上越教育大学研究紀要　第32巻　平成25年２月
Bull. Joetsu Univ. Educ., Vol. 32, Feb. 2013

# 「数学：パターンの科学」の捉え方と学校数学の関係の検討

布　川　和　彦*

(平成24年９月７日受付；平成24年10月18日受理)

要　旨

数学を「パターンの科学」とする捉え方が提唱され，またその捉え方をもとにした学校での算数・数学の教授・学習に対する提言もなされてきている。しかし多くの科学で研究対象に関わるパターンを探究することを考慮するとき，単に学習活動の中でパターンを見つけたり，表したりするだけでは，数学を「パターンの科学」とする捉え方に沿うものであるかは明らかとは言えない。

そこで本稿では，「パターンの科学」の捉え方が数学の発展をふまえた数学の特徴づけであるとの基本に立ち戻り，かつその捉え方に対する批判も視野に入れながら，「パターンの科学」という数学の特徴づけの意味を吟味した上で，明らかにされた意味に基づく形で，この捉え方が学校数学に対して持つ示唆を検討した。さらに，それらが，数学教育学において広く受容されている重要な諸観点と整合するかを検討した。

その結果，「パターンの科学」の捉え方は，数学の考察対象がパターンであることを指すものであり，算数・数学の学習内容をある種のパターンと考えるという立場から，学校数学への３点の示唆を得た。またこの捉え方は上述の諸観点と整合するのみならず，それらを精緻化する可能性を持つことも示された。

**KEY WORDS**
the science of patterns　パターンの科学　　mathematics education　数学教育
learning processes　学習過程　　objects of thought　思考の対象

## １．はじめに

数学を「パターンの科学」(the science of patterns) とする捉え方 (Devlin, 1994; Steen, 1988; Sawyer, 1955) に基づく数学教育の改善が提案されてきた (例えばHoffman, 1989)。そこでは，算数・数学の授業においても科学的な探究，すなわち観察からパターンを見いだす，そのパターンを利用して他の場合を予想するといった活動を採り入れることの重要性が指摘されている。我が国においても，数学のこの捉え方をもとにした学校数学に対する提案がなされてきている (Fujita & Yamamoto, 2011, 前田, 2011；山本, 2011)。しかし上のような活動は多くの科学でも見られ，それだけでは数学独自の特性とは言い難い。実際，いろいろな研究分野において，対象の行動パターンの特定やその特徴的パターンの考察 (例えば石井ほか, 2007；松本, 2002；野崎, 2000)，パターンの生成過程の考察 (例えば三浦, 2005) といった探究がなされている。そこで本稿では，数学を「パターンの科学」とする捉え方を再検討し，さらに数学教育に関わる他の視点との関係を吟味することにより，学校数学への採り入れ方をより明確にすることを目指すこととする。

## ２．「パターンの科学」の再検討

学校数学の文脈の中では「パターンの科学」という捉え方は，例えば以下のように考えられてきた：「数学がパターンの科学でありパターンの言葉であるならば，数学を知ることは次のようなことである。パターンの間の関係を探究し表現すること，複雑で曖昧な文脈の中にパターンを区別できること，パターンの間の関係を理解したり変形したりすること，パターンを分類し，コード化し，記述すること，パターンのコトバで読み書きすること，様々な実用的な目的のためにパターンについての知識を使用することである。パターンの多様性を把握するために (実際，パターンの間のパターンを見始めることになる)，数学のカリキュラムは，多くの異なるタイプの数学的パターンを導

*学校教育学系

入し，発達させる必要がある。[中略] 数学に携わる人は，パターンについての事実やアイデアを収集し，発見し，創造し，表現する」(MSEB & NRC, 1990, p.12)。このようにパターン「を」分類し，説明し，理解することを目指す (Hoffman, 1989, p.19) とする考え方ではあるが，確立した規則や手続きの習得に重点が置かれがちな，いわゆる伝統的な学校数学との対比を意図した場合には，知識の伝達から生徒中心の実践への移行を可能とする「科学」という面を強調し，観察からパターンを推測することの重視にもつながっていく。例えば，Schoenfeld (1989, 1992) は，理論的システムにおける規則性や現実世界から抽出された規則性について，その「本性や原理を決定する体系的な試みである」(Schoenfeld, 1992, p.344) と述べる一方で，科学との類似性を強調し「実験的な証拠に基づくパターン探し (pattern-seeking) に重点が置かれる」(p.335) とも述べている。また，Moschkovich (2002) は，「数学がしばしば『パターンの科学』と定義されるほどまでに，パターンを記述することは数学においては典型的な実践である」(pp.202-203) と述べ，パターンを見いだし記述することに重点を置いているように見える (Barbosa (2011), Vogel (2005) も参照)。こうした主張は，学習者の主体性重視の視点を提供する一方で，他の科学との類似性を強調することで，数学の特徴づけを不明瞭にする危険性も含んでいる。

同様の指摘は，数学を「パターンの科学」とする捉え方自身にもなされている。例えば，Hersh (1997) は，「パターンの科学」という立場を数学における構造主義として述べ，数学的な実践に適合すると述べる一方で，パターンや構造は「数学の中にのみ存在するものだけでなく，分析に基づく全ての思考の中に存在するもの」を含むことになり，過度に包含的 (over-inclusive) だと指摘する。そして，もしも明確に規定しようとすると結局，「数学は数学的パターンの数学的研究」ということになり，あまり魅力的ではなくなるとも述べている (pp.177-179: Yiparaki (1999) も参照)。実際，前節で引用した様々な研究でも，考察対象に関わるパターンが扱われていた。また，パターンを認識し，それに基づいて反応することは，音楽を聴くときや言語を運用するとき (Resnik, 1982) にも，画家の画風を感じるとき (van Hiele, 1986, p.23) にも行われているとすれば，私たちが身のまわりのものに接し，行動をしているときには，基本的に何らかのパターンを認識してそれに反応していると言えよう。

「パターンの科学」という捉え方は，近年の数学や数理科学の対象の広がりを表現するために使われている。例えば，Devlin (1994) は19世紀末では，数学は数，形，動き，変化，空間の研究であったが，前述の広がりを受けて，数学を抽象的なパターンの研究と捉えることを提案している。その上で，数えることのパターン，推論やコミュニケーションのパターン，動きや変化のパターン，形のパターン，対称や規則性のパターン，位置のパターンの6つに分けて，数学研究の発展を概説している。彼の抽象的なパターンの研究という考え方をもとに，Hersh (1997) が指摘する他の科学との差異を検討してみる。研究対象をXとする科学，つまり「Xの科学」においては，Xの観察やXについての実験，調査を行い，そのデータの中にパターンを探すことが行われる。またそのパターンによりXを特徴付けたり，パターンをXの特性と関連づけたり，パターンに応じてXをいくつかのタイプに分類するなど，パターンの発見は研究対象Xの理解に生かされると考えられる。これを「パターンの科学」にも当てはめるならば，研究対象自体が何らかのパターンであることが要請される。もちろん考察対象であるパターンを探究する際に，そのパターンの観察により考察対象であるパターンについてのパターン，いわばパターンのパターン (Steen, 1988) を扱うことは当然あり得るが，考察対象は元のパターンと考えられる。つまり，元の対象であったパターンを$O_n$，その観察等により見いだされたパターンを$P_n$とすると，$O_n$の振る舞い方の規則性や$O_n$どうしの関係を記述したものが$P_n$であり，$P_n$を見いだすことが考察対象$O_n$の理解を深めることになる。「最初のものから導き出されるパターンを全て加えていくことにより，[最初のパターンの] ポートレートを完全なものにしていく」(Steen, 1988, p.616) のである。「何らかのパターンに気づき，それを利用することは，そのパターンを形式化 (formalize) し，科学的分析に委ねることと同じではない」(Devlin, 1994, p.14) ので，もしも$P_n$についての「パターンの科学」を始めるのであれば，$P_n$を新たな考察対象として改めて設定することになろう。例えば，微積分の誕生に関わっては，「勾配（と他の変化量）に対する逐次近似を計算する中で生じた様々なパターン」が見いだされたが，「近似のパターン自身を数学的研究の対象とみなすこと」で初めて新たな研究が誕生したのである (Devlin, 1994, pp.88-90)。

なお，考察対象であるパターンが現実世界から見いだされたものであったとしても，パターン自体が考察の対象となったときには，すでに「Xのパターン」ではなくなっており，これがDevlin (1994) が「抽象的な」パターンと述べたことの意味だと考えられる。実際，山下 (2006) は，abstractが「抽象」の意味になる場合には，「それは『かたち』をひきだすという意味であり，素材の方はそのまま残しておく，あるいは積極的に捨てるわけであり，これが『捨象』にほかならない」(p.25) としている。例えばDevlin (1994) は，学校数学でも最も基本的な学習内容である数を，抽象的なパターンと見なしている。彼は3つのリンゴ，3人の子ども，3つのボール，3つの岩に共通した抽象的なパターンがあるとし，それを把握し記述するのが数3であるとする。さらに数が集まり，そこに順序性が現れ，演算により互いに関係づけられ，「数についてのより深いパターン」が研究されると数論が生まれてくる

(p.9)。また，「微積分学は，無限大や無限小といった無限のパターン（patterns of infinity）を記述したり扱ったりするための方法の集まり」(p.74）として特徴づけている。数論や微積分学のような典型的な数学における研究対象をパターンとして特徴づけていることは，研究対象がパターンとする捉え方を支持するものと言えよう。

こうした捉え方は，公理系の見方も含んでいる。実際Devlin（1994）は「公理が確かに有意味で正しいパターンを捉えている」(p.54）と述べるが，公理系における数学的現象の探究は，公理により記述されるパターンの振る舞いの探究と考えられる。さらに彼は，公理が以前の考察対象についてのパターンから生まれること，それが数学の新たな分野の誕生につながることを示唆している：「数学の新たな分野の発達における最初のステップは，何らかのパターンを識別することである。次にそのパターンを，自然数や三角形の概念のような数学的な対象や構造に抽象化することがくる。その抽象的概念を研究した結果として，観察された様々なパターンが公理の定式化につながるかもしれない」(p.55)。

数学はパターンを考察対象として研究を行うことで，各種パターンに関する知識や分析手法を発達させる。そこで抽象的なパターンについては「最適な記述や分析の手段は数学であり，数学的な表記，概念，手続きを用いることである」(Devlin，1994，p.3)。何かの研究であれ，日常生活であれ，数学の他の領域であれ，そこにパターンを見いだした場合には数学が適用できる可能性も高く，数学の「考えられない程の有効性」(Steen，1988，p.616）が生まれることにもなる。

以上のように，数学を「パターンの科学」として捉える場合には，パターン自体を探究・考察の対象とするという点に注意を払うことが必要であり，そうした捉え方は，他の研究領域との違いを説明するとともに，「パターンの科学」という捉え方を提案する文献の立場とも整合するものと考えられる。

## 3．「パターンの科学」からの学校数学への示唆

前節での数学を「パターンの科学」とする捉え方が，学校数学に対してどのような示唆を与えるか考えてみる。基本的な数学的概念もある種のパターンと見なすことができたことから，学校での算数・数学において学習する内容も，当然のことながらある種のパターンと考えられることになる。実際，Romberg（1989）は「パターンの科学」に関わり，学校数学の伝統的な内容がこの捉え方により包含されると指摘し，算術，幾何，代数，微積分学は，数，形（shape)，量のパターンにより特徴づけられると述べている（p.4)。同時に，この捉え方により，統計や離散数学，最適化における数学的構造も学校数学に含めることができると指摘している（p.4)。この指摘と前節での検討から，学校数学に対して次のような示唆を得ることができる：(a）従前からの学習内容も何らかのパターンを記述したものとして吟味すること；(b）学習においては科学と同様の手法，すなわち「探究，実験，そして試行錯誤的なプローチ」(Romberg，1989，p.4）も重視されるべきであること；(c）新たなパターンを探究の対象とすることで学習内容を創造できること。以下それぞれについて詳しく見ていくことにする。

数とその計算，幾何学的図形，文字式や関数，データの整理は，わが国においても算数・数学の基本的な学習内容であるが，Devlin（1994）はこれらが何らかのパターンを捉え記述するものであると考えていた。そこで，それぞれの学習内容について，そもそもどのようなパターンを扱ったものなのかを吟味しておくことが求められる。例えば，小学校4年生までの算数学習で大きな比重を占める非負整数とその計算について考えてみる。もともとの1，2，…といった自然数，特に比較的小さい自然数は，Devlin（1994）が指摘するように同種のものの集まりに見られるパターン，すなわち「一つさ（oneness)」「二つさ（twoness)」を記述するものと考えられる（p.9）[1]。ただしDevlin（1994）のように自然数全体という1つ上のパターンの探究，例えば素数の出現の仕方の探究を中心に考える場合はこれでよいが，小学校の学習にとって重要な十進位取りの構造はこのままでは出てこないことになる。そこで，算数で学習する数や計算については，「一つさ」「二つさ」に十進構造を加えたパターンを記述するものが数であり，それに対する操作[2]のパターンを記述するものが四則演算であると考えることになる。小学校低学年ではおはじきやタイルにより数を表現し，そこに10のまとまりを作ったり，計算方法を考えたりすることが多いが，おはじきやタイルは前述のようなパターンの意味で各数と同型であり，その意味で具体化（instantiation: Resnik，1981）やテンプレート（Resnik，1992）と考えることができよう。

このように学習内容が記述するパターンを明確にすることは，当該の学習がそれらのパターンに関わり，パターンの様相や振る舞い方，パターンどうしの関係や結びつきを調べるものであることを明確にする。いわば，当該のパターンについての子どもたちなりの理論や（知識体系の意味での）科学を構築し，「これらのパターンに精通するようになる」(Resnik，1975，p.37）こととして，その学習を考えることができる。Greeno（1991）はある学習内容の

まとまりを概念環境（conceptual environment）と呼び，その環境を探究し，その理解を深め，その環境でより自由に動けるようになることを学習として捉えているが，ある種のパターンが集まる世界を考えるならば，その世界を探究して理解することは，Greeno（1991）の考え方と整合すると考えられる。数の表現技能や計算技能の蓄積としてのみ学習を捉えるのではなく，数の記述するパターンについての理解の発展と考えることの重要性が示唆される。

また，算数・数学の学習内容をパターンを捉えたものと考えることは，説明のあり方にも関わってくる。学習において，パターンの様相や振る舞い方といったパターンのパターンを見出すことが多いであろう。このとき見出されたパターン$P_n$について「そのパターンがなぜ起こるのかを探究」（Sawyer，1955，p.36）し，元のパターン$O_n$からどのように生まれるのかを説明することが，「パターンの科学」としての説明の仕方と考えられる。例えばWittmann（2005）は「パターンの科学」の考えに基づく学習プログラムで扱う課題の例として奇数＋奇数＝偶数を取りあげ，「奇数パターン（odd pattern）」は2段組に1つ余分にくっついたパターンであり，そのパターンどうしが結合した結果として上の等式を説明している。つまり，観察されたパターン$P_n$が生ずる理由を考察対象のパターン$O_n$に基づき説明している。このように，学習内容が記述するパターンを明確化することで，算数・数学的説明の際に依拠すべき根拠が明確となり，必要な説明のあり方が明確になる。なお後述するように，これは学校数学で行われる通常の証明についても当てはまる。

以上のように，学習内容を何らかのパターンを記述したものとして吟味することは，学習の目指すところをある種のパターンの世界の理解として明確化し，またその探究で見出されたことに対する説明の仕方を明確化すると考えられる。

示唆(b)の学習における科学と同様の手法の重視については，上でも触れたように，既に多くの提案がなされてきている。すなわち，問題場面においてパターンを見出し，そのパターンを利用して考える活動を重視すべきとの提案である。例えば佐々（2011）は，計算練習を個々の計算の遂行のみに終わらせるのではなく，一連の計算問題をセットで考え，その中にパターンを探し，そのパターンを考えながら計算を行うことで，練習が機械的になることを避ける方法を提案している。またWittmann（2005）は学校数学についてよく知られた教材アリスモゴンについて，試行錯誤から出発しながら，パターンを見出し，それを利用して解決するといった学習の重要性を述べている。

本稿のここまでの議論に基づいて補足をすれば，考察対象について観察や実験を行ってパターンを探したり，他でも成り立つかを確認したりといったことは，「パターンの科学」の一側面ではあるが，こうした活動は第2節で述べたように，考察対象の理解につながるところに意味があると考えられる。Sawyer（1955）はパターンが繰り返し観察された場合に，「私たちがアイデアとして把握できる意味」（p.36）を持つはずだと述べているが，その意味は考察対象に根ざし，その把握は考察対象の理解につながると考えられる。このとき，考察対象が算数・数学の学習内容として認知されているものであれば，この活動は算数・数学の学習として受け入れやすい。また，算数・数学の学習内容が記述するパターンに関わる「パターンの科学」にもなる。しかし，考察対象がそうではない場合には，第2節で述べた数学と他の科学との違いについてと同様の問題が生じる。パターンを見出すことに重点がある場合には，それにより理解が深まる考察対象が算数・数学的であるかの吟味をすることが必要となろう。

最後に示唆(c)の，新たなパターンを探究の対象として学習内容を創造することについて考えてみる。これには少なくとも2通りの場合があろう。第一は，すでに考察対象であるパターンを規定する関係や規則を変更することで新たなパターンを作り出す場合。第二は，考察対象について見いだされたパターン自身を次の考察対象とする場合である。

第一のパターンを作り出すことには，2つのタイプが考えられる。一つは拡張や一般化の考え方に関係するもので，関係を別の関係に置き換えるものであり，もう一つは関係を付加することで元のパターンのうちの特殊なものに着目するものである。前者であれば，例えば，ものの集まりに十進構造を入れたパターンを数により考察していた場合に，この十進構造を二進構造など別の構造に変えることで新たなパターンを生み出すことができる。その上で，二進構造のパターンに基づく数やそのパターンに対する操作としての演算の探究を行うことになる。また，十進構造の10集まったら次の位に進むという規則を逆方向に進めたパターンを考えることで，小数を含む数を作り出すこともできる。六角形に対して，頂点の個数を増やしてパターンの変更を行うことで，七角形という新たなパターンを設定したり，正六角形を内角の大きさが$180\times(6-2)\div6=120^\circ$の多角形としてそのパターンを捉える場合に，内角の大きさが$36^\circ=180\times((5/2)-2)\div(5/2)$の多角形として正5/2角形を設定することができる（坪田，1996）。$y=ax+b$や$y=ax^2$という式で記述できる数量間のパターンを考察している際には$y=ax^3$や$y=ax^2+bx+c$といった式で記述できるパターンを設定することができよう。ただし，元のパターンを規定する関係を形式的に変更した場合，新たに設定されるパターンが学校数学で取り上げるのに適切かの吟味は必要であろう。作り出されたパターンの取捨選択を行うにあたり，算数・数学の文脈において実り豊か（fruitful; Kitcher，1984）であるかの吟味が必要になると考えられる。

後者の関係の付加については，三角形のパターンの中で二等辺三角形というパターンに注目する，自然数の集合の中で素数というパターンだけに注目するといったことを，この場合として考えることができるであろう。元のパターンの探究の中で，特に興味ある特性や振る舞いを示すパターンを新たなパターンとして設定するものと言える。

第二の見いだされたパターンを考察対象にする場合は，Devlin（1994）が述べていた，考察対象の探究で見いだされたパターンから公理が生まれ，それが数学の新たな分野の誕生につながる（p.55）ことに対応する場合である。典型的な場合としては，大学レベルにおいて，それまでの数の学習で観察された0や1の演算に見られるパターン，結合法則や分配法則のパターンを公理として捉えることで，それらで規定されるパターンである群や環を考察対象とすることが考えられる。しかし小中学校においても，公理的な扱いではないが，同様の移行が見られる。例えば，視覚的なパターンを捉えて記述していた平行四辺形という概念が，見いだされたパターンのいくつかを用いて定義されると，論証の際には定義によるパターンとして扱われることになる。視覚的パターンの探究で観察されたパターン自体が考察対象に変わったことを意味しよう。また関数でも，小学校では日常場面から見出される数量間のパターンを調べるが，中学校ではそこで見いだされたパターン，例えば$y=ax$と記述できるパターン自身を考察対象とし，このパターンの探究が行われていると見ることができる。有理数の学習なども，ものを分けたときのもとの量と分けた後の量，あるいは基準の量と半端な量との間に見られるパターンを分数として捉え記述した上で，そのパターン自身を考察対象とし，小数や無理数との関わりも含めたより複雑な性質や振る舞い方を探究することとして見ることができる。さらに中学校の文字式の学習は，それ以前の数の探究で見られたパターン，すなわち数に見られるパターン，あるいは数に対する操作に見られるパターンを捉えて記述し，それを考察対象として探究していると考えられる[3]。

こうした学習を，以前の考察対象で見出されたパターンを新たな考察対象とする段階と捉えることで，学習上留意すべき点も明確になる。以前は何かのパターンとして扱っていたものを，今度は考察対象とすることになるため，パターンを実体や対象のレベルに持ち上げるという視点の変更あるいは意思決定（Dörfler，2002）が必要となる。つまりその移行は意識的に行われる必要がある。他方で，学習の初期においてはもとのパターンのレベルに戻って確認することも必要である。あるパターンについての理論は，初期段階においては，そのパターンを抽象してきた経験についての我々の信念と一致することで正当化される（Resnik，1982，pp.101-102）と考えられるからである。また，上述の示唆(a)の観点からも，新しい学習内容が，もともとどのようなパターンが対象化されたものかを吟味することが必要となる。パターンが対象化しているという移行と，考察対象がパターンに出自を持つという理解の両面のバランスが重要になると考えられる。例えば，先に検討した奇数＋奇数＝偶数の証明は中学校の文字式による説明における典型的な学習内容であるが，一方では，$2n+1$等の文字式が奇数といった数のパターンの表現であるとの理解がなされる必要があり，他方では，式変形といったパターン自身の探究で得られた知識が適用できるとの認識が必要であろう。さらには文字式の知識で処理されたものを，もとの数のパターンのレベルの情報として読みとる必要もある。要するに，式による基本的な説明の中にも，証明の対象に見られるパターンに対する数学的知識の適用という図式が存在し，後述するような一種の数学的モデル化と同様の過程が想定されるべきことが，浮き彫りにされる（*cf.* Nunokawa，2001）。

新たな内容の学習を，何らかの考察対象に見られたパターンを新たに考察対象にすることと考えると，学習内容導入時での我々の立場も明確にすることができる。例えば，小学校のかけ算やわり算の導入においては，数量に対するある種の操作のパターン，あるいは量と量の間のある種の関係のパターンを捉え記述することで，かけ算とわり算を導入していると考えられる。つまりそこでは，日常場面などそれまでの考察対象に見られるパターンを捉えて記述することに重点がある。他方で単元の後半でかけ算やわり算のきまりを考察する学習は，導入時に定式化され考察対象となったパターンについて探究していることであり，「パターンの科学」が行われていると言えよう。

最後に，以上で述べてきたことを具体的に考えるために，１つの算数の学習の事例をとりあげ，ここまでの議論をもとに検討してみることにする。

Leung（2010）は数学を「パターンの科学」とする捉え方をもとに，数学的経験を「数や形に関わる不変のパターンを識別し，またそのパターンを再生産したり再提示したりすること」（p.2）とする。その上で，図形の面積と周の長さの間の関係を探究することを目標とした小学校４年生の授業について考察している。この授業では次の２つの問題が扱われた：問題１「長方形の形の２軒の家。周りの長さが16ｍと20ｍのとき，どちらの方が広いか」；問題２「36ｍのフェンスで長方形の花壇を作る。一番広くするにはどうしたらよいか」。授業では格子のかかれたプリントや横の長さを１㎝，２㎝，…と変えて面積を調べる表のかかれたプリントなどが用いられた。Leung（2010）は子どもたちから出された発見をまとめており，その中には次のようなタイプが含まれていたとされる：（ｉ）長方形の面積＝縦の長さ×横の長さ，（縦の長さ＋横の長さ）＝（周りの長さ）÷２といった既に学習した数学的知識の再形成；（Ⅱ）周の長さだけでは長方形の面積は決められない，周の長さが増えても面積が増えるとは限らない，一定の周の

長さでは縦と横の長さが同じときに面積が最大になるといった新たな数学的知識の形成；(III) 面積最大に関わる発見は辺の長さが小数でも正しい，周の長さが36cmのとき面積の増え方は15, 13, …, 3，1となるといった，現在の文脈を越えた数学的知識の創造や発見。

Leung (2010) が子どもたちの数学的経験をパターンの識別やその再生産と考えていることから，上述の示唆(b)，すなわち算数の学習においても科学と同様の手法を採り入れる点は重視されていると考えられる。また実際に，子どもたちは面積と周の長さに見出されるパターンについての発見をしており，そうした活動が十分行われている。次に示唆(a)の観点から考えると，パターンの識別が考察対象であるパターンの理解を深めることにつながっている必要がある。Leung (2010) は授業の目標が図形の面積と周の長さという概念間の関係を探究することであると明確に述べており，また，上で子どもたちが見出したとされる知見が，面積は周により比べられるという面積についてのよく知られたミスコンセプション（梶，1983）に関わり，子どもたちの面積概念の理解を深めると考えられる。ここで，面積という概念が，平面の形についての広がりのパターンやその広がりを表現しようとする人間の操作に見られるパターンを捉え記述するものと考えると，この面積というある種のパターンを捉える概念の理解を深めるという意味で，「パターンの科学」になっていると解釈することができる。そこで，今の授業では，面積の理解を深めるという方向に子どもたちの注意や話し合いを向けることが，結果として「パターンの科学」に適う学習になると考えられる。

しかし同時に示唆(c)の観点からは，子どもたちが発見したパターン自身を考察対象とし，新たなパターンの科学を開始する可能性も考えられる。Leung (2010) が指摘するように，子どもたちの発見のうち正方形の時に面積が最大になることや面積の増え方が15, 13, …, 2，1となることは，2次関数の内容につながるものである。つまり，ここでの面積の変化のパターン自身を考察対象として，そうした変化のパターンを記述し，またその性質や振る舞い方を探究することは，変化のパターンの科学になりうる。ただしそのためには，面積ではなくその変化のパターンを捉えて記述した上で，上述のような考察対象の意識的な移行が要求される。さらには，そのパターンを考察対象とすることから，パターンの記述をもとに探究を行うこと（例えば，記述を変形することで新たな情報を得る，その記述に対して他の知識を適用して新たな情報を得る等）が求められる。このように同じ題材を用いても，パターンを見出し面積の理解を深めることと，パターン自身を考察対象として数量関係の探究に移行することの間には，学習者にとって小さくない飛躍がある。以上で見てきたように，考察対象の変化やそれに伴う授業の流れ，その時の学習の目標をより明確化できることが，数学を「パターンの科学」とする捉え方からの示唆を本節で詳細に吟味してきたことの1つの利点と言える。

## 4．他の数学教育学的観点との整合性

数学を「パターンの科学」と捉えることは前節のような示唆を与えるが，こうした数学観は教師の考え方にも影響する（Forgasz & Leder, 2008）と考えると，数学教育学で広く受容されてきた諸観点と整合する方が望ましい。そこで本節では，そうした観点のいくつかと，数学を「パターンの科学」とする捉え方が整合するかを検討することにする。

### 4．1 表現の重要性

算数・数学の学習においては表現あるいは外的表象の重要性がしばしば指摘される（*e.g.* Pape & Tchoshanov, 2001)。ここまで見てきたように，考察対象が抽象的なパターンであり，パターンが事象に見られる配列（arrangement)，秩序（order)，形態（form）だとすれば（OED2)，事象において認識されたパターンを定式化（Resnik, 1975）してその配列や秩序，形態が“どのようなものか”を言葉で表すか，あるいは，他の要素を捨象しそれらの配列や秩序を浮き彫りにした図式のような具体化（Resnik, 1981）やテンプレート（Resnik, 1982）によりパターンを浮き上がらせることが必要であろう。その上で，それらの表現を媒介にしてパターンに働きかけることで，パターンの示す特性や振る舞いを観察することが可能となる。つまり，ある種の表現を通してでなければ，対象の考察ができないと考えられる。具体的な事例が生成的な例（generic example）になることが数学的な推論には重要であるが（Balacheff, 1988)，これは具体的な事例がパターンの表現として扱われることを指すものと言えよう。逆に，「パターンは実現される特定の素材（material）には関係しない」(Sawyer, 1955, p.40）ことから，同じパターンを表す限りにおいて多様な表現が可能となり，そこから，表現間の翻訳が頻繁に行われ，それがまた学習において重要となる。

Romberg (1989) は学校数学での計算器やコンピュータの利用は，パターンの探究を助ける重要な道具として自然なこととしている (p.5)。これは，数学や数理科学の研究でコンピュータ利用の重要性が高まっているとするSteen (1988) の指摘からも支持される。コンピュータ・グラフィクスという表現により，当該のパターンに関わる「視覚的なパターンを作り出す」ことができ，抽象的内容を「初めて“見る”ことができ」，「目により示唆される新たな推測を作ることができるように」なる (Steen, 1988, p.614)。学校数学で利用される作図ツールも，パターンを維持しながら同時に動的扱いを可能とする表現であり，それにより，元のパターンの特性や振る舞いを観察したり，元のパターンを含むより広い統一的パターン (Devlin, 1994, p.117) の下で考えることを可能にしたりする。つまり，パターンの振る舞いを探究するための有用な道具となり得る表現として捉えられる。

### 4．2 van Hieleの水準論とRME理論

van Hiele (1986) の思考の水準論は，図形や論証の学習の基礎を与えるものとして数学教育学で広く受容されてきた。その第1水準では図形を視覚的に捉え，次にその図形の諸性質が探究されると，第2水準ではそれら諸性質の運搬者として図形を捉え，第3水準では中心的と考えられる性質により定義されるものとして図形を捉える (布川, 1993)。小学校で学習する基本的な平面図形を，身の回りのものに見られる視覚的なパターンを捉え記述するための知識と考えると，第1水準は視覚的パターンを図形により捉え記述する水準であり，その視覚的パターンについての探究を行い，見いだされた諸性質，つまりパターンのパターンを含めて視覚的パターンを捉えるようになると第2水準に至り，パターンの間の関係がさらに探究された結果，中心的な性質，つまり中心的なパターンが見いだされると，そのパターンにより図形が定義され第3水準に至る。中心的なパターンにより図形が定義されるということは，第3節の示唆(c)のうち第二の場合で述べた，そのパターン自身が考察対象となることを意味する。このように，「パターンの科学」という捉え方はvan Hieleの水準論と整合性がつきやすいと考えられる。

オランダのフロイデンタール研究所で開発され，広く受容されてきたRME (Realistic Mathematics Education) 理論は，数や計算の分野を中心に具体と抽象を媒介する学習の理論を提供する。現実的場面に関わる問題解決から開始し，そこでの子どもたちの考え方を吟味，洗練することで算数・数学的知識を構成するボトムアップ的な学習の流れを提唱している。その中で，場面を参照した操作を記述する場面のモデル (model-of) から，その操作自体を吟味し，より簡潔で洗練されたものにするためのモデル (model-for) への移行が重要となる (Gravemeijer, 1997)。Gravemeijer (1997) が取り上げるわり算の筆算の例では，model-ofでは場面を累減によりモデル化し，model-forでは累減による解法をより効率的に行う方法 (10回分をまとめて引く等) を考え，筆算に近いアイデアに至る。なお数と計算については，van Hieleの第3水準は小学校では扱われず，model-forは第2水準，model-ofは第1水準から第2水準への移行に当たるとされる (pp.341-342)。したがってここでの移行は，場面で行った操作のパターンを数や計算により記述することから，そのパターンを探究し，その理論を作ることへの移行であり，パターンの科学の遂行として捉えることができる。ボトムアップ的な学習は，学習内容のもとになるパターンから出発することの重視と言える。このことは，微積分の学習の例 (Gravemeijer & Doorman, 1999) にも見られる。物体の運動における時間と速さのパターンを離散的に捉え記述したグラフがmodel-ofとなり，これがmodel-forとなることで捉えたパターンについての推論が行われる。例えば離散の幅を変えながら和をとることで，捉えたパターンについてのパターンを見いだすことができる。この和をとるときに見られるパターンが積分になっていく (p.123)。そして新たに見いだされたパターン自身を考察対象とすることで，微積分の探究が始まる。これは，Devlin (1994) が「近似のパターン自身を数学的研究の対象とみなすこと」(pp.88-90) から微積分が生じたとすることにも合致する。以上より，「パターンの科学」の捉え方は，RME理論とも整合していると言えよう。

### 4．3 説明する証明

考察対象であるパターン$O_n$に関わり何らかの知見なりパターン$P_n$を見出した際に，それがパターン$O_n$にとって特徴的なものかを確認するには，パターン$O_n$により知見や$P_n$が説明されうるかを考えることになろう。例えば，図形をあるパターン$O_n$により定義した後に，その図形に関わるパターン$P_n$を見出した場合，$O_n$ (およびそれから説明されることがすでに確認された諸パターン) により見出された$P_n$が説明されるならば，このパターン$P_n$は図形に必然的に伴う性質なり振る舞い方だと考えられる。ここで行われることはまさに図形の論証である。

考察対象がパターンであることから，それから生じる性質や振る舞いであるかの確認は，そのパターンのみから説明されるかで判断せざるを得ない。実際，Resnik (1975) はパターンの探究ではパターンについてのとらえ方をできるだけ厳密に定式化し，その論理的な帰結を吟味すると述べている (p.36)。また別の論文では，証明がパターンに関わるものであり，基本的にはパターンを支配する法則に基づくものであるとしている (Resnik, 1992, p.12)。こ

のように抽象的なパターンを扱い，現実的な他の情報に依拠できないからこそ，数学は自身に矛盾があってはならず，論理的である必要性が強い（山口，2010，pp.62-63）。

数学を「パターンの科学」とする捉え方から導かれる，考察対象であるパターンに基づく説明を求めることは，学校数学に関して「説明する証明（proofs that explain）」を重視するという考え方（Hanna，1995）と特に整合する。説明する証明では考察対象の特性に基づいて知見がなぜ正しいのかを示すものとされる（Hanna，1995，p.48）が，これは考察対象であるパターン$O_n$について見出されたパターン$P_n$がなぜ生ずるのかを，$O_n$の特性として確認された情報から説明することと考えられる。このとき，パターン$O_n$から導かれるパターンを加え（Steen，1988，p.616），パターン$O_n$の理解を深めることは，$P_n$とパターン$O_n$の情報との接点が得られる可能性を高め，証明を作り出す過程において重要な側面と考えられる（Nunokawa，2010）。

### 4．4 数学的モデル化と数学的知識の活用

Steen（1988）は物理学者Weinbergの指摘を引用している：「数学が科学的探究のためのまさに正しいパターンを与えてくれるという不思議な能力を持つ理由は，数学者により探究されているパターンが，存在する全てのパターンだからであろう」。そして次のように続ける「もしもパターンこそがまさに数学が関わるものであるならば，数学の『考えられない程の有効性』も，それほど不合理なことでもないのである」（p.616）。上でも触れたように，数学は「パターンの科学」として，様々なパターンについて「最適な記述や分析の手段」（Devlin，1994，p.3）を与え，パターンに関わる知識を提供する。「数学の応用は，これらのパターンを利用して，そのパターンに適合する自然現象を『説明』したり予測する」（Steen，1988，p.616）。つまり，他分野の研究対象や身のまわりのものの中に該当するパターンを見出した際には，そこに数学的知識を適用して新たな情報を得ることが可能となる。変化のパターンを関数により記述することはもちろん，ものの集まりを数で記述したり，視覚的パターンを図形により記述することも，同じ意味合いをもってくる。

算数・数学の有効性を子どもたちに感じてもらう必要性から，学校数学において数学的モデル化を採り入れることや数学的知識を活用することの重要性が提唱されてきているが，数学的モデル化を重視することは，「パターンの科学」としての数学の威力（power）を子どもたちに感得してもらうものと言える。他方で，適用の有効性は，Steen（1988）が指摘するように，あるパターンについてのポートレートの豊かさに依存すると考えられるので，数学的モデル化の重視は，実際には子どもたちの算数・数学的知識の充実に支えられていることになる[4]。つまり，数学を「パターンの科学」とする捉え方は，算数・数学的知識の発展とその活用が相互に支え合う関係にあることを明確化するものと言える。

### 4．5 問題解決過程および問題解決的アプローチ

文章題では，非常に整えられた形とは言え，現実的な場面についての問いを算数・数学の知識により解決するという数学的モデル化と類似の解決過程が想定され（Nunokawa，1995），したがって前項で述べた「パターンの科学」という捉え方との接点がやはり見られることになる。しかし現実場面を伴わない問題であっても，解決においては，問題場面の中に適当なパターンを見出し，そのパターンについての知識である算数・数学の知識を適用し，そこから必要な情報を生成して問いに答えることになる（*cf.* Nunokawa，2005）。例えば，問題場面である図形の中に平行四辺形というパターンを見出した場合，そのパターンに関する知識，例えば平行四辺形の対辺の長さは等しいという平行四辺形というパターンについての知識を適用でき，これにより問題場面の２つの線分の長さが等しいことを示すことができる。このとき，問題場面に適当なパターンを見出すことが重要となるため，問題場面の中に様々なパターンを探し，場面の理解を徐々に深めることが解決過程において重要となってくる（Nunokawa & Hiroi, in press）。

算数・数学の学習は，あるパターンについての（学校数学レベルの）理論を発展させること，あるいはパターンを捉え記述して新たな考察対象としていくことに関わっている。わが国の授業において広く用いられる問題解決的アプローチは，これを子どもたちが「パターンの科学」として遂行することを意図したものと考えることができる。前者のタイプとして×２位数の計算方法の学習を考えると，×２位数の計算の中に数と計算についての既習知識を適用できるパターンを見出し，新たな計算方法を確立していく（詳細はNunokawa（2005）を参照）。現在のあるパターンの理論をさらに発展させることを，児童・生徒が「探究，実験，そして試行錯誤的なアプローチ」（Romberg，1989，p.4）により主体的に行うことを期待するのが，問題解決的アプローチの１つの形と考えられる。パターンを見出す学習としては，例えば，中学校３年生での２乗に比例する関数の導入がある。教科書では坂を転がるボールの運動を観察させ，関連する問いに答える中で，時間と転がった距離に見られる関係が，既有である１次関数により記述できるパターンとは異なることに注意を向けていく。この新たに見出されたパターンを捉え記述するための数学的知識と

して２乗に比例する関数が導入され，その後，このパターンについての探究が行われる。つまり，問題解決的アプローチにより新たな概念を導入する学習は，新たな「パターンの科学」の開始の経験として捉えることができる。

問題解決過程および授業の問題解決的アプローチも，数学を「パターンの科学」とする捉え方と整合すると同時に，前節まで論じてきた「パターンの科学」からの示唆を考慮して吟味することで，授業の位置づけ，あるいはその目標や必要とされる思考過程を明確化することができると考えられる。

## 5．おわりに

本稿では数学を「パターンの科学」とする捉え方を再検討した上で，その捉え方を学校数学に生かす方向性についても改めて吟味を行ってきた。「パターンの科学」の捉え方については，他の科学との違いを考慮することで，考察対象をある種のパターンとして考えることの重要性を指摘した。第２節で触れたように，「パターンの科学」という捉え方の「科学」の部分に重点が置かれた場合，考察対象の性質は問われずに，とにかく何らかのパターンを見出すことに注意が向けられたり，その探究がどのような意味で算数・数学の学習として適切なのかの検討が疎かになってしまう危険性があることを考えると，考察対象がパターンであること，パターンを見出すとしてもそれはパターンのパターンであること，パターンのパターンの探究も元のパターンの理解を深めるべきであることを明確にしたことは，「パターンの科学」という捉え方を学校数学に採り入れる際に有用な視点であると考えられる。

第４節では，数学教育学で広く受容されてきたいくつかの観点を取りあげ，それと「パターンの科学」という捉え方が整合し，また「パターンの科学」の視点から検討することで，それら観点の意義やそこでの学習過程を明確化することができた。こうした知見は，「パターンの科学」という捉え方が数学的知識の本性に関わるものだけに，数学教育学の多様な知見を背景から支える統一的な視点となりうる可能性を示すものと言える。さらに広い範囲の数学教育学の理論枠組みとの関係を検討し，統一的な視点としての可能性を高めることは今後の課題としたい。

### 注

1）Resnik（1981）のように，自然数を自然数全体のパターンにおけるポジションとする立場もあるが，Resnik（1982, 1992）では，数える操作や操作対象の中にパターンを見ることを想定し，それらに関わる初歩的理論を認めている。

2）理想的代理人（ideal agent）の操作を想定すべきかもしれないが，「実際のモノについて我々が行うものと十分に似ている」（Kitcher, 1984）と見なし，具体物や図への操作も含める方が，学校数学の文脈では考えやすい。

3）数と計算の学習で見いだされたパターンを考察対象にすることについては，数の操作のパターンを考察対象とした文字式の学習のほかに，後者（successor）の存在と数学的帰納法を中心的パターンとして扱うペアノの公理による自然数の公理的扱い（Gravemeijer, 1997, p.342）や，この段落の最初に述べたように，加法や乗法の単位元，逆元の存在や結合律，分配律を中心的パターンとして扱う群や環などの代数構造の探究も考えられる。

4）Oliveri（1997）はパターンを対象のある側面（aspect）であるとした上で，何かを立方体と見るためには数学を知っている必要があるといったように，あるパターンを見ることは相当する理論に依存するとしている。したがって，対象に有用なパターンを見るためにも，知識の枠組みを豊かにしておく方が有利だと考えられる。

### 引用文献

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Barbosa, A. (2011). Patterning problems: sixth graders' ability to generalize. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.420-428). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The science of patterns*. New York, NY: Scientific American Library.

Dörfler, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning, 4*(4), 337-350.

Forgasz, H. J. & Leder, G. C. (2008). Beliefs about mathematics and mathematics teaching. In P. Sullivan and T. Woods (Eds.), *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 173-192). Rotterdam, Sense Publishers.

Fujita, T. & Yamamoto, S. (2011). The development of children's understanding of mathematical patterns through mathematical activities. *Research in Mathematics Education, 13*(3), 249-267.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp.315-345). Hove, England: Psychology Press.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example.

*Educational Studies in Mathematics, 39*, 111-129.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42-49.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York, NY: Oxford University Press.

Hoffman, K. (1989). *The science of patterns: A practical philosophy of mathematics education.* Paper presented at the annual meeting of the AERA Special Interest Group: Research in Mathematics Education, San Francisco.

石井美光, Wej C., 福田昌子, 高岡宏行. (2007). タイ北部におけるフィラリア媒介ブユSimulium nodosum成虫の季節的及び日周活動パターンの研究. *Medical Entomology and Zoology, 58*(2), 132.

梶外志子. (1983). 子どもの面積と周りの長さの認識について. 数学教育学論究, *39·40*, 49-66.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge.* New York: Oxford University Press.

Leung, A. (2010). Empowering learning with rich mathematical experience: Reflections on a primary lesson on area and perimeter. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* [e-Journal]. Retrieved from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm

前田静香. (2011). 学習におけるパターンの捉え方と探究の様相：パターンの科学としての数学観に基づく学習指導要領の分析を通して. 鳥取大学数学教育研究, *14*(2), 1-25.

Mathematical Sciences Education Board, National Research Council. (1990). *Reshaping school mathematics: A philosophy and framework for curriculum.* Washington, D.C.: National Academy Press.

松本奈穂子. (2002). トルコにおけるアクサック・リズム舞踊の頻出ステップ・パターン. お茶の水音楽論集, *4*, 89-98.

三浦岳. (2005). 発生生物学におけるチューリング系の応用：四肢骨格のパターン形成を例として. 蛋白質 核酸 酵素, *50*(15), 1955-1961.

Moschkovich, J. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. *Mathematics Thinking and Learning, 4*(2&3), 189-212.

野崎瑞樹. (2000). 対人ネットワークの利用パターンについての探索的研究：資源の種類と親しさの程度からみた利用パターン. 社会心理学研究, *16*(1), 1-12.

布川和彦. (1993). van Hiele理論に対する新たな意味づけ：インフォーマルな知識と発達の最近接領域を手がかりとして. 教育方法学研究, *19*, 37-46.

Nunokawa, K. (1995). Problem solving as modelling: A case of augmented-quotient division problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 26*(5), 721-727.

Nunokawa, K. (2001). Surprises in mathematics lessons. *For the Learning of Mathematics, 21*(3), 43-50.

Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 325-340.

Nunokawa, K. (2010). Proof, mathematical problem-solving and explanation in mathematics teaching. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp.223-236). New York: Springer.

Nunokawa, K. & Hiroi, H. (in press). Elementary school students' use of drawings and their problem solving. In S. Helie (Ed.), *Psychology of problem solving.* Hauppauge, NY: Nova Science Publishers.

Oliveri, G. (1997). Mathematics, a science of patterns? *Symthese, 112*, 379-402.

Pape, J. & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation (s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice, 40*(2), 118-127.

Resnik, M. D. (1975). Mathematical knowledge and pattern cognition. *Canadian Journal of Philosophy, 5*(1), 25-39.

Resnik, M. D. (1981). Mathematics as a science of patterns: Ontology and reference. *Noûs, 15*, 529-550.

Resnik, M. D. (1982). Mathematics as a science of patterns: Epistemology. *Noûs, 16*, 95-105.

Resnik, M. D. (1992). Proof as a source of truth. In M. Detlefsen (Ed.), *Proof and knowledge in mathematics* (pp.1-17). London: Routledge.

Romberg, T. A. (1989). *To know mathematics: A reaction to "the science of patterns: A practical philosophy of mathematics education," by Kenneth M. Hoffman.* Paper presented at the annual meeting of the AERA Special Interest Group: Research in Mathematics Education, San Francisco.

佐々祐之. (2011). 複式学級における算数科学習環境デザインに関する研究：間接指導時の課題設定のための生産的練習. 熊本大学教育学部紀要：人文科学, *60*, 237-246.

Sawyer, W. W. (1955). *Prelude to mathematics.* Harmondsworth, Middlesex: Penguin Books.

Schoenfeld, A. H. (1989). *Reflections on a "Practical Philosophy."* Paper presented at the annual meeting of the AERA Special Interest Group: Research in Mathematics Education, San Francisco.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics.

In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp.334-370). New York: MacMillan.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science, 240*(4852), 611-616.

坪田耕三. (1996). 追求を楽しむ算数の授業. 教育出版.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight.* Orland, FL: Academic Press.

Vogel, R. (2005). Patterns: A fundamental idea of mathematical thinking and learning. *ZDM, 37*(5), 445-449.

Wittmann, E. Ch. (2005). *Mathematics as the science of patterns: A guideline for developing mathematics education from early childhood to adulthood.* Plenary lecture presented at the International Colloquium "Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood," Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques. Retrieved from http://irem.u-strasbg.fr/php/publi/annales/sommaires/11/WittmannA.pdf

山口昌哉. (2010). 数学がわかるということ：食うものと食われるものの数学. 筑摩書房. (1985刊の文庫化)

山本信也. (2011). 数学教育の基礎としての数学観：数学＝パターンの科学. 熊本大学教育学部紀要・人文科学, *60*, 221-235.

山下正男. (2006). 思想の中の数学的構造. 筑摩書房. (1980年刊の文庫化)

Yiparaki, O. (1999) Another general book on mathematics? *Complexity, 4*(4), 55-60. (Review of Devlin (1994))

# On the Relationship between the Conception of "Mathematics: The Science of Patterns" and School Mathematics

Kazuhiko NUNOKAWA*

## ABSTRACT

Some mathematicians and philosophers have recommended that mathematics can be considered the science of patterns, and some mathematics education researchers have presented the ideas for improving mathematics teaching and learning based on this conception of mathematics. When we take account of the fact that various natural and social sciences include explorations of patterns concerning the objects of their studies, it is unclear whether mathematics teaching and learning which emphasizes seeking and representing patterns appropriately reflects the conception of "Mathematics: The Science of Patterns."

The purpose of this paper is to reexamine the meaning of this conception and reexamine how this conception can be utilized to improve school mathematics. For this purpose, the conception of "Mathematics: The Science of Patterns" was reexamined first by referring to the fact that this conception was devised to characterize mathematics which has drastically developed in 19th and 20th centuries and by taking account of the criticism against this conception. Next, based on the meaning of this conception which was illuminated through the above reexamination, some implications which the above conception has for school mathematics were discussed. Finally, it was checked whether those implications are compatible with some perspectives which have been widely accepted in the mathematics education community.

The results showed the followings: (a) Adopting this conception, more attention should be paid to the idea that objects of mathematical studies can be considered kinds of patterns; (b) This conception has at least three implications for school mathematics, especially implications concerning objects of learning and thinking; (c) As well as being compatible with the above perspectives, this conception can be useful for elaborating those perspectives.

* School Education