上越教育大学研究紀要　第44巻　令和６年８月30日
Bull. Joetsu Univ. Educ., Vol. 44, Aug. 30, 2024

小学校算数科における二面性の問題

布　川　和　彦*

（令和６年１月19日受付；令和６年４月２日受理）

要　　旨

数学的概念の捉え方に関する二面性という視点は数学教育学において広く用いられており，特に文字式の学習や関数の学習についてはこの視点に基づく研究が行われてきている。しかしこの視点の提唱者たちの論文では，自然数や図形という小学校算数の学習内容にも言及していることから，小学校算数の学習内容を二面性の視点から検討することは，算数における学習とその支援を考える上で意義のあることと考えられる。

そこで本稿では，提唱者の考えを手掛かりとしながら，算数教科書に現れたわが国の基本的な学習過程も視野に入れつつ，いくつかの算数の学習内容について二面性の視点から検討を行うこととする。

その結果，操作的捉え方と構造的捉え方を区別するという二面性の視点が，わが国の算数の学習における自然数，小数，分数という数の理解，倍や割合の理解，基本図形の理解にも援用される可能性が確認され，また数の理解との関係から数直線の利用にも関わりのあることが示された。また援用の可能性から，操作的捉え方から構造的捉え方への移行に留意する必要性や初期の理解としての操作的捉え方の重要性が，これらの内容に関しても示唆された。

KEY WORDS
Elementary-School Mathematics　算数　Duality　二面性　Operational and Structural　操作的と構造的

1　はじめに

数学的な概念についてプロセスとして操作的に捉える仕方と，構造を持ったモノとして構造的に捉える仕方があること，つまり数学的概念の捉え方が操作的と構造的の二面性(duality)を持つことは，数学教育学の研究においては一つの常識として用いられてきている。特に文字式の学習(小岩，2020；清水，2019)や関数の学習(例えばViirman et al., 2010)といった中等教育レベルの数学教育において，重要な視点を提供してきている。そうした視点から学習者の反応を分析することにより，学習者が直面する困難を特定したり，あるいは二面性についての先行研究を参照することにより，そうした困難を克服するための指導の方針を導いたりすることができる。

しかし二面性の考えを1990年代に提唱した論文を見ると，そこでは中等教育レベルの学習内容だけではなく，自然数や初等的な幾何図形などについても言及しており，初等教育レベルの数学の学習についても二面性の議論の範囲に含まれていることがうかがえる。したがって，二面性の議論や研究成果を，小学校算数の学習や指導を検討することに援用することも可能であると考えられる。

そこで本稿では，二面性の提唱者の論文に現れる初等教育レベルの内容に関する記述を手がかりとし，わが国の教科書で想定されていると思われる学習過程も視野に入れながら，小学校算数で学習するいくつかの内容について，二面性の観点から検討することを試みる。

2　概念の捉え方の二面性

Sfard (1991)は数学的概念には二通りの捉え方(conception)があるとし，それらを操作的(operational)と構造的(structural)と呼んでいる。これらの捉え方は次のように特徴付けられている。まず操作的捉え方では，「数学的存在(entity)はあるプロセスの産物として捉えられたり，プロセスそのものと同一視されたりして」(p. 33)おり，言語的表象により支えられているとされる。これに対して構造的捉え方では，「数学的存在は，実在する対象(real object)であるかのように，一つの静的な構造として捉えられて」(p. 33)おり，視覚的なイメージにより支えられている。

*学校教育学系

また「概念形成の過程においては，操作的な捉え方が構造的なものに先行」し(p. 10)，構造的捉え方は操作的捉え方から進化するとされる(p. 33)。操作的捉え方は効果的な問題解決や学習にとって十分ではなく，構造的捉え方こそがそうした問題解決や学習といった全ての認知過程を促進する(p. 33)。ただし後で見るように，二つの捉え方は「実際には相補的(complementary)」(p. 4)である点にも注意が促されている。

例えば関数の場合，操作的捉え方ではxの値に対してyの値を計算するプロセスや一つのシステムから別のシステムを得るためのよく規定された方法として関数を捉えているのに対し，構造的捉え方では関数は「順序対の集合」という現代的な捉え方がなされるとしている(p. 5)。また文字式に関しては，例えば $3x+1$ という式を操作的に捉える場合には，ある数xを3倍してから1をたすという一連のプロセスを表していると捉えるのに対し，構造的に捉える場合には，このプロセスの結果として得られる構造を持った一つの数として $3x+1$ を捉えることになる。後者の捉え方では文字式は数と同じであるから，この式自体を他の式とたし合わせたり，あるいは他の文字式の文字の部分にこの式自体を代入したりすることも，特に違和感なく遂行することができる。

操作的捉え方から構造的捉え方への移行として，Sfard (1991)は三つの段階を想定している(p. 18)。操作的捉え方の段階では，既に馴染んでいる対象に対してプロセスが施されるが，学習者がそのプロセスに馴染み，心的表象を通して遂行できるようになり，実際に遂行してみなくてもそれについて考察できるようになると，内面化(interiorization)の段階に入るとされる(p. 18)。さらに操作の長い系列が圧縮され，扱いやすい単位のようになると圧縮化(condensation)の段階に至る。プロセスは一つの全体として考えられるようになり，操作の入力と出力の間の関係に注意が向けられる(p. 19)。その後，一つの全体が十分に発達した対象として捉えられるようになった時に，モノ化(reification)[1]が生じたとされる。Sfard(1991)は内面化と圧縮化は徐々に生じる量的変化であるが，モノ化は瞬間的な飛躍であると指摘している(p. 20)。また新たなモノは元のプロセスから切り離され，その意味は，それがあるカテゴリーのメンバーであるという事実から引き出されるようになる。そして，新たなモノの存在を根本的に支えるのはこのカテゴリーであるとも述べている(p. 20)。学習者はこのカテゴリーの一般的な性質や，メンバー間の様々な関係について探求できるようになる。さらに新たなモノを他のプロセスの入力として利用できるようになる。

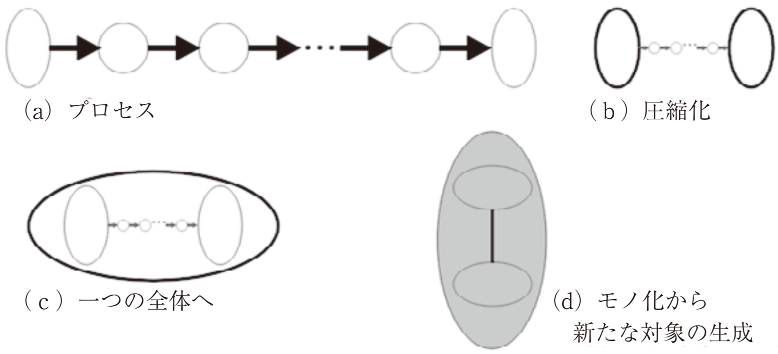

図1：操作的捉え方から構造的捉え方への移行のイメージ

操作的捉え方から構造的捉え方に移行するので，構造的捉え方ができる学習者は必要に応じて，操作的捉え方に戻り，数学的対象の元になったプロセスとして扱うこともできる。実際，両者の間を自由に行き来できることが，数学的な推論を行う上で必要との指摘もある(例えば，板垣，1998)。つまり，上で触れたように二つの捉え方は相補的であり，「同じコインの表裏」(Sfard, 1991)である。他方で，操作的捉え方はできても構造的捉え方はできないという学習者は，構造的捉え方が必要とされる場面では学習が成立しにくいことが考えられる。

なお類似の概念としてprocept(Gray & Tall, 1994)があるが，これは数学で用いられるシンボルが，プロセスと概念(concept)とが認知的に組み合わさった「混合物」であることを示すために作られた用語である。Gray & Tall (1994)も，proceptの概念の側面に当たる数学的対象(mathematical object)はプロセスの産物であるとしている(p. 121)。

3　倍変換と割合

Gray & Tall(1994)は比(ratio)と比率(rate)の違いはproceptにより解釈できるとし，比はプロセスであり，比率は比のプロセスから産出された数学的対象であるとしている(p. 137)。ただしこれは三角比の理解に関わり述べられており，正弦＝対辺の長さ／斜辺の長さの式が，正弦を計算するプロセスとその値の両方を表すとも述べている(p.

120)。したがって，この比がプロセスであるとの指摘は，ある量が基準量の何倍かを求める操作を指すものと考えられる。倍の値や割合について，それを求める計算や操作というプロセスとして操作的に捉えることと，そのプロセスにより得られ，プロセスを反映した構造を持つ数として構造的に捉えることが区別されることを，Gray & Tall (1994)は指摘していると見ることができる。

実際，学習指導要領解説では「割合を表す数は，基準量を単位とした比較量の測定値であるともいえる」(文部科学省，2018，p. 218)としているので，その測定値を求める際には，比較量を基準量で測定するというプロセスが行われることになる。例えば白い紙テープとそれより短い赤い紙テープがあり，前者が後者の何倍であるか，あるいは後者をもとにした前者の割合を求める場合，赤テープの長さを単位として白テープの長さを測定することになる。第1学年で学習する測定の基本を想起するならば，測定は単位を併せていき，測定する量と同じになるようにすることであった。測定値がpということは，単位のp倍を構成したところ測定する量と等しくなったことを意味する。測定値としての倍や割合は，確かに背景にこうした一連のプロセスを含んでいる。

わり算の計算により倍や割合を求めることも多いが，その場合も根本の部分には，今の測定のプロセスがあると考えられる。例えば比較量Aが12 cmで基準量Bが3 cmの時，$12\div3=4$と商を求めることで，AがBの4倍であることを見いだすことができる。しかし除法により何倍かが求められる理由を改めて考えてみると，基準量Bをp倍したら比較量Aに等しくなると仮定すると $3\times p=12$ が成り立つはずであり，そのpを求めるのに乗法の逆である除法を実行したのだと考えられる。つまり，基準量のp倍を構成するプロセスがやはり含まれることになる。

二面性の議論を参照すると，この基準量の何倍かを作る操作が圧縮化やモノ化された際に，入力と出力の関係に注意が向けられる(Gray & Tall (1994)参照)。つまり，途中の操作があまり意識されなくなり，基準量と比較量が何倍であるかという結果の関係に焦点が当てられることになる。このとき，倍や割合の数は二量の関係を表すとして捉えられ，それら二つの量からなる場面の構造を表すようになるとも言える。もちろん，これも二面性の議論から考えると，その関係や構造が具体的にどのようなものかは測定プロセスの産物として与えられるものとなる。

割合がある対象や事象の特徴を表すために用いられる際には，上のような倍や割合の構造的捉え方が前提になると考えられる。例えば，小学校第4学年で二種類のゴム紐等の伸び具合を割合で比較するという課題が，いくつかの教科書に見られる。元の長さと伸ばした後の長さとが比例すると仮定した場合，伸ばした後の長さが元の長さの何倍かは元の長さに依存せず一定となる。伸ばした後の長さが「いつでも」元の長さの1.5倍であると捉えるためには，それぞれの元の長さに対して伸びた後の長さをいちいち測定するプロセスをイメージするよりも，1.5倍の関係にある二量からなるペアの集まりというイメージを持つ方が適していよう。いわば，様々な元の長さについて共通点を探すという新たなプロセスのデータとして，倍の数値そのものを見なすことができるということである。それにより共通する比がゴム紐の質や特徴として捉えられ，伸び率といった「反省的に抽象された一定の比」である比率(Thompson, 1994，p. 192)が産出されることになる。

倍や割合を対象として構造的に捉えることを前提とするような学習場面が，中学校以降の数学の学習においては見られる。例えば中学校第2学年で学習する関数の変化の割合は変数xの任意の区間に対して考えるものである。いくつかの区間に対して実際に変化の割合を求める場合には，割合を操作的に捉えても理解が可能かもしれないが，あらゆる区間に対して変化の割合を考えることができることを理解するには，各区間に与えられるモノのように実際に計算をせずに変化の割合の存在を認める必要があろうし，変化の割合がそこでのグラフの傾きをおおよそ表すと理解するには，傾きという一つの状態と変化の割合を同一視する必要があり，したがって変化の割合についての構造的捉え方が求められると考えられる。高等学校で等比数列の等比をrと文字で表して考えを進める際には，rを他の数に施したり，文字式の中で扱ったりすることになるが，rを求める計算を実際にするわけではないので，等比rを数列を構成する一つの要素として認めることが求められると言えよう。さらに倍変換の大小関係を考えたり数と同様の演算や演算法則を考えたりする場合(外狩，1985)，操作的捉え方でも解釈は可能であるものの，これらを数と類比的に理解するためには，倍も数と同じレベルで構造的捉え方への移行が生じている方が，理解はしやすいと考えられる。

同様のことは，異種の二量の割合とされる単位量あたりの大きさについても言える。例えば15分間で1170 m歩いた場合に，歩く時間と進む距離は比例すると仮定し，1170 mを15等分することで分速を求める。ここでは距離を15等分に分割(segmentation; Thompson, 1994)するという操作により分速が求められるが，結果の値が今の歩いている状態を特徴づけると捉え，その時々の動きが分速78 mという性質を持つと考えている。つまり，分速78 mは今の歩行全体が持つ質や，その時々の動きが持つ性質として，持つことのできるモノであるかのように捉えられる必要がある。

以上のように倍や割合を二面性の観点から検討することは，基準量の何倍かを作る操作と二量の関係とを「コインの表裏」として統合的に捉えることを可能にするとともに，倍や割合が性質を表す際には構造的捉え方が必要とされ

るとしてその困難性を改めて浮き彫りにしたり，そうした構造的捉え方を育成するための操作的捉え方からの移行とその移行の前提となる操作的捉え方の確立の必要性を明確にしたりする可能性を持つと言えよう。

4 自然数

Sfard(1991)は自然数の操作的捉え方は数を「数えるプロセス自身」(p. 11)とすることであり，構造的捉え方では数は「十分発達した数学的対象として認識される」(p. 13)と述べている。また後者では数は「集合の性質あるいは同じ有限濃度を持つ集合のクラス」(p. 5)と捉えられるともされる。これは，二つの集合の要素の間に１対１対応がつく場合に同じ性質や濃度を持つとして集合を分類した時に，同じ類に属する集合が共通に持つ性質を自然数と捉えることだと考えられる。そして数えることは，この「濃度を測る」(仲田，2021，p. 37)こととも考えられる[2)]。

しかし数は単に集合の大きさに関わる性質を表すだけでなく，ものの集まりの合併や分解などに対応して他の数と関連付けられることになる。例えば５は４と合わさると９になり，他方で５は２と３に分解される。数をこのように他の数と関連付け，それ自身が様々な性質を持つものだと捉えるようになることが，数を対象として捉えることだとの指摘も見られる(Gravemeijer & Bruin-Muurling, 2019; Gray & Tall, 1994)。二面性の観点から言えば，自然数であっても，それが構造的に捉えられ，数学的な対象として扱われるようになることは，最初から当然のように行われるわけではなく，数えるというプロセスが圧縮化やモノ化され，そして数というカテゴリーのメンバーとなることで初めて可能になるのだと考えられる。

数はもちろん四則演算などの操作の対象となっていくが，Sfard(1991)が「様々なプロセスがこの新たな数に対して実行される」のは構造的捉え方になってからだと指摘している(p. 12)ことをふまえると，数える操作から出発した数が加法の学習が始まるまでに構造的に捉えられていないと，学習者にとっては数の計算自体が意味を持たない可能性があると考えられる。もちろん，りんご５個とりんご３個を合わせるとりんご８個の集まりができることは，それぞれのリンゴの個数を数えることにより確認はできる。そしてこの場面で生じていることを 5+3＝8 という加法の式により記述することは，数える操作により個数を捉える操作的捉え方のレベルの児童であっても可能であろう。しかし二面性の観点から考えるならば，こうした児童は数を操作を施すことができる対象として捉えていないという意味で，数についての演算としてこの加法を捉えられない可能性があると言える。これはGray & Tall(1994)が，全ての数えあげにより和を求めるcounting-allの考え方(例えば，Secada et al., 1983)を操作的捉え方の表れと見ていることとも整合しよう。この考え方では，５と３を合わせた結果を知るために，それらを表す指などの総数を改めて１から数えることになり，５という対象に３を加えるとして「６，７，８」と加えた分だけを数えることはしない。後者のcounting-onの考え方のためには，少なくとも５という数は操作を施す一つのモノとして捉えている必要がある。

小学校第４学年で学習する127094745といった大きい数は，この個数のものを数えたことがないであろうことを考えると，数えるというプロセスから出発したとは考えにくい。１億であればむしろ，１万の10倍の10倍の10倍の10倍といった構成，つまり数１万を対象としたプロセスを通して構成されたものである。したがってここでは，１万といった数自身が倍や合併などの操作の対象となり，構造的に捉えられていることが必要となる。１万についても実際に数えるプロセスから出発していないとすれば，100といった数の構造的捉え方が必要となる。したがって，数えるプロセスに依拠せずに新たな数を学習するまでには，そこで操作の対象となる数について，操作的捉え方から構造的捉え方への移行が行われる必要があると，二面性の観点からは考えられる。

自然数に関わっては小学校第１学年での加法と減法の学習から始まり，四則演算の学習が進められる。数の分解や合成の議論を想起するならば，数に演算を施すことはその数を操作の対象として捉えることであるが，同時に，演算により示される他の数との関係はその数の持つ性質でもあり，したがってその性質を持つ対象(Slavit, 1997)として数を捉えることにもなる。ここから数の演算は，数の構造的捉え方をさらに進める可能性も持つと言える。数の計算の学習は単に計算技能の習熟に資するだけでなく，計算の入力と出力の関係に注意を向け，計算に現れる数の間の関係やそれらの数の性質について考察する機会を提供することにより，数の構造的捉え方を促す学習にもなりうると言える(Lewis et al. (2020)参照)。

ただし数の構造的捉え方への移行を考えると，ここにある種の悪循環(Sfard, 1991)あるいはパラドクス(Sfard, 2008)も潜んでいる。新たな対象を対象として捉えることは，「その対象の諸性質やモノとしての振る舞いを探求すること」(Dörfler, 2002，p. 343）や，その対象に対する操作を伴う実践を行うこと(Sfard, 2008，p. 40)を通して促されるともされる。しかしまだ対象として十分捉えられていないものに対する操作をどのように行うことができるのか，あるいは行いたいと思えるのかが問題となる(Sfard, 2008，p. 40)。このパラドクスの中で学習を進めるために，

Sfard(1991)が圧縮化の段階でプロセスは一つの全体として考えられるようになり，名前が与えられ，新たな概念が正式に生まれるとしていたこと(p. 19)，またプロセスを他のプロセスと組み合わせたり，比較したり，一般化しやすくなる(p. 19)と述べていたことを想起するならば，完全にモノ化される前であっても，一つの全体として捉えられるようになったプロセスに対して，ある程度の操作を施すことができるとも考えられる。この操作を通して，操作の対象となっている圧縮化されたプロセスのモノ化を促し，新たな対象の構造的捉え方を促すことも考えられる。この考えに基づくならば，初期の段階での数の計算や数の分解・合成の活動，あるいは10や100のまとまりを操作してさらに大きな数を構成する活動は，数が完全にはモノ化されていない中で行われる可能性があると同時に，モノ化を促し，数を数学的対象として成立させる役割も持つことが示唆される。

5　分数と小数

Sfard(1991)は有理数の操作的捉え方を整数の除法の操作として捉えることとする(p. 5)一方で，二つの整数の比が最初は数としてではなく測定プロセス(measuring process)の簡略化された記述として捉えられ，さらに「数」という用語も測定プロセスの文脈で現れるとも述べている(pp. 11-12)。わが国の場合，小学校第５学年で整数の除法の商を分数で表すことが扱われるものの，それ以前に，分数は単位に満たない端下の量を表す活動を通して導入されるので，測定プロセスの簡略化された記述として捉えられるとする説明の方が，わが国の分数の学習においては適用がしやすい。その説明に沿って考えるならば，例えば 3/4 mは「1 mから 1/4 mという下位基準量を構成し，それで測定したところその３つ分であった」という一連の測定プロセスを簡略化して記述したものと考えられる。特に数である 3/4 だけに着目すれば，元の基準量である 1 mに関する部分を除いた，「基準量を４等分して下位基準量を構成し，それにより測定すると下位基準量の３つ分である」というプロセスの簡略化した記述となる。

ここでも二面性の議論を参照すると，操作的に捉えられている分数が数として扱われるようになるためには，上のプロセスが圧縮化され，モノ化され，構造的捉え方に移行する必要があることになる(布川，2019)。その結果として，自然数が集合の性質を表したように，分数が，測定プロセスに現れる基準量と測定される比較量との関係や，基準量との関係で決まる比較量の性質を表すようになると考えられる。

同時に，分数の場合はこのプロセスが自然数の場合よりも複雑であることが，構造的捉え方への移行を難しくする可能性も示唆される。自然数の場合には１個などに相当する数える単位は固定されており，そのいくつ分かを作る操作だけが問題とされた。しかし分数の場合には上で述べた通り，まず元の基準量を何等分かして新たな下位基準量を構成するという操作があり，次にその下位基準量のいくつ分かを作る操作を行うという，二段階の操作が求められる。前者の操作は分母により表され，後者は分子により表されるが，分数が一つの数として扱われるためには，これら二つの操作が一緒に圧縮され，つまり元の基準量から比較量が構成される一連の操作全体の圧縮化が生じ，入力である元の基準量と出力である比較量との関係に焦点が当てられる必要がある。これにより，比較量の性質を表すものとして分数が扱われるようになると考えられる。その意味において，2/3 mという長さを経験し，しかも測定プロセスが示されなくてもそれが「2/3 m」と分数を用いて表現されることを受け入れることにより，2/3 という分数が存在することも受け入れられると言うことができる。それはちょうど「127個」や「368 m」という表現を，数える操作や測定プロセスを経ずに，当然のものとして受け入れることが，数127や数368を受け入れることでもあるのと同様である。

また 3/4 が 1/4+1/4+1/4 や (1/4)×3 の結果であるとか 2/4+1/4 が 3/4 になるといったように，分数を他の分数と関連付けて捉えること，あるいは 3/4+1/4 が１になるといった補数の関係や自然数との関係は，自然数の分解や合成と同様，分数が分解や合成という操作の対象となることでもある。さらに 3/4 が 6/8 や 9/12，12/16 などの分数と等しいことを理解する際には，これらの分数は「大きさが等しい」と考えることになる。つまり，2/3 などの分数は「大きさ」を持つ対象として捉えられていることになる。またその共通の「大きさ」を捉えることが，それらの分数により表現される有理数という考え方につながると考えられる。こうした他の分数との関連付けは「数の関係網(network of number relationships)」(Gravemeijer & Bruin-Muurling, 2019)を構成する。自然数の場合と同様，測定の操作を通してではなく，数の関係網に依拠して分数を捉えることは，分数の構造的捉え方に当たると言える。

分数の四則演算を実行するには分数を数として捉えることが求められる一方で，自然数の場合と同様，演算は分数の構造的捉え方を促し，分数が数として成立することを促す役割も持つと考えられる。確かに，小学校第３学年で分数の加法を学習する際，液量の場面を用いて 1/5 Lと 2/5 Lを併せた時の量を 1/5+2/5 として求め，分数の加法が既に行われる。しかしこの場合，操作の対象は実際の液体あるいは図示された液体である。そして，その操作の過程や

結果を液量として観察し，記述することで 1/5+2/5=3/5 の式に至ることはできる。しかしこれは液量に対する操作プロセスの記述である。1/5+2/5=3/5 を数の加法として捉えるためには，1/5 や 2/5 といった分数自体が加法という演算の対象として捉えられている必要があり，分数の構造的捉え方への移行が前提となる。学習のパラドクスを想起するならば，今の学習においても，液量の操作プロセスを 1/5+2/5=3/5 などと記述することを通して，1/5 などの分数が操作の対象であるかのように感じたり，加法の結果から 1/5，2/5，3/5 という分数の間の関係網を構成したりすることで，分数の構造的捉え方への移行を促す機会として利用することが考えられる。さらに分数の計算を分数に対する操作を経験する機会と捉えて，計算を通して分数の数としての構造的捉え方を促したり，あるいは分数で表された数値を他の式に入力し，利用する機会(布川，2023)を増やしたりすることも考えられる。

以上，分数について検討してきたが，小数についても，下位基準量を構成する際に10等分や100等分といった10の累乗の等分のみを考えるということを除けば，基本的に分数と同様に考えることができよう。ただし0.37を捉える際に0.3と0.07を併せる操作を前提とするには，0.1や0.01が３倍や７倍の操作の対象となっていることに加えて，0.3と0.07も操作の対象として捉えられていること，およびこれらを併せるというプロセスについても構造的捉え方へ移行していることが求められることになろう。

6　数直線

数直線自身は数学的な概念ではないが，数の重要な表現として，小学校第１学年の自然数の学習から，中学校での負の数の学習や無理数の学習まで，多くの学習場面で用いられている。数直線の利用は数や数の演算の理解を助けるものとして期待され，数のモノ化を促す働きがあるともされる(Sfard, 1991，p. 21)。しかし他方で，数直線の利用において数の理解，特に数の構造的捉え方が求められる場面も見られる。

小学校第１学年で数直線が「かずのせん」として導入される際には，図２のように，数と隣の数との間に円弧状の線が引かれ，また円弧状に沿って跳ぶようなイメージで動物が描かれていることが多い。

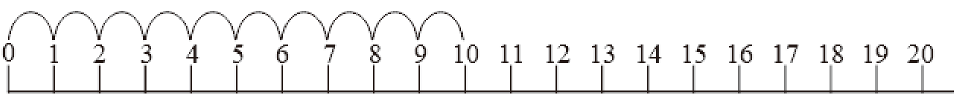

図２：第１学年10より大きい数の学習で導入される「かずのせん」

ここでは，数えるという操作に基づく数の操作的捉え方により，数直線の利用が可能となっている。またある教科書でそれぞれの動物が「どこまですすみましたか」を考えさせていることに見られるように，進んだ長さが数を表すとして理解することができる。確かに「かずのせんでは，みぎにあるかずのほうがおおきくなる」ことも学習するが，その場合も，「数直線上で右にある」ことを，より先まで数えた結果であるとか，多く数えた結果としてより遠くまで進んでいるとして理解することができる。

しかし小学校第２学年では，図３(a)のような数直線で矢印に当たる数を答えることが求められる。「↑のところの数」と問われていることから，０からの長さではなく，数直線上のそれぞれの位置が数を表していることをまず理解できる必要がある。つまり位置に対応するようなモノとして数は捉えられる必要があると考えられる。また570から１ずつ数えたり，580から１だけ逆に数えたりすることで矢印の位置の数を求めるとしても，図に０がないこと，また570や580が１ずつ数えて捉えるには大きすぎることから，図中の570や580はやはりその位置に対応する数として捉えられる必要がある。この際，上述のcounting-onと同様の数の捉え方が求められるであろうし，579を570や580との関係において捉える必要があるという点からも，数の構造的捉え方が必要になると考えられる。

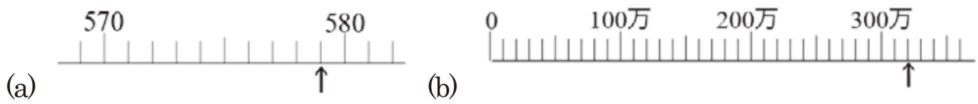

図３：０のない数直線と大きな数の数直線

さらに小学校第３学年では図３(b)の矢印の数を考えるが，数直線に０は示されているものの，一目盛りが10万であることから，１ずつ数えることに基づいてこの数直線を理解することは難しい。10万ずつ数えるためには10万という数が１と同程度にはモノ化されている必要がある。また矢印の位置が表す数は300万との関係において捉える必要があり，その意味からも数の構造的捉え方が前提となっていると考えられる。

比例的推論を支援する場合には，二つの量の対応関係を表す図(図４)が用いられる。小学校第４学年のいくつかの教科書で見られる図４(a)は，一人分の折り紙の枚数が 258÷6 で求められることを表しているが，下段の数直線では０から６まで１ずつの区切りが付けられているので，６を数える操作により捉えることができ，その結果として６等分の操作と除法とを関連付けやすくなっている。上段は43と258が同じ図の上で表されており，しかも43や258を数える操作により捉えることを支えるような区切りは見られない。ただテープのような図で長さを示唆することに加え，右端が258で終わりになっており，その点では「かずのせん」のように長さにより値を表しているようにも見える。

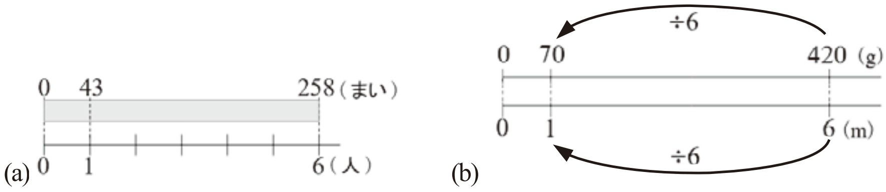

図４：二量の対応関係を表す図

これに対して第５学年で見られる図４(b)の図の下段では，(a)で見られた区切りもなくなり，除法「÷6」は６と１という二つの数の関係から導かれていると考えられる。上段もテープのような図ではなく数直線となっており，420と70という二つの数の関係として「÷6」が示されている。またその際に，数１と数70，数６と数420という数どうしの対応を表している。こうした四つの数の間の関係を把握するには，数える操作を経ずにそれぞれの数が既に一つのモノとして捉えられている方が把握しやすいであろうし，そのためには数が数直線上の点により表されていると考えている方が把握しやすいと考えられる。つまり，図４(b)のような図を理解するためには，数は数直線上のある点に対応するようなモノであると考える必要があり，そのためには数の構造的捉え方が求められる。

なおTall(2019)は同値な分数が「操作としては異なっているが，数直線上の点として具象化されると単一の点を与える」ので「有理数としてはそれらは一つであり同じものである」(p. 12)と指摘している。同じ点に対応するから同じ数であるとの理解のためにも，各分数と数直線を対応させるための操作プロセスを媒介させずに，数が数直線上の点に対応するようなモノとして捉えられる必要がある。

ただし新たな種類の数が導入される際には，改めてその数の操作的捉え方に基づいて数直線と新たな数との対応付けがなされる。例えば中学校第３学年では，$\sqrt{2}$ などの数を数直線に表すが，その際，まず面積が２の正方形をかき，その１辺として$\sqrt{2}$の大きさを持つ線分を作る。次に，その線分を数直線の上にのせ，その端点として$\sqrt{2}$の位置をとる。$\sqrt{2}$は数直線上のある位置により表されるようになるが，その前に一度，$\sqrt{2}$の長さの線分を作り，０からその長さだけ進むという操作を，中学校第３学年の段階でも再び行っている。

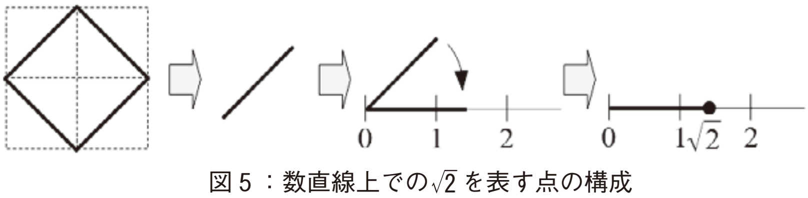

図５：数直線上での$\sqrt{2}$を表す点の構成

また負の数についても基本的には数直線上の点が数に対応するという説明がなされるが，その前には０から負の方向に長さをとるようすを見せており(図６(a))，負の数という新たな数の導入に伴い，プロセスとしての操作的捉え方から対象としての構造的捉え方への移行(Lewis et al., 2020)を短期間においてであるが再現していると見ることができる。しかも負の数の加法や減法の学習においては，自由ベクトルのように始点が０とは限らない矢印や移動として数を表すことが多用される(図６(b); Subramaniam(2019)も参照)[3]。移動を１ずつ数えながら把握するとすれば，数直線上で数の操作的捉え方がむしろ積極的に利用されることになる。もちろん，負の数の演算を考えること自体は，演算という操作を施すことができる対象として負の数を扱っていることになる(Lewis et al., 2020，p. 3)。

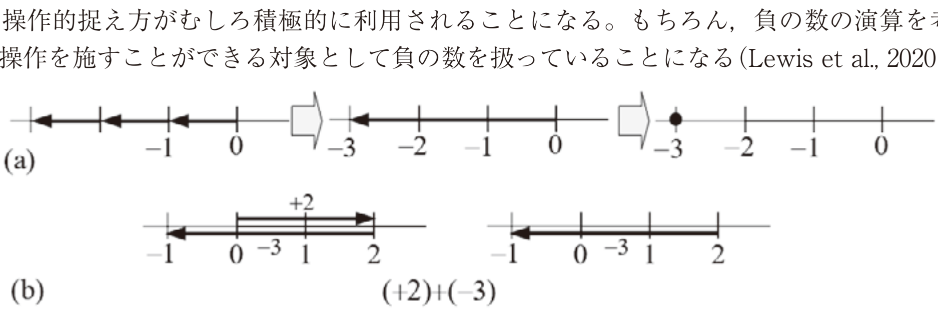

図６：負の数を表す点の構成と負の数の加法

なおこれと類似の矢印の利用は小学校第３学年における時間と時刻の学習においても見られる。この場合は，数直線の位置は時刻に対応し，時刻の間の矢印が時間に対応するとして，両者の使い分けがなされている。

図７：時刻と時間の数直線的な表現

以上のように，数直線を効果的に利用し，推論を支援する道具として利用しようとすると，数の構造的捉え方が確立している方が利用しやすくなる場面が見られる。ただしここで上述の学習のパラドクスを想起するならば，数の計算の場合と同様に，そうした利用の仕方を通して数の構造的捉え方を促すことも考えられる。

７　図形

Sfard(1991)は，数学的なアイデアの構造的な記述と操作的記述の例として円も取り上げている(p. 5)。そこでは，円の操作的な記述は，コンパスをある固定された点の周りに回転させるプロセスやその結果として得られる曲線であるとされ，構造的な記述は，与えられた点から等距離にある全ての点の軌跡(locus)とされている。しかし他方で，二面性に基づく議論はある場合には適切ではないかもしれないと述べ，幾何学的アイデアについては静的で図的な表象が自然であり，手続き的な記述が得られる前に構造的に捉えられているであろうと指摘している(p. 10)。

実際，図形の学習についての基本的枠組みとしてしばしば用いられるvan Hieleによる思考水準でも，最初の水準は図形をその概観(appearance)やかたち(form)により認識することとされ，視覚的水準とも呼ばれている(例えば，布川(1993)参照)。しかし他方でこうした概観やかたちといった視覚に依拠した円の捉え方は，Sfard(1991)が円の構造的な記述とする「与えられた点から等距離にある全ての点の軌跡」や円の一般的な定義である「ある１点Oから，一定の距離にある平面上の点の集合」とは異なっている。

ここで上で触れたvan Hieleの思考水準を想起し，手続き的な記述が得られる前に視覚的に捉えられている場合を第１水準での図形の捉え方と考え，与えられた点から等距離にある点の軌跡や集合という定義に基づく捉え方を第３水準と考えるならば，両者は学習の進展における異なる捉え方ということになる。そこから，両者を繋ぐとされる第２水準での思考と，二面性の議論に現れるプロセスに基づく操作的捉え方との関係を吟味するという可能性が開かれることになる。第２水準は記述的水準とされ，図形は一群の性質を持つかたちとして認識される。わが国の算数教育においては，図形の性質を調べた後，それを用いてその図形を作図することが扱われる場合も多い。この図形の作図を，作図のプロセスに基づいて図形の理解を深めることだとするならば，図形の操作的捉え方が算数では重視されていると考えることもできる。例えば，中学校第２学年では平行四辺形の定義が「二組の対辺がそれぞれ平行な四角形」として学習された後は，証明を通して他の性質が演繹的に導かれる。一方，小学校第４学年で平行四辺形を学習する際には，中学校と同様の定義が示された後，紙を折ったり図を測ったりして性質を調べるとともに，定義や性質を用いて平行四辺形を作図する活動が採り入れられている。ここから，平行四辺形に対する操作的捉え方が想定されていると見ることもできよう。

また算数における円の学習は小学校第３学年で行われることもあり，その定義自体も「一つの点から同じ長さになるようにかいたまるい形」や「コンパスでかいたようなまるい形」のように，「まるい形」という概観の特徴とともに円をかく操作を含んだものとなっている。こうしたことからも，作図のプロセスに依拠した図形の捉え方が算数の学習では想定されていると考えることができ，それを操作的捉え方と見なすことができよう。

このように考えた上で二面性の議論を援用するならば，中学校と同様の定義を算数で学習するとしても，実際には図形の操作的捉え方に留まっている可能性がある。その場合，定義に基づく図形の構造的捉え方への移行が，後の数学の学習を進めていくためには必要になる。ここに，van Hieleの第２水準から第３水準への移行が必要という指摘との整合性を見ることができよう。逆に言えば，数学的な図形の構造的捉え方が可能となるためには，その前段階として図形の操作的捉え方が重要であり，その圧縮化やモノ化を通して移行を促す必要性が示唆される。

8　二面性に着目する利点

算数で学習される内容についても二面性の議論を援用することにより，次のような点が示唆される。

第一に，学習内容の構造的捉え方が目指される場合でも，それは操作的捉え方から圧縮化やモノ化を経た上での移行により達成されるものであり，したがって一定の困難を伴うであろうことが想定できる。例えば分数倍や小数倍の場合，分数や小数の理解にも倍の理解にもそうした移行に伴う困難があることを想定して，学習のあり方を検討する必要性が示唆される。同様に，数直線の利用では，数直線の利用が単純に数や計算の理解を支援するだけでなく，数直線の利用に必要な数の理解もあること，また両者の相互作用的な発達を検討する必要のあることが示唆される。

第二に，上の移行前の段階として，操作的捉え方をまずは確立することの重要性が示唆される。その上で，操作的捉え方から構造的捉え方への移行を意識して指導を行う必要性も示唆される。つまり，プロセスの内面化や圧縮化が生じるように支援を行い，その延長上にモノ化が生じることで構造的捉え方を確立するという展開が目指される。また，学習のパラドクスとされる現象に注意を向けるべきであることも示唆される。

第三に，Sfard(1991)が二面性を「コインの表裏」と表現していたことや，構造的捉え方が確立された後も，構造的捉え方と操作的捉え方とは相補的な関係にあることを想起するならば，学習が進展した後であっても，操作的捉え方と構造的捉え方の両者に注意を払う必要があることが示唆される。

二面性の議論を援用して算数の学習内容を検討することは，「コインの表裏」を意識し，一方でその移行に注意を払うとともに，他方で両者の相補的関係を大切にすることを可能にすると言える。

9　おわりに

二面性の議論に関わっては，構造的捉え方への移行が行われず対象が確立されないままに，その対象に対する操作を手続き的におぼえて対応する「劣化した擬似構造的アプローチ」(Sfard, 1991，p. 21; Nachlieli & Tabach(2012)も参照)の問題が指摘されている。算数の学習を二面性の観点から検討する場合，こうした問題が算数でも生じていないかを検討することも考えられる。また中等レベルで文字式や関数の構造的捉え方が十分でないとの指摘をふまえた場合，算数での式や数量関係の学習において，素地となる操作的捉え方を確立する機会やその圧縮化につながる経験が十分に提供できているかに目を向けることもできよう。

二つの捉え方は単なる動的か静的かの違いのようにも見えるが，二面性の議論は，数学的概念の理解にとってその違いが大きなものであり，また動的から静的への理解の進展があることを示している。そうした違いに目を向けることが算数の学習や指導を考える際にも一定の意義を持つことを，本稿の検討は示していると言えよう。

注

1）二面性の議論に現れるreificationは「具象化」と表されることが多い。これにより当該の数学的アイデアが普段から馴染んでいる対象と同様の捉え方に変わるが，そうした対象として最も身近なのは物理的なモノであること，またSfard(1991)自身がreifyの用語がラテン語でモノ(thing)を表すresから来ていると説明している(p. 14)ことに鑑み，本稿ではreificationを「モノ化」と訳しておく。

2）数える行為は，脳内にある有限整列順序集合を用意し，それとの順序同型を作ることにより有限集合の「濃度を測る」ことともされる(仲田，2021，p. 37)。順序同型を作ることを対応を与えることと考えると，数えるプロセスと集合のクラスを考えることは，動的か静的かの違いはあるとしても，類似の考え方だと言えよう。

3）Subramaniam(2019)はグラフなどの比例的な対応関係の表現を論ずる際に，「乗法のモノ化（つまり乗算作用素)」という表現も用いている。

引用及び参考文献

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 116-140. https://doi.org/10.2307/749505

Dörfler, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning, 4* (4), 337-350. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0404_03

Gravemeijer, K., & Bruin-Muurling, G. (2019). Fostering process-object transitions and a deeper understanding in the domain

of number. *Quadrante, 28* (2), 6-31.
板垣政樹 (1998). 中学生の文字を用いた説明についての研究：文字式の二面性の理解を視点として. 上越数学教育研究, *13*, 43-52.
小岩　大 (2020). 生徒の文字式利用の様相に関する一考察：速算の探究に焦点を当てて. 日本数学教育学会誌, *102* (7), 2-13. https://doi.org/10.32296/jjsme.102.7_2
文部科学省 (2018). 小学校学習指導要領解説(平成29年告示)算数編. 日本文教出版.
Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*, 153-176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4
Lewis, K. E., Sweeney, G., Thompson, G. M., & Adler, R. M. (2020). Integer number sense and notation: A case study of a student with a mathematics learning disability. *Journal of Mathematical Behavior, 59*, Article 100797. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100797
Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom: The case of function. *International Journal of Educational Research, 51/52*, 10-27. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.007
仲田研登 (2021). 算数科のための基礎代数. 岡山大学出版会.
布川和彦 (1993). van Hiele理論に対する新たな意味づけ：インフォーマルな知識と発達の最近節領域を手がかりとして. 教育方法学研究, *19*, 37-46. https://doi.org/10.18971/nasemjournal.19.0_37
布川和彦 (2019). パターンの記述とパターンの対象化の観点に基づく教科書における分数学習の展開についての検討. 日本数学教育学会誌, *101* (12), 2-15. https://doi.org/10.32296/jjsme.101.12_2
布川和彦 (2023). 分数が明示されない文章題における小学6年生の解決の様相. 上越数学教育研究, *38*, 1-10.
Secada, W. G., Fuson, K. C., & Hall, J. W. (1983). The transition from counting-all to counting-on in addition. *Journal for Research in Mathematics Education, 14* (1), 47-57. https://doi.org/10.2307/748796
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York, NY: Cambridge University Press.
清水宏幸 (2019). 文字式とその式における文字の理解に関する研究：式をひとまとまりとみることに焦点を当てて. 日本数学教育学会誌, *101* (11), 2-13. https://doi.org/10.32296/jjsme.101.11_2
Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics, 33* (3), 259-281. https://doi.org/10.1023/A:1002937032215
Subramaniam, K. (2019). Representational coherence in instruction as a means of enhancing students' access to mathematics. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 33-52). Pretoria, South Africa: PME.
Tall, D. (2020). Making sense of mathematical thinking over the long term: The framework of three worlds of mathematics and new developments. Draft paper for Tall, D. & Witzke, I. (Eds.). MINTUS: Beiträge zur mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Bildung. Wiesbaden: Springer. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2020a-3worlds-extension.pdf (最終アクセス日: 2024年1月17日)
Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). State University of New York Press.
外狩善男 (1985). 量と数：量空間の変換としての数について. イプシロン, *27*, 46-55.
Viirman, O., Attorps, I. & Tossavainen, T. (2010). Different views: Some Swedish mathematics students' concept images of the function concept. *Nordic Studies in Mathematics Education, 15* (4), 5-24.

Issues with Duality in Elementary School Mathematics

Kazuhiko NUNOKAWA*

ABSTRACT

The notion of duality of mathematical conceptions is well understood in mathematics education research community. It has been widely used to analyze students' comprehension in studies on learning algebraic expressions and functions at the secondary level. Given that the proponents of this notion also mentioned natural numbers and geometric figures in their papers, it is natural to examine the notion of duality in teaching and learning mathematics content at the elementary school level.

Based on this fundamental idea, this paper attempted to apply the notion of duality to elementary school level mathematics teaching and learning and to analyze some concepts in elementary school mathematics textbooks through the lens of duality.

This analysis revealed that the distinction between operational and structural conceptions, which is central to the notion of duality, can also be seen in the learning and comprehending of the following topics: ratios and proportions, natural and fractional numbers, number lines, and geometric figures. This observation may have some implications for teaching these topics based on the theory of the duality of mathematical conceptions: (a) teachers must pay close attention to the transition from operational conception to structural conception when teaching each mathematical concept; and (b) teachers must first establish students' operational conception as a prerequisite for the transition to structural conception.

* School Education