問題の理解と問題場面の理解

布川　和彦

1．はじめに

問題解決の過程として，最初に問題の理解が扱われることが多い。そこで行われることは，まず，問題で与えられている条件は何か，求めるべきものは何かを把握することであろう。あるいは，そうした情報をスキーマと呼ばれる知識に関連させていくこと（多鹿，1995）も大切であろうし，問題文の表には出てこない暗黙の仮定を捉えることも必要であろう（こうした研究の動向は例えばReed（1999）を参照）。

ところで，問題を理解するという点から見たときに，次のような坪田（1996）の事例はどのように考えたらよいだろうか。彼は6年生に対してまず，$5\left(\frac{1}{4}\right)$mのひもを$\left(\frac{3}{4}\right)$mずつに切るとひもが何本できるかという問題を提示し，$5\left(\frac{1}{4}\right)\div\left(\frac{3}{4}\right)=7$により7本となることを全員で確認している。次に「$\left(\frac{3}{4}\right)$mずつに切るというところを，$\left(\frac{1}{5}\right)$mに変えてみたらどうかな？」として，数値を変えた問題を提示したところ，子どもたちは即座に計算を始めるが，そのうちに「あれっ」「おかしいな」といった声が聞こえてきたと書かれている。その原因は，商が$26\left(\frac{1}{4}\right)$となるが，そこからどのように答えてよいかを悩んだものである（坪田，1996，pp. 106-115）。

ここでの子どもたちは，最初に述べたような意味での問題の理解はできていると思われる。つまり，問題に与えられている条件や求めるべきものは適切に把握されいるし，さらに$5\left(\frac{1}{4}\right)\div\left(\frac{1}{5}\right)$を計算すればよいこともすぐに見出している。このことは1番目の解決によって，より容易にされている。彼らの疑問はこのわり算を実行した後になってはじめて現れている。そして，ある子はこの授業の感想の中に「私はあまりよく問題文を読みとれなかったみたい。」と書いている（p. 115）。

本稿では，こうした事例を検討していく中で，「問題を理解する」ということをもう一

度検討してみたい。

2．問題の理解の様相

本節では，先の坪田（1996）の例と同様，解決が進む中で疑問が生じている事例を２つ取り上げる。これらの事例は解決過程の発話記録をもとにしているので，疑問が生ずる以前に解決者がどのように考えを進めていたかを知ることができる。

布川（1998）は，次のような二つの数列で両者に現れる数が１以外にないことを証明する，という問題を解く大学院生の解決過程を分析している。

$$X_0=1,\ X_1=1,\ X_{n+1}=X_n+2X_{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

$$Y_0=1,\ Y_1=7,\ Y_{n+1}=2Y_n+3Y_{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)。$$

この解決者は二つの数列の一般項を $X_n=\left(\frac{1}{3}\right)(2^{n+1}-(-1)^{n-1})$，$Y_n=2\cdot 3^n-(-1)^n$と求めた後，n＝１以外では $X_n=Y_n$となら ないことを証明しようとしていた。こうした活動を30分以上続けていたが，X_nと Y_nそれぞれのグラフをかこうとして「Ｙの方が増加率が大きいから離れていく」とすればよいと考えた。この考えは，後の発言からすると，Ｘが２の n 乗のレベルで増えるのに対し，Ｙが３の n 乗のレベルで増えることに基づいている。しかし，ＸとＹが離れるとした直後に，解決者は次のように発話している：「あだめだ，この二つの数列の両方に現れる数ってことは，ああそうか，条件はもっときついんだ」「そうだよね，同じ番号だったら全然増加率違うんだから，そりゃ，もう自明だよな」「なりそうもないよなそれはそっか，だら同じ番号じゃなくてもいいってところがミソなんだなあ」。こうした発話の後で，この解決者は１時間以上解決を続け，部分的な解決に留まっているものの，完全な解決に結びつきうるアイデアは得ている。

この事例では，最初の段階で解決者が問題文の解釈を誤っていたということなのであるが，そうした誤りに気付くきっかけは，解決者自身が問題場面を探究し，そこで得た情報である。すなわち，X_nと Y_nの一般項の式や，あるいはそれらの「増加率」の違いを見出すことで，当初の解釈に基づくと問われている事柄自体が自明であることに気付き，さらに「同じ番号じゃなくてもいいってところがミソなんだなあ」と，問題のどこに難しさがあるのかを見出している。

福沢（2001）の調査では，次のような問題を作図ツールの１種であるカブリ・ジオメトリーを用いて中学生が解決する過程を，詳細に分析している：「△ABC がある。BA を１辺とする正三角形 BAD を△ABC の外側にかき，AC を１辺とする正三角形 ACE を△ABC の外側にかき，BC を１辺とする正三角形 BCF を△ABC の内側にかきなさい。このとき四角形 AEFD はどんな四角形になりますか」（能田，中山，1996，p. 138を改題：図１左図参照）。中学校３年生男子生徒２名のペアは，カブリの測定やドラッグの機能を用いて調べた後に「結論としては平行四辺形」と発話している。しかし調査者がどうしてそうなるのかを尋ねていくと，再度ドラッグによる探究をしながら，以下のような会話を

している：「なんでA動かすとD，Eが動くんだろうね」「え？」「そこが疑問だよ」「え，だってそれは、正三角形の頂点だからじゃないの？DとEは。AECとADBの正三角形の頂点だから」「なんでその対辺が平行になるんだよ」。その後，カブリの作図の再現を利用する場面では，DFが描かれようとする時点（図1右図）で「なんでこの線（DF）を引いたときにもう対辺が平行なんだろうね」と疑問を述べている。

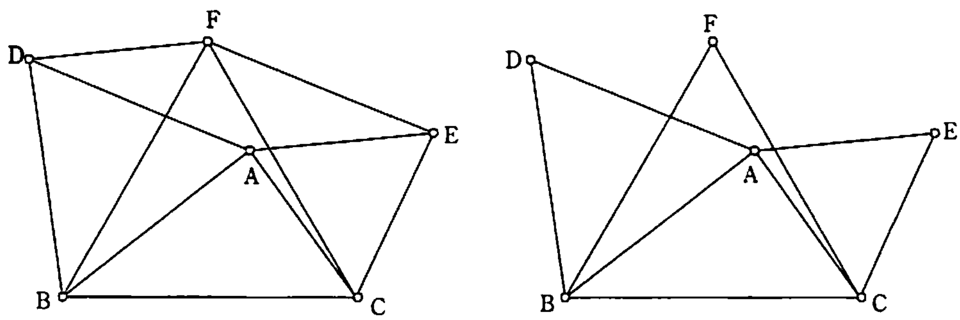

図1

これらの生徒は一度「平行四辺形」という結論に落ち着いた後，問題場面となっている図形を探究することにより，疑問を持つに至っている。その疑問の内容は、与えられた条件では図1右図のような部分までしか決まらず，線分DFやEFについては，ADやAEとの関係も含め特に規定されていない。にも関わらずDFはいつでもAEと平行となり，EFはADと平行となってしまう。つまり，問題場面がもつ基本的な仕組みと，そこで生じている現象（今の場合は四角形AEFDが平行四辺形になること）との間のギャップが，生徒の疑問となっていると考えられる（布川，福沢，2001)。そして，これによって，問題文にあった「このとき四角形AEFDはどんな四角形になりますか」を問うことが，実は自明の事柄ではなく，多少なりとも不思議な面を持っていることが理解されたものと考えられる。

本節で取り上げた事例では，初めある程度の解決の進展をみながらも，後に「話はそれほど単純じゃない」という気持ちが解決過程の中で生じており，そうした気持ちがその後の探究活動を促しているように見える。中学生の事例では，問題文に与えられたものと求めるものは，当初から把握されており，それにより平行四辺形という結論も得ている。しかし，与えられた条件から問題場面の仕組みを考えたときに，そうした結論が自明のものでないことに気付き，「なんで？」という疑問を持つに至っている。大学院生の事例では，求めるものについての把握が途中で変更されているが，その背景としては，与えられた数列に対する解決者の理解の深まりがある。数列の理解に基づき，求めるべきことを意識したときに，その求めるべき事柄が実は自明ではないことに気付いている。結局，2つの事例では，求める事柄が自明でないことに気づくという様子が見られるのであり，こうした気づきが，問題文をよく読むことだけではなく，問題場面に関わる情報を得ることによっ

て生じているのである。

3．問題の理解と問題場面の理解

前節でみた非自明さへの気付きは，冒頭にあげた坪田（1996）の事例にも当てはまる。実行されたわり算の式は，ひもを切り分けようとする今の問題場面について，ひもが26本と「$\frac{1}{4}$」とれるという情報を提供する。この「$\frac{1}{4}$」により、問題で求められている「何本とれるか」という事柄が自明ではないことに気づき，子どもたちは「あれっ」「おかしいな」という意識を持ったものと考えることができる。商を求めてそのまま答えにするという問題ではないことが分かり，その意味で，問題の捉え方が変化している。

解決過程の中で問題の捉え方が変わるという考えは，清水（1989）の「問題の変容」という観点に見ることができる。彼は，問題を機能とする見方に立ち、解決過程において問題が変わっていくことを指摘し，メタ認知を捉える視点として「問題の変容」という考えを提示している。もとの問題を解くための手段として設定された補助問題が，次には解くべき目的に変わるといったことが繰り返されることで，目的と手段とが連鎖をなす。「このように、解決者が自ら目標を設定し直し，その目標の達成を試み」る様子を、清水（1989）は「問題の変容」と呼んでいる。前節の事例でも解決過程において解決者の問題の捉え方が変わっているのであるが，しかしそれは，「もとの問題を解くための手段として」補助問題が設定されるといったものではなかった。そうした解決の手がかりをつかむ前の，もとの問題自体に含まれる非自明さに気づくことがなされていたのであった。

この両者の違いを明確にするのに，相馬（1997）の述べる「問題」と「課題」の区別が役立つと思われる。彼は問題解決の授業として，「問題」の提示から予想を経て，「課題」の明確化に向かう流れを基本としている。ここで，「問題」は「考えるきっかけを与える問い」であり，教師が与えるものとされるのに対し，「課題」は「『問題』の解決過程で生じた疑問や明らかにするべき事柄」であり，生徒がもつものであるとしている（p. 44）。例えば，1本32円のえんぴつを3本買ったときの代金を問うことが問題であるときに，32×3の計算の仕方を考えることを課題としてあげている。あるいは，縦$\sqrt{2}$cm，横$\sqrt{8}$cmの長方形の面積を求めることが問題であるときに、本当に$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times8}$と計算してよいのかを考えることが課題の例としてあげられている。いわばこれらの課題は，もとの問題を考えていく上で，「結局何がわかればいいのか」，あるいは「結局何が問題なのか」といったことに関わるものとなっている。この意味で，解決過程の途中での目標の設定を考える「問題の変容」は，相馬（1997）の「課題」の定式化に対応するものと言えよう。

これに対し，前節の事例に見られた問題の捉え方の変化は，相馬（1997）の「問題」の方に依然として関わるものとなっている。実際，彼自身も，「『問題』を通して，『おや？』『なぜ？』という気持ちをもたせたい」（p. 47）と述べており，「なんで」という疑問をも

った中学生の様子と通ずるものがある。「課題」が「何が問題か」に関わるとすれば，問われているものの非自明さに気づくということは，「どうしてそのことが問題なのか」に関わるものだと言えよう。

冒頭に取り上げた坪田（1996）の例が，問題場面に関わる情報を得ることで，問われていることの非自明さに気づくこととして解釈できることは上で述べたが，実はこの事例の残りの部分は「課題」が定式化されることに対応している。商に関わる疑問を子どもたちは話し合い，その中から「$\frac{1}{4}$は余りの長さか？」という問いが設定されている（p. 111）。これが相馬（1997）の言う「課題」に当たるものと考えられる。逆に言えば，「おや？」「なぜ？」と問われていることの非自明さに気づくことは，この課題が設定される前に生じているのである。

こうした疑問が問題文を読んだ直後ではなく，ある程度の解決活動を行った後で生じたという点をもう少し考えてみたい。例えば坪田（1996）の事例の場合，全体の長さを1本あたりの長さで割ることにより本数が出るであろうとの期待を，子どもたちは持っていたと思われるし，そのことは1番目の問題により強化されている。この段階で2番目の問題に取り組んだときに，わり算により与えられる情報がそのまま本数を与えず，自分の期待が裏切られることになる。これにより今の問題場面がこれまでのものとどこかが違うことが意識され，2番目の問題が問われる理由がわかることになる。これは，礒田（1996）が述べる既知とのずれ，あるいは他者とのずれと似ている。あるいは意外性が生ずるための前提として布川（1999）が触れていることとも通ずる。つまり，話題となっている事柄についてある程度知っていることが，ずれを感じ疑問を持つためには必要である。そして，知っていることとの対比により，今の場合の問題場面の特徴が浮き彫りにされ，「この場面では商がそのまま本数にならないけど，本数はどうなるの？」といったように，問題場面との関わりにおいて問われていることが捉えられるのである。

第2節で取り上げた事例では，それ以前に類似の問題が出されているわけではない。しかしそこで生じていたのは，前節でも述べたように，問題場面についていろいろなことがわかるにつれ，問われていることの意味，あるいはそのことが問われる理由が明らかになってくる，ということであった。大学院生の事例で言えば，増加率が異なる2つの数列について，どのようなことを問うことが価値あることかを考えることで，問題の捉え方が変わっていた。中学生の事例においても，問題場面の仕組みとの関わりで考えたときに，平行四辺形になるという自分たちの結論が実は自明なものでなく，どうしてそうなるのかを問うことに価値があることが捉えられていた。つまり，これらの事例でも，問題場面との関わりにおいて問われていることが捉えられるようになっていく。

このように，問題場面の様子やそこで起きていることとの関わりがつくことで，「おや？」「なぜ？」という気持ちが生じ，どうしてそのことが問われるのかに気づくことは，ことがらの間の関連がついている状態として理解を捉えようとする立場（例えば Hiebert

& Carpenter, 1992)。と一致するものである。実際，守屋（2000）は，問題文の理解を，個々人の体験や既有知識のネットワーク上に問題を取り込む過程としている（p. 23）。また，麻柄（1999）は，あることを知ったことによって様々な問いが生み出される可能性について触れ，そうした場合には，「ある知識を獲得したあとで学習者が主体的に振る舞うことが，めざされている」（p. 16）と述べているが，これは，ある程度知っていることだからこそ当人にとって知りたいという問いが生まれる，ということを示唆している。

問題場面は，解決過程の最初に問題文により導入されることが多いであろうし，その場合，問題場面について知っていることがあまりないという場合も多いであろう。その後，問題場面への探究が進むにつれ，問題場面について知っていることも増えるが，それにより問題場面について知っていることと問われていることとが結びついていくではないだろうか。文章題の研究では，あるタイプの問題について既に持っている知識であるスキーマと，問題文に与えられた情報との結びつきに注意が払われてきたが，「おや？」「なぜ？」に関わる「どうしてそのことが問題なのか」という部分は，問題場面についての知識により支えられている。坪田（1996）の事例のように，問題場面についての知識は以前の経験にも依存しているが，同時に，問題場面の探究によってももちろんもたらされる。この意味では，問題の理解が，解決が多少進められた後に生ずることは，無理からぬことと言えよう。

4．授業における問題の理解

本稿で取り上げている問題の理解ということが，授業の中にも現れることを見ておきたい。授業の流れの中で新たな問題が見出されていることを扱ったものとして，熊谷（1989）の問題構築プロセスがある。彼は，共有プロセスの観点からいくつかの授業の流れを特定し，その中のあるものを問題構築プロセスと呼んでいる。問題構築プロセスとして分類されている流れでは，以前の解決の結果が不十分であるとして不十分な点が新しい問題として明らかにされる，以前の解決で利用された方法が適切でないことや不十分であることが明らかにされよりよい解決の方法が見出される，以前の解決の方法と結果の関係を正当化している数学的アイディアが明らかにされるようになる，ということが生ずるとされている（pp. 14-15）。この具体的な例を，佐藤（1994）に見ることができる。彼女は，5.2÷0.8の計算方法について話し合っている授業を分析しているが，その中で新たな推測が生まれる過程を取り上げている。例えば，小数点の移動に関わり「かけ算で計算するときに，何倍かして小数点を消して求めた」という「証明」が出たときに，かけ算と同様「除数と被除数をそれぞれ10倍にしたら，答えを100で割らなくてはいけないのではないか」という推測が出ている。ここでは，前の「証明」の不十分な点が新たな問題とされているが，それは「証明」が十分なものとなるには，「結局何が問題となるのか」が浮き彫りにされていることでもある。この意味において，ここでの構築プロセスは相馬（1997）の「課題」の設定に相当する。

これに対し，授業においても「どうしてそのことが問題なのか」に注意が向けられる場面がある。相馬（1997）は，次のような定理を学習するにあたり，予想を取り入れた流れを紹介している：「△ABCの辺AB，AC上の点をそれぞれD，Eとする。DE//BCならば，AD：AB＝AE：AC＝DE：BC」。まずはAB＝6㎝，AC＝4.5㎝の△ABCを各自に書かせ，さらに辺AB上にAD＝4㎝となる点Dをとらせる。DE//BCとなる点Eを辺AC上にとらせた上で，ECの長さを求めるように問うている。BCの長さが決められていないので，生徒たちのノートにはいろいろな形の三角形がかかれており，そのため「三角形の形がちがうのに，本当に求められるのだろうか？」という表情が生徒に見られ，「おや？」という気持ちが生まれたとしている（p. 32)。EC＝1.5㎝やAD：DB＝AE：ECといった予想が出た後，それらが本当かどうかを考える形で授業が進められたとされる。この問題場面では与えられているのは2つの辺が平行ということだけで，三角形の形についても辺の長さについても何も情報が与えられていない。逆に言えば三角形はいろいろな形を取りうるし，ADやAEの長さも変わりうる。にも関わらず結論の関係はいつも成り立つ。生徒のノートにいろいろな三角形が描かれることで，こうした点が実感されたものと考えられる。さまざまな三角形を目にするよう導入を工夫することで，第2節で取り上げた中学生がドラッグを利用したのと似たような効果が現れ，定理のもつ非自明さが捉えやすくなったのである。

5．おわりに

本稿では問題の理解において，「どうしてそのことが問題になるのか」を捉える側面について見てきた。それは，問われていることの難しさがどこにあるのか，あるいは起こっている算数・数学的な現象の不思議さを理解することになる。それは問題場面に対する理解を背景とするために，解決が多少なりとも進展してから生ずることも無理からぬことであった。本来，問題は「それに当面している人が，1つの解を見出すことを欲しているか必要としている」（チャールズとレスター，1983，p. 10）という性格を持つものであるから，問われていることの非自明さを感ずることは，問題を理解する上で大切な側面と言えよう。問題が解決者にとって関心の持てるものとするためには，もちろんもとの問題が工夫されている必要もあるであろうし，また解決者の側に，算数・数学的に面白いものを面白いと感ずるだけの社会＝数学的規範（Cobb & Yackel，1998）が内面化されている必要もあろうが，本稿の議論は，解決者が問題場面を探究しそれについて理解をすることが，関心をもった取り組みを支えるものであることを示唆している。問題場面を探究することは問題の解決において重要である（布川，1998）だけでなく，問題の理解においても大切なのである。

ところで，能田（1995）は，「数学教育における認知的な側面と情意的な側面とをいかに関連づけていくかという問題を解明することは，緊急で重要な研究課題」（p. 57）としているが，取り組もうとする問題に対し，相馬（1997）が重視するような「おや？」とい

う気持ちをもつことや，あるいは証明されるべき数学的現象について不思議さを感ずることは，こうした認知と情意の関連につながる側面であると考えられる。

引用・参考文献

チャールズ,R.，レスター,F.（1983）．算数の問題解決の指導（中島健三訳）．金子書房．

Cobb, P. & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge, UK : Cambridge University Press.

福沢俊之．(2001)．証明問題の解決活動における作図ツールの役割についての研究．上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文（未公刊）．

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York : Macmillan.

磯田正美．(編著)．(1996)．多様な考えを生み練り合う問題解決授業．明治図書．

熊谷光一．(1989)．算数・数学の授業における共有プロセスに関する考察．数学教育学論究，51，3-24．

麻柄啓一．(1999)．子どもの疑問から授業をはじめればよいのか：「学んだあとの疑問」の大切さ．授業を考える教育心理学者の会（編），いじめられた知識からのメッセージ（pp. 2-23)．北大路書房．

守屋慶子．(2000)．知識から理解へ：新しい「学び」と授業のために．新曜社．

能田伸彦．(1995)．問題解決における認知と情意に関する一考察．古藤怜先生古希記念論文集編集委員会（編)，学校数学の改善：Do Math の指導と学習（pp. 45-59)．東洋館出版社．

能田伸彦，中山和彦．(1996)．自ら学ぶ図形の世界．筑波出版会．

布川和彦．(1998)．解決の進展を促すいくつかの活動について：解決者による行き詰まり箇所の考察をもとに．上越数学教育研究，13，13-22．

布川和彦．(1999)．算数・数学の授業における意外性：解決過程の図式を視点として．上越数学教育研究，14，11-20．

布川和彦，福沢俊之．(2001)．解決過程において現れる問い．上越数学教育研究，16，11-20．

Reed, S. K. (1999). *Word problems : Research and curriculum reform*. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

清水美憲．(1989)．中学生の作図問題解決過程にみられるメタ認知に関する研究．数学教育学論究，52，3-25．

佐藤智子．(1994)．推測と証明のジグザグを視点とした算数の授業構成に関する考察．上越数学教育研究，9，105-114．

相馬一彦．(1997)．数学科「問題解決の授業」．明治図書．

多鹿秀継．(1995)．高学年の文章題．吉田甫，多鹿秀継（編著)．認知心理学からみた数の理解（pp. 103-119)．北大路書房．

坪田耕三. (1996). 追究を楽しむ算数の授業. 教育出版.