更

自分がおはじきを 8 個持っているとしします。A さんが 11 個持っているなら、 2 人のおはじきの個数の差は 3 個です。B さんが 5 個持っているなら、自分と B さんのおはじきの個数の差もやはり 3 個です。

ただ、自分から見ると、同じ 3 個でも違いがあります。すなわち

- ・ A さんの個数は自分の個数より 3 個多い
- ・ B さんの個数は自分の個数より 3 個少ない

という違いです。この「多い」と「少ない」をペアにして考え、「多い」と「少ない」は互いに反対の向きだと考えます。そして例えば「多い」方を標準の向きと考え

て、

- ・ Aさんの個数は自分の個数から標準の向きに3個
- ・ Bさんの個数は自分の個数から反対の向きに3個

と考えることにします。

「個数」について「3個」という「大きさ」だけでなく、自分の個数を基準とした「向き」も持つと考え、「標準の向きの3個」と「反対の向きの3個」を区別することで、「多い」と「少ない」を「向き」の違いとして表現しようというのです。

同じように

- ・ 富士山の山頂は海面の位置より3776 m高い
- ・ 日本海溝の底は海面の位置より8020 m深い

という時の「高い」と「深い」も反対の向きと考えて、「高い」方を標準の向きとすると、次のように表すことができます。

- ・ 富士山の山頂は海面の位置より標準の向きに3776 m
- ・ 日本海溝の底は海面の位置より反対の向きに8020 m

この時の距離(長さ)も、「3776 m」や「8020 m」という大きさだけでなく、海面の位置を基準とした「向き」も持つことになります。

さらに時間についても、

- ・ 午前9時は正午の3時間前
- ・ 午後3時は正午の3時間後

という時の「前」と「後」を反対向きと考え、時間の流れる向きを標準の向きと考えれば、

- ・ 正午から午前9時まで反対の向きに3時間
- ・ 正午から午後3時まで標準の向きに3時間

ということになります。この時の時間も、「3時間」という大きさだけでなく、正午(12:00)を基準とした向きも持っています。

このように、2つの向きをペアにして標準の向きと反対の向きとし、「大きさ」に加えて「向き」も持つような量を、正負の数の学習ではイメージしています。

正負の数の学習に現れる量は、「大きさ」と「向き」を持つ量

こうした量を表すために、正の数と負の数を考えることになります。量の「大きさ」を表すのが数の絶対値です。量の「向き」を表すのが+と-の記号です。

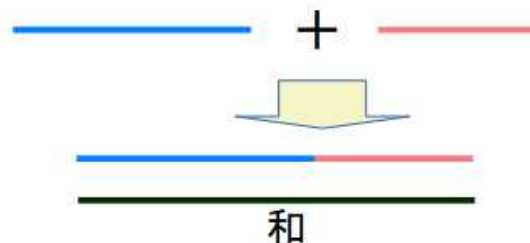
ちなみに、正の数で表される量は標準の向きの量なので、基本的には絶対値と等しくなり、算数で学習した「大きさ」を表す場合と同じになります。

また基準と違いがない状態は、0で表します。基準との差がないということは、標準の向きの差もなければ、反対の向きの差もありません。ですから、0については「大きさ」が0というだけで「向き」は考えないことにします。

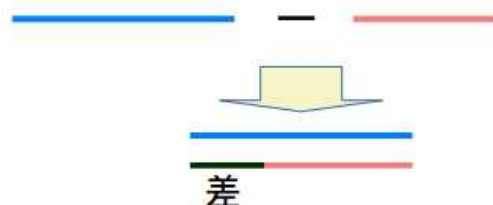
基準より「少ない」とか「低い」、「以前」ということはありえますから、基準を0で表すならば、基準より「少ない」量や「低い」高さは0より小さい数で表すことになるわけです。

向きのある量を表す線

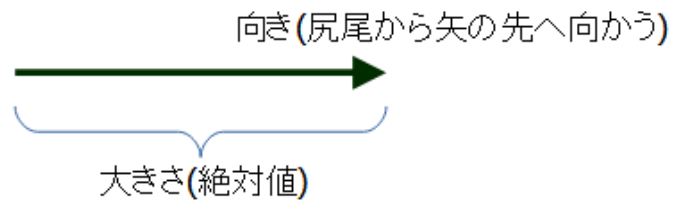
算数で学習した量やその量を表す数は「大きさ」しかありませんでした。ですから、その「大きさ」は線の長さで表すことができました。そして、2つの「大きさ」をたすことは、2つの線の長さをあわせる操作で考えることができました。



また一方の「大きさ」からもう一方の「大きさ」をひくことは、2つの線の長さの差で考えることができました。

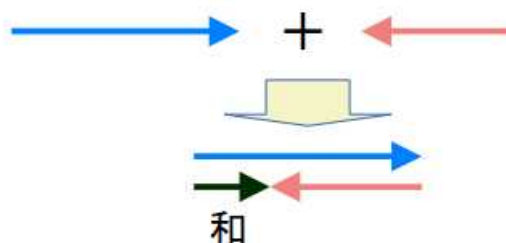
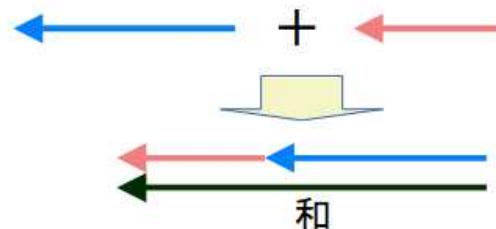
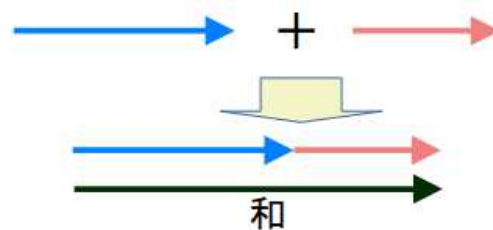


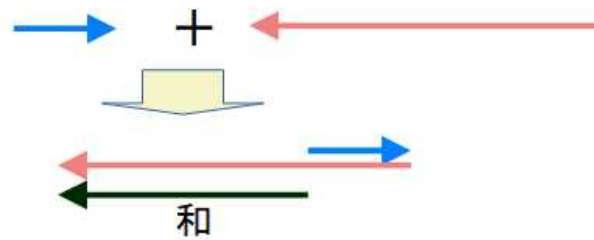
正負の数の学習で現れる量や数は「大きさ」に加えて、「向き」も持つのでした。そこで、線のかわりに矢印を用います。矢印全体の長さで「大きさ」を表し、矢印の方向で「向き」を表すことにします。



矢印をあわせる操作をする時には、次の2点に注意します。

- ・ 第一の矢印の先に第二の矢印の尻尾^{しっぽ}をつなげる。
- ・ 第一の矢印の尻尾から第二の矢印の先に向かう矢印が、2つの和になる。





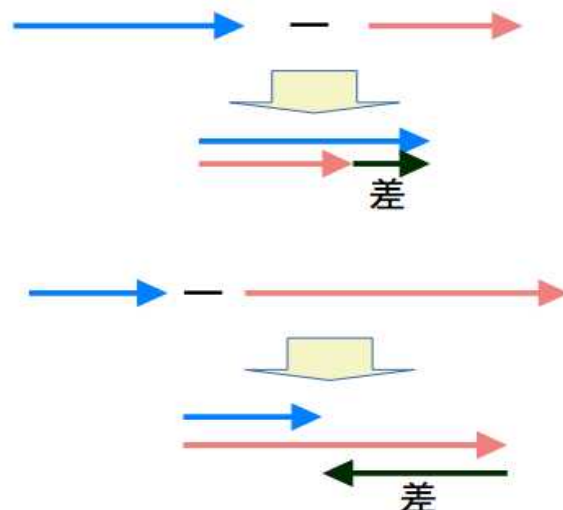
なおひき算については、「向き」が入ることために、単純に2つの「大きさ」の違いとしては考えることができません。そこで、算数でも学習したように、差のことを次のようにとらえ直しておくといよいでしょう。

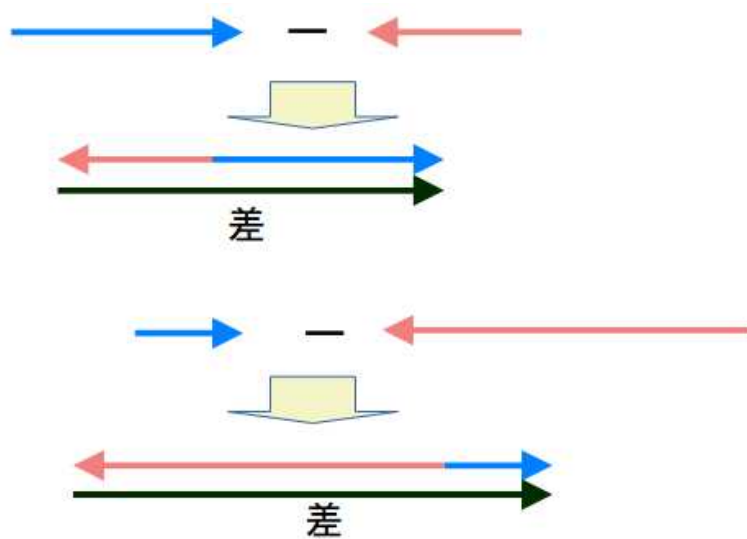
- ・「差」は、「ひく」分とあわせると「ひかれる」分になる量や数

「 $8-3=5$ 」であれば、差の5は「ひく数3と加えるとひかれる数8になる数」だということです。

これを矢印で考えると、「ひく」方の矢印と「差」の矢印をあわせたものが、「ひかれる」方の矢印になればよいので、「差」の矢印は次のようになります。

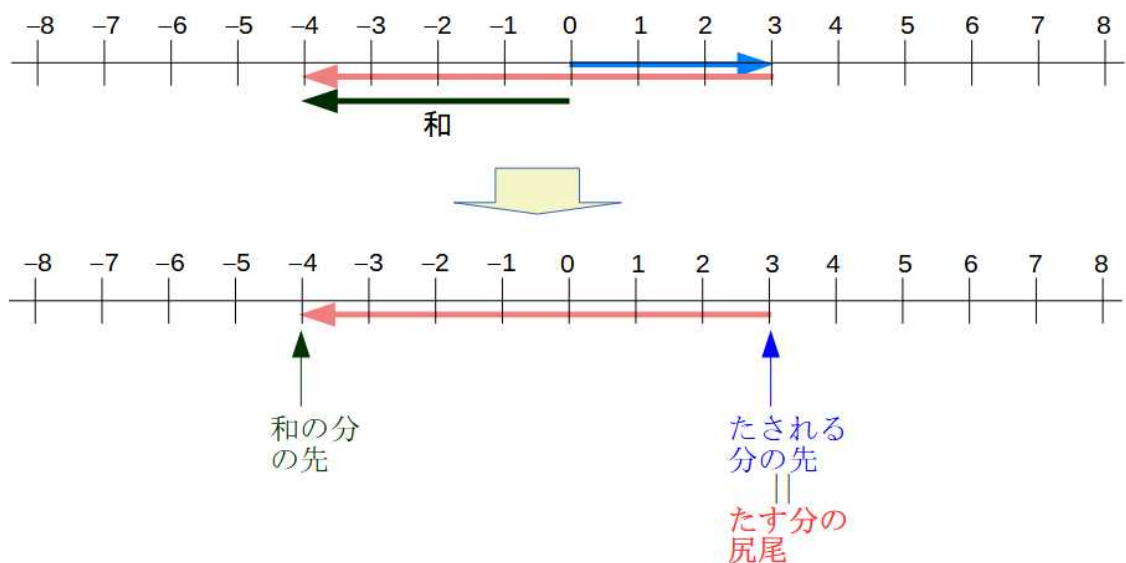
- ・まず「ひく」分の尻尾を「ひかれる」分の尻尾にあわせる。
- ・「差」は、「ひく」分の矢印の先から「ひかれる分」の矢印の先に向かう矢印で表される。





【補 足】数直線の上での矢印の操作

「向き」を持った量を矢印で表して考える時に、数直線の上で考えると、少し手間をはぶくことができます。例えば、標準の向きに3の大きさの矢印を考えると、この矢印の尻尾が原点0にあるなら、矢印の先は数直線の3の位置にくることはすぐわかります。ですから、たされる分がこの矢印の場合、矢印をかかなくても、たす分の矢印の尻尾をどこにしたらよいかはすぐにわかります。数直線の3のところが尻尾になるように、たす分である第二の矢印をかけばよいのです。



2つの矢印をあわせた結果の矢印（「和」を表す矢印）も、その尻尾は第一の

矢印の尻尾と同じなのですから、原点0だとわかります。ですから、あわせた矢印は、原点0から第二の矢印の先までの矢印とわかります。無理に「和」を表す矢印をかかなくても、頭の中で原点0と第二の矢印の先を結べば和の矢印がわかります。

速さの公式の捉え直し：かけ算の学習のために

ある人が標準の向きに分速 75 m で時間の標準の向きに 2 分間歩いたとします。この時、歩いた距離は

$$75 \times 2 = 150 \quad (75 \text{ m/分} \times 2 \text{ 分} = 150 \text{ m})$$

で 150 m と求められるのでした (参考：[再生と逆再生のようす](#))。



では、同じ速さで時間の「反対の向き」に 2 分間歩いたらどうでしょう。時間の「反対の向き」はふつうの時間の流れとは反対の向きということでした。いわば、動画を逆再生しているようなイメージです。

そこで、分速 75 m で、時間の標準の向きに 2 分間歩いた人の動画を、逆再生したらどのように見えるでしょうか (参考：[再生と逆再生のようす](#))。

きっと、（体の向きを無視すれば）

- ・ 反対の向きに分速 75 m で 2 分間歩いたように見える
- ・ その結果、最初の位置よりも反対の向きに 150 m 進んだように見えるのではないのでしょうか。

逆再生

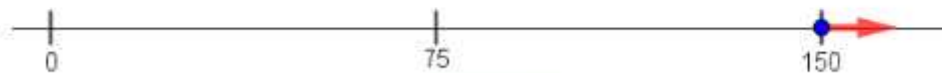
標準の向きに歩くようすを逆再生中

☐ 数で表現

経過時間：120秒

スタート

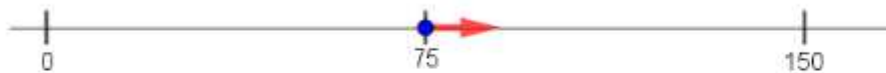
リセット



経過時間：60秒

スタート

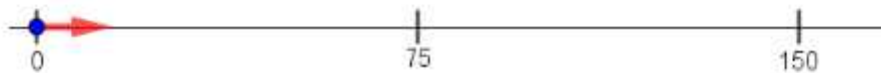
リセット



経過時間：0秒

スタート

リセット



また、反対の向きに分速 75 m で、時間は標準の向きに 2 分間歩いた人の動画を、逆再生したらどのように見えるでしょうか。

きっと、（体の向きを無視すれば）

- ・標準の向きに分速 75 m で 2 分間歩いたように見える
 - ・その結果、最初の位置よりも標準の向きに 150 m 進んだように見える
- と考えられます (参考：[再生と逆再生のようす](#))。

逆再生

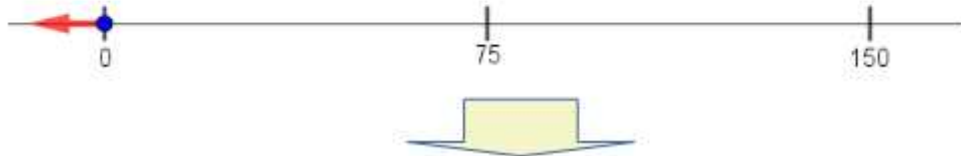
反対の向きに歩くようすを逆再生中

☐ 数で表現

経過時間：120秒

スタート

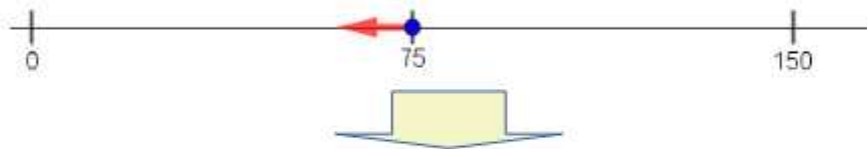
リセット



経過時間：60秒

スタート

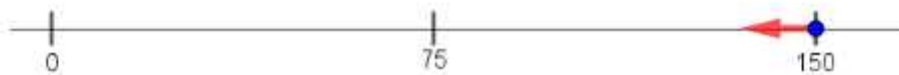
リセット



経過時間：0秒

スタート

リセット



正負の数の入ったかけ算では、かける数が負の数になることもあります。そのことを速さの公式を使って学習することが多いようです。算数で学習した「速さ×時間＝距離」の公式で時間や速さ、距離が負の数になると少し変な感じがするかもしれません。そのような場合は、時間や速さ、距離に「向き」があると考えてみましょう。特に時間が「反対の向き」の時は、時間をさかのぼるとか、動画を逆再生するといったイメージで考えると、速さの公式を使いやすいかもしれません。

まとめ

中学校で正負の数を学習する時に現れる量は、算数で学習したような「大きさ」だけを持つ量ではなく、「大きさ」と「向き」を持つ量へと変わっていると意識できると、正負の数の学習も少しわかりやすくなるかもしれません。そうした「大きさ」と「向き」を持つ量を表すために新しく開発されたのが「負の数」であり、この「負の数」といっしょに用いるために、算数で学習してきた数は新たに「正の数」として位置づけられることになったのです。

実は、「大きさ」と「向き」を持つ量と似たものは、中学校の他の学習でも現れています。平面図形の平行移動を学習する時に、移動の様子を矢印で表しています。移動はどのくらい動かすかの「大きさ」に加えて、どの方向に動かすかの「向き」を持っているので、矢印で表しているのです。

また関数の学習で現れる変化の割合では、「 y の増加量」を用います。しかし「増加量」と言いながら、負の値になることもありました。つまり、どのくらい変化したかの「大きさ」に加えて、増えたのか減ったのかの「向き」も持つような量になっています。

さらに高等学校になると「ベクトル」というものを学習します。上では、標準の向きと反対の向きという2つの向きだけを考えましたが、ベクトルを学習すると、平行移動のようにいろいろな向きも同じように扱うことができるようになります。そして、ベクトルを矢印だけでなく数を用いても表す際には、負の数がやはり活躍します。

このように、正負の数の学習で現れる向きを持った量や、それを表すための矢印、そして向きをもった量を表すための正負の数の役割は、中学校や高等学校の数学を学習する中で、大きな役割を果たしていきます。そうした学習の準備という意味でも、大きさと向きを持った量とその表現について、ちょっと意識しておくのは悪いことではないでしょう。