

かなりわりきった 証明の学び直しテキスト

全国学力・学習状況調査「算数」の類題による中学校・証明への橋渡し

上越教育大学

布川 和彦

論証や証明は、数学の中での「説明」です。証明したいことが「なぜ成り立つのか」、「なぜそんなことが起こるのか」といったことを、自分や他の人が納得してくれるように「説明」することになります。

他の人も納得してくれるように説明しようとする、次のようなことに注意する必要があるでしょう。

- ・ 相手も認めていることに基づく説明であること。
- ・ 相手も認めてくれるような話の進め方であること。

これは、算数について「説明」する時も、同じでした。

ただ数学の場合は、算数とはちょっとちがう点があります。それは、辺の長さが何 cm であるかとか、計算に出てくる数がいくつかが、はっきり示されていないことが多いという点です。

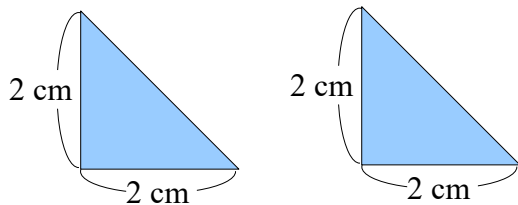
2つの辺が「同じ長さ」であることはわかっている、それが何 cm なのかはわからないとすれば、「同じ長さ」というわかっている情報だけに基づいて説明する必要が出てきます。ある数がもう1つの数より3だけ大きいことはわかっている、それらがいくつなのかがわからないとすれば、「3だけ大きい」という情報だけに基づいて説明する必要が出てきます。

何 cm やいくつとわからなくても、「同じ」とか「3だけ大きい」といった情報だけに基づいて説明することが、証明を学習するための第一歩になります。

「パターン」への着目

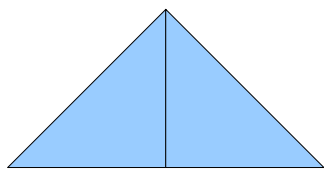
次のような2つの問題を考えてみてください。

問題1：下のような2つの直角二等辺三角形があります。

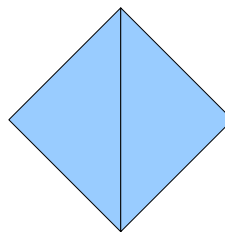


これらの同じ辺どうしをくっつけて、次のような2つの図形を作りました。これらの2つのうち、どちらの図形の方が面積が大きくなりますか。

①

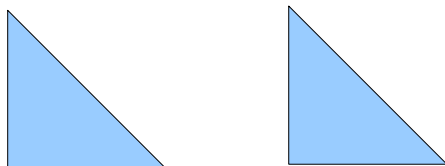


②



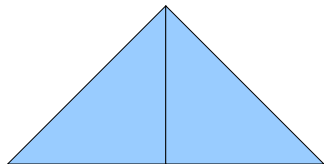
(令和3年度算数・問題2(2)類題)

問題2：下のような2つの合同な直角二等辺三角形があります。

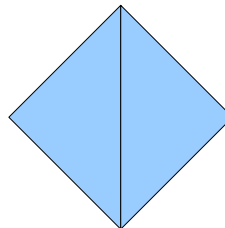


これらの同じ辺どうしをくっつけて、次のような2つの図形を作りました。これらの2つのうち、どちらの図形の方が面積が大きくなりますか。

①



②



問題 1 では直角二等辺三角形の直角をはさむ 2 辺の長さが 2 cm と示されています。ここから①の図形は底辺が 4 cm、高さが 2 cm の三角形になることがわかり、面積を 4 cm^2 と求めることができます。②の図形は 1 辺が 2 cm の正方形になりそうです。したがってその面積も 4 cm^2 と求めることができます。どちらの図形の面積も 4 cm^2 となったので、2 つの図形の面積は実は同じであるとわかります。

ちなみにもとの直角二等辺三角形は底辺が 2 cm、高さが 2 cm ですから、こちらの面積も 2 cm^2 と求めることができます。2 つくっつけた図形の面積は 4 cm^2 でしたから、これはもとの三角形の面積の 2 倍になっていることもわかります。

これに対して、問題 2 では辺の長さが示されていません。したがって、面積を求めることもできません。では問題 2 では、2 つの図形の面積をくらべることはまったくできないのでしょうか。

問題 2 では辺の長さは示されていないものの、2 つの直角二等辺三角形が「合同」であることはわかっています。また新しくできた図形は①も②も、もとの 2 つの三角形をくっつけて作ったものであることもわかっています。つまり、①と②は同じ「部品」から作られていて、ただもとの三角形の向きの変え方やくっつけ方が異なるだけだということです。

向きを変えるだけなら図形の面積は変わらないと考えると、結局、①と②の図形は同じ「部品」を使って作られているので、①と②の面積も同じであるとわかります。

さらに、「部品」である 2 つの三角形は「合同」ですから、これら 2 つの「部品」どうしても面積は等しくなっています。したがって、①と②は「同じ部品」を 2 個くっつけて作った図形ですから、その面積は「部品」の大きさの 2 つ分、つまりもとの三角形の面積の 2 倍になっていることもわかります。

問題 2 では三角形の辺の長さはまったく示されおらず、したがって、面積を求めることはできませんでした。しかし、もとの 2 つの三角形が「合同」であることや、①と②は同じ三角形から作られているという作り方の情報がわかっていて、そこから考えて、問題 1 と同じ結論をみちびくことができました。

このように、数値が示されていないなくても、図形の間の「関係」や、考えている図形の「構成の仕方」がわかっていると、そこからいろいろわかることがあります。そして、それらをもとに、結論を説明できる場合があります。

こうした「関係」や「構成の仕方」を「今の場面のパターン」と呼ぶことにすると、中学校での論証や証明は、こうした「パターンだけに基づいて、なぜそのようなことがわかるのかを説明すること」だと言えます。

パターンについては、例えばマンガやドラマで「ストーリーがワンパターンだ」といった使い方をするかもしれません。出てくる登場人物の名前などは確かに違っているものの、主人公と他の登場人物との関係が他のマンガやドラマと似ていたり、ストーリーの展開の仕方や構成の仕方が似ていたりするといったことを意味しているでしょう。

「自転車」と聞くと、三角形を2つ合わせたようなフレームに2つのタイヤが付いていて、さらにサドルやハンドルも付いた物体を思い浮かべるでしょう。またフレーム中央の下にはペダルのついた円盤のようなものがあり、それがチェーンなどで後のタイヤとつながっているようすもイメージされます。つまり「自転車」に共通した部品の「関係」や部品を組み立てる「構成の仕方」がありそうです。そして部品の「関係」や「構成の仕方」によって、ペダルをこぐと前に進むという自転車の動きが生まれています。

こうした部品の「関係」や「構成の仕方」は、多くの「自転車」に共通して見られるという意味で、「自転車のパターン」と呼ぶこともできるでしょう。「自転車のパターン」により自転車らしい動きが生まれます。また私たちはそのパターンに基づいて、自転車のようすや動きをイメージすることもできます。

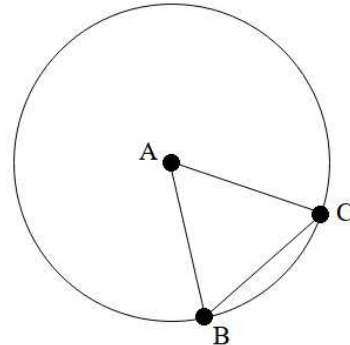
上の問題でも、場面のパターンだけを頼りに、できた図形のようすについて考えることができました。数学では場面のパターンだけを頼りに考えることが求められますが、算数でも、場面のパターンに着目して考えることができる問題があります。そうした問題を使って、数学で証明を学習するための準備をしていきましょう。

算数の問題：図形編

問題：右のように、円を使って三角形 ABC を作ります。

点 A は円の中心になっています。また点 B と点 C は円周上の点です。

このようにして作った三角形 ABC が二等辺三角形になるのは、どのようなときですか。またそのときは、なぜ二等辺三角形になるのでしょうか。



(平成 27 年度算数 A ・ 問題 5 (1) 類題)

点 B と点 C は円周上のどこにあるのかわかっていません。辺 AB と辺 AC の長さもわかっていません。これでは、三角形 ABC がどのような三角形か、決められないように見えます。

そこで、とりあえず、三角形 ABC の「構成の仕方」から、今の場面のパターンがどのようなになっているかを確認してみます。上の「構成の仕方」から、場面のパターンは次のようになっています。

☆ 三角形 ABC で点 A は円の中心になっていて、点 B と点 C は円周上にある。

このパターンだけからでも、次のことはわかります。

※ 辺 AB と辺 AC の長さはこの円の半径と等しい。

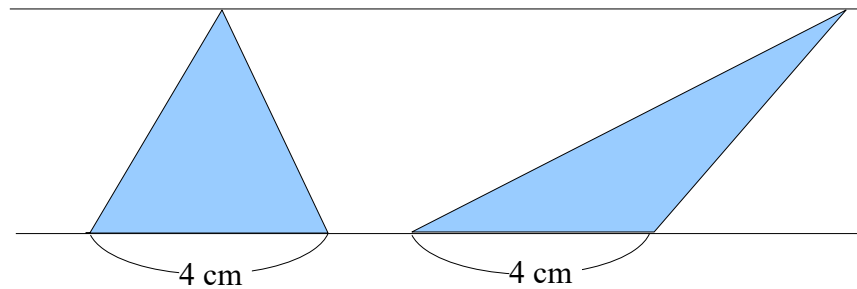
ということは、

※ 辺 AB の長さと辺 AC の長さは等しい。

2 辺 AB と AC の長さが等しいので、上のようにして作った三角形は、実はいつでも二等辺三角形になることがわかります。

場面のパターンだけに基づくこのような説明も、かんたんながら、証明の第一歩です。証明はこうした説明の積み重ねとも言えます。

問題：下の2本の直線は平行な直線です。その間に2つの三角形があります。その2つの三角形のうち、面積が大きいのはどちらでしょう。



(令和5年度算数・問題2(4)類題)

今の場面では、2つの三角形の底辺の長さがどちらも4 cmであることはわかっていますが、その他の辺の長さや平行な直線の幅(直線の間の長さ)などはわかりません。これでは三角形の面積を求めることはできません。

しかし「場面のパターン」に着目すると、次のことはわかっています。

☆ 2つの三角形は平行な直線の間にある。

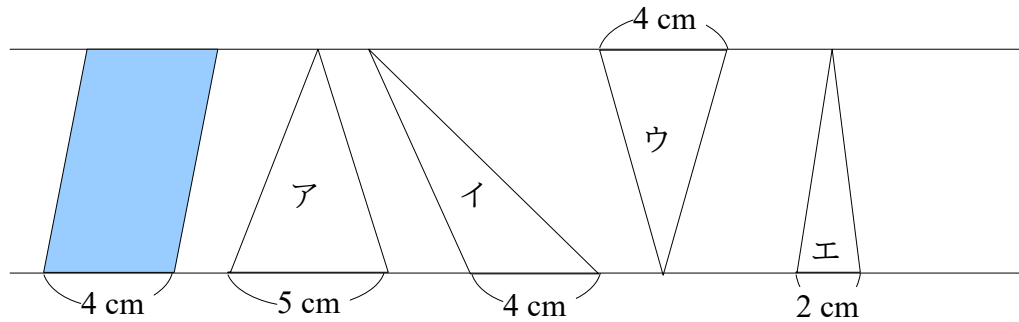
このパターンからわかることはないでしょうか。

4年生で学習したように、平行な直線の間の長さはどこも等しくなっていました。ということは、2つの三角形の高さを考えると、それらの高さは等しくなっているはずです。つまり、「2つの三角形は平行な直線の間にある」というパターンだけから、「2つの三角形の高さが等しい」ということがわかります。

三角形の面積は底辺×高さ÷2で求まるのでした。底辺はどちらの三角形でも4 cmです。高さが何 cmかはわかりませんが、上で見たように等しいことだけはわかっています。「底辺×高さ÷2」の式で底辺の長さと高さがどちらも等しいのですから、2つの三角形の面積も等しいことがわかります。

高さが何 cmかはわからなくても、平行な直線の間にあるという場面のパターンだけから、面積が等しいことがわかりました。

問題：下の2本の直線は平行な直線です。その間に平行四辺形と4つの三角形があります。平行四辺形の面積の半分の面積である三角形はア、イ、ウ、エのうちどれですか。



(平成29年度算数A・問題5類題)

今の場面も平行四辺形や三角形の底辺はわかっているものの、それらの高さはわかっていません。しかし「場面のパターン」に着目すると、やはり次のことはわかっています。

☆ 平行四辺形と4つの三角形はすべて同じ平行な直線の間にある。

4年生で学習したように、平行な直線の間の長さはどこも等しくなっているの
で、この場面のパターンから、上の平行四辺形と4つの三角形は、すべて高さが
等しいことになります。

ここで平行四辺形の面積の公式と三角形の面積の公式を比べてみます。

平行四辺形：底辺 × 高さ

三角形：底辺 × 高さ ÷ 2

上で見たように今の場面では図形の「高さ」はすべて等しくなっています。で
すから、もしも三角形の「底辺」の長さが平行四辺形の「底辺」の長さと等しけれ
ば、「底辺 × 高さ」の積は平行四辺形と三角形で等しくなります。そして、三角形
では最後に「÷2」をするので、面積は平行四辺形の半分になるはずですよ。

したがって、底辺の長さが4 cmのイとウが面積が半分になる三角形です。

問題 :長方形アイウエで、まず、対角線イエをひきます。次に、辺アイのちょうど真ん中に点カをとり、点カと頂点エを結びます。また辺イウのちょうど真ん中に点キをとり、点キと頂点エを結びます。すると、長方形アイウエは4つの三角形に分けることができます。

この4つの三角形は同じ面積のように見えますが、本当に同じ面積になっているでしょうか。

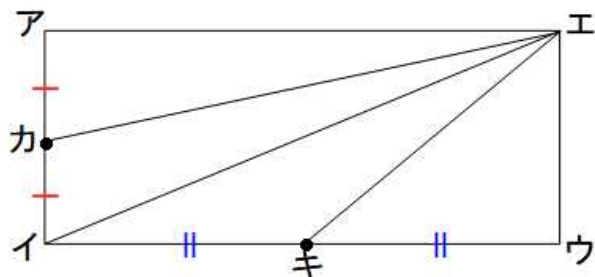
(平成25年度算数B・問題3(2)類題)

今の図形の「構成の仕方」からわかる、場面のパターンは次のようになります。

☆ 長方形アイウエが4つの三角形に分かれており、辺アカと辺カイの長さは等しく、辺イキと辺キウの長さも等しい。

この場面のパターンを図に表してみます。ただ、長方形の辺の長さはわからないので、とりあえず辺の長さをかってに決め、場面のようにすだけ探てみます。

図を見ると、三角形エイキと三角形エキウは底辺が等しくて高さも等しいことがわかります。ですから、これら2つの三角形の面積は等しいことがわかります。



三角形エアカで辺アカを底辺とみて、三角形エカイで辺カイを底辺と見ると、高さはどちらも長方形の辺アエの長さと同じになります。そして辺アカと辺カイの長さは等しいので、三角形エアカと三角形エカイも、底辺の長さが等しく高さも等しい三角形になっています。ですから、これら2つの三角形の面積も等しいことがわかります。

また長方形は対角線で合同な2つの三角形に分かれることを思い出すと、三角形アイエと三角形エイウの面積は、どちらも長方形の半分になっています。したがって、図に現れる4つの三角形の面積は、いずれも長方形の面積の半分の半

分、つまり4分の1になっています。

ここから、4つの三角形の面積はすべて等しいことがわかります。

長方形が対角線で面積の等しい2つの三角形に分かれた上に、長方形の辺を2等分したので、そこにできる三角形の底辺が等しくなることが、4つの三角形の面積が等しくなる理由だと言えます。

ここでは、長方形の辺の長さは、4つの三角形の面積が等しくなる理由にはまったく関係していません。たいせつなのは、最初の四角形が長方形であること、長方形が対角線で分けられていること、点カと点キが辺を2等分するようにとられているという場面のパターンだけです。

長方形であることは、角が直角であることから、分けられた三角形の「高さ」として辺エウや辺アエを用いることに関わっていました。

対角線を引いたことは、まず長方形を面積の等しい2つの部分に分けることに関わっていました。

そして、点カと点キが辺を2等分するようにとったことで、分けられた三角形の底辺の長さが等しいことがわかりました。

逆に言えば、この場面のパターンを持つならば、どのような長方形を最初に選んでも、作られる4つの三角形の面積は等しくなることが、同じように説明できます。

一方で、もとの四角形を平行四辺形にすると、対角線で面積を二等分することはできますが、角が直角とは言えないので、辺の長さを「高さ」として用いることができません。このときは、向かい合う辺が平行であることを利用して、「高さ」を考え直す必要があります。

またもとの四角形を台形に変えると、対角線で面積が等しい2つの部分に分かれるとは言えないので、今回の説明が使えなくなってしまいます。

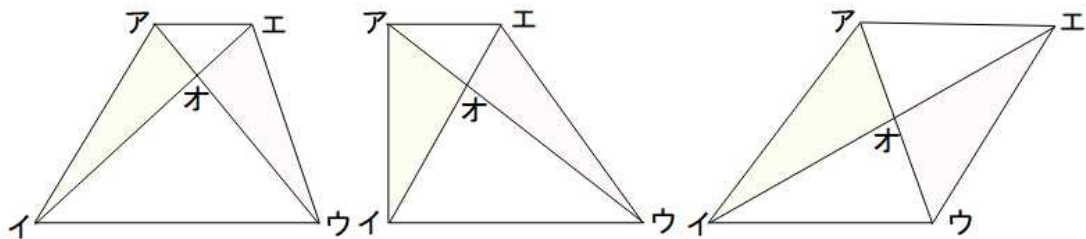
問題：辺アエと辺イウが平行な台形アイウエを考えます。

対角線アウと対角線イエを引き、交わった所を点オとします。この2本の対角線で台形は4つの三角形にわかれます。

このとき、三角形アイオと三角形エウオとでは、どちらの方が大きいでしょうか。

(平成22年度算数B・問題4類題)

台形アイウエがどのような台形なのかわかりません。台形アイウエの形により、三角形アイオと三角形エウオの形もいろいろに変わりそうです。



そもそも辺の長さが何 cm なのかわかりませんから、面積を求めてくらべることもできません。

そこでとりあえず、今の図形の「構成の仕方」からわかる、場面のパターンを考えて、そこから手がかりをさがしてみます。今の場面のパターンは次のようになっています。

☆ 辺アエと辺イウが平行な台形アイウエに

対角線アウとイエが引かれている。

このパターンだけから、三角形アイオと三角形エウオについてわかることはないでしょうか。

三角形アイオの面積を直接求めるのは難しそうですが、図をよく見ると、三角形アイオの面積は、三角形アイウの面積から、三角形オイウをひけば求まりそうです。しかも、三角形アイウについては、底辺は台形の下底に等しく、高さは台形

の高さに等しいこともわかります。したがって、

$$(\text{三角形アイウの面積}) = (\text{台形の下底}) \times (\text{台形の高さ}) \div 2$$

となります。そして、ここから三角形オイウの面積をひけば三角形アイオの面積が求まります。三角形オイウの高さがわかりにくそうなので、三角形オイウの面積を求めるのはむずかしいですが、とりあえずわかったことを、次のようにまとめておきます。

$$\begin{aligned} (\text{三角形アイオの面積}) &= (\text{三角形アイウの面積}) - (\text{三角形オイウの面積}) \\ &= ((\text{台形の下底}) \times (\text{台形の高さ}) \div 2) - (\text{三角形オイウの面積}) \end{aligned}$$

同じように考えると、三角形エウオの面積は、三角形エイウの面積から 三角形オイウの面積をひけば求めることができ、しかも三角形エイウの面積は台形の下底と台形の高さを使って求めることができそうです。つまり、三角形エウオの面積は次のようにして求められそうです。

$$\begin{aligned} (\text{三角形エウオの面積}) &= (\text{三角形エイウの面積}) - (\text{三角形オイウの面積}) \\ &= ((\text{台形の下底}) \times (\text{台形の高さ}) \div 2) - (\text{三角形オイウの面積}) \end{aligned}$$

この2つの求め方を見ると、三角形アイオの面積と 三角形エウオの面積はまったく同じになっています。つまり、この2つの三角形の面積は、どちらかが大きいということはなく、いつも同じ面積になっていることがわかります。

辺の長さはわかりませんが、次の2つの考え方により、面積を比較することができたのです。

- ・ 大きめの三角形から同じ三角形をとりのぞけばよい
- ・ 大きめの三角形は、場面のパターンから、どちらも台形の下底と高さを用いて面積を求めることができる

2番目の考えを進めるために場面のパターンが必要でした。逆に場面のパターンだけあれば、2番目の考えができて、面積を比べることができるのです。

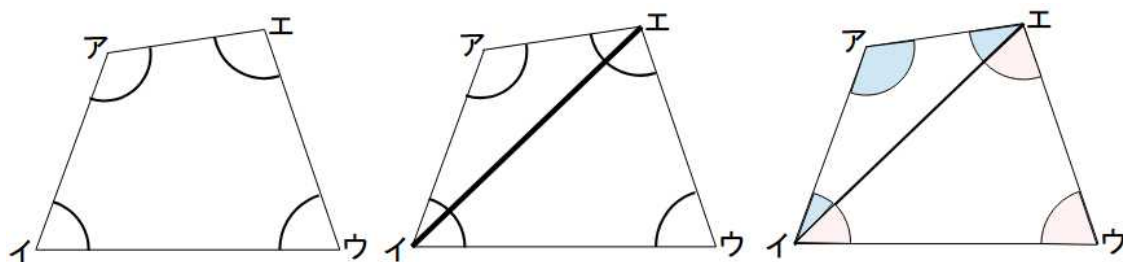
問題：三角形の3つの角の大きさの和が 180° であることを使って、四角形の4つの角の大きさの和を求める式を書きましょう。

(平成21年度算数A・問題5(1)類題)

今、四角形の4つの角の大きさの和を求めようとしているので、考えている図形は四角形です。四角形の「構成の仕方」からわかる、場面のパターンは次のようになります。

☆ 4つの頂点が4本の辺で結ばれている。(どの3つの頂点も1本の直線の上にはのっておらず、辺どうしは交わっていない)

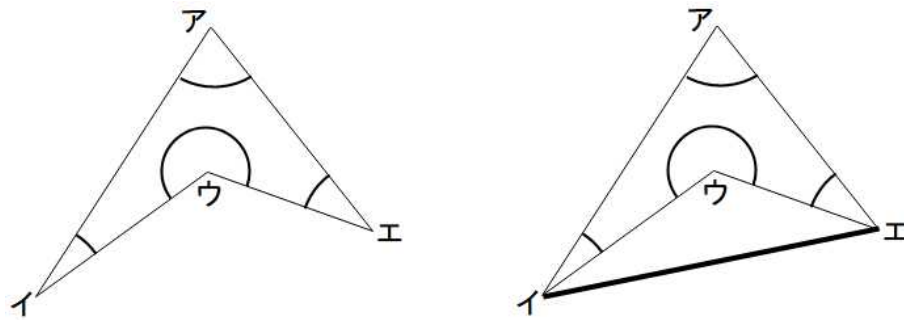
ただ、四角形の形そのものはわからないので、とりあえずかってに四角形を決め、場面のようにだけ探してみます。その際、「三角形の3つの角の大きさの和が 180° であること」を使うということから、四角形を対角線で2つの三角形に分けてはどうかと考えてみます。すると、例えば下の図のように、四角形アイウエを対角線イエで2つの三角形に分けると、四角形の4つの角のうち、頂点イのところの角と頂点エのところの角が2つに分かれることがわかります。



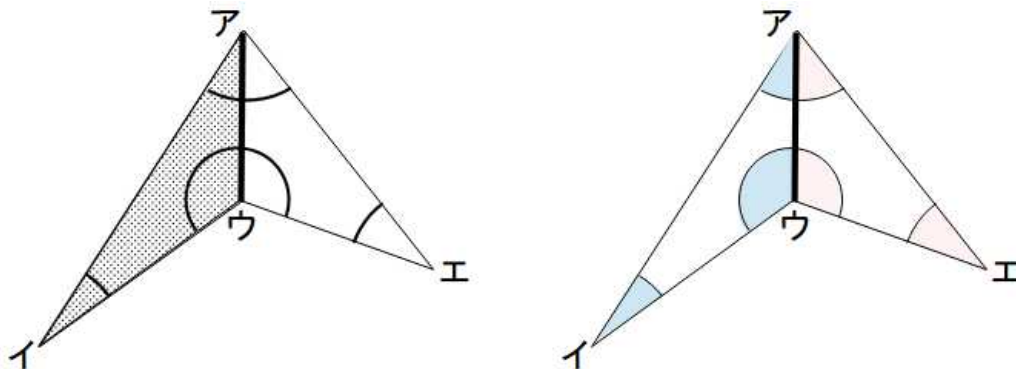
ここから、四角形の4つの角の大きさの和は、三角形アイエの3つの角の大きさの和と、三角形イウエの3つの角の大きさの和を合わせたものになります。したがって、4つの角の大きさの和を求める式は次のようになります。

$$\text{三角形アイエの角の和} + \text{三角形イウエの角の和} = 180^\circ + 180^\circ$$

しかし☆のような場面のパターンであれば、下図の左のような四角形でもよいはずですが。この時、対角線イエを引いて四角形を2つの三角形に分けることができません。このときは、三角形の3つの角の大きさの和を使って、四角形の4つの角の大きさを求めることができないのでしょうか。



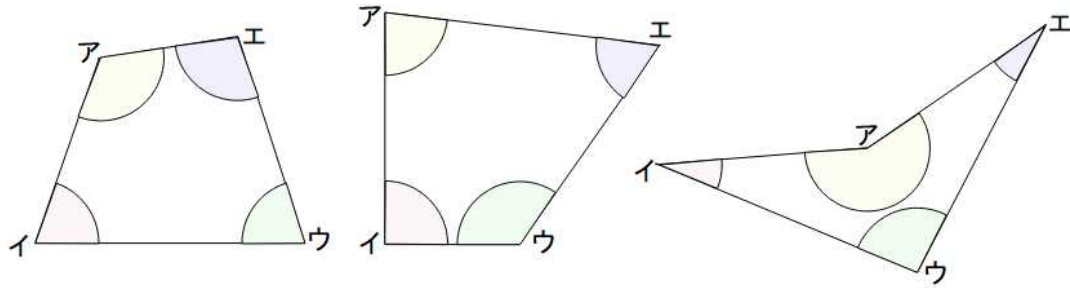
この時は、対角線アウを引くと、やはり四角形アイウエを三角形アイウと三角形アエウという2つの三角形に分けることができます。



したがって、このような三角形でも、4つの角の大きさの和は、四角形を2つの三角形に分けて考えることができます。

四角形であるという場面のパターン、つまり☆のような場面のパターンがあれば、2つの三角形に分けることができ、いつでも同じ考え方をを用いることができるのです。

問題：下のように、いろいろな四角形について、4つの頂点を中心として円の一部をかいて、色をぬりました。ただし、円の半径はいつも同じにしています。



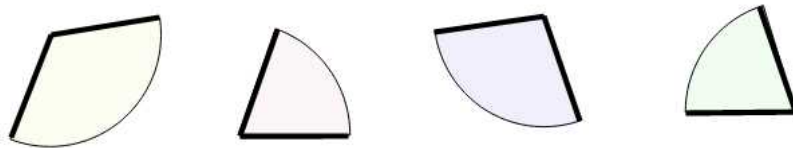
四角形をいろいろに変えても、4つの色をぬった部分を集めてできる図形の面積が同じになることを、説明してみましょう。

(平成20年度算数B・問題3(2)類題)

四角形の形や円の半径が何 cm かはわかりませんが、図の「構成の仕方」から、次のような場面のパターンがあることはわかります。

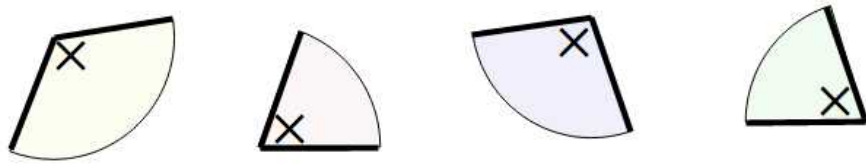
☆ 四角形の各頂点を中心として、同じ半径の円の一部がかかっている。

この場面のパターンで、円の半径がいつも同じなので、4つの色をぬった部分の半径にあたる線の長さ、つまり下の太線の部分の長さはすべて同じであることはわかります。



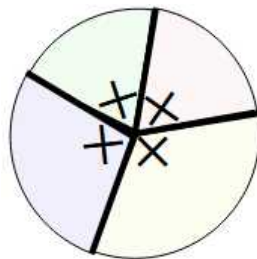
つまり、太線のところをつけると、ぴったりくっつくことになります。

また場面のパターンから、上の太線ではさまれた角の大きさは、四角形の頂点のところの角の大きさと等しくなっていることもわかります。



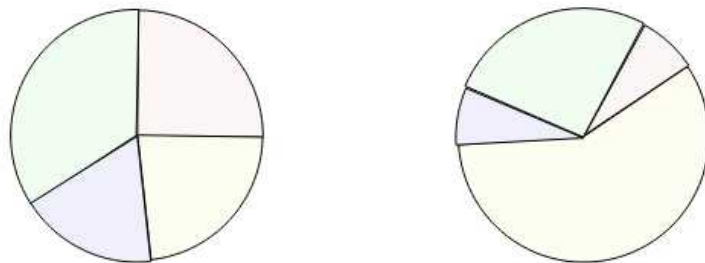
したがって、上の×をつけた部分の角の大きさを合わせると、四角形の4つの角の大きさの和に等しくなります。つまり、×を合わせると 360° となり、ちょうど一周するような形になります。

太線どうしがぴったりとくっつき、×のついた4つの角をあわせると一周するということは、結局、4つの図形をあわせると、1つの円になるはずです。実際、ためしてみると、下のような1つの円になります。



太線どうしがくっつくことは、もとの四角形の形とは関係なく、同じ半径で円をかいたことからわかるのでした。また×のついた部分をあわせると一周した形になるのは、四角形の4つの角の和が 360° になることからわかったことなので、やはりもとの四角形の形とは関係ありません。

だとすると、他の四角形の場合も同じようにできるはずです。そこでためしてみると、他の四角形のときも、4つの色をぬった部分をあわせると、下のように1つの円になります。



つまり、もとの四角形の形に関係なく、場面のパターンだけから、4つの色をぬった部分をあわせると同じ半径の1つの円になることがわかります。そして、あわせた面積はいつもこの円の面積となるので、いつも等しくなるのです。

問題：長方形アイウエの中に、辺アイと平行な直線を引きます。次に、今の直線で分けられた左側の部分に、辺エアと平行な直線を引きます。ただし、右側の部分までは伸ばしません。最後に右側の部分にも辺エアと平行な直線を引きますが、これも左側の部分までは伸ばしません。

今引いた3本の直線と、辺アイ、イウ、ウエ、エアが交わる場所に、それぞれ点カ、キ、ク、ケをとります。

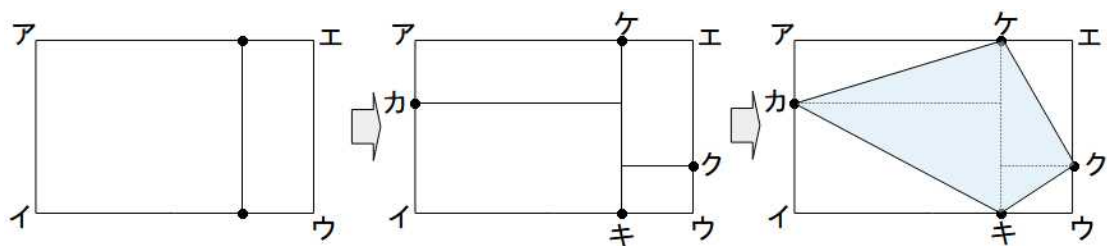
このとき、四角形カキクケの面積は、長方形アイウエの面積の半分になるでしょうか。

(平成24年度算数B・問題3(2)類題)

今の図形の「構成の仕方」からわかる、場面のパターンは次のようになります。

☆ 長方形アイウエの中に、辺と平行線に引いた3本を用いて作られた四角形カキクケがある。

☆の場面のパターンを図に表してみます。ただ、長方形の辺の長さもわかりませんし、3本の直線を引く位置もわかりません。そこで、☆のパターンにだけ注意をして、長さや位置はかってに決めて、とりあえずかいてみます。それにより、場面のようすを観察してみます。



四角形カキクケの面積が長方形アイウエの面積の半分になるのかを確かめたいのですが、今、わかっているのは☆のような場面のパターンだけです。

そこで、場面のパターンだけからわかることが、ほかにもないかを考えてみます。

☆からまず、四角形アイウエは長方形なので、4つの頂点のところの角はす

べて直角になっていることはわかります。

最初に引いた直線ケキは辺アイと平行です。辺アイは辺エアと垂直になっています。4年生で学習したように、平行な2本の直線はある1本の直線に垂直になっているので、ケキも辺エアと垂直になっているはずです。ですから、点ケのところにできる角は直角だとわかります。

同じように考えると、ケキは辺イウとも垂直になっているので、点キのところにできる角も直角だとわかります。

左側の部分に引いた直線は、辺エアと平行になるようにしました。辺エアは辺アイに垂直になっているので、左側に引いた直線も辺アイに垂直になっているはずです。ですから、点カのところにできる角は直角だとわかります。

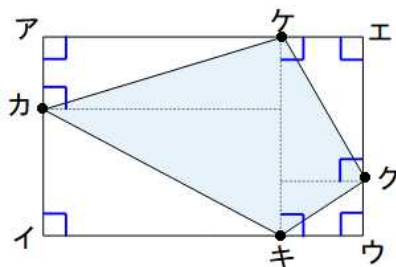
同じように考えると、右側の部分に引いた直線は、辺ウエと垂直になっているはずです。ここから、点クのところにできる角は直角だとわかります。

ここまでのことをまとめると、☆のような場面のパターンだけからでも、次のようなことはわかります。

※1 頂点ア、イ、ウ、エのところの角はすべて直角になっている。

※2 点カ、点キ、点ク、点ケのところにできた角は直角になる。

これらのことを図でも表しておくと、次のようになります。



図を見ると、もとの長方形の頂点のところの角だけでなく、あとから引いた線によりできた角も、すべて直角になっていることがわかります。ここから、中にできた4つの小さい四角形は、どれも4つの角が直角の四角形となり、したがってすべて長方形になることがわかります。

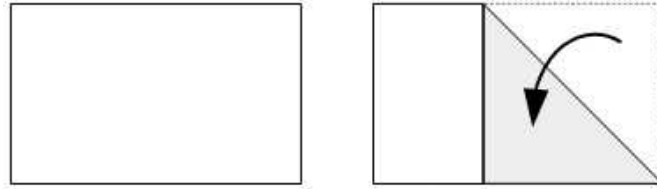
四角形カキクケは、これら4つの長方形を半分にしたものを集めた形になっています。一方で、もとの長方形アイウエはこれら4つの長方形を集めた形になっています。四角形カキクケは半分にしたものを集めているので、もとの長方形の面積の半分になっていることがわかります。

四角形カキクケの面積が四角形アイウエの面積の半分であることは、もとの長方形の辺の長さや、あとから引いた線の位置についての情報を使わずに、説明することができました。利用したのは、四角形アイウエが長方形であることと、あとから引いた線が長方形の辺と平行になっていることという、場面のパターンだけです。

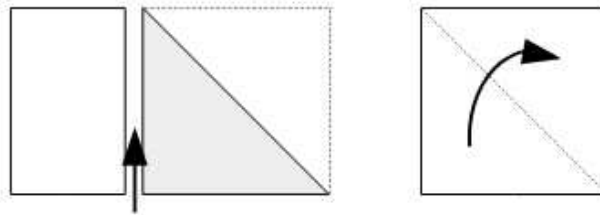
ですから、このパターンを持つような場面であれば、中にできた四角形の面積が必ずもとの長方形の半分になることが、まったく同じようにして説明できることになります。

つまり、場面のパターンだけから説明できることは、同じパターンをもつどのような場面についても説明ができるということです。

問題：横長の長方形を次のように折ってから、切り取りました。



① 右側の辺が下の辺に重なるように折る。



② 直角三角形の左側で切り取る。③ 切り取った三角形を開く。

このようにしてできた四角形は正方形のように見えます。本当に正方形ができたのでしょうか。正方形だと言えるとすれば、それはなぜですか。また言えないとしたらそれはなぜですか。

(平成23年度算数B・問題3(1)(2)類題

令和5年度算数・問題2(2)参照)

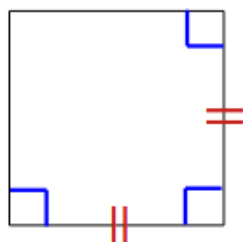
最後にできた四角形の右上と右下の角は、もとの長方形の角でしたから、直角であることはわかります。また左下の角は、②で長方形の右上の角にそって切り取ってできたのですから、やはり直角になっているはずです。

①の折り方から、最後にできた四角形の下の辺の長さは、右の辺の長さと等しくなっています。

以上のことから、最後の四角形の「構成の仕方」から、今の場面のパターンは次のようになっているとわかります。

☆ 右上と右下、左下の角が直角で、下の辺の長さが右の辺の長さと等しい四角形になっている。

☆の場面のパターンを図で表してみると、次のようになります。



この四角形の3つの角が直角になっています。四角形の4つの角の大きさをたし合わせると 360° になるのですでしたから、残った左上の角の大きさも 90° になることがわかります。つまり、この四角形の4つの角はすべて直角であることがわかりますから、この四角形は少なくとも長方形になっていることがわかりました。

長方形になっているということは、向かい合う辺の長さは等しくなります。ですから、上の辺の長さは下の辺の長さと等しくなりますし、左の辺の長さは右の長さと等しくなります。

ところが、下の辺の長さと右の辺の長さは等しいのですでしたから、4本の辺の長さはすべて等しくなります。

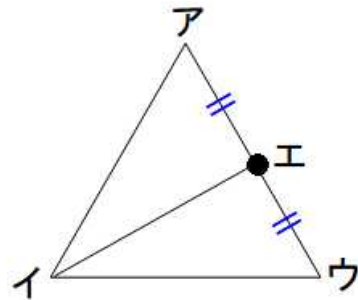
結局、最後にできた四角形は、4つの角が直角で、4辺の長さが等しくなるので、確かに正方形であるとわかります。

切り取る前の図形が長方形なので、その角は直角なのですが、図形の作り方から、これらの直角が最後の図形にも受けつがれること、さらに①の折り方から下の辺の長さがもとの長方形の右側の辺の長さになることが、最後の図形が正方形になる理由だと考えられます。つまり、場面のパターンだけで、正方形ができることを説明することができました。

問題：ある人が、正三角形アイウの辺アウのちょうど真ん中に点エをとると、辺イウとイエで作られる角は 30° になると言っています。

これは本当でしょうか。

本当だとしたら、なぜそうなるのでしょうか。また本当でないとしたら、なぜ本当ではないのでしょうか。



(平成 27 年度算数 B・問題 3 (2) 類題)

「構成の仕方」から、今の場面のパターンは次のようになっています。

☆ 正三角形アイウの辺アウのちょうど真ん中の点エと頂点イが結ばれている。

角度については何も示されていませんが、三角形アイウが正三角形なので、頂点イのところの角の大きさが 60° になることは、☆の場面のパターンだけからわかります。ですから、イエが角イをちょうど半分にすることがわかれば、辺イウとイエで作られる角の大きさは、 60° の半分なので 30° になるはずです。

そこで、場面のパターンだけからでも、イエが角イをちょうど半分にするとわかるのかを考えてみます。まず、三角形アイウが正三角形なので、次のことはわかります。

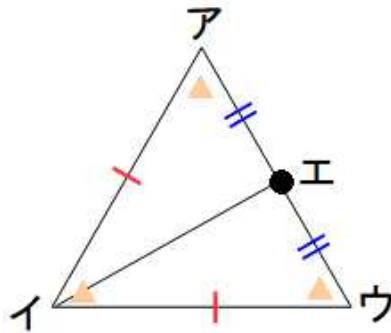
※1 辺アイ、辺イウ、辺アウの長さは等しい。

※2 角ア、角イ、角ウの大きさは 60° になっている。

また、点エは辺アウのちょうど真ん中にしたので、次のこともわかります。

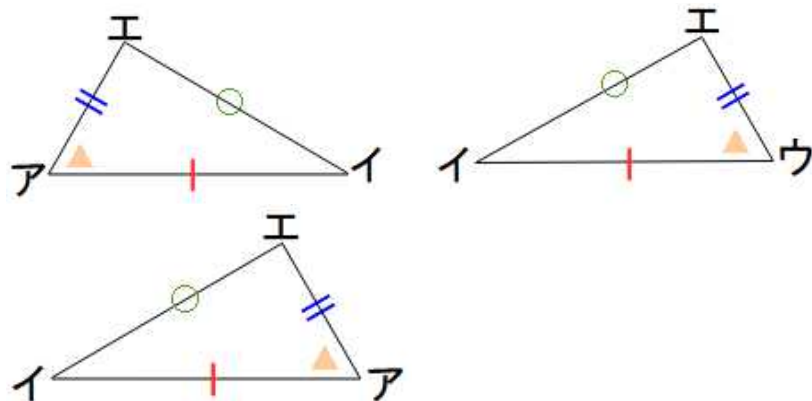
※3 アエとウエの長さは等しい。

場面のパターンからわかった、これらのことを、図に表してみると、次のようになります。なお、▲は角の大きさが 60° であることを表しています。また、ほんとうは辺アウにも | の印がつくのですが、ゴチャゴチャになるので、とりあえずつけていません。



これを見ると、三角形イアエと三角形イウエは合同になっているように見えます。そこで、この2つの三角形が合同になっていると、場面のパターンだけからわかるのかを確認してみます。

上の図だと、この2つの三角形が見にくいので、三角形イアエと三角形イウエをそれぞれ取り出し、さらに向きをそろえてかきなおしてみます。



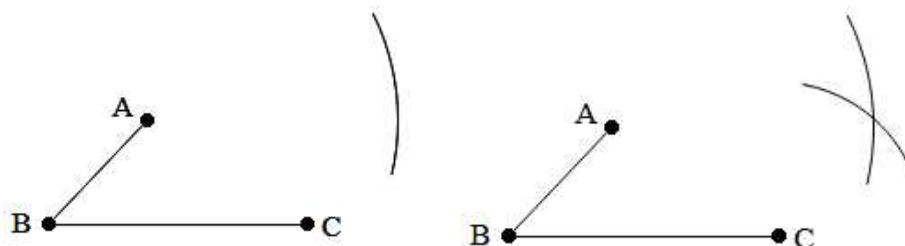
さらに三角形イアエをうらがえしてみると、三角形イウエとくらべやすくなります。なお、○は、2つの三角形の辺イエが、もともと同じ線であったことを表しています。

比べてみると、三角形イウエは、三角形イアエと「3つの辺の長さ」を同じにしてかいた三角形になっていることがわかります。あるいは、「2つの辺の長さとその間の角の大きさ」を同じにしてかいた三角形と考えることもできそうです。

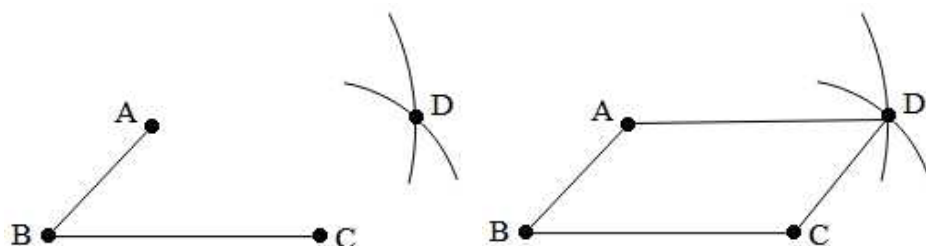
5年生で学習した合同な三角形のかき方を思い出すと、三角形イウエは三角形イアエと合同とわかります。合同な図形では対応する角の大きさは等しいので、三角形イアエの角イと、三角形イウエの角イは同じ大きさです。60°が同じ大きさの2つの角にわかれたことになるので、角イの大きさは30°だとわかります。

問題：点 A と点 B をかってにとって結びます。また、点 C を点 A、B と一直線にならないようにとって、点 B と点 C を結びます。

今の結んだ線が辺 AB と辺 BC となるような四角形を、次のようにしてかきました。



- ① 点 A を中心として半径が辺 BC の長さと同じ円の一部をかく。 ② 点 C を中心として半径が辺 AB の長さと同じ円の一部をかく。



- ③ 交わった点を D とする。 ④ 点 D を点 A、点 C とそれぞれ結ぶ。
- このようにして作った四角形は、どのような四角形になりますか。

(平成 26 年度算数 A・問題 6 類題)

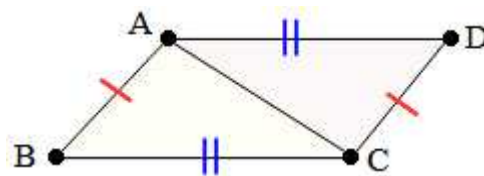
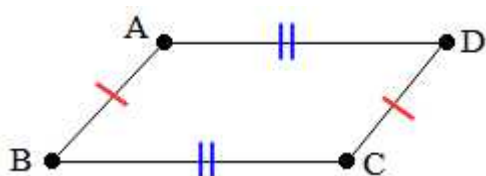
四角形の「構成の仕方」から、今の場面のパターンとしてわかるのは、次のようなことだけです。

☆ 四角形 ABCD で辺 AB の長さと辺 DC の長さは等しく、
辺 AD と辺 BC の長さは等しい。

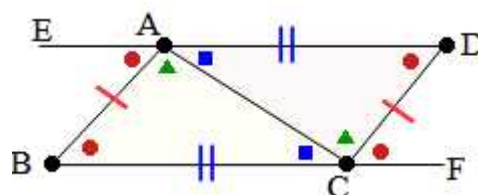
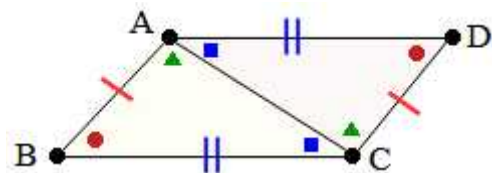
四角形 ABCD は見た目は平行四辺形です。しかし、平行四辺形は 2 組の辺がそれぞれ平行になっている四角形でしたが、今の場面では、辺の平行についてもわかっていません。

そこで、今の場面のパターンである☆だけから、2組の辺が平行であることがわかるのかどうかを、調べてみることにします。2組の辺が平行であるためには、4年生で学習したように、それらの辺が1本の直線に垂直であればよいのです。そして垂直は、交わってできる角が直角のことでしたから、角の大きさについての情報が必要になりそうです。

☆のパターンを図で表してみると、下図の左のようになります。これを見ると、例えば点Aと点Cを結ぶと、右のように2つの合同な三角形ができそうです。



5年生で学習したように、合同な図形では対応する角の大きさは等しくなります。これも図に表してみると、下の左のようになります。

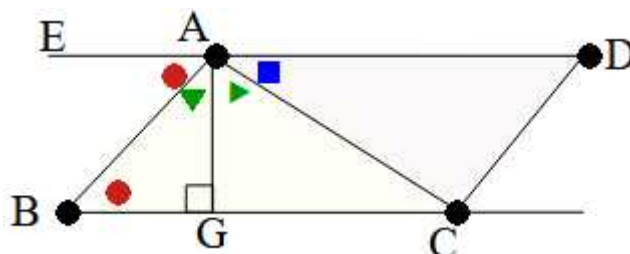


5年生で学習した三角形の3つの角の大きさの和が 180° になることを思い出すと、 $\text{●} + \text{▲} + \text{■} = 180^\circ$ です。すると、上の右の図のように、辺ABとEAで作られる角の大きさや、辺DCとFCで作られる角の大きさも、●になることがわかります。

場面のパターンでは辺の長さについての情報しかわかっていませんでした。しかし、そこから合同な三角形を作ることで、角の大きさについての情報も、いろいろと集まってきました。

辺ADと辺BCが平行であるためには、上で確認したように、辺ADと辺BCが1本の直線に垂直に交わっているかを調べることになります。まず辺BCと垂直

に交わる直線を考えるために、点 A を通るような平行四辺形の高さの線を引いてみます。この線を引くと、▲の角は▼と▶に分かれます。

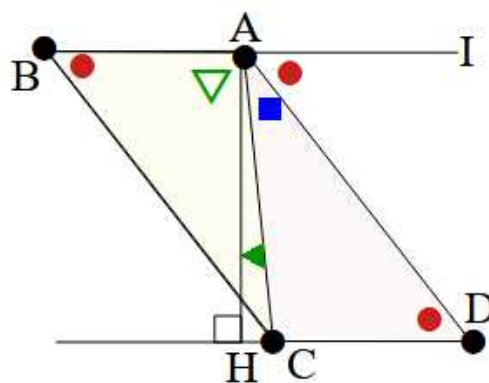


AG は平行四辺形の高さとして引きましたから、点 G のところにできる角の大きさは直角になります。つまり、辺 BC は AG に垂直に交わっています。

三角形 ABG は直角三角形なので、●+▼=90°になることがわかります。AG と EA で作られる角の大きさも●+▼ですから、これも 90°になり、辺 AD と AG で作られる角の大きさも 90°になります。つまり、辺 AD は AG に垂直で交わっています。

辺 BC と辺 AD は 1 本の直線 AG に垂直に交わっているので、BC と AD は平行であるとわかります。

平行四辺形を右のように向きを変えて、同じように考えると、辺 AB と辺 DC が平行になっていることもわかります。今度は辺 AB と辺 AC で作られる角▲は、▼と◀に分かれています。



三角形 ADH の 3 つの角の大きさの和は 180°ですから、点 H のところの角が 90°であることに気をつけると、●+■+◀=90°とわかります。ここで、AH と AI で作られる角を見てみると、ちょうど●と■と◀で作られていることがわかります。したがって、AH と AI で作られる角の大きさも 90°だということになり、辺 AB と AH で作られる角▼の大きさも 90°とわかります。つまり、辺 AB は AH に垂直に交わっています。

AH は辺 DC を底辺とした時の、点 A を通る高さですから、辺 DC は AH に垂直に交わっています。結局、辺 AB と辺 DC は 1 本の直線 AH に垂直に交わってい

ることになり、辺 AB と辺 DC が平行になっていることがわかります。

辺 BC と AD は平行で、辺 AB と辺 DC も平行であることがわかりました。2 組の辺が平行なので、四角形 ABCD は平行四辺形になっていることがわかります。

場面のパターンでは辺の長さについての情報しかわかりませんでした。しかし、そこから合同な三角形を見つけることで、角の大きさの関係がわかり、さらに直角をうまく作ることで、1 本の直線に垂直になること、つまり平行であることが説明できたのです。

このように、向かい合う辺が平行であることは、少し遠回りをしますが、場面のパターンだけから説明することができました。

場面のパターン
向かい合う**辺の長さ**は等しい
↓
対角線でできる 2 つの三角形は**合同**
↓
向かい合う**角の大きさ**は等しい
↓
辺が高さの線に**垂直**に交わっている
↓
向かい合う辺は**平行**になっている

逆に言えば、今の説明では、辺の長さが何 cm であるかや、角の大きさが何度であるかは、まったく必要がありませんでした。ですから、向かい合う辺の長さが等しいという場面のパターンだけわかっていれば、今の説明をすることができます。

ですから、どんな四角形であっても、問題のような「構成の仕方」で作られた四角形であれば、今の場面のパターンを持っていますから、同じ説明を考えることができ、そうして作られた四角形が、必ず平行四辺形になることがわかります。

【補 足】

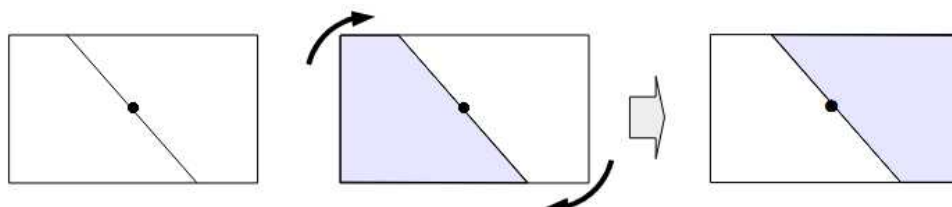
中学校の数学では、「錯角」の大きさが等しいという関係を説明の中で使うことができ、それによりもう少し簡単に、上と同じ説明をすることができます。また、向かう合う辺の長さが等しい四角形は上で説明したように平行四辺形に必ずなるので、中学校の数学では、ある四角形が平行四辺形かどうかを判断する根拠として、「向かい合う辺の長さが等しい」ことを用いることができるようにな

ります。

さらに、上の説明では、向かい合う辺の長さが等しいことから、向かい合う角の大きさが等しいことを確かめることが、説明の中で重要なポイントになっていました。そのため、「向かい合う角の大きさが等しい」四角形についても、上の説明の途中からの部分を用いることで、平行四辺形であると説明することができます。そして、「向かい合う角の大きさが等しい」ことも、中学校の数学では、四角形が平行四辺形かどうかを判断する根拠として、用いることができるようになります。

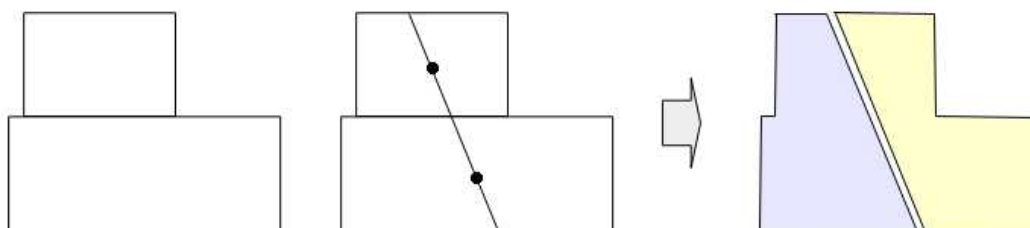
このように、「向かい合う辺の長さが等しい」という、シンプルな場面のパターンから、話が広がり、最初はわからなかったことが次々に説明されていくことが、中学校で証明を学習することの、ひとつの楽しみです。またどのように説明すれば、相手にわかってもらえるかを考え、説明を工夫することも、もう一つの楽しみだと言えます。

問題：長方形は6年生で学習したように、点対称な図形です。ですから、対称の中心を通る直線を引くと、 180° 回転させたときに、ぴったり重なるような2つの図形に分かれます。



下のように長方形を2つ合わせた形は、点対称ではありません。それぞれの長方形の対称の中心を結んでも、ぴったり重なるような2つの図形には分かれません。

しかし、このとき分かれた2つの図形の面積は等しくなります。



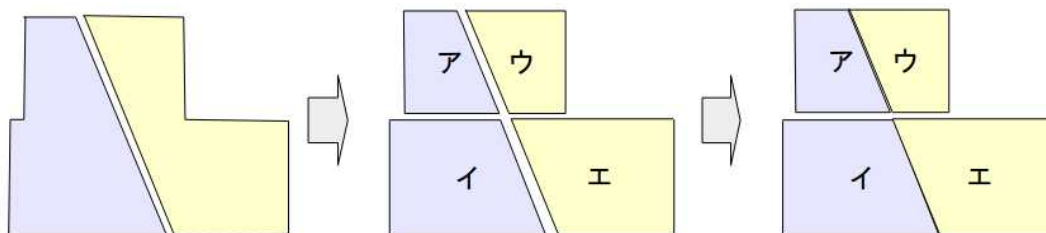
2つの図形の面積はなぜ等しくなるのでしょうか。

(平成27年度算数A・問題5(1)類題)

今の図形の「構成の仕方」から、場面のパターンは次のようになっています。

☆ 長方形を2つ重ねた形が、それぞれの点対称の中心を通る直線で分けられている。

そこで、最後の2つの図形を、もともとの2つの長方形をイメージしながら、上下に分けてみると、下の図の真ん中のようになります。



ここで、アとウはもともと上の長方形を半分にしたものでした。ですから、場面のパターンだけからでも、次のことはわかります。

※1 真ん中の図のアとウの面積は等しい。

同じように、イとエも下の長方形を半分にしたものでしたから、場面のパターンだけから、次のこともわかります。

※2 真ん中の図のイとエの面積は等しい。

問題の最後に出てきた2つの図のうち、左側はアとイを合わせたものであり、右側はウとエを合わせたものです。ここで※1からアの面積とウの面積が等しく、※2からイの面積とエの面積が等しいので、アとイを合わせたものの面積と、ウとエを合わせたものの面積は等しくなります。つまり、2つの図形は、もともと面積が等しい図形を組み合わせてできているので、面積が等しくなるのです。

式の形で書くと、次のようになります。

$$\text{※1(式)} \quad (\text{アの面積}) = (\text{ウの面積})$$

$$\text{※2(式)} \quad (\text{イの面積}) = (\text{エの面積})$$

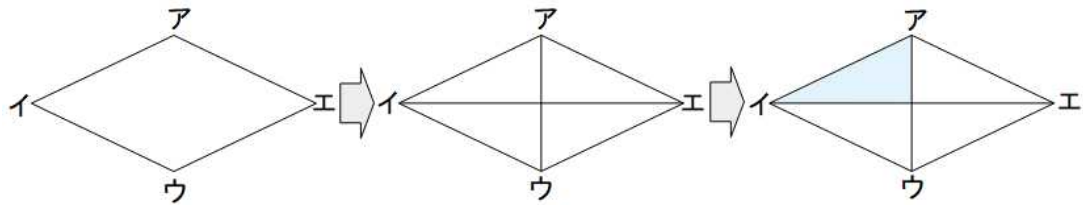
$$\rightarrow (\text{アの面積}) + (\text{イの面積}) = (\text{ウの面積}) + (\text{エの面積})$$

お店でも、コーヒーと紅茶の代金が等しくて、แฮมサンドとたまごサンドの値段が等しかったら、「コーヒーとแฮมサンドを食べたときの代金」と「紅茶とたまごサンドを食べたときの代金」は等しくなります。これは、コーヒーや紅茶、2種類のサンドイッチの値段がわからなくても、わかることです。

同じように、もとの長方形の面積や辺の長さがわからなくても、問題のような

「構成の仕方」で作られた2つの図形の面積が等しいことはわかります。つまり、2つの図形の面積が等しいことは、今の場面のパターンだけから説明することができるのです。

問題 : ひし形アイウエに 2 本の対角線を引いて、下の図のように 4 つに分けました。



この時、右上の図の色をぬった部分は、どのような形になりますか。

(平成 20 年度算数 A ・ 問題 8 (2) 類題)

色をぬった部分は三角形ですが、4 年生で学習した「ひし形の対角線は垂直に交わる」ことを思い出すと、三角形の右下の角は直角になります。したがって、色をぬった部分は、直角三角形になっていることがわかります。

ただ・・・

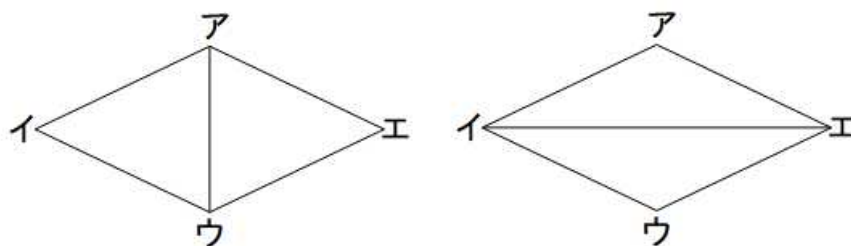
「ひし形」というのは、4 辺の長さがすべて等しい四角形でした。つまり、今、ほんとうにわかっているのは、次のような場面のパターンだけのはずです。

☆ 四角形アイウエで 4 本の辺の長さがすべて等しくなっている。

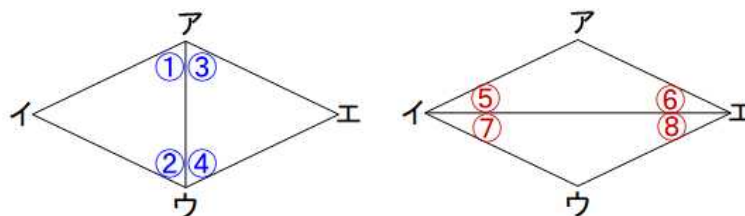
この場面のパターンだけで、対角線が垂直に交わっているとわかり、色をぬった三角形が直角三角形になることがわかるのでしょうか。

そこで、辺の長さが等しいという情報から、角についての情報がわからな
いかを考えてみます。

上で対角線を 2 本引いていましたが、1 本ずつ引いてみると、次のよう
になります。



☆の場面のパターンから、辺アイ、イウ、ウエ、エアの長さは等しいのです。ここから、上の図にあらわれている三角形はすべて二等辺三角形になります。そして、3年生で学習したように二等辺三角形では2つの角が等しくなっていましたから、次の4組の角はそれぞれ等しくなります。



・ ①と② ・ ③と④ ・ ⑤と⑥ ・ ⑦と⑧

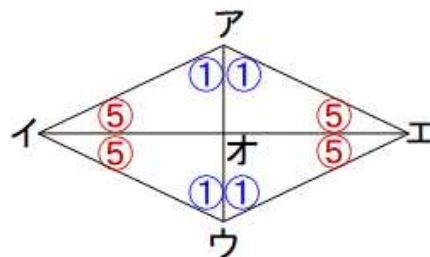
また、三角形イアウと三角形エアウに目を向けると、辺アイと辺エアの長さは等しく、辺イウと辺ウエの長さは等しくなっています。また辺アウは2つの三角形で共通です。つまり、三角形エアウは、三角形イアウと3辺の長さが等しくなるようにかいた三角形になっています。5年生で学習したように、こうした2つの三角形は合同になり、合同な三角形では対応する角の大きさは等しくなります。

ですから、①と③、②と④ もそれぞれ等しくなります。そしてこれを上の①と②、③と④ がそれぞれ等しいことと合わせると、結局、①、②、③、④の4つの角はすべて大きさが等しいことがわかります。

同じように考えると、⑤、⑥、⑦、⑧、の4つの角もすべて大きさが等しいことがわかります。

ここまでわかったことを図に表してみると、次のようになります。

図を見ると、ひし形の4つの角は、①の4つ分と⑤の4つ分からできています。5年生で学習したように四角形の4つの角の大きさの和は 360° ですから、①を4つと⑤を4つ合わせた大きさは 360° になり



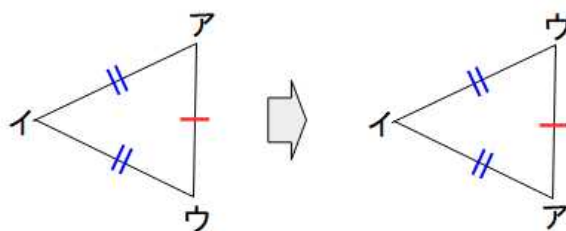
ます。ここから、①と⑤を合わせた大きさは 90° になることがわかります。

問題で色がぬられていた三角形アイオを考えると、この三角形の3つの角の大きさの和は 180° ですが、①と⑤を合わせた大きさは 90° になるので、結局、点オのところにできる角の大きさは 90° であることがわかります。つまり、対角線が交わったところにできる角は直角になっていることがわかり、対角線は垂直に交わることがわかりました。

【補 足】

三角形イアウが二等辺三角形であること、つまり、「三角形イアウで辺イアと辺イウの辺の長さが等しくなっている」という場面のパターンだけから、頂点アのところの角と頂点ウのところの角の大きさが等しくなることもわかります。

三角形イアウをうらがえして、三角形イウアと考えてみます。

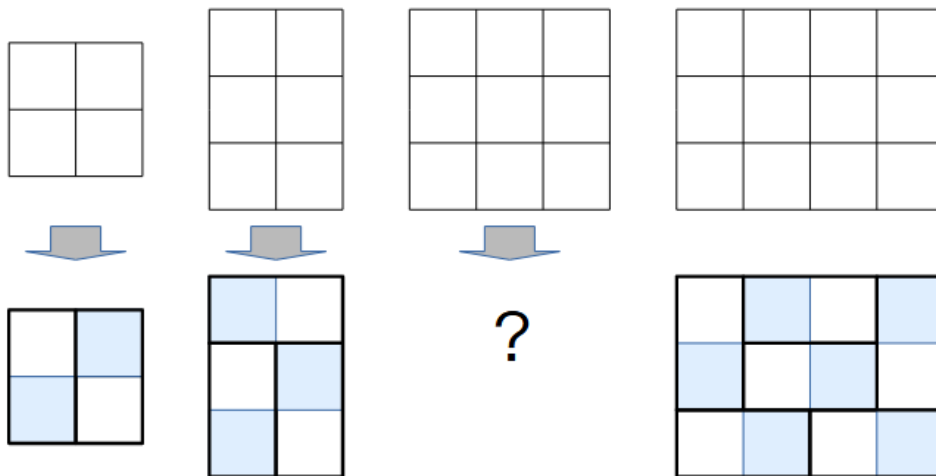


二等辺三角形であることから、辺イアの長さと辺イウの長さは等しいのでした。また辺アウは2つの三角形に共通しています。したがって、三角形イウアは、三角形イアウと3辺の長さが等しくなるようにかいた三角形になっています。5年生で学習したことから、三角形イアウと三角形イウアは合同になることがわかります。そして5年生で学習したように、合同な三角形では対応する角の大きさは等しくなるので、頂点アのところの角と頂点ウのところの角の大きさは等しいと言えます。

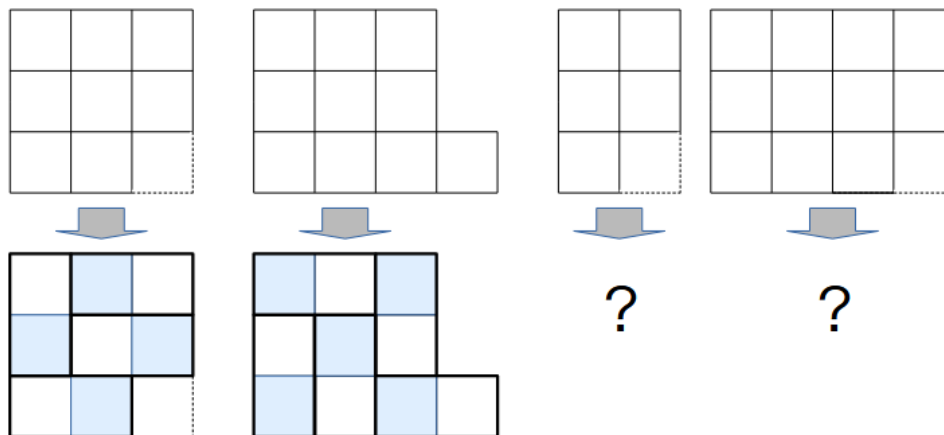
問題 :ある人が、右のような正方形2つからできたタイルを、正方形で集まってできたマス目に、すきまなくしきつめることを考えています。



いくつかの場合を考えてみたら、下のよう
4マス、6マス、12マスの時はしきつめることができましたが、9マスのときは、うまくしきつめることができませんでした。



ところが、9マスのマス目から1マスをとりのぞいたり、1マスをつけくわえたりして、8マスや10マスにすると、しきつめることができました。逆に、6マスや12マスのマス目から、1マスをとりのぞいて5マスや11マスにすると、うまくしきつめられなくなりました。



こうした観察の結果から、この人は次のように考えました。

マス目の数が偶数のときはしきつめることができるけれど、
マス目の数が奇数だとうまくしきつめることができない。

この考え方は正しいでしょうか。

(平成 21 年度算数 B・問題 4 (2)(3) 類題)

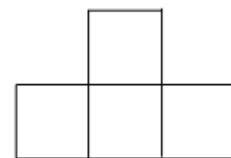
上の観察の結果を見ると、確かに、マス目の数が偶数の場合にはしきつめることができているし、奇数である 9 マスのときはうまくしきつめができないようです。また、9 マスだったマス目も、1 マスをとったりつけたりして、8 マスや 10 マスという偶数のマス目にするとしきつめができるようになるのに対して、6 マスや 12 マスから 1 マスをとって 5 マスや 11 マスという奇数のマス目にするとしきつめができなくなってしまう。

ここまでの観察の結果からすると、偶数のマス目の時はしきつめができて、奇数のマス目の時はしきつめができないと言えそうです。

また、よく考えてみると、もとのタイルは 2 マスからできています。ですから、このタイルがしきつめられたとすると、全部のマス目の数は 2 の何倍か、つまり偶数になるはずです。

このことから、マス目が偶数の時にしきつめることができるという考え方は、正しいように思えます。

しかしもう少し調べてみると、右のようなマス目の時には、うまくしきつめることができないことがわかります。



このマス目は 4 マスですから、マス目の数は偶数です。つまり、マス目の数が偶数でもしきつめることができるとは限らないのです。

ここから、「マス目が偶数個の正方形からできている」という場面のパターンだけからでは、タイルをしきつめることができるとは言えないことがわかります。偶数個であることに加えて、他の条件もさがす必要があります。

算数の問題：数と式編

問題：2.1÷0.7の商(わり算の答え)は、21÷7の商と同じになります。なぜ同じになるのでしょうか。

(平成28年度算数A・問題1(2)類題)

2つのわり算を比べてみると、わられる数(2.1と21)も、わる数(0.7と7)も、どちらも $\frac{1}{10}$ 倍になっていることがわかります。つまり、2つのわり算の「構成の仕方」から、今の場面のパターンは次のようになっています。

☆ 一番目のわり算のわられる数とわる数は、

二番目のわり算のわられる数とわる数の $\frac{1}{10}$ 倍になっている。

このパターンが見えやすくなるように書くと、次のようになります。

$$\ast 2.1 = 21 \times \frac{1}{10} \quad 0.7 = 7 \times \frac{1}{10}$$

2.1÷0.7の商は0.7倍すると2.1になるような数でした(参考：[わり算の学び直しテキスト](#))。商を□で表すと、これは次のように表すことができます。

$$2.1 = \square \times 0.7$$

ここで※の表し方を利用すると、次のようになります。

$$21 \times \frac{1}{10} = \square \times 7 \times \frac{1}{10}$$

$21 \times \frac{1}{10}$ と $\square \times 7 \times \frac{1}{10}$ が等しくなるには、どちらも $\frac{1}{10}$ 倍する前の21と $\square \times 7$ が等しくなればよさそうです。つまり、

$$21 = \square \times 7$$

であればよいことになります。ここから、 $2.1 = \square \times 0.7$ となる□を求めるためには、 $21 = \square \times 7$ となる□を求めればよいことがわかります。

$21 = \square \times 7$ となる□は21÷7の商のことです。したがって、2.1÷0.7の商を求めるには、21÷7の商を求めればよいことになります。

問題：次の4つの式で、●は0でない同じ数を表しています。それぞれの計算の答えは●の表す数より大きくなりますか、小さくなりますか。

(1) $\bullet \times 1.2$ (2) $\bullet \times 0.7$ (3) $\bullet \div 1.3$ (4) $\bullet \div 0.8$

(平成30年度算数A・問題7(2)類題)

かけ算は●を何倍かにする計算で、「何倍か」は「いくつ分か」ということでした(参考：[割合の学び直しテキスト](#))。小数倍の時は、●を10分の1や100分の1したものいくつ分かを考えればよかったのでした。つまり、(1)と(2)の場面のパターンは、次のようになります。

☆ ●のいくつ分かになっている。

●のいくつ分かを考えますから、●の1つ分、つまり●の1倍の時に積(かけ算の答え)は●と等しくなります。そして、1倍より倍が大きければ1つ分より大きいので、積は●より大きくなり、1倍より倍が小さければ1つ分になりないので、積は●より小さくなるのがわかります。

$\bullet \times 1.2$ の積は●を1.2倍した結果です。1.2倍は●を1つ分と、●の10分の1の2つ分ですから、●の1倍より大きくなります。つまり $\bullet \times 1.2$ の積は●よりも大きくなります。

$\bullet \times 0.7$ の積は●を0.7倍した結果です。0.7倍は●の10分の1の7つ分ですから、●の1倍にとどきません。つまり $\bullet \times 0.7$ の積は●よりも小さくなります。

わり算ではその数をかけると●になるような数を求めるのでした(参考：[わり算の学び直しテキスト](#))。つまり、(3)と(4)の場面のパターンは次のようになります。

☆ 何倍かしたときに●になるような数になっている。

わる数が1より大きい時の商(わり算の答え)は、1倍より大きくしないと●にならない数ですから、●より小さくなります。逆に、わる数が1より小さい時の商は、1倍より小さい倍で●になるような数ですから、●より大きくなります。

● $\div$ 1.3の商は、1.3倍してやっと●になるような数ですから、●よりも小さい数です。

● $\div$ 0.8の商は、0.8倍しただけで●になるような数ですから、●よりも大きくなります。

まとめると、

● $\times$ 1.2の積、● $\div$ 0.8の商・・・●より大きくなる。

● $\times$ 0.7の積、● $\div$ 1.3の商・・・●より小さくなる。

となります。

小学校2年生で学習する不等号を使って、少し数学っぽく書くと

$$\bullet \times 1.2 > \bullet \quad \bullet \times 0.7 < \bullet \quad \bullet \div 0.8 > \bullet \quad \bullet \div 1.3 < \bullet$$

となります。

問題：円があります。この円の直径の長さを2倍にします。直径を2倍にした円の円周の長さは、もとの円の円周の長さの何倍ですか。

(平成30年度算数A・問題7(2))

ここでは円の直径が何cmかがわかっていません。これでは2つの円の円周を求めることができず、一方の円がもう一方の何倍かも求めることができないように見えます。

円周を求めることはできないのですが、とりあえず、今の場面のパターンとしてわかることは何かを、円の「構成の仕方」からさぐってみます。

2つの円を円1と円2と表すと、円2の直径は円1の直径の2倍であることはわかっています。つまり場面のパターンは次のようになります。

☆円2の直径は円1の直径の2倍になっている。

また、円周と直径の関係は次のようになっていることも、5年生の時に学習しました。

円周＝直径×円周率

これら2つのことを組み合わせると、次のようなになります。

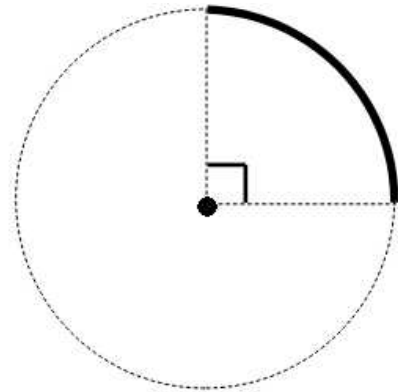
$$\begin{aligned}\text{円2の円周} &= \text{円2の直径} \times \text{円周率} \\ &= (\text{円1の直径} \times 2) \times \text{円周率} \\ &= \text{円1の直径} \times \text{円周率} \times 2 \\ &= (\text{円1の直径} \times \text{円周率}) \times 2 \\ &= \text{円1の円周} \times 2\end{aligned}$$

つまり、円2の円周の長さは「円1の円周×2」と等しいとわかり、したがって、円2の円周の長さは円1の円周の長さの2倍であるとなります。

直径の長さがわからないので円周を求めることはできませんが、2つの円の直径の関係から、つまり今の場面のパターンだけから、2つの円の円周の関係であれば考えることができたことになります。

問題： 円があります。この円の円周のうち、右図の太線のような一部の長さを考えます。

この長さは、円の直径よりも長いでしょうか、短いでしょうか、あるいは直径と同じになるでしょうか。



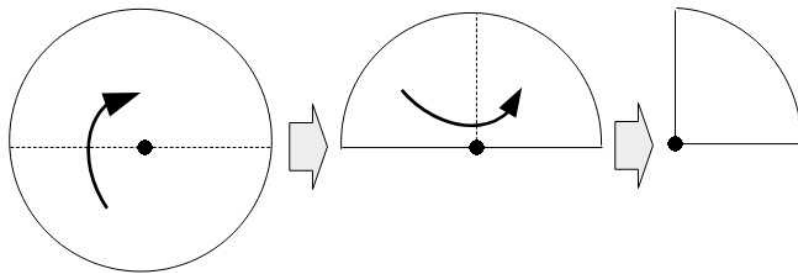
(平成 22 年度算数 B ・ 問題 6 (2) 類題)

今回も円の直径や半径が何 cm かがわかっていません。ですから、図の太線の長さが何 cm かを求めて、それを直径と比較することはできません。

そこで、まずは、今の場面のパターンとしてわかることは何かを、太線の「構成の仕方」からさぐってみます。すると、場面のパターンは次のようになります。

☆円周のうち、直角に交わる半径の間の部分になっている。

次のように、円を半分にして、さらに半分にすると、図のような形になります。



ここから、太線の部分の長さは、円周の 4 分の 1 になるとわかります。

もとの円の円周のおよその長さは円周＝直径×3.14 で求められますから、太線の部分の長さは、これを 4 で割れば求まるはずです。

$$\text{太線の長さ} = \text{円周} \div 4 = (\text{直径} \times 3.14) \div 4$$

つまり太線の長さを求めるには、直径を 3.14 倍してから 4 で割るので、直径よりも短くなることがわかります。

問題： かける数が等しい 2 つのかけ算を考えます。例えば 2×3 と 4×3 を考えます。このとき 2 つのかけ算の積 6 と 12 をたすと 18 となりますが、これは 6×3 の積になっています。つまり、かけられる数が 2 と 4 の和の 6 で、かける数はもとのかけ算と同じ 3 になっています。別の 2 つのかけ算 2×5 と 4×5 でやっても同じようになります。

かける数をほかの数にしても、同じようになるでしょうか。また、もしなるとすれば、なぜそうなるのでしょうか。

(平成 30 年度算数 B・問題 4 (1)類題)

同じようになるのかを調べるのに、かける数を 8 にしてやってみます。2 つのかけ算は 2×8 と 4×8 ですから、それぞれの積は 16 と 32 になります。その和 48 は 6×8 の積ですから、やはり、かけられる数は 2 と 4 の和、かける数は 8 のままになっています。

かける数をほかの数にしても同じようになりそうですが、かける数を一つひとつ変えながら調べるのは、めんどうです。そこで、今の場面のパターンをもとに考えてみることにします。

ここでの計算の「構成の仕方」から、場面のパターンは次のようになります。

☆ 2 つのかけ算は、かける数が等しくなっている。

かけられる数が 2 と 4 の時なら、かける数を $\square$ で表すと、2 つのかけ算は次のようなパターンを持っていることになります。

☆ 2 つのかけ算は $2 \times \square$ と $4 \times \square$ というパターンになっている。

この 2 つのかけ算の積をたすので、 $2 \times \square + 4 \times \square$ という計算をすれば良いことになります。

ここで5年生の学習で $1.8 \times 0.7 + 3.2 \times 0.7$ を $(1.8 + 3.2) \times 0.7 = 5 \times 0.7$ などと工夫して計算したことを思い出すと、 $2 \times \square + 4 \times \square$ も次のように工夫して計算することができます。

$$2 \times \square + 4 \times \square = (2 + 4) \times \square = 6 \times \square$$

このように $2 \times \square + 4 \times \square$ の結果は、 $6 \times \square$ と等しくなることがわかりました。

$1.8 \times 0.7 + 3.2 \times 0.7$ を $(1.8 + 3.2) \times 0.7 = 5 \times 0.7$ などと工夫して計算する時には、4年生で学習した次のような計算のきまりを利用していました。

$$(\square + \bigcirc) \times \blacktriangle = \square \times \blacktriangle + \bigcirc \times \blacktriangle$$

そのように考えると、なぜ $2 \times \square + 4 \times \square$ の結果が $6 \times \square$ と等しくなるのかの理由は、上の計算のきまりが成り立つからだということになります。

この計算のきまりが成り立つから上のようなことが起こるのだとすると、きまりの $\square$ や $\bigcirc$ のところは2や4でなくてもよいのですから、どんな数でも同じことが成り立ちそうです。

そこで例えばかけられる数を3と7に変えてみます。例えば 3×6 と 7×6 という2つのかけ算を考えると、 $3 \times 6 + 7 \times 6 = (3 + 7) \times 6$ となります。実際、それらの積は18と42で、その和は60となりますが、これは 10×6 の積です。つまり、かけられる数は3と7の和で、かける数はもとのかけ算と同じになっています。

さらに $\blacktriangle$ のところも変えてみます。例えば、 37×23 と 42×23 を考えると、 $37 \times 23 + 42 \times 23 = (37 + 42) \times 23$ となります。 $37 \times 23 = 851$ 、 $42 \times 23 = 966$ なので、それらの和は1817となります。1817はやはり $(37 + 42) \times 23 = 79 \times 23$ の積と等しくなっています。

このように、場面のパターンと、計算のきまりを組み合わせると、数と計算について起こっていることがなぜ起こっているのかがわかったり、ほかでも同じようになるのかを予想したりすることができます。

問題：3 とびの 5 つの数を考えます。例えば 1、4、7、10、13 を考えます。この 5 つの数の和は 35 ですが、これは真ん中の数 7 の 5 倍になっています。2 から始めて 2、5、8、11、14 を考えても、5 つの数の和 40 は真ん中の数 8 の 5 倍になっています。

最初の数をはかの数にしても、同じようになるでしょうか。また、もしなるとすれば、なぜそうなるのでしょうか。

(平成 30 年度算数 B ・ 問題 4 (2) 類題)

この時の 5 つの数の「構成の仕方」から、場面のパターンは次のようになっています。

☆ 5 つの数があり、3 ずつふえている。

最初を $\square$ で表すと、この場面のパターンは次のように表すこともできます。

※ 5 つの数が $\square$ 、 $\square+3$ 、 $\square+6$ 、 $\square+9$ 、 $\square+12$ となっている。

この 5 つの数をたすと、次のようになります。

$$\begin{aligned} & \square + (\square + 3) + (\square + 6) + (\square + 9) + (\square + 12) \\ &= (\square + \square + \square + \square + \square) + (3 + 6 + 9 + 12) \\ &= \square \times 5 + 30 \end{aligned}$$

ここで、30 を 6×5 ととらえなおして、また 5 年生の学習で $1.8 \times 0.7 + 3.2 \times 0.7$ を $(1.8 + 3.2) \times 0.7 = 5 \times 0.7$ などと工夫して計算したことを思い出すと、次のようになります。

$$\begin{aligned} & \square \times 5 + 30 \\ &= \square \times 5 + 6 \times 5 \\ &= (\square + 6) \times 5 \end{aligned}$$

※のパターンにもどると、 $\square + 6$ は真ん中の数でしたから、結局、5 つの数をたした和は、真ん中の数の 5 倍になることがわかります。こうしたことが起こるの

は、5つの数が3ずつふえているので※のようなパターンが見られ、また計算のきまりが成り立つからだということもわかりました。

なお、最後の和が真ん中の数の5倍になることを考えると、最初から真ん中の数を□で表して、これを基準に5つの数をとらえなおすこともできます。2番目の数は真ん中の数より3だけ小さいので、 $\square - 3$ と表すことができます。1番目の数は真ん中の数より6だけ小さいので $\square - 6$ となります。逆に、4番目の数は真ん中の数より3だけ大きいので $\square + 3$ となり、5番目の数は真ん中の数より6だけ大きいので $\square + 6$ となります。

※(2) 5つの数が $\square - 6$ 、 $\square - 3$ 、 $\square$ 、 $\square + 3$ 、 $\square + 6$ となっている。

5つの数の和は次のようになります。

$$\begin{aligned} & (\square - 6) + (\square - 3) + \square + (\square + 3) + (\square + 6) \\ &= (\square - 6) + (\square + 6) + (\square - 3) + (\square + 3) + \square \\ &= \square \times 5 \end{aligned}$$

今回は□が真ん中の数でしたから、5つの数の和が真ん中の数の5倍であることが、すぐにわかります。

また $(\square - 3)$ と $(\square + 3)$ で3をひくのとたすのが打ち消しあって、ちょうど□の2倍になるといった途中のパターンに気づくと、3とびでなくても、4とびでも、5とびでも、100とびでも同じようになることがわかります。

さらに※(2)では真ん中の□をはさんで、左右で同じ数をたしたものとひいたものがペアになっているというパターンに気づくと、たす数の個数は5つでなくてもよく、3つや7つ、9つなど奇数個であればよいこともわかります。

例えば27とびになっている11個の数を考えると、1から始まる場合は、1、28、55、82、109、136、163、190、217、244、271となります。これら11個の数の和は1496となりますが、これは真ん中の数136のちょうど11倍になっています。

問題：35 と 53 のように、十の位と一の位の数字を入れかえた 2 つの数を考えます。そして大きい数から小さい数をひいた差を求めます。35 と 53 なら $53 - 35$ を計算して差は 18 です。

78 と 87 で計算すると $87 - 78 = 9$ です。また 25 と 52 で計算すると $52 - 25 = 27$ です。これらの差を見ると、すべて 9 の倍数になっています。

ほかの数でやっても、差は 9 の倍数になるのでしょうか。またなるとしたら、なぜそうなるのでしょうか。

(平成 29 年度算数 B・問題 1 (3) 類題)

2 つの数の「構成の仕方」から、今の場面のパターンは次のようになります。

☆ 2 つの数の十の位と一の位が入れかわっている。

35 と 53 で考えると、35 は 10 が 3 つと 1 が 5 つですが、53 は逆に 10 が 5 つで 1 が 3 つになります。

35 : 10 10 10 1 1 1 1 1

53 : 10 10 10 10 10 1 1 1

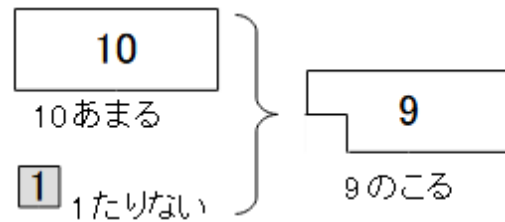
5 と 3 の差 2 の分だけ、53 では 10 の個数が多くなり、35 では 1 の個数が多くなります。

78 と 87 であれば、8 と 7 の差 1 の分だけ、87 では 10 の個数が多くなり、78 では 1 の個数が多くなります。25 と 52 であれば、5 と 2 の差 3 の分だけ、52 では 10 の個数が多くなり、25 では 1 の個数が多くなります。

このように、上の☆の場面のパターンから、次のようなことがわかります。

※ 2 つの数の十の位と一の位の数の差の分だけ、
大きい方の数では 10 の個数が多くなり、
小さい方の数では 1 の個数が多くなる。

大きい方の数から小さい方の数をひくと、十の位と一の位の数の差の分だけ10はあまり、逆に1はたりないことになります。



そこでそれぞれの10と1について

たりない1をあまった10から借りることにすると、結局9が残ります。このようにして十の位と一の位の数の差の分だけ9ができます。

もとの数のひき算の結果は、これらの残った9をあわせたものなので、9のいくつか分になります。そのためもとの数のひき算の結果は、いつも9の倍数になってしまうのです。

今のことを、35と53で考えると、次のようになります。

$$\begin{aligned}
 53 - 35 &= (10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1) - (10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\
 &= (10 - 10) + (10 - 10) + (10 - 10) + (10 + 10) \\
 &\quad + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) - (1 + 1) \\
 &= (10 + 10) - (1 + 1) \\
 &= (10 - 1) + (10 - 1) \\
 &= 9 + 9 \\
 &= 9 \times 2
 \end{aligned}$$

53の方であまった2つの10と、35の方であまった2つの1をペアにして考えると、2つの(10-1)ができて、ここから9が2つできることになります。

2つの(10-1)ができるのは、10の個数の違いや1の個数の違いが2だからですが、これは5と3の差が2であることにより起こっています。

問題： 100×100 の積は 10000 です。

今、かけられる数を 1 大きくし、かける数を 1 小さくすると、 101×99 になりますが、この積は 9999 になります。つまり、10000 より 1 だけ小さくなります。

かけられる数を 2 大きくし、かける数を 2 小さくすると 102×98 になりますが、この積は 9996 になります。つまり、10000 より 4 だけ小さくなります。

同じようにかけ算を変えていくと、その積はどのように変わりますか。また、積はなぜそのように変わるのでしょうか。

(平成 28 年度算数 B・問題 1 類題)

積の変わり方を調べるために、かけられる数を大きくする数と、かける数を小さくする数が、3、4、5 の場合についても調べてみます。

3 の場合： $103 \times 97 = 9991$. . . 10000 より 9 小さい

4 の場合： $104 \times 96 = 9984$. . . 10000 より 16 小さい

5 の場合： $105 \times 95 = 9975$. . . 10000 より 25 小さい

結果を観察してみると、積が 10000 より小さくなる数は 3×3 や 4×4 、 5×5 の積になっているようです。問題文の例でも、1 変えた時の積は 10000 より 1 小さくなり、2 変えたときは 4 小さくなっていましたが、これらも 1×1 と 2×2 の積になっています。

かけられる数がある数だけ大きくし、かける数を同じ数だけ小さくした時の積は、その数どうしをかけた積の分だけ 10000 より小さくなるようです。

なぜ、積がこのような変わり方をするのかを調べるため、場面のパターンと最後の積との関係を調べることにします。

かけられる数とかける数の「構成の仕方」から、今の場面のパターンは次のようになります。

☆ ある数を $\square$ として、 $(100 + \square) \times (100 - \square)$ という形のかけ算になっている。

この時、積は $10000 - \square \times \square$ になりそうでしたから、上のかけ算とこの $10000 - \square \times \square$ とが、うまくつながるのかを考えます。

そこで、上で調べた 103×97 を見直してみます。103 を☆のように $100 + 3$ と書くと、このかけ算は $(100 + 3) \times 97$ となります。これは4年生で学習した式のきまりを思い出すと、 $100 \times 97 + 3 \times 97$ となります。

かけ算ではかけられる数とかける数を入れかえてもよかったので、 $100 \times 97 = 97 \times 100$ 、 $3 \times 97 = 97 \times 3$ となります。今度は97を $100 - 3$ と☆のパターンがわかるように表すと、 $(100 - 3) \times 100$ と $(100 - 3) \times 3$ となります。そしてもう一度、4年生で学習した計算のきまりを使うと、それぞれ $100 \times 100 - 3 \times 100$ と $100 \times 3 - 3 \times 3$ となります。この2つをたすと、次のようになります。

$$\begin{aligned}(100 \times 100 - 3 \times 100) + (100 \times 3 - 3 \times 3) &= 100 \times 100 - 3 \times 100 + 100 \times 3 - 3 \times 3 \\ &= 100 \times 100 - 100 \times 3 + 100 \times 3 - 3 \times 3 \\ &= 100 \times 100 - 3 \times 3\end{aligned}$$

ここから、最後の結果は、確かに10000より 3×3 だけ小さくなりそうです。

上で考えたことは、3のところを4や5に変えても、39や107に変えても、4年生で学習した計算のきまりが使えるのであれば、同じように計算ができます。そこで、100から大きくしたり小さくしたりする数を□で表して、上の3の時と同じように計算すると、☆のパターンは次のように計算ができます。計算の最初のうちは、 $(100 - \square)$ が97のような数であると考えて計算のきまりを使うと、わかりやすいです。

$$\begin{aligned}(100 + \square) \times (100 - \square) &= 100 \times (100 - \square) + \square \times (100 - \square) \\ &= (100 - \square) \times 100 + (100 - \square) \times \square \\ &= (100 \times 100 - \square \times 100) + (100 \times \square - \square \times \square) \\ &= 10000 - \square \times 100 + 100 \times \square - \square \times \square \\ &= 10000 - 100 \times \square + 100 \times \square - \square \times \square \\ &= 10000 - \square \times \square\end{aligned}$$

つまり、 $- \square \times 100$ と $\square \times 100$ が打ち消し合って消えることが、最後の結果が10000より $\square \times \square$ だけ小さくなる理由だとわかります。

問題：1 から 30 までの整数を考えます。この中の数を 1 つ選びます。そして 37 にこの選んだ数をかけます。

選ぶ数をいろいろ変えてかけた時に、積について何かきまりはないでしょうか。また、なぜそのようなきまりが成り立つのかを、説明しましょう。

(平成 26 年度算数 B ・ 問題 1 (2) 類題)

最初の 4 つの整数 1、2、3、4 について、37 にかけたときのようすを観察してみると、次のようになります。

$$37 \times 1 = 37$$

$$37 \times 2 = 74$$

$$37 \times 3 = 111$$

$$37 \times 4 = 148$$

まだよくわからないので、もう少し続けてみます。

$$37 \times 5 = 185$$

$$37 \times 6 = 222$$

かける数が 3 の時は積が 111、6 の時は 222 と、同じ数字が 3 つ並んだきれいな数になりました。3、6 ときたので、9 と 12 を試してみます。

$$37 \times 9 = 333$$

$$37 \times 12 = 444$$

どうやら、かける数が 3 の倍数の時は、積は同じ数字が並んだきれいな数になりそうです。

きまり：かける数が 3 の倍数の時は、37 にかけた積は
同じ数字が 3 つ並んだ数になる。

3 の倍数は 3 に整数をかけてできる数でした。つまり、 $3 \times \square$ となっている数です。上の観察したことを見直すと、かける数が 3、つまり $3 \times \square$ の $\square$ が 1 の時は積が 111、かける数が 6、つまり $3 \times \square$ の $\square$ が 2 の時は積が 222、かける数が 9、つまり $3 \times \square$ の $\square$ が 3 の時は積が 333、そしてかける数が 12、つまり $3 \times \square$ の $\square$ が 4 の時は積が 444 となっています。

そこで、上のきまりは、もう少し詳しく、次のように表現することができそうです。

きまり : かける数が $3 \times \square$ の時は、37 にかけた積は $\square\square\square$ という形の数になる。

次に、このきまりが本当に成り立つのか、成り立つとしたらなぜ成り立つのかを考えてみます。

本当に成り立つかだけであれば、30 以下の 3 の倍数について、すべて計算を試みれば確認することはできます。ただそれだと、「なぜ成り立つのか」にせまることができなさそうなので、今の場面のパターンをもとに考えてみます。

かけ算の「構成の仕方」から、今の場面のパターンは次のようになります。

☆ 37 に $3 \times \square$ の形の数をかけた積になっている。

4 年生の学習で、計算のきまりを用いて、例えば $25 \times 8 = 25 \times (4 \times 2) = (25 \times 4) \times 2 = 100 \times 2 = 200$ などと、工夫して計算したことを思い出すと、今のかけ算も次のように考えることができます。

$$37 \times (3 \times \square) = (37 \times 3) \times \square = 111 \times \square$$

さらに 4 年生で学習した、別の計算のきまりを使うと、次のようになります。

$$\begin{aligned} 111 \times \square &= (100 + 11) \times \square = 100 \times \square + 11 \times \square \\ &= 100 \times \square + (10 + 1) \times \square \\ &= 100 \times \square + 10 \times \square + 1 \times \square \\ &= \square \times 100 + \square \times 10 + \square \times 1 \end{aligned}$$

ここから、37 に $3 \times \square$ の形の数をかけた積は、 $\square$ を 100 倍した数と、 $\square$ を 10 倍した数と、 $\square$ をたした数になることがわかります。そのため、同じ数 $\square$ が 3 つならんだ $\square\square\square$ の形をしているのです。

なお、かける数が 30 の時、つまり $\square$ が 10 の時は、 $37 \times 30 = 1110$ となり、積は同じ数が 3 つ並んだ数にはなりません。しかし 1110 も、10 を 100 倍した数と、10 を 10 倍した数と、10 をたした数にはなっています。もとの数から積が作られる仕組みの部分は、ちゃんとたもたれているのです。

問題：ある店で今月は全品 10 %引きセールをしていました。しかし、今日が最終日なので、10 %引きの値段から、さらに 30 %引きをしてくれることになりました。

10 %引きのさらに 30 %引きなので、今日は全品が 40 %引きになると言えるでしょうか。

(平成 27 年度算数 B・問題 2 (3)類題)

買う商品の値段がわからないので、10 %引きの値段や、30 %引きの値段を求めることができません。これでは、今日買う時の値段がわからないので、40 %引きになっているかどうか、調べられないように思います。

ここで、割引後の値段の「構成の仕方」から、今の場面のパターンを考えてみます。すると、場面のパターンは次のようになっています。

☆ 元の値段を 10 %引きした値段からさらに 30 %引きをする。

10 %引きした値段は元の値段の 90 %になります。つまり、元の値段の 0.9 倍の値段です。30 %引きした値段は元の値段の 70 %になります。つまり、元の値段の 0.7 倍の値段です。

したがって、☆の場面のパターンは、次のようにとらえ直すことができます。

※ 元の値段を 0.9 倍して、さらに 0.7 倍する。

元の値段をとりあえず□円と表しておくと、※の手順は次のように式で表すことができます。

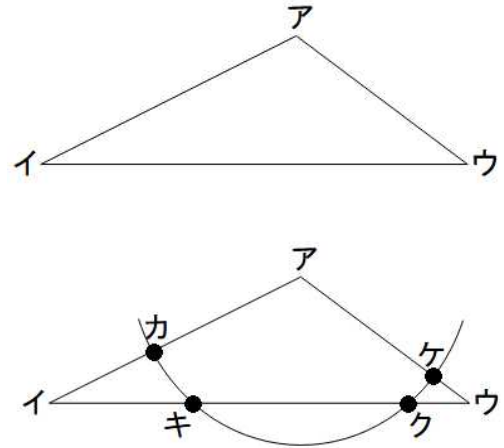
$$\text{※(式)} (\square \times 0.9) \times 0.7$$

4 年生で学習した計算のきまりを思い出すと、 $(\square \times 0.9) \times 0.7 = \square \times (0.9 \times 0.7) = \square \times 0.63$ となります。つまり、上のような値引きをすると、元の値段の 63 %になります。これは、37 %引きの値段であることを表しています。

0.7 倍をする時に、□の 0.7 倍ではなく、 $(\square \times 0.9)$ の 0.7 倍をするので、元の値段の 40 %引きにはならないのです。

中学校の問題にチャレンジ：図形編

問題：右のような三角形アイウを作り
ます。頂点アにコンパスの針を
さして円をかいたら、右下のよ
うにカ、キ、ク、ケの4つの点
ができました。



このうち点カと点ケを使ってひ
し形をかこうと思います。また点
キと点クを使ったひし形もかこう
と思います。

これら2つのひし形には、どのような違いがありますか。

(令和2年度数学・問題3類題)

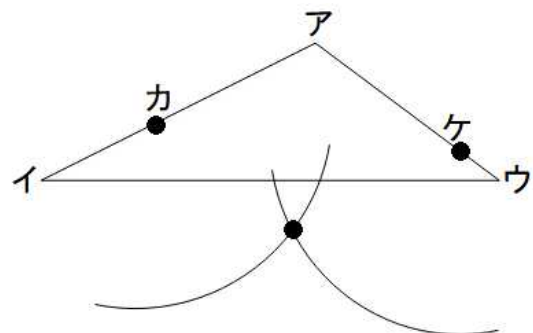
上の図形の「構成の仕方」から、今の場面のパターンは次のようになります。

☆ 点カ、点キ、点ク、点ケは点アを中心とする同じ円周の上にある。
中心と円周上の点を結ぶ線は円の半径になるので、どれも同じ長さです。ですから、今のパターンは、次のように言い替えることもできます。

☆ アとカを結ぶ線、アとキを結ぶ線、アとクを結ぶ線、アとケを結ぶ
線はすべて長さが等しい。

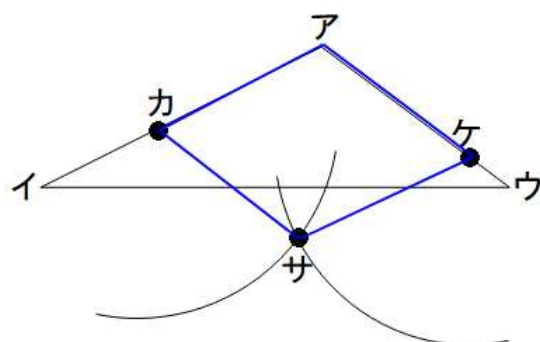
点カと点ケを使ってひし形をかくに
は、点アを中心として円をかいたとき
と同じようにコンパスを開いたまま、
点カを中心とした円をかき、次に点ケ
を中心とした円をかいて、2つの円が
まじわる点を作ります。

この点を点サとすると、点サと点カ
を結ぶ線の長さも、点サと点ケを結ぶ

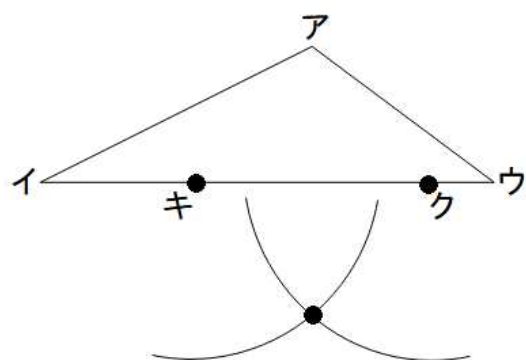


線の長さも、☆で出てきた線の長さと等しくなります。

したがって、右の四角形アカサケは4つの辺の長さ等しいので、ひし形になります。

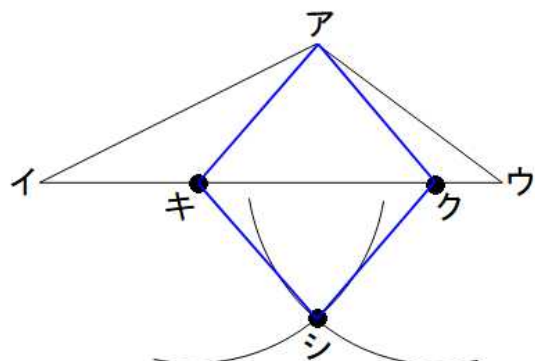


点キと点クを使ってひし形をかく場合も、点アを中心として円をかいたときと同じようにコンパスを開いたまま、点キを中心とした円をかき、次に点クを中心とした円をかいて、2つの円がまじわる点を作ります。



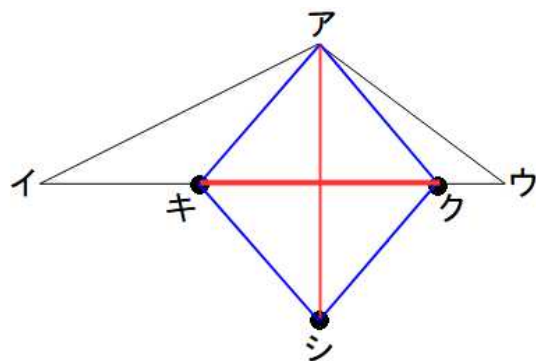
この点を点シとすると、点シと点キを結ぶ線の長さも、点シと点クを結ぶ線の長さも、☆で出てきた線の長さと等しくなります。

したがって、右の四角形アキシクも4つの辺の長さが等しくなり、ひし形になります。



2つのひし形をくらべると、ひし形アキシクは点キと点クを使ったので、三角形の辺イウの一部がひし形の対角線になっています。しかしひし形アカサケでは対角線と三角形は特に関係がなさそうです。

4年生で学習したように、ひし形の2本の対角線は垂直に交わりますから、対角線アシは辺イウに垂直に交わります。ひし形アキシクは辺イウに垂直な線を作るのに使えるひし形なのです。

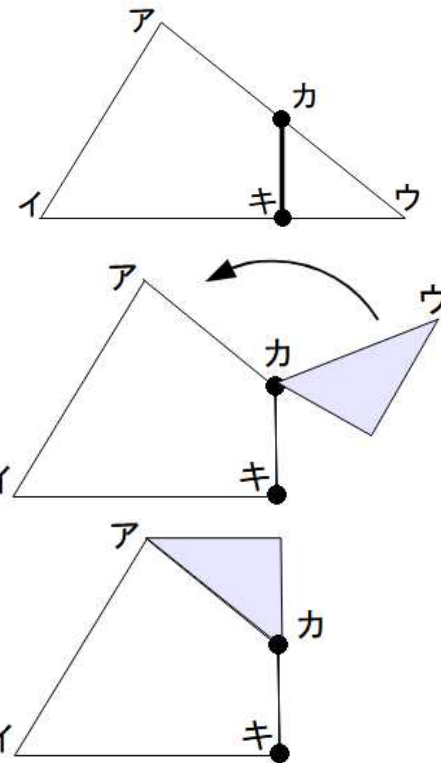


問題 : 三角形アイウの辺アウの上に、アカとカウの長さが等しくなるように点カを作ります。

次に点カから、カキとイウが垂直に交わるようにカキという線をひきます。

カキで三角形を2つに分けて、三角形ウカキを右図のように回転させながら上にあげて、カウがアカとぴったりかさなるようにくっつけると、右のような四角形ができます。

この最後にできた四角形はどのような四角形ですか。



(令和2年度数学・問題7(1)類題)

図を見ると、最後の四角形は台形のように見えます。

上の三角形とは形が異なる三角形を使って同じ操作をしても、やはり最後にできる四角形は台形のように見えます。

そこで、最後の四角形の「構成の仕方」からわかる場面のパターンを考えて、そこから四角形が台形になることが説明できるかを考えてみます。

最後の四角形の「構成の仕方」からわかる場面のパターンは次のようになります。

☆アカとカウの長さは等しい。

☆点キのところにできる角は直角。

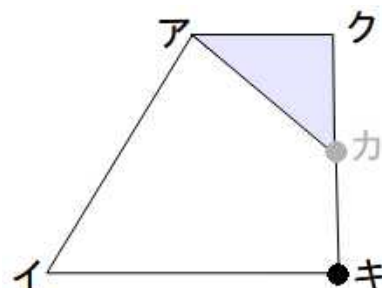
台形は4年生で学習したように、「向かい合った1組の辺が平行な四角形」でしたから、最後の四角形で向かい合った1組の辺が平行になっていることがわ

ければ、この四角形が台形であるとわかります。

まずアカとカウの長さが等しいので、三角形を回転させたときにアカとカウはぴったりくっついて、1つの辺になります。どちらかがはみ出すようなことはなさそうです。

また、点カのまわりの2つの角は、もともと一直線になっていたものを組みかえただけですから、回転の後でも一直線になり、点カでまがるようなことはありません。ここから、最後の図形は確かに四角形になっています。

最後にできた四角形の右上の頂点を点クとよぶことにします。四角形アイキクで辺アクと辺イキが平行になることがわかれば、四角形アイキクが台形であるとわかります。



場面のパターンから「☆ 点キのところにできる角は直角」でした。つまり、辺イキは辺クキに垂直になっています。

点クのところの角は、回転する前は点キのところにあり、点キのところの角とあわさって一直線になっていました。したがって、点クのところの角は 180° から点キのところの直角をひいたものですから、 90° であるとわかります。つまり、辺アクも辺クキに垂直になっているとわかります。

辺イキと辺アクは同じ1本の辺クキに垂直なので、4年生で学習したように、これらの辺は平行になります。1組の辺が平行とわかったので、四角形アイキクは台形であると言えます。

四角形アイキクが台形であることは、場面のパターンだけから確認することができました。ですから、上で確認した場面のパターンを持った図形であれば、回転させると四角形ができ、その四角形は台形になるとわかります。

問題：長方形 ABCD を作ります。そして次のようにして 2 つの正三角形も作ります。

(1) 辺 AD を 1 辺として、長方形と重ならないように正三角形 EAD を作る。

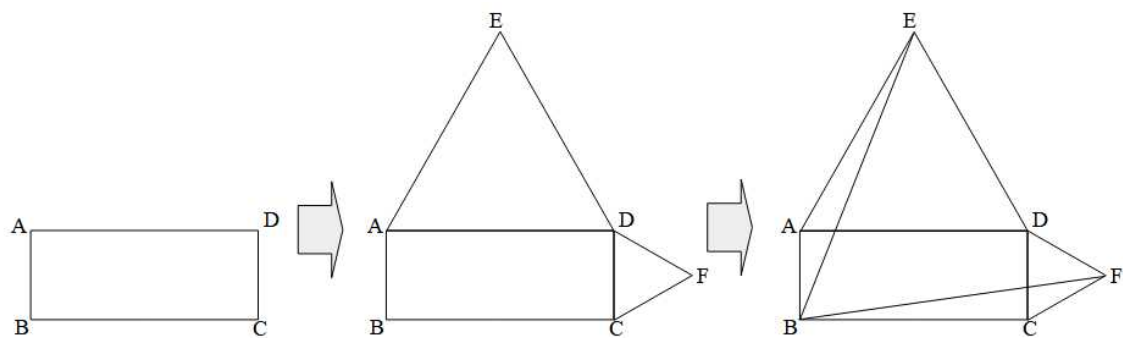
(2) 辺 DC を 1 辺として、長方形と重ならないように正三角形 FDC を作る。

点 E と点 B を結ぶと三角形 ABE ができます。また点 F と点 B を結ぶと三角形 CFB ができます。

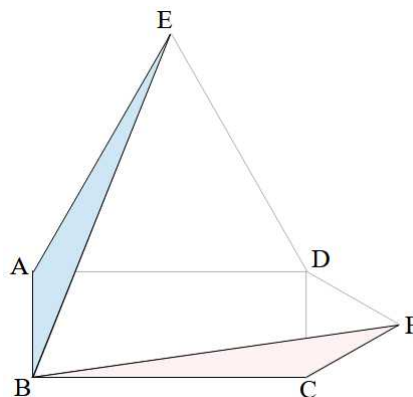
この 2 つの三角形は合同であると言えるでしょうか。

(令和 4 年度数学・問題 9 (1) 類題)

問題で示された図形の「構成の仕方」が今の場面のパターンとなります。そこで、まずは「構成の仕方」にしたがって図形を作ってみます。長方形については特に長さが示されていないので、とりあえず好きなように作ります。例えば下の図の左のような長方形を作ると、問題で示された図形は図の右のようになります。



この「構成の仕方」で、確かに三角形 ABE と三角形 CFB という 2 つの三角形ができました。



この2つの三角形の関係を知りたいのですが、手がかりは場面のパターンである「構成の仕方」しかありません。そこで、この場面のパターンだけからわかることが何かを考えてみます。

ABCD は長方形でしたから、長方形の性質を思い出すと、次のようなことはわかります。

☆ABCD の4つの角はすべて直角。

☆向かい合う辺の長さは等しい。つまり辺 AB と辺 DC の長さは等しく、辺 AD と辺 BC の長さも等しい。

三角形 EAD は正三角形になるように作りましたから、次のようなこともわかります。

☆三角形 EAD の3辺の長さは等しい。つまり、辺 EA、辺 AD、辺 DE の長さは等しい。

☆三角形 EAD の3つの角はすべて 60° 。

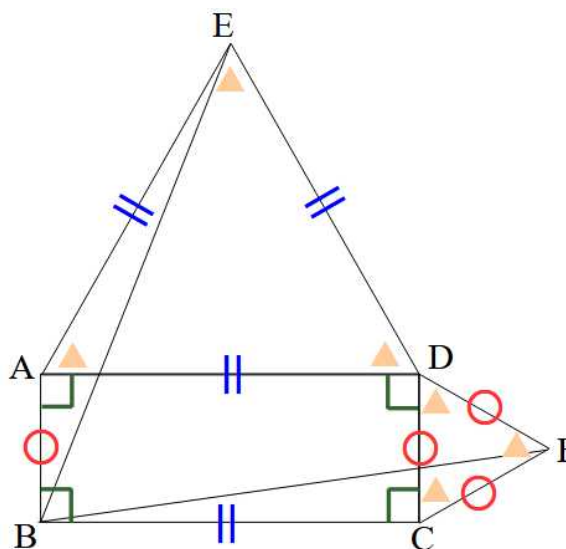
同じように、三角形 FDC は正三角形になるように作りましたから、次のようなこともわかります。

☆三角形 FDC の3辺の長さは等しい。つまり、辺 FD、辺 DC、辺 CF の長さは等しい。

☆三角形 FDC の3つの角はすべて 60° 。

場面のパターンからわかったことを図にかき入れてみると、右のようになります。なお図の▲は角の大きさが 60° であることを表しています。

このうち、関係を知りたい2つの三角形（三角形 ABE と三角形 CFB）に関わるものだけ残してみると、次のページのようになります。

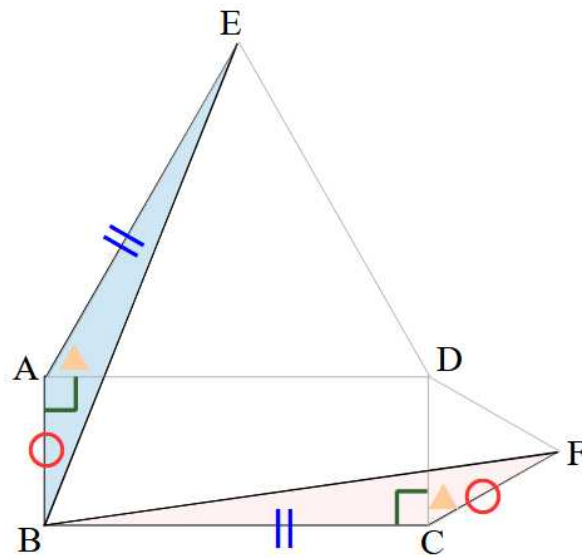


これを見ると2つの三角形に関わり、次のようなパターンが生まれていることがわかります。

☆辺AEの長さと辺BCの長さは等しい。

☆辺ABの長さと辺CFの長さは等しい。

☆頂点Aのところの角の大きさと頂点Cのところの角の大きさは等しい。



ここで5年生で学習した合同な三角形のかき方を思い出すと、三角形CFBは、「2つの辺とその間の角の大きさ」が三角形ABEと同じになるようにしてかいた三角形になっていることがわかります。つまり、三角形CFBは、ちょうど三角形ABEと合同になるようにしてかいた三角形のようになっています。ここから、2つの三角形は合同であるとわかります。

図形の「構成の仕方」として示された場面のパターンからわかることを調べていく中で、合同な三角形のかき方の1つである「2つの辺とその間の角の大きさが同じ」という新たなパターンが見えてきたことになります。

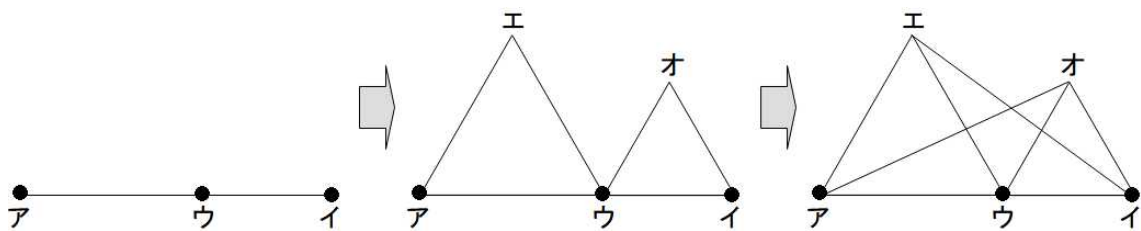
問題：次のようにして2つの正三角形を作ります。

- (1) 点アと点イをむすぶ線を引き、その途中に点ウをとります。
- (2) アウを1辺とする正三角形エアウを作ります。
- (3) ウイを1辺とする正三角形オウイを(2)と同じ向きに作ります。

ここでさらに三角形アウオと三角形エウイを作ると、2つの三角形は合同になります。この2つの三角形はなぜ合同になるのでしょうか。

(令和6年度数学・問題9(1) 類題)

今回もまず、問題で示された図形の「構成の仕方」にそって図形をつくってみます。点ウをどこにとるのかは示されていません。そこで、とりあえずアイの上にてきとうに点ウをとって図形を作ってみます。



点ウを点アから何 cm はなれた位置にとるといったことがわからないので、アウやイウの長さ、つまり正三角形の1辺の長さはわかりません。とうぜん、三角形アウオと三角形エウイの辺の長さもわかりません。そこで、「構成の仕方」だけからわかる、今の場面のパターンがどのようなものかを確認してみます。

この「構成の仕方」から今の場面のパターンは次のようになります。

☆三角形エアウと三角形オウイは正三角形である。

場面のパターンとしてわかるのは、これだけです。

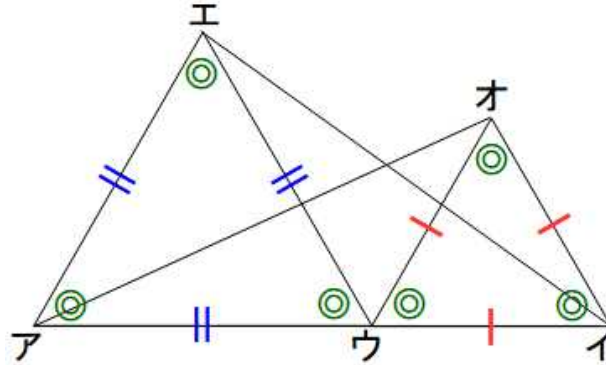
ただ、正三角形について学習したことを思い出すと、次のようなことは自然にわかります。

※1 辺アウ、辺エア、辺エウの長さは等しい

※2 辺ウイ、辺オウ、辺オイの長さは等しい

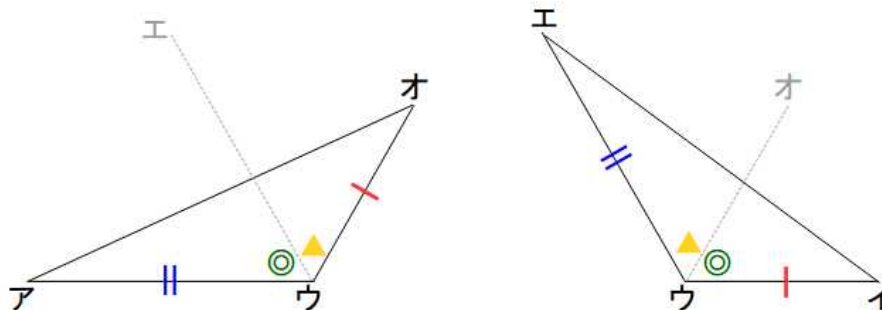
※3 2つの三角形の角は6つともすべて 60° になっている。

これらのわかったことを図に表してみると、次のようになります。ここで◎は角の大きさが 60° であることを表しています。



確かに三角形アウオと三角形エウイは合同になっていそうです。ただ、図には線が多いので、少し見にくいようです。

そこで、三角形アウオと三角形エウイを取り出してみると、次のようになります。▲は辺エウと辺オウで作られる角を表しています。



これを見ると、三角形エウイは、三角形アウオの「2つの辺とその間の角の大きさ」と同じにしてかいた三角形になっていることがわかります。5年生で学習した合同な三角形のかき方を思い出すと、三角形エウイは、三角形アウオと合同になるようにしてかいた三角形になっています。ここから、2つの三角形は合同であるとわかります。

最初に作った2つの三角形がどちらも正三角形であるという場面のパターンだけから、三角形アウオと三角形エウイでは「2つの辺とその間の角の大きさ」が同じになり、それが、2つの三角形が合同になる理由だったのです。

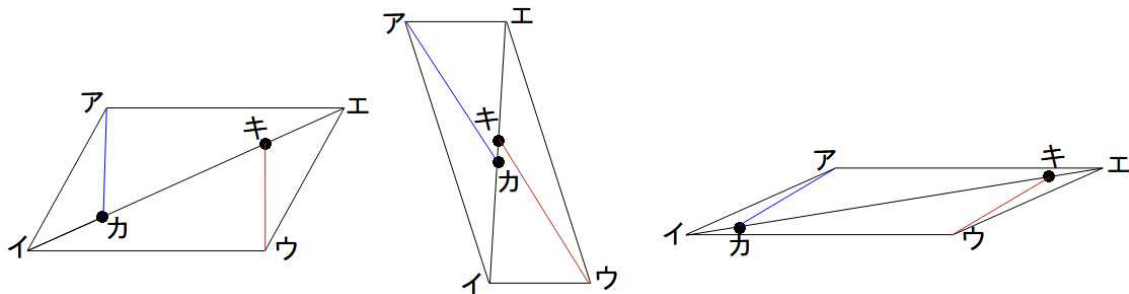
問題： 平行四辺形アイウエの対角線イエの上に、イカの長さエキの長さが等しくなるように点カと点キをとります。

この時、点アと点カを結んだ線の長さと、点ウと点キを結んだ線の長さも等しくなるでしょうか。

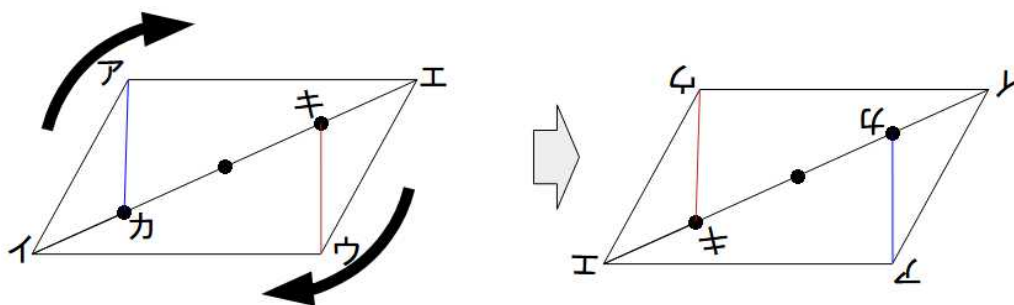
(平成 25 年度数学 B・問題 4 (1))

平行四辺形の形や辺の長さもわかりませんし、また点カが点イからどれだけ離れているのかもわかりません。ですから、点アと点カを結んだ線の長さも求めようがなく、点ウと点キを結んだ線の長さと比べようがないように見えます。

そこで問題で示された図形の「構成の仕方」にそって図形をつくってみます。点カをどこにとってよいのかわかりませんから、とりあえず対角線イエの上にてきとうに点カをとり、イカの長さエキの長さが等しくなることだけに気をつけて、図をかいてみることにします。例えば、以下のようになります。



確かに、6 年生で学習したように、平行四辺形が点対象な図形であることを思い出すと、180°回転させると、アカの線はウキにちょうど重なるはずなので、長さが等しくなるだろうと考えられます。



しかし、2つの長さが等しくなることを、今の場面のパターンだけから、説明することはできないでしょうか。図形の「構成の仕方」から場面のパターンを確認すると、次のようになります。

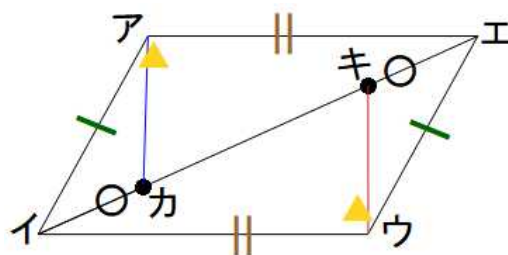
☆ 平行四辺形の対角線の上に、頂点からの長さが等しくなるように点がとられている。

4年生で学習したように、平行四辺形では向かい合う辺の長さは等しく、向かい合う角の大きさも等しくなっているのです。

※ 辺アエと辺イウの長さは等しく、辺アイと辺エウの長さも等しい

※ 点アのところの角と点ウのところの角の大きさは等しく、
点イのところの角と点エのところの角の大きさも等しい。

場面のパターンからわかることを図で表すと次のようになります。
(点イと点エのところの角は、図がゴチャゴチャになるのでかいていません)

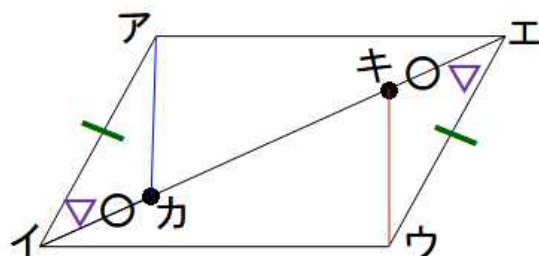


ここで三角形アイエと三角形ウエイを見ると、辺アエと辺ウイの長さが等しく、辺アイと辺ウエの長さが等しくなっています。また、点アのところの角の大きさと点ウのところの角の大きさが等しくなっています。

つまり三角形ウエイは、「2つの辺とその間の角の大きさ」が三角形アイエと同じになるようにして書いた三角形のようになっています。5年生で学習したように、このようにしてかいた2つの三角形は合同になるのです。だから、三角形ウエイは三角形アイエと合同になることがわかります。

5年生で学習したように、合同な三角形では対応する角の大きさは等しくなります。ここから、辺アイと対角線で作られる角の大きさと、辺ウエと対角線で作

られる角の大きさは等しくなります。このことも図で表すと、次のようになります。



今度は、三角形アイカと三角形ウエキを見てみます。すると、辺アイと辺ウエの長さは等しく、辺イカと辺エキの長さは等しくなっています。また、点イのところの角の大きさと点エのところの角の大きさも等しくなっています。

つまり、三角形ウエキは、「2つの辺とその間の角の大きさ」が三角形アイカと同じになるようにして書いた三角形のようになっていますから、三角形ウエキは三角形アイカと合同になります。

合同な図形では対応する辺の長さも等しくなるのでしたから、辺アカと辺ウキの長さも等しくなることがわかります。

ここまで考えてきた辺の長さが等しいことや、角の大きさが等しいことは、場面のパターンだけからわかることでした。ですから、同じ場面のパターンを持つ図形であれば、同じことが言えるはずです。

例えば、初めにかいた3つの図形では、どれもこの場面のパターンを持っていますから、3つのどの場合でも同じ説明をすることができ、したがって、アカとウキの長さが等しいことも言えます。

図を使いながらも、その辺の長さが何 cm かとか、角の大きさが何度かといったことを使わず、場面のパターンだけからわかることを用いて説明を進めると、同じ場面のパターンを持つどのような場合でも、同じ説明ができることになります。

中学校の問題にチャレンジ：数と式編

問題：カレンダーの上で右のように4つの数を囲みます。

5から始まる4つの数をたすと和は36になります。

また23から始まる4つの数をたすと和は108になります。これらの数はどちらも4の倍数になっています。

右のカレンダーのどこの4つの数を同じように囲んでも、4つの数の和は4の倍数になるでしょうか。

日	月	火	水	木	金	土
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

(令和3年度数学・問題6(2)類題)

どこの4つの数を囲んでも和が4の倍数になるかは、すべての囲み方について調べてみれば確認することはできます。しかし4の倍数になるのか、ならないのかを場面のパターンから調べることで、なぜなるのか、なぜならないのかを知ることができる場合もあります。

そこで、場面のパターンと4つの数の和の関係を調べてみることにします。

今の場面は図のようなカレンダーですから、場面のパターンはカレンダーの「構成の仕方」から考えることができます。

数は日にちを表していますから、ある数の右隣の数は次の日を表し、したがってある数より1だけ大きい数になっているはずです。また、ある数の下の数は翌週の同じ曜日の日を表しています。1週間は7日間ですから、翌週の同じ曜日の日はある数より7だけ大きい数になっています。

まとめると、カレンダーの「構成の仕方」からわかる場面のパターンは、次のようになります。

☆ある数の右隣の数は1だけ大きくなる。

☆ある数の下の数は7だけ大きくなる。

ここから、囲んだ4つの数の最初の数を取り
あえず□で表しておく、と、囲んだ4つの数のパ
ターンは右のようになっていることがわかり

□	□+1
□+7	□+8

ます。カレンダーの上で囲んだ4つの数は、どこであっててもこのようなパターン
を持っているということです。

したがって、これら4つの数をたした和は、次のようになります。

$$\begin{aligned}\square + (\square + 1) + (\square + 7) + (\square + 8) &= (\square + \square + \square + \square) + (1 + 7 + 8) \\ &= \square \times 4 + 16\end{aligned}$$

つまり、4つの数の和は、「最初の数の4倍に16をたした和」というパターンを持
つことがわかります。

では、こうしたパターンを持つ数は4の倍数になるでしょうか。ここで、
 $\square \times 4 + 16$ を $\square \times 4 + 4 \times 4$ と考えて、さらに5年生の学習で $1.8 \times 0.7 + 3.2 \times 0.7$ を
 $(1.8 + 3.2) \times 0.7 = 5 \times 0.7$ などと工夫して計算したことを思い出すと、結局、今のパ
ターンを次のように捉え直すことができます。

$$\square \times 4 + 16 = \square \times 4 + 4 \times 4 = (\square + 4) \times 4$$

結局、4つの数は「最初の数に4をたして、その和を4倍した数」というパター
ンを持つことがわかりました。ある数を4倍した数は、5年生の倍数の学習を思
い出すと4の倍数でしたから、4つの数の和は4の倍数であることがわかりま
す。

囲んだ4つの数の和が4の倍数になるのは、カレンダーの「構成の仕方」によ
る場面のパターンがあるからだということを、見つけることができました。

問題：かずあてのマジックとして、次のようなやり方を考えました。

- (1) まず相手に 1 つ整数を思い浮かべてもらいます。
- (2) 次にその数に 2 をかけてもらいます。
- (3) 今度はもとの数に 3 をたしてもらいます。
- (4) (2)で求めた数と(3)で求めた数をたしてもらい、その答えを
言ってもらいます。

最後に言ってもらった数から、思い浮かべた数を見つけることはできる
でしょうか。

(令和 5 年度数学・問題 6 (1) 類題)

例えば相手が最初に 4 を思い浮かべたとすると、(2)で 4×2 を作り、(3)では $4 + 3$ を作ってもらうことになります。そして(4)で $4 \times 2 + (4 + 3)$ を求めて、その答えを教えることになります。今は 15 になります。この 15 を聞いて、もとの数が 4 であったことを見つけることができるでしょうか。

最初に思い浮かべた数が 13 だとすると、(2)で 13×2 を作り、(3)では $13 + 3$ を作ってもらいます。そして(4)で $13 \times 2 + (13 + 3)$ を求めて、その答え 42 を教えることになります。これを聞いて、相手が最初に思い浮かべた数が 13 であったとを見つけることができるでしょうか。

最後に言ってもらった数から最初に思い浮かべたもとの数を見つける方法を探すために、もとの数と最後に言ってもらう数との関係を調べて見ることにします。そしてこの関係を、最後の数の「構成の仕方」である、場面のパターンから考えてみます。

☆もとの数に 2 かけた積ともとの数に 3 をたした和をたした数になっている。

もとの数をとりあえず□と表すと、「もとの数に 2 かけた積」は $\square \times 2$ と、「もとの数に 3 をたした和」は $\square + 3$ と表すことができますから、☆のパターンは次のように式で表すことができます。

$$\star(\text{式バージョン}) \quad \square \times 2 + (\square + 3)$$

これを見ると、 $\square \times 2$ は $\square$ の 2 つ分ということですから、そこに $\square + 3$ をたすと、全体は $\square$ の 3 つ分に 3 をたした和、つまり $\square \times 3 + 3$ になることに気づきます。つまり、 $\star$ のパターンだけをもとに考えると、最後に言ってもらう数には下の $\times$ のようなパターンがかくされていることがわかります。

$$\times \quad \square \times 3 + 3$$

最後の数がこのパターンを持つのであれば、ここから $\square$ を見つけることができそうです。まず「 $\square \times 3 + 3$ 」から 3 をひいて $\square \times 3$ を求め、その結果を 3 でわれば $\square$ がわかります。

確かめてみます。最後の数として 15 と言われたら、まず 3 をひいて 12、これを 3 でわると、確かにもとの数 4 を見つけることができます。また最後の数として 42 と言われたら、3 をひいて 39、これを 3 でわると、やはりもとの数 13 を見つけることができます。

最後の数の「構成の仕方」である場面のパターンを調べることで、最後の数ともとの数の関係がわかり、もとの数を見つかる方法を作ることができました。

なお $\times$ の $\square \times 3 + 3$ というパターンを $\square \times 3 + 1 \times 3$ と見て、今回も、5 年生の学習で $1.8 \times 0.7 + 3.2 \times 0.7$ を $(1.8 + 3.2) \times 0.7 = 5 \times 0.7$ などと工夫して計算したことを思い出すと、 $(\square + 1) \times 3$ という少し違うパターンとして見ることもできます。そしてこれも 5 年生の倍数の学習を思い出すと、 $(\square + 1) \times 3$ というパターンは $\times 3$ の形をしているので、3 の倍数になっているとわかります。

さらにこの $(\square + 1) \times 3$ というパターンを見ると、最後に言われた数を 3 でわると $\square + 1$ 、つまりもとの数に 1 をたした数になるので、そこから 1 をひくというやり方でも、もとの数を見つかることができる、とわかります。

【補 足】

上のことを中学校の文字式を用いて説明すると、次のようになります。

もとの数を n 、最後の数を m と表すと、最後の数 m は次のように表すことができる。

$$m = 2n + (n + 3) = 2n + n + 3 = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

$m = 3n + 3$ を n について解くと、

$$m = 3n + 3 \quad \text{より} \quad m - 3 = 3n$$

$$\text{よって } n = \frac{1}{3}(m - 3)$$

あるいは $m = 3(n + 1)$ を n について解くと、

$$m = 3(n + 1) \quad \text{より} \quad \frac{m}{3} = n + 1$$

$$\text{よって } n = \frac{m}{3} - 1$$

問題：次のような2通りのたし算を考えます。

(1) まず4つの異なる数を考えます。例えば1、3、7、8。

(2) 次にその4つの数の和を求めます。(1)の4つの数なら、 $1+3+7+8$ を計算して和は19となります。

(3) 今度は4つの数から2つの数を選んでできるたし算をすべて考えます。ただしたす数とたされる数を入れかえただけのたし算は同じと考えます。(1)の4つの数だと、次の6つのたし算になります： $1+3$ 、 $1+7$ 、 $1+8$ 、 $3+7$ 、 $3+8$ 、 $7+8$ 。

(4) 最後に6つのたし算の和をたしあわせます。(3)の6つのたし算の和はそれぞれ4、8、9、10、11、15となりますから、これら6つの数をたしあわせて、その和は57となります。

(2)でもとめた和と、(4)でもとめた和の間には、どのような関係がありますか。またなぜその関係が成り立つのでしょうか。

(令和6年度数学・問題6(3) 類題)

確認のため、もう一つの例をやってみます。最後の関係がわかりやすくなるよう、小さい数を使うことにして、1、2、3、4で確認してみます。(2)で求める和は $1+2+3+4=10$ となります。また(3)の6つのたし算は $1+2$ 、 $1+3$ 、 $1+4$ 、 $2+3$ 、 $2+4$ 、 $3+4$ なので、それらの和3、4、5、5、6、7をたしあわせた(4)の和は30となります。

これを見てまず気づく関係は、(4)の和は(2)の和の3倍になっているということです。では、問題中の例にあった4つの数でもそうなっているのでしょうか。4つの数1、3、7、8では(2)の和は19、(4)の和は57でしたから、やはり(4)の和は(2)の和の3倍になっています。

なぜ(4)の和が(2)の和の3倍になるのかを考えてみます。2つの和の「構成の仕方」から、今の場面のパターンは次のようになっています。

☆ 第一の和は4つの数をたし合わせたものになっている。

☆ 第二の和は、4つの数から2つの数をえらんで作った6つのたし算の和を、さらにたし合わせたものになっている。

4つの数がいくつかは、場面のパターンでは決まっていないので、とりあえず○、△、□、☆と表してみます。すると、第一の和は次の式のようにになります。

※1 第一の和： $\bigcirc + \triangle + \square + \star$

また6年生の組み合わせ方の学習を思い出すと、4つの数○、△、□、☆で作ることのできるたし算は、次のような6つになることもわかります。

$$\bigcirc + \triangle \quad \triangle + \square \quad \square + \star$$

$$\bigcirc + \square \quad \triangle + \star$$

$$\bigcirc + \star$$

(4)の和はこれら6つのたし算の答えをさらにたし合わせるので、これら6つのたし算をつなげたたし算の答えと考えることができます。

※2 第二の和： $(\bigcirc + \triangle) + (\bigcirc + \square) + (\bigcirc + \star) + (\triangle + \square) + (\triangle + \star) + (\square + \star)$

この第二の和をよく見ると、○が三回現れています。同じように、△も□も☆も三回ずつ現れています。つまり、第二の和を求めるときには、○を三回、△を三回、□を三回、☆を三回たすことになります。

第一の和は○、△、□、☆を一回ずつたした和ですから、その和を3倍すると、○、△、□、☆を三回ずつたしたことになります。そして、○、△、□、☆を三回ずつたした和なので、第二の和と等しくなります。

つまり、(4)で求める第二の和が(2)で求める第一の和の3倍になっているのは、第一の和が○、△、□、☆を一回ずつたした和なのに対して、第二の和は○、△、□、☆を三回ずつたした和になっているからです。

【補足】

今のことを中学校の証明のように書くと次のようになります。

$$\begin{aligned} \text{第二の和} &= (\bigcirc + \triangle) + (\bigcirc + \square) + (\bigcirc + \star) + (\triangle + \square) + (\triangle + \star) + (\square + \star) \\ &= (\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc) + (\triangle + \triangle + \triangle) + (\square + \square + \square) + (\star + \star + \star) \\ &= \bigcirc \times 3 + \triangle \times 3 + \square \times 3 + \star \times 3 \\ &= (\bigcirc + \triangle + \square + \star) \times 3 \\ &= \text{第一の和の3倍} \end{aligned}$$