全国学力・学習状況調査の問題による

証明のゆっくりめの練習

上越教育大学

布川　和彦

証明や論証は中学校の数学らしい内容とはわかっても、いざとなると何を書いていいのかわからなくなってしまう人も多いかもしれません。確かにふだんの生活の中で、証明のような文章を書いたり話したりすることはありません。

証明や論証は中学校２年生になって初めて学習します。しかし、実際はその前から証明や論証と同じような考え方はしていました。実際、算数の一部の問題では、証明と同じような考え方をしていたのです。ですから、証明で必要とされる考え方はそれほど特殊なものではなく、おそれる必要はありません。

ただ証明になると、「いつでも成り立つことを示す」とか「どんな場合でも言えることを示す」ように求められます。そして「いつでも」「どんな場合でも」と言われることで、では何をしていいのかわからくなってしまうのではないでしょうか。

実は証明には「なぜそうなるのか」を説明するという役割もあります。そこでここでは、「なぜそうなるのか」を相手に説明するというつもりで、証明を考えてみることにします。その方が、何をしたらよいかがイメージしやすくなる場合もあると思うからです。

目　次

最初の事例

最初に一つの問題を考えながら、「なぜそうなるのか」を相手に説明することがどのようなものかを見てみます。

> **問題：** 次のようにして２つの正三角形を作る。
>
> (i) 点 A と点 B をむすぶ線を引き、その途中に点 C をとる。
>
> (ii) 線分 AC を１辺とする正三角形 DAC を作る。
>
> (iii) 線分 BC を１辺とする正三角形 ECB を(2)の正三角形と同じ向きに作る。
>
> (1) 点 C のとり方によらず AE＝DB となることを証明せよ。
>
> (2) 点 C のとり方によらず∠AEC＋∠CDB が一定になることを証明せよ。
>
> (令和６年度数学・問題９(1) 類題)

証明の目標は、今の場面の仕組みやメカニズムから、なぜこのような現象が起こるのかを解明し、それを他の人にも説明することです。この場面の仕組みやメカニズムを以下では「**場面のパターン**」と呼びます。場面の中にどのような要素があり、それらがどのように関係しているか、といった意味です。

このとき場面のパターンの中に点 C の位置に関する情報が含まれていなければ、したがって説明の中で点 C の位置に関する情報が使われていなければ、「点 C のとり方によらず」そうなることが説明できたことになります。

証明は相手に説明するのですから、相手も認めてくれていることに基づいて説明する必要があります。基本の場面のパターンは問題文で説明されています。ですから、場面のパターンについては相手も認めていることになります。また、「正三角形」については、小学校３年生以上の人であれば、「３辺の長さがすべて等しい三角形である」ことは知っていますし、「正三角形の３つの角の大きさはすべて等しい」ことも知っています。ですから、相手が中学生であれば、このことも相手は認めてくれていると考えてよいでしょう。

さらに５年生以上の人であれば、「三角形の３つの角の大きさの和は 180°になる」ことも知っています。そして、正三角形では３つの角の大きさはすべて等しく、しかもそれらの和は 180°になるのですから、それぞれの角の大きさは 180°を

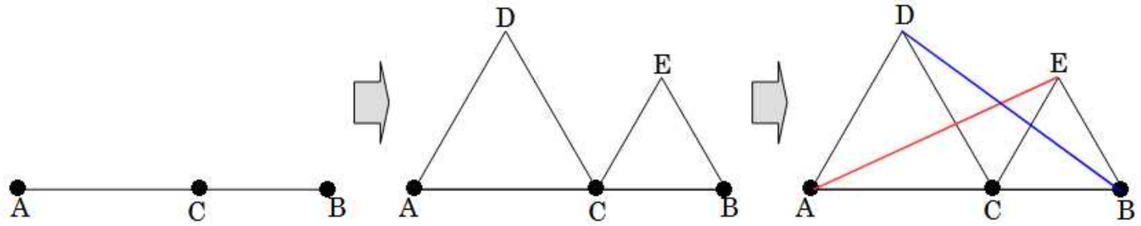
３等分した60°だとすぐわかるので、これも相手は認めてくれそうです。
　このように、場面のパターンにあらわれる要素や関係についてすでに学習したことや、そこからすぐに示すことができる情報は、相手も認めてくれていると考えてよいでしょう。
　ここまで見てきたことから、相手が認めてくれていると考えることのできる情報は、次のようなものになります。

・問題で示されている場面のパターン
・場面のパターンにあらわれる要素や関係についてすでに学習したこと。
・すでに学習したことからすぐに示すことのできる情報。

すでに学習したことやそこからわかる情報を追加していく中で、場面のパターンとして相手が認めてくれることも豊かになっていきます。場面のパターンを豊かにする中で、「なぜそのようなことが起こるのか」を解明し、相手に説明できるようにすることが、証明の目標となります。

証明の目標
　なぜそのような現象が起こるのかを、相手も認めてくれていることに基づいて解明し、説明すること。

　では、問題にもどって考えてみましょう。
　まずは基本の場面のパターンがどのようなものかを知る必要があります。今の場面は図形からできていますから、とりあえず問題で示された図形の「構成の仕方」にそって図形をつくってみます。
　点Cをどこにとるのかは示されていません。そこで、とりあえずABの上にてきとうに点Cをとって図形を作ってみます。



このように構成したときにできる、赤い線分と青い線分の長さが等しくなるという現象を証明することが、(1)では求められているとわかります。

場面のパターンはおよそわかりました。正三角形が２つ並んでいて、それぞれの山の頂上をふもとの点と結んだような線分が２本あるといった感じです。

ただこのままでは<u>線分の長さに関する情報</u>や、(2)で話題になっている<u>角の大きさに関する情報</u>がありません。

そこで、場面のパターンにあらわれる要素や関係からわかることを考えてみます。場面のパターンとしてわかっているのは、

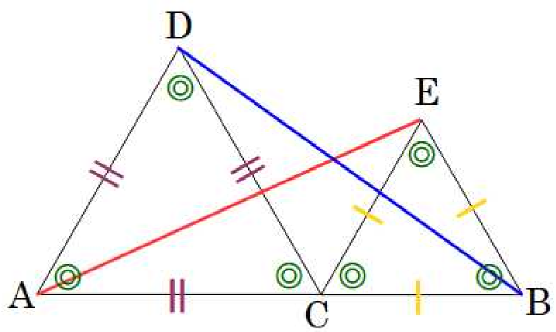
＊△DAC と△ECB は正三角形で、AE と DB が結ばれている

ということくらいです。しかし相手が中学生であれば、これまで学習したことから、次のことも相手は認めてくれるでしょう。

・DA＝AC＝CA、EC＝CB＝BE

・∠ADC＝∠DAC＝∠DCA＝60°、∠CEB＝∠ECB＝∠EBC＝60°

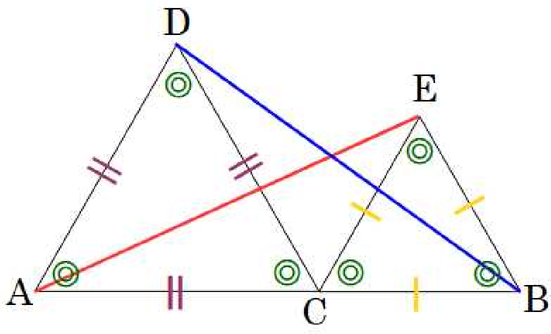
こうした情報も追加されて場面のパターンもさらに豊かになってきましたので、それらも含めて図を発展させてみます。



正三角形について学習したことを追加することで、辺の長さや角の大きさについての情報がだいぶ集まってきました。これらの情報はきっと相手も認めてくれるでしょう。

この状態で、(1)で話題となっている赤い線分 AE と青い線分 DB に注意しながら、場面のパターンを見直してみます。すると、AE にも＝(AC)と－(CE)がくっついていますし、DB にも＝(DC)と－(CB)がくっついています。

つまり、△ACE と△DCB を作ると、△ACE は赤の線と＝と－からできていて、△DCB は青の線と＝と－からできています。ですから、もしもこの 2 つの三角形△ACE と△DCB が合同であれば、AE と DB の長さは等しくなります。



実際、図を見ると確かに△ACE と△DCB は合同になっていそうです。

しかしまだ「もしも」の話であり、「なぜ△ACE と△DCB は合同になるのか」のメカニズムは説明できていませんから、この段階では△ACE と△DCB が合同であると主張することはできません。また、AE と DB の長さについても、今の合同が言えないと、前ページの図だけからは長さが等しいとは説明できていないので、やはり AE＝DB を主張することはできません。そう主張しても、相手から「どうしてそうなるのかわからない」と反論されたら困ってしまいます。

そこで、AE＝DB をまだ主張しないまま、なんとか△ACE と△DCB とが合同であることを説明できないかを考えてみます。

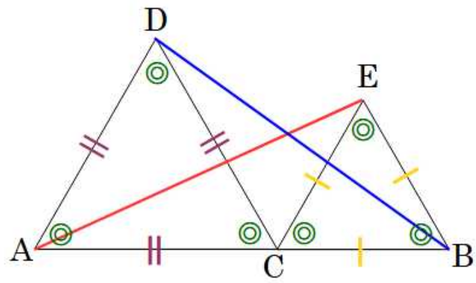
AE＝DB はまだ主張できないので、△ACE と△DCB の 3 辺が等しいから合同だという説明は使えません。ただし、正三角形の情報から AC＝DC と CE＝CB は説明できています。つまり、2 つの三角形の 2 辺が等しいことまでは相手も認め

てくれているはずです。

２辺が等しいとなると、あとはその間の角が等しいことが言えれば、三角形の合同条件の一つが使えることになります。

そこで、それらの２辺にはさまれた角である∠ACE と∠DCB に着目してみます。

しかし残念ながら、∠ACE＝∠DCB もまだ説明ができていないので、すぐにそれを主張することはできません。ただどちらの角もその一部として◎を含んでいることがわかります。



さらによく見ると、どちらの角も◎に∠DCE を加えた大きさになっていることに気づきます。したがって、等しいものどうしを合わせた角なので、２の角の大きさは等しいことが説明できそうです。

今のことを記号を用いて記述すると次のようになります。

∠ACE＝∠ACD＋∠DCE

∠DCB＝∠ECB＋∠DCE

ここで∠ACD と∠ECB は、どちらも正三角形の 1 つの角なので 60°で等しくなっていました。したがって、

∠ACE＝∠ACD＋∠DCE＝∠ECB＋∠DCE＝∠DCB

よって　∠ACE＝∠DCB

ここでは、∠ACD と∠ECB がどちらも正三角形の 1 つの角であることと、大きさの等しい角に同じ角を加えた大きさは等しいということしか、説明に使っていません。これらは相手も認めてくれるでしょう。

△ACE と△DCB に戻ると、結局、2 つの辺の長さが等しく、その間の角の大きさも等しいことが説明できたので、三角形の合同条件の一つを用いて、合同であることが説明できるところまで準備が整いました。

△ACE と△DCB において、
△DAC が正三角形なので、AC＝DC　　・・・①
△ECB が正三角形なので、CE＝CB　　・・・②
また、△DAC も△ECB も正三角形なので、∠ACD＝∠ECB＝60°
ここから、∠ACE＝∠ACD＋∠DCE＝∠ECB＋∠DCE＝∠DCB
つまり、∠ACE＝∠DCB　　・・・③
①、②、③より△ACE と△DCB の２辺とその間の角が等しい。
よって三角形の合同条件により、△ACE≡△DCB。
合同な三角形の対応する辺の長さは等しいので、AE＝DB　（証明終わり）

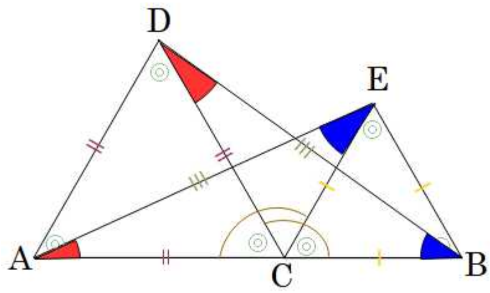
場面のパターンやそこからわかることだけを用いて、なぜ AE＝DB となるのかが説明できました。正三角形という特徴がさまざまに影響して△ACE と△DCB が合同になることが、AE＝DB となる理由だったのです。

「場面のパターンやそこからわかることだけを用いて」いますから、この説明を読んだり聞いたりした相手も AE＝DB であることを認めてくれるでしょう。また説明の中では点 C の位置に関する情報はまったく使っていませんから、なぜ AE＝DB となるのかのメカニズムに点 C の位置は関係ありません。そこから、AE＝DB という現象が点 C のとり方によらず起こることもわかります。

次に(2)の「点 C のとり方によらず∠AEC＋∠CDB が一定になること」の証明を考えてみます。

(1)で AE＝DB や△ACE≡△DCB となる理由を説明できましたから、今の時点ではこれらについても相手は認めてくれるはずです。さらに、合同な図形では対応する辺の長さや角の大きさは等しいので、そうした情報も相手は認めてくれるでしょう。

それらを含めて図に表してみると次のようになります。



情報が増えたために図は少しごちゃごちゃしてきましたが、それだけ場面のパターンもより詳しくわかってきました。２つの正三角形に加えて、２つの合同な三角形も組み合わさったようなパターンが見えてきたのです。

この場面のパターンに基づいて、なぜ∠AEC＋∠CDB となるのかを説明することを考えます。

(1)の証明の中で説明できたように、△ACE≡△DCB となっていますから、∠AEC は∠DBC と等しくなっています。また∠CDB は∠CAE と等しくなっています。ですから、∠AEC＋∠CDB が一定になるということは、∠AEC＋∠CAE が一定になるということでもあります。しかも∠AEC と∠CAE なら１つの三角形 ACE の２つの角ですから、この方が調べやすいでしょう。

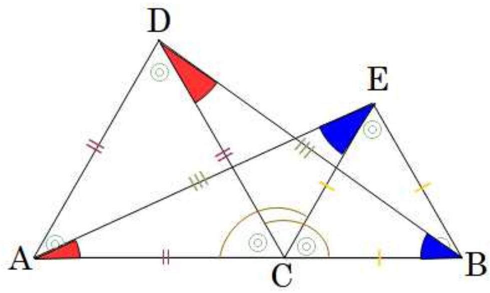
もしも相手が中学校２年生以上であれば、三角形の２つの角の和は、それらと異なる角の外角に等しいことを学習していますから、この性質も認めてくれるはずです。ですから、

∠AEC＋∠CAE＝∠ECB

となることが説明できます。

ここで∠ECB は正三角形 ECB の角なので点 C の位置によらず 60°のはずです。そして∠AEC＋∠CAE は∠ECB に等しいので、この和も点 C の位置によらず 60°であることがわかります。

これで(2)の説明をするための準備が整いました。



(1)で　△ACE≡△DCB　が示された。この２つの三角形の対応する角の大きさは等しいので、　∠CDB＝∠CAE

したがって　∠AEC＋∠CDB＝∠AEC＋∠CAE　…①

ここで∠AEC と∠CAE は△ACE の２つの角なので、その和は∠ACE の外角の大きさと等しくなる。つまり　∠AEC＋∠CAE＝∠ECB

ところが、∠ECB は正三角形 ECB の角なので、点 C のとり方によらずいつでも 60°である。したがって∠AEC＋∠CAE も 60°で一定となる。

①より∠AEC＋∠CDB＝∠AEC＋∠CAE であったので、∠AEC＋∠CDB も点 C のとり方によらず 60°で一定になることがわかる。　　(証明終わり)

元の場面のパターンに、(1)で説明できた三角形の合同についての情報も含めた場面のパターンに基づいて、**なぜ**∠AEC＋∠CDB は点 C のとり方によらず一定になるのかを説明することができました。(1)で説明した三角形の合同というパターンが働くことで、２つの角の和が正三角形の１つの角に等しくなることが、和が一定になる理由だったのです。

このように、相手も認めてくれるであろう場面のパターンに基づいて、**なぜ**そうした現象が起こるのかの理由を説明することが、証明で目指すことです。いわば最初の場面のパターンの中に隠された、秘密のパターンを探り当て、それにより現象が起こるメカニズムを明らかにすることです。タネがわかってしまえば手品も不思議でなくなるように、秘密のパターンが見えてくると、合同になったり一定になったりする現象も不思議ではなくなります。

文字式による証明の場合

文字を用いた証明の場合も、基本的な方針は同じです。すなわち、場面のパターンを基にして、なぜこのような現象が起こるのかを解明し、それを他の人にも説明することになります。

次のような問題を考えてみます。

問題：差が４である２つの偶数の和は、４の倍数になることを証明せよ。

(令和４年度数学・問題６(2) 類題)

今の場面のパターンは、次のようなものになります。

・２つの偶数の差が４で、その２数の和を求めている

「２つの偶数」が前の問題の２つの正三角形に当たり、線分 AE や線分 DB に当たるのがこれら２つの数の和だと見ることができます。いくつかのそうした偶数について確かめてみると、確かにその和は４の倍数になりそうなのですが、では、差が４である２つの偶数の和だと、なぜ４の倍数になるのでしょう。その「なぜ」に応えるような説明をすること、ただし、相手も認めてくれることに基づいて説明することが、目標になります。

そこでまずは、今の場面のパターンを文字式で表してみます。

２つの偶数なので、n と m を整数として $2n$ と $2m$ と表せばよいようにも思います。しかしこれだと「差が４である」というパターンが表現できていません。そこで「差が４である」というパターンを文字式で表現できないか、考えてみます。

差が４であるということは、大きい方の偶数は小さい方の偶数より４だけ大きいということです。ここから、小さい方の偶数を $2n$ と表すと、大きい方の偶数はそれより４大きいので、これに４をたせばよいことに気づきます。したがって、「差が４である２つの偶数」という場面のパターンは次のように表すことができます。

$$2n \quad と \quad 2n+4$$

場面のパターンとしてはこの２つの数の和を考えています。これは次のように表すことができます。

$$2n+(2n+4)$$

ではなぜこの「$2n+(2n+4)$」が４の倍数になるのでしょう。

小学校５年生で学習したように、４の倍数は４×(整数)の形に表せる数のことでした。「$2n+(2n+4)$」が４の倍数になるということは、「$2n+(2n+4)$」という場面のパターンの中に「4×(整数)」というパターンが隠されているのではないか、と予想することができます。

そこで場面のパターン「$2n+(2n+4)$」を調べて、その中に「４×(整数)」というパターンが見つからないか探してみることにします。

$$\begin{aligned}2n+(2n+4)&=2n+2n+4\\&=4n+4\end{aligned}$$

ここからさらに式を探るためには、算数でも学習した３つの計算法則を使うのがふつうです(参考：算数と数学の違い)。ここで

$$4n+4=4\times n+4\times 1$$

であることに注意すると、この式では加法と乗法の両方が使われています。そこで、加法と乗法の両方に関わる分配法則をまず使ってみることにします。

ここで等号は左辺と右辺が等しいことを表すので、分配法則の右辺を左辺で置き換えてもよいことに注意をします（参考：式の学習のコツ）。

分配法則：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c \quad \Longrightarrow \quad a\times b+a\times c=a\times(b+c)$

これは、小学校５年生の時に、$2.4\times 0.64+2.4\times 0.36$ を $2.4\times(0.64+0.36)=2.4\times 1$ と工夫して計算したのとまったく同じことです。$a\times b+a\times c$ を場面のパターンを探って見出した $4\times n+4\times 1$ と比較してみると、a に当たるのが 4、b に当たるのが n、c に当たるのが 1 であるとわかります。したがって、$a\times(b+c)$に当たるのは $4\times(n+1)$ということになります。

$$4\times n+4\times 1=4\times(n+1)$$

つまり、場面のパターンの中には「$4(n+1)$」というパターンが隠れていたことが分かりました。

$4(n+1)$の $n+1$ の部分は n より１大きい整数ですから、結局、$4(n+1)$は４×(整数)というパターンになっています。これが元の場面のパターンの中に隠されていたのです。そして私たちは、文字式の計算や計算法則を用いて式を探ることで、隠されていた４の倍数のパターンを見出したことになります。

これで場面のパターンにある和が、なぜ４の倍数になるのかを説明する準備が整いました。

差が４である２つの偶数は、n を整数として次のように表すことができる。

$2n$　と　$2n+4$

したがってこの２数の和は　$2n+(2n+4)$　となる。この式を変形すると、

$$
\begin{aligned}
2n+(2n+4) &= 2n+2n+4 \\
&= 4n+4 \\
&= 4(n+1)
\end{aligned}
$$

ここで $n+1$ は整数であるから、最後の式は４の倍数を表す式になっている。つまり、$2n$ と $2n+4$ の和は４の倍数である。　（証明終わり）

式を変形した部分を観察すると、４の倍数になる理由は、２つの数のそれぞれの $2n$ の部分がたされることで $4n$ となること、そして $4n$ の４ができたことで $+4$ の４とそろうことになり、分配法則が使えるようになったことだとわかります。

なお「$4n+4$」が得られた時点で、「$4n$ は４の倍数でそれに４をたすから、その和も４の倍数である」と主張したい人もあったかもしれません。相手がそれを認めてくれれば、それでも説明として成り立つと言えば成り立つのですが、「４の倍数に４をたしても４の倍数になる」ということは、必ずしも皆が学習して知っている内容ではありません。ですから、一番確かなのは、４の倍数とは何であったかに戻り、４×(整数)というパターンが隠されていることを説明することです。

証明は**なぜ**そうしたことが起こるのかの説明であり、場面のパターンに隠されたパターンを見いだして、そうしたことが起こるメカニズムを明らかにすることでした。そのため、証明を改めて振り返ってみたときに、そのメカニズムを少し変えても同様のメカニズムが働き、似たような現象が起こりそうだという予想が得られることがあります。

例えば、今の証明を振り返ってみると、場面のパターンの中に「$4 \times n + 4 \times 1$」というパターンが隠されていて、さらにその中に「$4(n+1)$」という４の倍数のパターンが見いだせたことから、「和が４の倍数になる」理由が説明されたのでした。

しかし４の後は $n+1$ でなくても、整数でありさえすれば４の倍数になるはずです。例えば n よりも m 大きい数、つまり $n+m$ でも $4(n+m)$ は４の倍数になります。そうなるためには、場面のパターンの中に「$4 \times n + 4 \times m$」、つまり「$4n+4m$」というパターンが隠されていればよいはずです。そしてそのパターンが隠されているためには、大きい方の偶数が「$2n+4$」ではなく、「$2n+4m$」であればよいでしょう。

つまり、元の場面において「差が４」の代わりに「差が４の倍数」としても、２つの数の和は４の倍数になりそうだという予想が得られます。

これが本当に言えそうかは、「差が４の倍数になる２つの偶数」をいくつか試してみることで、確認することができます。そして、上でしたのと同じように証明をすると、「差が４の倍数になる２つの偶数の和」が、**なぜ**４の倍数になるのかのメカニズムを明らかにすることができます。４の倍数のメカニズムがわかれば、いつもで４の倍数になると言ってよいでしょう。

証明の基礎練習は以上で終わりです。図形の証明でも、文字式を用いた証明でも、ある現象が**なぜ**起こるのかを、場面のパターンに基づいて説明することを目指せばよいでしょう。説明の方針がまとまらないときは、メカニズムの中心となる「隠されたパターン」にまだ到達していないということですから、場面のパターンからわかる情報を増やしたり、現象が起こるにはどのようなパターンが隠されていそうかの見当をつけたりして、場面のパターンの中に隠されていそうなパターンが本当に隠されているかどうかを探ってみましょう。

もう少し練習したい人のために、次のページからは、図形の証明と文字式を用いた証明を２つずつ考えてみます。

図形の証明の練習

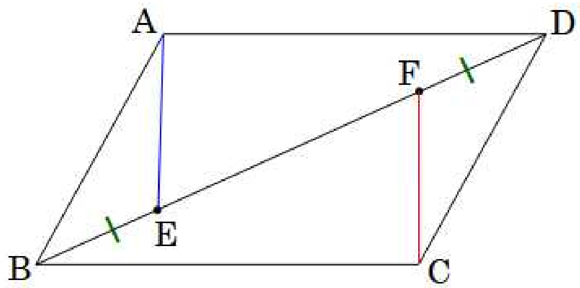
> **問題：**　平行四辺形 ABCD の対角線 BD の上に、BE の長さと DF の長さが等しくなるように点 E と点 F をとる。
> この時、線分 AE の長さと、線分 CF の長さも等しくなることを証明せよ。
>
> (平成 25 年度数学 B・問題 4 (1))

今わかっている場面のパターンは、次のようなものです。

・平行四辺形 ABCD に対角線 BD が引かれている。

・対角線上に点 E と点 F があり、BE＝DF となっている。

このパターンをイメージしやすくるために、図をかいてみます。平行四辺形の形は特に指定されていないので、「平行四辺形」というパターンさえ守られていればなんでもよいでしょう。



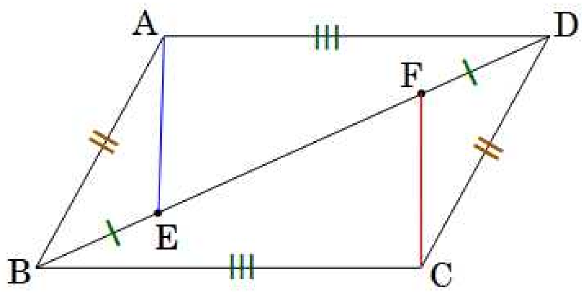
四角形 ABCD は平行四辺形なので、AD//BC、AB//DC になっています。この場面のパターンに基づいて、なぜ AE＝CF という現象が起こるのかを説明することが目標です。

ただこのままでは、BE＝DF のほかに線分の長さに関する情報がありません。そこで、長さに関わる情報を増やせないか考えてみます。

小学校４年生の時に学習したように、平行四辺形の向かい合う辺は長さが等しいのでした。これは相手も認めてくれるでしょうから、場面のパターンに加えてもいいでしょう。

・AB＝DC、AD＝BC

これも加えると場面のパターンは次のようになります。

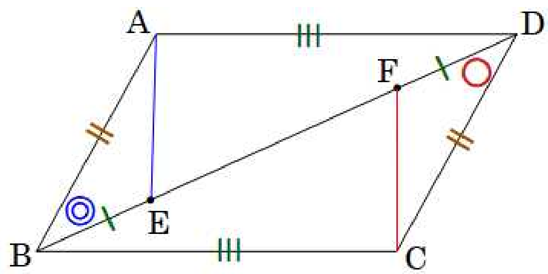


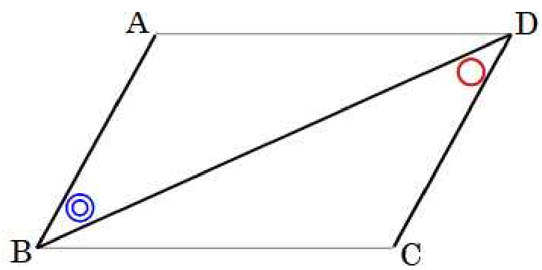
AE と CF の長さが等しくなることを説明しようとしているのですが、<u>それらの線分の周辺に目を向ける</u>と、△ABE と△CDF では２つの辺がそれぞれ等しくなっていることに気づきます。もしも△ABE と△CDF が合同になれば、AE＝CF になりそうです。

そこでこの２つの三角形について、三角形の合同条件が使えないかを確認してみます。AE と CF は等しくなることを説明しようとしている辺ですから、３辺についての条件は使えません。

２辺の長さが等しいことはわかっていますから、２辺とその間の角についての条件が使える可能性はあります。その条件が使えるためには、∠ABE と∠CDF が等しいことを説明しなければなりません。それらが等しくなることを説明できるでしょうか。

∠ABE と∠CDF に着目しやすくするために記号を付けてみると、下の左のようになります。





すると、右の図のようなパターンが見えてこないでしょうか。ABCD が平行四辺形なので、AB//DC でした。この平行線に線分 BD が交わり、∠ABE と∠CDF はそれによりできた錯角になっています。平行線に直線が交わってできる錯角は互いに大きさが等しいということは、中学校２年生の時に学習しましたから、相手が中学校２年生以上であれば認めてもらえるでしょう。そこで、平行線 AB と

DC に BD が交わってできる錯角になっているという理由で、∠ABE＝∠CDF となることを説明できることになります。

これで△ABE と△CDF の２辺とその間の角が等しいことがわかり、２つの三角形が合同であることを説明するための準備が整いました。

四角形 ABCD が平行四辺形であることより　AB＝CD　…①
問題の条件より　　BE＝DF　…②
さらに ABCD が平行四辺形であることより AB//DC であり、∠ABE と∠CDF はこの平行線でできる錯角になっているので、
∠ABE＝∠CDF　…③
①、②、③より△ABE と△CDF の２辺の長さとその間の角の大きさが等しいので、合同条件により　　△ABE≡△CDF
合同な三角形の対応する辺の長さは等しい。よって　AE=CF
（証明終わり）

場面のパターンにより、線分 AE を１辺とする三角形と、線分 CF を１辺とする三角形が合同になることが、AE＝CF となる理由だったのです。

ですから、AE を１辺とする三角形と CF を１辺とする三角形をほかにも作ることができれば、別の仕方で説明することもできるかもしれません。例えばもう１本の対角線 AC を引き、２本の対角線の交点を点 O とすると、△AEO と△CFO もそうした三角形になります。もしも△AEO≡△CFO となることが説明できれば、その説明によっても AE＝CF を説明することができます。

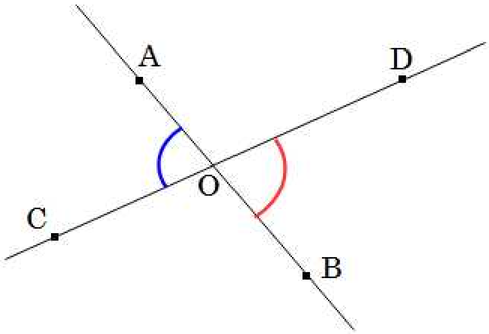
問題：　直線 AB と直線 CD が１点 O で交わっている。
この時、∠AOC＝∠BOD であることを証明せよ。
(平成 30 年度数学 A・問題８類題)

今わかっている場面のパターンは、次のようなものです。

・２本の直線 AB と CD が交点 O で交わっている。

これだけです。その時にできる角が等しくなることを証明することが目標です。

今の場面のパターンを図にすると次のようになります。

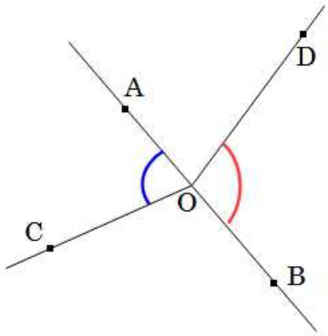


なお、２直線がどのよに交わっているかは指定されていないので、交わり方は特に気にする必要はありません。逆に言えば、どのような交わり方をしていても、２直線が交わっているという場面のパターンである限り、∠AOC と∠BOD は等しくなるということです。

これは対頂角が等しくなるという性質で、中学校２年生の時にすでに証明しています。また、そもそも上の青い角∠AOC と赤い角∠BOD が等しいことは、図を見ればわかりそうなものです。もしも「いつでもなるのか」と相手から反論されても、例えばコンピュータのソフトで調べたら、ほぼいつでもなることが分かりそうです。

ただコンピュータで調べても、「なぜ∠AOC＝∠BOD になるのか」はわかりません。「２本の直線が交わっている」という場面のパターンの中に隠されたパターンを見出し、∠AOC＝∠BOD という現象が起こるメカニズムを明らかにすることで、なぜに応えていく必要があります。

例えば一方が直線ではなく、点Ｏのところで少し曲がっていたら、対頂角は等しくならないのでしょうか。例えば以下のような場面を考えてみます。



COD は直線ではなく、折れ線になっています。ここでは∠BOD の方が∠AOC よりも大きくなっているようです。一方が直線でなくなっただけで、向かい合う角の大きさが等しいという性質は成り立たなくなってしまいました。

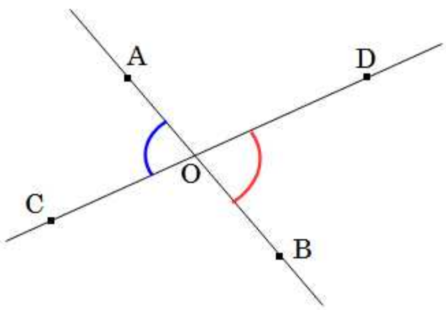
ここから、２本とも直線であるという場面のパターンが、対頂角が等しくなるという性質を生み出しているようだとわかります。では、２本とも直線だという場面のパターンでは、**なぜ**対頂角が等しいという現象が起こるのでしょう。

隠されたパターンを探し出すために、場面のパターンからわかることを考えます。今は対頂角という角が話題になっているにも関わらず、場面のパターンには角についての情報がありません。そこで、場面のパターンから角についてわかることを考えてみます。

AB が直線だということは、まっすぐだということであり、Ｏのところで曲がっていないということです。これは、∠AOB が 180°ということです。∠AOB が 180°でなく、179°や 181°だったら、少しだけですが曲がってしまいます。

同じように、CD が直線だということから、∠COD が 180°であるとわかります。

・∠AOB＝∠COD＝180°



これらの角と、話題になっている∠AOC や∠BOD との関わりはないでしょうか。そう思いながら図を見直すと、∠BOD は∠AOB から∠AOD を引いた大きさになっていることに気づきま

す。同じように、∠AOC は∠COD から∠AOD を引いた大きさになっています。ところが、場面に隠されたパターンでは、∠AOB と∠COD はどちらも 180°で等しいのでした。ここから、∠AOC も∠BOD も 180°から∠AOD を引いた大きさになっていることがわかります。等しいものから同じものを引いたのですから、残った角の大きさも等しくなるはずです。

これで「なぜ∠AOC＝∠BOD になるのか」を説明する準備が整いました。

AB が直線であることから　∠AOB＝180°
CD が直線であることから　∠COD＝180°
∠AOC＝∠COD－∠AOD＝180°－∠AOD
∠BOD＝∠AOB－∠AOD＝180°－∠AOD
以上より、∠AOC＝180°－∠AOD＝∠BOD　となるので、
∠AOC＝∠BOD　である。　　　　（証明終わり）

２本とも直線であるという場面のパターンにより、∠AOB＝∠COD＝180°となることが、∠AOC＝∠BOD となる理由だったのです。

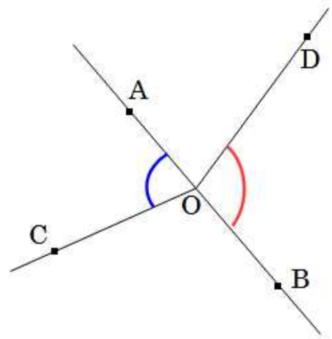
右のように 1 本が直線でない場合は、∠AOB と∠COD とは等しくなりません。そのために、

∠AOC＝∠COD－∠AOD

と

∠BOD＝∠AOB－∠AOD

も等しくならないことになってしまいます。



これで２本の直線が交わっているという場面のパターンでは、なぜ対頂角の大きさが等しくなるのかがわかりました。

ただこの証明を振り返ってみると、対頂角が等しくなる理由は、∠AOB と∠COD の大きさが等しいということでした。∠AOB と∠COD の大きさが等しいので、そこから同じ∠AOD を引いた残りの角の大きさも等しくなるというのが、対頂角が等しくなるメカニズムでした。

だったら、∠AOB＝∠COD であれば、それらが 180°でなくても同じような現象が起こるのではないでしょうか。

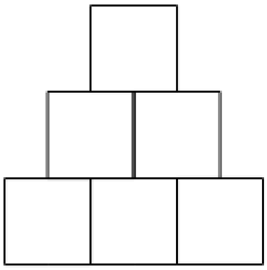
そこで、∠AOB＝∠COD ではあるけれども、それらの大きさが 180°でない場合について調べてみると、それらの場合でも、∠AOC＝∠BOD となりそうであることが確かめられます。そうした場面のパターンでもなぜ∠AOC＝∠BOD という現象が起こるのかについては、上の証明と同じようにして説明することができるでしょう。

このように、証明を振り返り、ある現象が起こるメカニズムや、それが起こる理由の中心的なアイデアをとらえると、それを保ちつつ他の部分を変えたり、中心的なアイデアを類似のアイデアに置き換えたりすることで、同じような現象が起こる他の場面のパターンを見出すことができます。

文字を用いた証明の練習

問題：右のような３段の枠の一番下の段に３つの数を入れます。

真ん中の段の左側には下の段の左側の数と真ん中の数をたした数を入れ、右側には下の段の真ん中の数と右側の数をたした数を入れます。

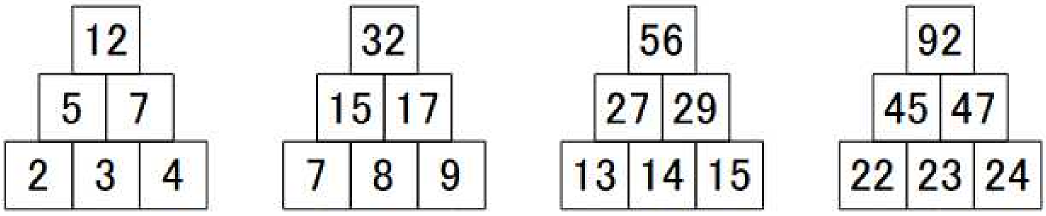


一番上の段には、真ん中の段の２つの数をたした数を入れます。

今、下の段に連続する３つの整数を入れると、一番上の段の数は４の倍数になることを証明しなさい。

(平成 21 年度数学 B・問題２(2)類題)

一番の上の段の数が本当に４の倍数になるのか、いくつかの場合について調べてみると、次のようになります。



これらの結果を見ると、一番上の段にある 12、32、56、92 はすべて４の倍数になっています。一番上の段の数は**なぜ**４の倍数になるのでしょう。その**なぜ**を説明するメカニズムが見つかれば、同じ作り方でできた一番上の数はいつでも４の倍数になることもわかります。

今の場面のパターンは、次のようになっています。

・一番下の段には連続する３つの整数が入っている。

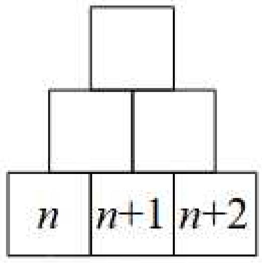
・二段目の段には下の段の左と真ん中をたした和、真ん中と右をたした和が入っている。

・一番上の段には二段目の段の２つの数の和が入っている。

二段目と一番上の段は一番下の段の数をたした和でできていますから、一番下の段の数を文字で表せば、二段目と一番上の段の数もその文字を用いて表せそうです。

そこで、一番下の段の３つの数を、文字で表してみます。３つを a, b, c などと表してしまうと、「連続する」という情報を含めることができません。「連続する」ということは、左の数より真ん中の数は１大きく、真ん中の数より右の数は１大きいということです。

この情報を盛り込んで文字に表すために、左の数を n で表したら、真ん中の数をそれより１大きい $n+1$ と表しておきます。右の数はそれよりさらに１大きいので $(n+1)+1$、つまり、$n+2$ と表すことができます。



これで、「一番下の段には連続する３つの整数が入っている」という場面のパターンを文字式で表現することができました。

場面のパターンによると、二段目には一番下の段の数を２つずつたした数が入っているのでした。これは今の下の段の表現を用いると、次のようになります。

二段目左：下の段の左と真ん中の和： $n+(n+1)$

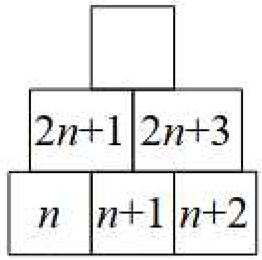
二段目右：下の段の真ん中と右の和：$(n+1)+(n+2)$

それぞれ計算すると、

二段目左： $n+(n+1)=2n+1$

二段目右：$(n+1)+(n+2)=2n+3$

となります。

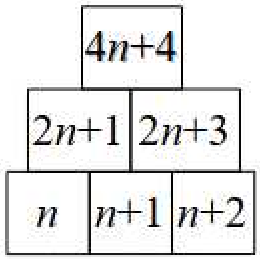


そして、場面のパターンによると、一番上は二段目の２つの数をたした数が入ります。計算すると、

一番上の段：$(2n+1)+(2n+3)=4n+4$

となります。

これで一番上の段まで、文字で表すことができました。一番上の段の数は、下の段左の数を４倍してそれに４をたした数になっていることがわかります。



この $4n+4$ に４の倍数というパターンが隠されていることを、相手にはっきり説明する方法は、前にも利用しました。

４の倍数は４×(整数)という形の数でしたから、$4n+4$ にこの形のパターンが隠されていることを示せばよいでした。実際、

$$4n+4=4(n+1)$$

となり、n が整数なら $n+1$ も整数ですから、４×(整数)というパターンが隠されていたことがわかります。

これで、「なぜ一番上の段の数が４の倍数になるのか」を説明する準備が整いました。

下の段の左の数を n と表すことにする。下の段は連続する３つの数なので、３つの数は n、$n+1$、$n+2$ と表すことができる。

二段目の左は下の段と左と真ん中の数の和なので、

$$n+(n+1)=2n+1$$

となる。二段目の右は下の段の真ん中と右の数の和なので

$$(n+1)+(n+2)=2n+3$$

となる。一番上の段は二段目の段の２つの数の和なので、

$$(2n+1)+(2n+3)=4\mathrm{n}+4=4(n+1)$$

$n+1$ は整数なので $4(n+1)$は４の倍数である。

よって、一番上の段の数は４の倍数になる。（証明おわり）

一番上の数が、下の段左の数の４倍に４をたした数となること、そしてそこに４×(整数)というパターンが隠されていることが、一番上の数が４の倍数になる理由だったのです。

ここで、今の証明を振り返ると、二段目の２つの数は、それぞれ、

$$2n+1 \text{ と } 2n+3$$

で、どちらも奇数のパターンになっていることがわかります。さらに $2n+3$ は $2n+1$ より２だけ大きいので、$2n+3$ は $2n+1$ の次の奇数だとわかります。つまり、二段目の２つの数は、「連続する２つの奇数」になることがわかります。

このように、証明を振り返ると、場面の他の部分についての情報が得られることもあります。

さらに証明からわかることはないでしょうか。

一番上の数は、

$$4n+4=4(n+1)$$

となるのでした。これを見ると、$n+1$ は下の段の真ん中の数でしたから、一番上の数は下の段の真ん中の数の４倍になると見ることもできます。

そうだとすると、下の段の真ん中の数を改めて n と置いたら、一番上の段は $4n$ となり、説明がもっとシンプルになることが期待できそうです。

そこで、下の段の真ん中の数を n とおいて、説明をやり直してみます。

このとき、下の段の左は真ん中より１小さい数、右は１大きい数と言えますから、下の段の３つの数は次のように表すことができます。

$$n-1、n、n+1$$

ここから、二段目の２つの数は次のようになります。

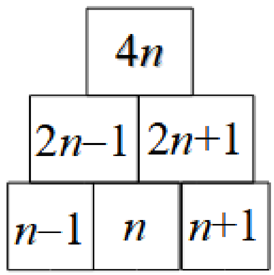
二段目左：下の段の左と真ん中の和： $(n-1)+n=2n-1$

二段目右：下の段の真ん中と右の和：$n+(n+1)=2n+1$

したがって、一番上の段の数は

$$(2n-1)+(2n+1)=4n$$

となり、確かに $4n$ となりました。



最後の式で $4n$ になるのは、$2n-1$ の -1 と $2n+1$ の $+1$ とが打ち消し合って消えるからです。そしてこの -1 と $+1$ は、もともとは下の段の左の -1 と右の $+1$ でした。

このことは、二段目の左である$(n-1)+n$と、右である$n+(n+1)$を、この形のまま変形してみると、よくわかります。

$$\text{二段目の和}=\{(n-1)+n\}+\{n+(n+1)\} \quad \text{(真ん中の数は２回出てくる)}$$
$$=(n-1)+(n+1)+n+n \quad \text{(−1と＋1が打ち消し合う)}$$
$$=4n \quad \text{(４つの}n\text{だけが残る)}$$

つまり一番上の数が４の倍数になる理由は、下の段の真ん中の数を基準にして左がそれより１小さく、右がそれより１大きいので、打ち消し合って消えてしまうこと、真ん中の数は二段目の左と右の両方に用いられ二回カウントされること、そして以上の結果として真ん中の数を４つたし合わせたのと同じことになるからだったのです。

そうであるとすると、下の段は連続する３つの数でなくても、同じ数ずつ増える３つの数であれば、一番上の段の数は４の倍数になると考えられます。なぜなら、真ん中の数より少ない分と多い分とが打ち消し合って、真ん中の数の４つ分だけが残るというメカニズムが、同じ数ずつ増える３つの数でも働くからです。

実際、３ずつ増える３つの数、４ずつ増える３つの数、７ずつ増える３つの数、11ずつ増える３つの数を試してみると、以下のように、確かに一番上の数は４の倍数になり、しかもそれは下の段の真ん中の数の４倍になっています。

	20	
7		13
2	5	8

	24	
8		16
2	6	10

	36	
11		25
2	9	16

	52	
15		37
2	13	24

これらの場合に一番上の数が**なぜ**４の倍数になるのかは、前の証明と同じようにして説明することができます。そして、**なぜ**そうなるのかのメカニズムが説明できれば、そのメカニズムが同じようにはたらく場合にはいつでもそうなることもわかります。

問題：２けたの数と、その十の位の数字と一の位の数字を入れ替えてできる数を考える。例えば 14 と 41、53 と 35、28 と 82 である。

(1) ２つの数の差は９の倍数になることを証明せよ。

(2) ２つの数の和がどのような数になるかを予想し、それを証明せよ。

(平成 25 年度数学 B・問題２類題)

(1)の場面のパターンは次のようになっています。

・十の位と一の位が逆になった２つの数の差

このパターンを文字式を用いて表現してみます。

２けたの数はどのようなパターンを持っているでしょうか。例えば４１であれば、４０と１を合わせた数になっています。そして算数で学習した位取りのことを思い出すと、４０は１０が４つということでしたから、10×4 と表すことができます。したがって、４１には次のようなパターンが隠されています。

$$41＝10×4＋1$$

同じように考えると 14＝10×1＋4 というパターンが隠されています。53 と 35 であれば、次のようなパターンがあります。

$$53＝10×5＋3$$

$$35＝10×3＋5$$

また、28 と 82 では次のようになります。

$$28＝10×2＋8$$

$$82＝10×8＋2$$

これらを観察すると、十の位が m、一の位が n である２けたの数と、数字を入れ替えた十の位が n、一の位が m の２つの数は、次のように表現できることがわかります。

$$10×m＋n＝10m＋n$$

$$10×n＋m＝10n＋m$$

(1)では、この２つの数の差、つまり引き算をした結果を考えています。そこで、これら２つの数 $10m＋n$ と $10n＋m$ の引き算をしてみます。算数の感覚では大

きい数から小さい数をひくので、どちらの数が大きいかが気になります。しかし中学校で負の数を学習してからは、小さい数から大きい数をひいてもよくなったので、とりあえず数の大小のことは気にせずひいてしまいます。

$$(10m+n)-(10n+m)$$

この差が**なぜ**９の倍数になるのかを説明するために、この差の中に隠されたパターンがないか探ります。そのために、上の差を変形してみます。

$$\begin{aligned}(10m+n)-(10n+m) &= 10m+n-10n-m \\ &= 10m-m-10n+n \\ &= (10-1)m-(10-1)n \\ &= 9m-9n \\ &= 9(m-n)\end{aligned}$$

ここで m と n が自然数 ならば $m-n$ は整数となるので、$9(m-n)$は９の倍数になります。

つまり、差である$(10m+n)-(10n+m)$の中に $9(m-n)$というパターンが隠されていたのです。ではこの $9(m-n)$というパターンが出てきたのは**なぜ**かを考えると、$10m-m$ から$(10-1)m$ があらわれ、$n-10n$ から$(1-10)n$、つまり$-(10-1)n$ があらわれたことが理由です。十の位と一の位を入れ替えて２つ目の数を作ったために、一方の十の位と他方の一の位の差を考えると$(10-1)m$ や$-(10-1)n$ というパターンが生まれたのだとわかります。

例えば 53 と 35 の場合であれば、次の図のような状況になっているということです。

53： ⑩ ⑩ ⑩ ⑩ ⑩ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

35： $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ ⑩ ⑩ ⑩

53－35 を計算すると ⑩－$\boxed{1}$が５つ$((10-1)\times5)$と、$\boxed{1}$－⑩が３つ$((1-10)\times3)$できることになります。十の位の数字と一の位の数字を入れ替えて２つの数を作るという元の場面のパターンが、９の倍数というパターンを生み出すことに、決定的に関わっていたことがわかります。

では(2)のようにそうした２つの数の和を考えたらどうなるでしょうか。

(1)の差の場合と同じように、いくつかの数で実際に試して予想をたてることもできます。

しかし(1)の証明を振り返ることで、およその予想を立てることもできるのです。(1)の証明では、場面のパターンに出てくる2つの数は $10m+n$ と $10n+m$ として表すことができました。

先ほどは差を考えたのでこの2つの数のひき算をしました。そしてそれにより $10m-m=(10-1)m$ といった計算が出てくることが、差が9の倍数になる理由でした。今回は和を考えているので、この2つの数をたしてみると、ひき算の代わりにたし算が出てくるので、$10m+m=(10+1)m=11m$ となり、11の倍数になるのではないか、という予想が立ちます。

実際に、53と35で計算すると88となり、確かに11の倍数になります。28と82で考えると和は110ですから、やはり11の倍数です。79と97で考えると和が176となり11の倍数かどうか心配になるのですが、しかし $176\div11=16$ となるので、確かに11の倍数になります。

このように、前の証明を振り返り、新しい場面のパターンではどこがどのように変わりそうかを調べることを通して、今の場合に起こることについての予想を持つことができます。また、今の場合に**なぜ**和が11の倍数になるのかの説明も、前の証明を参考に組み立てることができます。差が和に変わったことに注意すれば、次のように説明できます。

m と n を1から9までの自然数とすると、2けたの整数は $10m+n$ と表せる。この十の位と一の位を入れ替えた数は $10n+m$ となる。

この2つの数の和を考えると、

$$
\begin{aligned}
(10m+n)+(10n+m) &= 10m+n+10n+m \\
&= 10m+m+n+10n \\
&= (10+1)m+(10+1)\,n \\
&= 11(m+n)
\end{aligned}
$$

$m+n$ は自然数なので、これは11の倍数になる。（証明終わり）

このように、証明は新しい場合について、その場合にはどのような現象が起こ

りそうかの見通しを与えてくれたり、あるいは新しい場面の説明の方針を与えてくれたりします。証明をしたらそれですぐ終わりにするのではなく、証明を振り返ったり、その中心となるアイデアを味わってみたりすることも大切です。

さらに証明を振り返ると、アイデアを発展させることに役立つ場合もあります。先ほどの差と和の証明で最後に出てきた式を見直してみます。

$$9(m-n) \qquad\qquad 11(m+n)$$

これらの式で例えば $n=0$ であっても、$9(m-n)$ は $9m$ ですから９の倍数になり、$11(m+n)$ は $11m$ ですから 11 の倍数になります。ですから最初の２桁の数としては一の位の数が０でもよいことがわかります。

その場合は、数字を入れ替えたときに２番目の数の十の位が０ということになってしまいます。しかし十の位が０ということは１けたの数だと考えることにより、このような場合も含めて考えることが可能となります。

例えば 20 であれば２番目の数は 02 ですが、これを２と考えます。すると $20-2=18$ で９の倍数ですし、$20+2=22$ なので 11 の倍数となり、上で証明した結果がやはり成り立つことがわかります。

証明を振り返り $n=0$ でも同じような結果が成り立ちそうであることに気づくことで、１けたの数が現れる場合にも拡張できたのです。

まとめ

同じタネで手品を行えば、同じ不思議なことがいつでも起こります。それはタネにより同じメカニズムが毎回働くからです。また地球上でものを落とすと、基本的にいつでも下に落ちます。それは重力によりものが地球に引っ張られるというメカニズムが毎回働くからです。

もちろん手品で失敗してタネが働かないときや、宇宙空間に行って重力で引っ張られるメカニズムが働かないときは、同じ現象は起こりません。しかし、その現象を引き起こすメカニズムが働いている間は、同じ現象がいつでもどのような場合でも起こります。

数学の証明では、ある現象が起こるメカニズムを解明し、それをほかの人にも説明します。それにより、そのメカニズムが働く場合は、いつでも同じ現象が起こることが主張できるようになります。

「いつでも成り立つこと」や「どのような場合でも言えること」を示せと言われると、何をしてよいのかわかりにくいかもしれません。まずは、「どうしてこのようなことが起こるのかな」とか「なぜこうなるのかな」と自分に問うてみて、なぜその現象が起こるのかのメカニズムや、なぜそうなるのかの原因を探っていくと、何を説明したらよいかの見通しが持ちやすくなります。

その上で、自分が見つけ出した隠されたパターンや、そのパターンから現象が起こるメカニズムを、他の人にもわかりやすく説明するつもりでまとめていくと、証明の形に整っていくでしょう。