

点と線

～算数・数学の学習でのちょっとしたひっかけ～

1. 点からできている線

中学校の学習では、実は、点と線の関係がわかりにくい場面があります。そうした場合、基本的には、

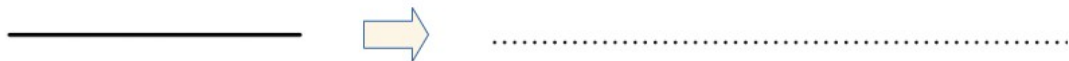
「線は点が集まってできている」

と考えると、すっきりします。

線はペンを紙からはなさずにスーッとえがいてできるイメージなので、それがポツポツした点からできているというのは、少し変な感じがするかもしれません。しかしそこが、数学的なイマジネーションのはたらかせどころです。

もちろん、「切れ目なく伸びているもの」と思った方が考えやすい場合も多いので、ふだんはそうにとらえていても問題ありません。しかし、もしも話がややこしくなってきたりわかりにくいな、と感じたら、一度、「線は点の集まりだから・・・」ととらえ直してみてください。

下の左の図は、ある長さの線分に見えます。しかしその右はしの部分を引き延ばしてみると、右のように多くの点からできていたことがわかります。



実は左の線分は、500 個の点からできていたのです。

(参考：線分の拡大)

数学で考える線分や直線、曲線では、ずっと多くの点からできているので、いくら拡大してもこのように個々の点が見えるわけではありません。ですから、実際に「点からできている」というよりも、むしろ「点からできていると考える」ということになります。

このように、「点が集まってできている線」というのは、私たちが想像力をはたらかせて作り出した線になります。ただそう考えることで、数学の話がしやすくなる場面がいろいろあります。

「切れ目なく伸びている」イメージと、「点が集まってできている」というイ

メージとを、必要に応じて使い分けることで、理解がしやすくなることも多いかもしれません。以下では、その例をいくつか考えてみます。

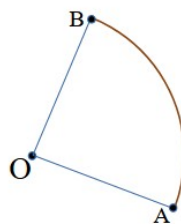
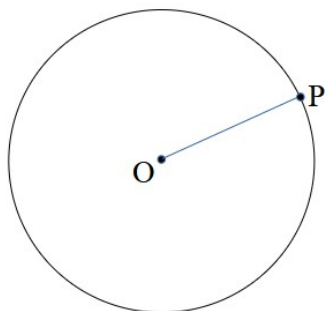
2. 円

小学校3年生のときに、円について次のように学習しました：「1つの点から長さが等しくなるようにかいたまるい形を、円といいます」。ここでは、コンパスなどでスーッと線をひいてできた形として、円が説明されています。

しかし中学校1年の教科書の中には、次のような説明をしているものもあります：「1点Oからの距離が等しい点の集合を円という」。こちらは、多くの点の集まりが円だという説明です。実は、こちらの説明の方が、数学としては適切です。ただ、小学校3年生にはわかりにくいので、算数の教科書では「こんなふうにかいたまるい形」として、説明しているのです。

ですから、円を、コンパスでかいたクルっとした線としてだけでなく、点の集合としてもとらえることができるようになることは、それだけ私たちが大人らしい考え方ができるようになった、ということを意味します。

円は点の集合でもありますから、集まっている多くの点の中から、今着目しようとしている点を1つ選び出すことができます。算数では「中心から円のまわりまで引いた直線」として半径を説明していましたが、中学校での半径は、円の中心と、円を構成する点の1つとを結んだ線分となります。半径OPと言えは、中心Oと円を構成する点Pとを結んだ線分ということです。また、右下のおうぎ形では、点Aや点Bは半径の端の点であると同時に、おうぎ形の弧の端の点にもなっています。

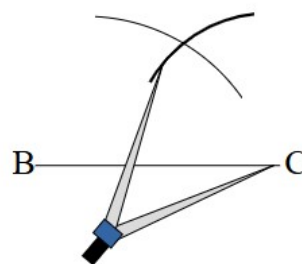


半径の端や弧の端のように、線の一番端っこの部分が「点」になっているのかも、本当はわかりにくいのですが、数学では線の端は点であるとして扱います。逆に、点と点を結んで線分をかいたとき、最初の2つの点は線分の端として、線分の一部に組み込まれることになります。

同じように考えると、三角形の頂点は、一つの辺の端であると同時に、もう一つの隣の辺の端でもあるような点です。さらに次に見るように、2つの線が交わる部分も点であると考えます。

3. 交点

小学校5年生のときに、合同な三角形のかき方を考えました。3つの辺の長さが等しくなるように作図をすると、右のような状態になります。この後は、2つの円弧が交わった場所と点Bと点Cとをそれぞれ結ぶのでした。



こうした場合、小学校のときはこの交わった場所のことは特に気にしていませんでした。

しかし中学校では、こうした2つの線が交わる場所には点があると考え、それを「交点」と呼んだり、点Aといった名前を付けたりします。2つの線はそれぞれ多くの点からできているのですが、交点はどちらの線についても、構成する点になっていると考えます。例えば2つの直線 l と m があり、点Pが l と m の交点だとします。点Pは直線 l を構成する点にもなっているし、直線 m を構成する点にもなっているということです。

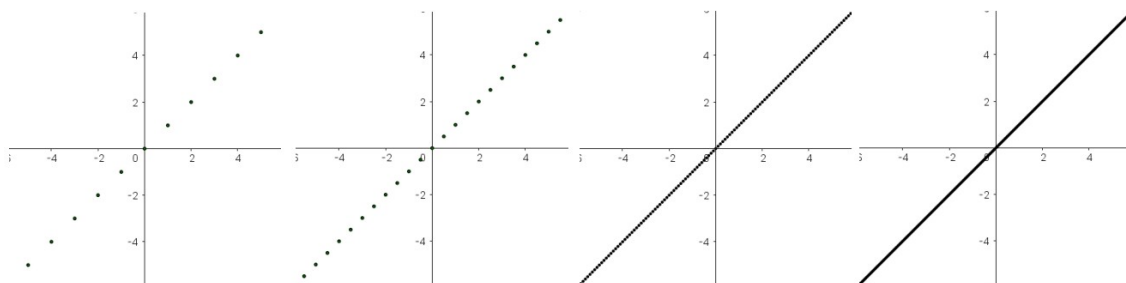
円については「接点」を考えました。接点も、円を構成する点であるとともに、接線である直線を構成する点にもなっているような点です。その意味では、「からだか壁に接している」のとは、少しようすが異なります。

中学校では、2つの直線や2つの曲線、あるいは直線と曲線が交わっているときは、その交わった場所には点があると考えましょう。そうした交点が必要な役割を持っていることが多いので、交点は重要な点だと言えるでしょう。

4. グラフ

小学校6年生のときに比例のグラフをかきました。表の中の対応する x と y の値の組をあらわす点を座標にとり、それらの点を結んだり、あるいはつなだりしてグラフをかいたかもしれません。4年生で学習した折れ線グラフのような感じです。

しかし中学校1年生で比例を学習する際には、グラフは多くの点が集まって直線になっていると考えました。つまり、円の場合と同じように、グラフの見た目は切れ目なく伸びている直線なのですが、それは同時に非常に多くの点が集まってできていると考えるのです。（参考：[直線のグラフの2つのイメージ](#)）



ですから、円で半径を作るために円を構成する点の1つを選んだように、グラフでも直線を構成する点の中から1つを選ぶことができます。そうして選んだ点の一つ一つでは、 x 座標と y 座標のペアにより、 x の値とそれに対応する y の値という対応のようすを表しているのです。

逆にグラフをかく場合は、グラフを構成するいくつかの点を式などから見だし、それを参考にして線をえがくことになります。本当は、すべての x の値に対して y の値を求め、その値のペアを表す点を作りたいのです。しかし、 x の値は本当に数えきれないほど多くあり、そのすべてを考えることはできません。そこで、そうした点の集まりを「表す」ための代わりの表現として、直線を引くのです。つまり、点を結んで線を引くというのではなく、多くの点の集まりを作っているつもりで線を引くことになります。

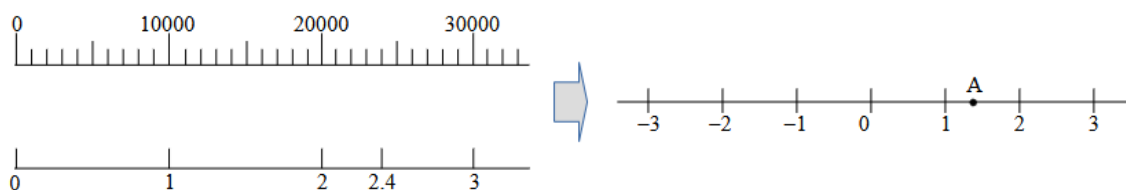
以上のことはもちろん、比例以外の関数（反比例や1次関数、関数 $y=ax^2$ ）のグラフでも同じになります。1次関数のグラフである直線も、反比例や関数 $y=ax^2$ のグラフである曲線も、多くの点が集まってできていると考えます。

グラフをかく際などに、例えば x 座標が2、 y 座標が5の点(2, 5)を「とる」ことがあります。実は直線が多くの点からできていると考えるように、数学では平面も多くの点からできていると考えます。それらの多くの点の中から、条件に合った点を選び出し、“手に取る”あるいは“席を取る”ように「点をとる」のだと考えてみましょう。関数のグラフは、平面を構成する多くの点の中で、関数が指定する x 座標と y 座標についての条件に合った点だけを集めた結果、できた直線や曲線だということになります。

なお中学校2年生では、連立方程式を1次関数の視点から考察しますが、その際、2つのグラフの交点を考えました。この交点は第一の方程式のグラフを構成する点でもあり、同時に第二の方程式のグラフを構成する点にもなっています。したがって、交点の x 座標と y 座標は第一の方程式の条件を満たし、同時に第二の方程式の条件も満たすことになるので、連立方程式の解を表すことになるのです。

5. 数直線

小学校1年生のときに「かずのせん」を学習してから6年生まで、算数では数直線を用いてきました。そのときは、「切れ目なく伸びている直線」のところどころに短い縦線が目盛りがあり、それが数を表していました。つまり、目盛りのところが数であり、それ以外の部分は特に考えていませんでした。



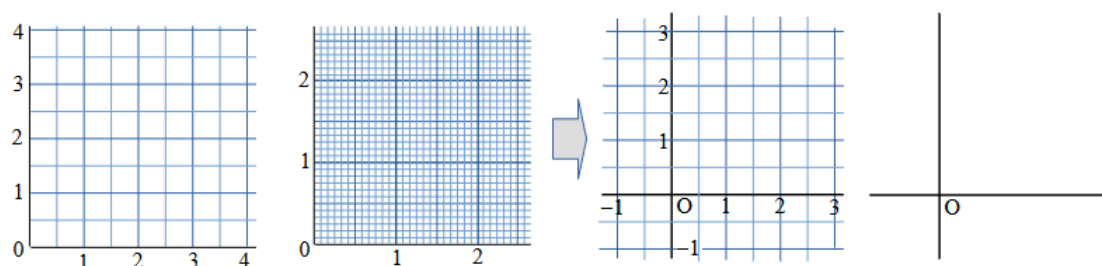
これに対し、中学校になると、数は直線の上の「点」で表されることも多くなります。もちろん、目印になる「+1」「-3」などには目盛りをつけます。しかし目盛りと目盛りの間にも多くの点があり、それらの点の一つ一つがある数を表していると考えます。直線は多くの点からできているので、目盛りの部分だけでなく、目盛りと目盛りの間にも点があるのは当然のことです。そして直線の上のどこを指しても、そこには点があり、したがって数があります。

右上の数直線で点 A は何らかの数を表していますが、もちろん、それ以外の部分のどこにでも点があり、それらの点はそれぞれ、やはり何らかの数をあらわ表しています。

逆に言えば、ここまで見てきたように、切れ目のない線に見えるほど点は多くあり、ぎっしりと並んでいるので、数もそれと同じように多くあり、ぎっしりとつまっているということです。

中学校 3 年生で「無理数」を学習しますが、これは、それまで学習してきた有理数だけでは、点が十分につまっていなかったもので、空いていた穴をうめて、きちんとつまった状態にしたことになります。

なお、関数のグラフをかくときの x 軸や y 軸も数直線ですが、6 年生で比例のグラフをかいたときには、 x の値としては、横軸で方眼紙の縦線のあるところの値を考えていたかもしれません。点も、縦線と横線の交わる格子点のところにとっていました。



中学校 1 年生になってグラフをかく場所は、縦線や横線の本数はかえって少なくなっています。しかし x 軸の縦線のないところにも点があり、その点が表す数を x の値として考えています。数直線と同じように、 x 軸のどこにでも数があるので、目印となる縦線くらいしかかいておくことができないのです。

さらに、グラフ用紙のような縦横の線がまったくなく、座標軸だけがかかれた場合もあります。当然このときも、座標軸の直線は多くの点からできていますから、算数のときのような縦線がなくても、軸を構成する多くの点のそれぞれが表す数を、 x の値として考えてよいことになります。

前節でグラフの直線や曲線が多くの点からできていることを確認しました。そのように、グラフが多くの点からできているのは、座標軸を構成する多くの点が表示 x の値について、 x の値と y の値のペアを考えるからです。

6. おわりに

算数のように、切れ目なくスーッと伸びている線があり、数を考えるときは目盛りを入れるというのは、見た目とぴったり合っており、私たちとしても特に違和感はないでしょう。

これに対し、中学校の数学で出てくる直線や曲線は、本当は多くの点が集まったものである、ととらえるのでした。数直線や座標軸の場合には、目盛りがなくても点はある、そしてその点が数を表すととらえる必要がありました。しかし円や直線を見ても点は見えませんし、したがってそこにある点が数を表すと言われても、しっくりこないかもしれません。

数学での線との向き合い方は、見た目を越えて、「点が集まっているんだ」「そこに数がぎっしりつまっているんだ」と自分で自分に言い聞かせて初めてできる向き合い方です。見た通りに受け取るという受け身の解釈ではなく、本人がイマジネーションを働かせて、理想的な状態を線に見ようとする積極的な解釈です。私たちがそう見ようとしなければ、そうは見えないのです。

そうした苦勞をする代わりに、見た目に左右されず、理想的な状態を想定して、発想を広げるという自由も手に入れることができます。

このちょっとした向き合い方の転換をすることで、数学の学習を進めやすくしていきましょう。