第３章　有効な迂回路としての算数・数学

上越教育大学学習臨床講座　布川 和彦

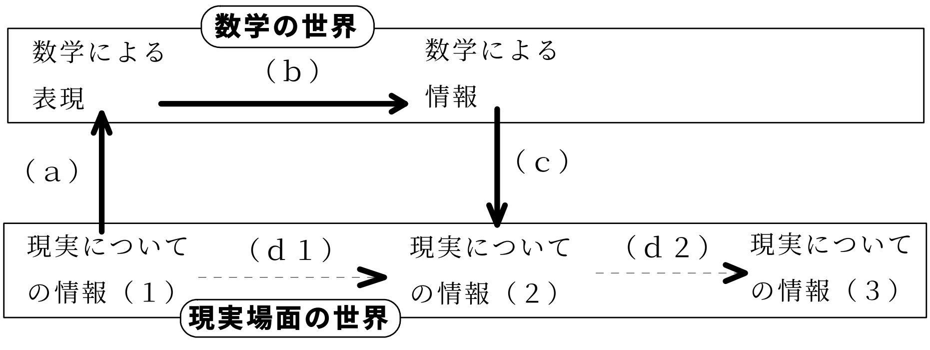
１．はじめに

先日ある大学で講義をさせて頂いた際に、おり紙を折っていろいろ考えるような活動を含めてみた。その中に正多角形を折るといった作業があったのだが、ホテルに帰ってきてからふと、おり紙の中に収まる最大の正三角形の折り方が気になった。これはいくつかの本には出ているのだが、出先でこうした資料も手元になかったので、仕方なく自分で考えることにした。適当に方程式を立て、頂点の来るべき位置をまず求めてから、それを実現するための折り方を考えた。こうして考えた折り方で実際に折ってみたのだが、確かに正三角形ができたときは自分でも意外なほど嬉しかった。そうなるように計算で頂点の位置を求めているので正三角形ができて当たり前なのであるが、しかし、ぴったりと正三角形ができたときにはなんとも言えない気持ちがした。数学を用いて求めた結果が実際の場面で確かに生きたときの感じを、身をもって体験できた。

本章においては、ある図式を導入し上で述べたような数学的な体験を再考してみると同時に、算数・数学の授業を計画したり、あるいは振り返ったりするときの視点として利用することを考えてみたい。

２．体験を捉える図式

以下で考えていくのは、図１のような図式である。



（ａ）現実場面の情報を算数・数学の言葉に翻訳する

（ｂ）算数・数学の操作を施す

（ｃ）算数・数学による情報をもとに現実場面の新たな情報を得る

（ｄ１）現実場面での操作を施し情報（２）を見いだす

（ｄ２）情報（２）に基づいて現実場面に操作を施す

図１

この図式は、数学的モデル化の流れを説明する図（例えば松宮と柳本(1995)の p. 44 あるいは小寺(1999)の p. 170 を参照）をもととし、布川(1991)の考えを加味して構成されている。ここでは松宮と柳本(1995)に示されている「バトンパスのマークポイントの位置」の課題(pp. 118-125)を例として、図１を説明してみよう。

この課題では、１人が 100*m* ずつ走るリレーにおいて、前の走者がどの位置まで来たときに次の走者が走り出したら最も効率よくバトンパスができるかを考える。こうした前走者の位置を示すマークポイントを、各走者の組み合わせについて考えるのである。現実場面についての情報(1)として与えられるのは、各走者の 90*m* 走の記録であり、各走者が 5*m*、10*m*、15*m*、20*m* および 70*m*、80*m*、90*m* を通過する際のタイムが書かれている。次に、このデータをもとに、次走者の走り始めの状態を２乗に比例する関数で、また前走者が走ってくる状態を１次関数で表すことが、数学による翻訳（a）となる。関数による表現について、１次関数と２次関数が接するような１次関数の y 切片を計算で求めることが、数学での操作(b)にあたる(1)。求めた y 切片の値をもとにマークポイントを決める作業が現実場面の新たな情報を得る過程(c)となり、このときのマークポイントの位置が現実場面についての情報(2)となる。

なお松宮と柳本(1995)の実践では行われていないが、大澤(1996)の実践のように求められたマークポイントをもとに実際にリレーを行い、確かにリレーのタイムが縮むことを確かめる場合には、このことが情報(2)に基づいて現実場面での操作を行うこと(d2)に当たる。また、もしも数学を用いず、マークポイントの位置をいろいろに変えて実際に走ることで最適なマークポイントの位置を求めることができたとしたら、これは現実場面の操作により情報(2)を得るという(d1)の過程に当たるであろう。

数学的モデル化を算数・数学の授業の中で採り入れることが、提唱されてきている（例えば、池田, 1999;小寺, 1999）。また、事象を数理的に考察する能力の育成が算数・数学教育の中で求められているならば、図１のように算数・数学を通して現実についての理解を深めるという流れは、算数・数学の目標の上からも重要なものと言えよう。

３．図式の解釈の拡張

ところで、冒頭で述べたおり紙の中に収まる最大の正三角形の折り方についての体験も、図１の流れに沿っていることは容易にわかる。今の場合、数学による表現は頂点の位置を決めるために立てられた方程式であり、これを立てることが(a)の翻訳に当たる。これらの方程式を解いて解を求めることが数学の操作を施すこと(b)となり、そのときの解が数学による情報、さらにこれにより予想された頂点の位置が現実場面についての情報(2)である。予想された頂点の位置についての情報をもとに、最大の正三角形を折っていくことは図１の(d2)の操作となり、この操作を施すことで、最大の正三角形が実際にどのようなものか、あるいは予想

された折り方で確かにこうした正三角形を折ることができる、といった新たな情報(3)が得られるものと考えられる。なお、リレーの場合と同様、方程式などを用いず、おり紙の上で試行錯誤をして折り方を見いだしたとすれば、これは現実場面での操作(d1)となろう。

この最大の正三角形を見いだすことは、おり紙についての課題という点では日常生活的な場面とも考えられるが、しかし、正方形の中に収まる最大の正三角形の頂点を決定するという意味では、図形の課題ともなっている。実際、作図ツールを用いて図２のように頂点の位置を決定することもできる。

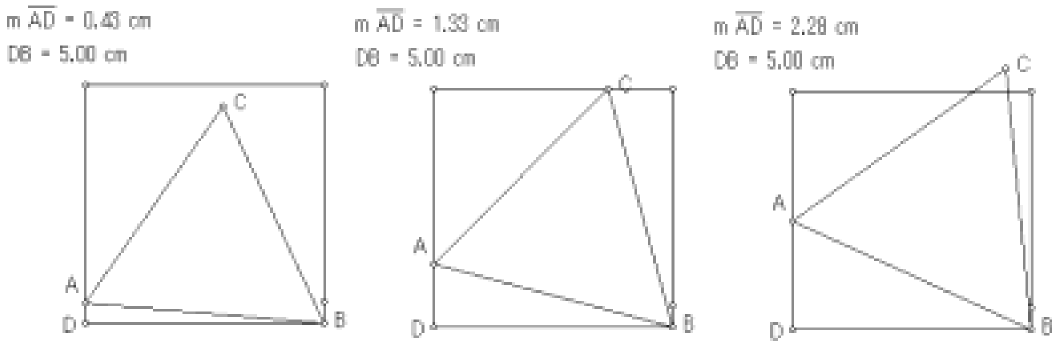


図２

つまり、図１の下段の現実場面をいわゆる日常生活での経験だけに制限せず、図２のような、算数・数学の対象についての事象が生じている世界、その対象に直接的な処理を行う世界にも適用していくことにすれば、この図式は日常生活からの題材を含まない場合にも同じようにあてはまることになる。

文字式の例を考えてみよう。教科書にみられる、２つの奇数の２乗の差が４で割りきれることを証明するという課題を考えてみる。いくつかの数の計算によりこの差が４で割り切れることを確認していくことは、数に対する直接的な処理(d1)にあたる。これに対し、２つの奇数を文字で表現し、$(2m+1)^2-(2n+1)^2=4(m-n)(m+n+1)$と問題の差の背後にある構造を探ることは、(a)→(b)→(c)の流れを経たものと考えることができる。また、この最後の式を読むことで、４で割ったときの商が$(m-n)(m+n+1)$ になるという情報、あるいは$(m-n)$と$(m+n+1)$のいずれかが偶数になり結果として問題の差が８で割り切れるという情報を得ることができる。これが実際にそうなっているのかを具体的な数で計算してみることは、図１の(d2)の操作に対応すると言えよう。(a)→(b)→(c)の流れにより新たな情報を得ることは、三輪(1996)が図１と類似の図式を用いながら、文字式の利用を「表す」「変形」「読む」という３つの過程で捉えようとすることに対応している。

数学的モデル化という身の回りの事象を数学を用いて考えていく活動をもとにして導入した図１の図式であるが、本稿においては、身の回りの事象を数学により考える活動に限定することなく、自分が考えようとしている事象を、（その事象とは異なる）算数・数学を用いて考えていく活動においても、図１のような図式でとらえてみることとする。これにより、身の回りの事象を含む課題であるかど

うかに関わりなく、算数・数学を用いて考えていく幅広い活動を、同じ図式により考察していくことが可能となろう。以下では「現実場面の世界」という言い方で、日常的か算数・数学的かに関わらず、自分が考えようとしている事象の起こっている、今の自分にとってリアルな世界を指すことにする。例えば、数のあるパタンを文字式で考察するとすれば、パタンという事象の起こっている数の世界がそこでの現実場面の世界である。

４．図式からの示唆

図１の流れに沿うような実践はいろいろと行われていると思われる(例えばNunokawa(2001)を参照)が、このような形でまとめてみることで、いくつかの点が改めて見えやすくなる。ここでは３つの点について見ておこう。

(1) 現実場面と算数・数学の操作

図式に関わり示した例からもわかるように、現実場面についてより多くの情報を得ることは、算数・数学の操作が実行できることに関わっている。直面している場面を扱うための算数・数学の知識がなければ、図式の(a)の部分がそもそも実行できない。またとりあえず算数・数学を用いて問題の場面が表現できたとしても、それに対して適当な算数･数学の操作を施す((b)の部分)ことができなければ、結果として新しい情報を得ることができない。逆に、算数・数学の操作を多様に施すことができれば、もとの場面についてもより多くの情報が得られる可能性がある。例えば先ほどの文字式の例で、$(2m+1)^2-(2n+1)^2=4(m^2+m-n^2-n)$という変形で留まれば８の倍数であることは見えにくいが、$4(m-n)(m+n+1)$まで変形できればこれが見えやすくなる。

つまり、身の回りの事象を算数・数学を用いて考えていく活動においても、またそうではない算数・数学的な活動を行うにしても、それはどのような算数・数学的な知識が利用できるかに大きく依存することがわかる。確かに、大澤(1996)に見られるように、算数・数学の操作の不足をテクノロジー（グラフ電卓や関数ソフトウェア、数式処理システム等）により補うことが可能な場合もあろう。しかし、知識の獲得と問題解決や探求活動を別個に扱うような考え方は、単純には成り立たないことがわかる。

(2) 数学の世界を迂回するメリット

図１において現実場面の世界を（身の回りの事象であれ、算数・数学的な事象であれ）今問題にしている事象が生じている世界と考えていたが、これに対して、数学の世界を通る過程(a)→(b)→(c)は現実場面の世界のいわば迂回路になっている。もしも数学の世界を経た流れ(a)→(b)→(c)になっていたときに、そうするだけのメリットが子どもたちに感じられないならば、この流れは単なる回り道になってしまう危険性を持つということでもある。逆に言えば、身の回りの事象を算数・数学の知識を用いて考えていく活動、あるいは算数・数学の事象を他の算数・数

学の知識を用いて考えていく活動において、数学の世界を迂回するメリットが子どもたちに感じられる必要があるということになる。

先のバトンパスの事例では、現実場面の世界で試行錯誤的にマークポイントを見つけることは容易ではないと思われるが、数学の世界を経由し、ある程度の計算をすることでそのマークポイントについての情報が得られている。つまり、現実場面の世界では達成が難しいことが、数学の世界を迂回することで達成されている。また、２分の１リットルのジュースと３分の１リットルのジュースを合わせたときの量を考える場面では、実際にジュースを合わせてからその量を測ることも可能である。しかし、分数のたし算という算数の世界を迂回すれば、実際にジュースを用意しこれをリットルますに移すなどの操作をすることなく、あわせたときの量を見出すことができる（木幡(2000)の pp. 47-52 を参照）。

図形の証明においても、「かたち」を直接切ったり貼ったり、あるいは測ったりといった操作により、ある命題の正しさを納得する中学生が多いという事実（例えば梅川(2001)を参照）を認めると(2)、論証という数学の世界を経由することで得られるメリットを考える必要が出てくる。もちろん、示すべき命題が一般の場合に成り立つことが言えるということは一つのメリットであろうが、「一般の場合」が実感しにくい状況では、別のメリットが必要となることもあろう。考えている命題や「かたち」に関わり生じている現象について「本当なの？」「本当はどうなの？」という問いが生まれている場面では、算数・数学を通して真偽が明確になることは一つのメリットと言えよう。また命題が「なぜ真となるのかの理解」（Hanna, 1996）あるいはその「なぜ」を支える「場面のメカニズム」(Nunokawa & Fukuzawa, 2002)がわかることは、別のメリットとなりうる。

こうしたメリットを我々教師が意識しておくことは、算数・数学の時間だからとりあえず算数・数学を使って答えを求めてみる、といった扱いを避けることにもつながると考えられる。

(3) 現実場面の世界での操作の重要性

(2)では数学の世界を迂回することのメリットが問題となることを述べたが、その事例においては、現実場面の世界における操作(d1)あるいは(d2)が大切な役割を果たしていた。バトンパスの事例では、現実場面の世界の操作(d1)では見出しにくい情報が数学の世界を迂回することで得られていたが、マークポイントに関して得られたこの情報が適当なものであるかどうかは、マークポイントをそのように設定した上で実際にリレーを行うことで確かめられていた。これは図１の(d2)の操作により迂回したことのメリットが実感されたと言えよう。

(2)で触れた分数のたし算の事例では、算数の世界を迂回したことのメリットを感じるには、実際にジュースを混ぜてそれを測るという操作(d1)を経て、算数を迂回したやり方は手間がほとんどかからないのに結果として同じものが得られていることを確かめることが考えられる。あるいは、分数のたし算により得られた、

あわせたものが６分の５リットルになるという情報に基づき、現実場面での何らかの操作を施してみるということも考えられる。例えば、あわせたものにさらに６分の１リットルのジュースを加え、結果がちょうど１リットルになることを経験するなどである。

このように図１の情報(2)が現実場面の世界で見出されにくい、あるいは見出されるとしてもかなり手間がかかるといった経験や、情報(2)が数学の世界を迂回して得られたときにそれをもとに行った行為が成功するといった経験が、数学の世界を迂回するメリットにつながっている。このような意味で、(d1)や(d2)の操作は図１の図式の中で大切な位置を占めていると言えよう。

５．単元の考察への図式の援用

前節までは図１の図式を算数・数学的な活動を広く含むようにその解釈を拡張した後に、図式から示唆される３つの点を見てきた。図式を視点として算数・数学の学習を考えると、新たな内容を学ぶ単元において、これらに対応する３つの側面が必要であることが浮かび上がってくる。ここではそれらを見ていく。以下では、小学校の割合と中学校の２次方程式を例として説明を試みてみたい。

(1) 新たな迂回路の必要性を感じさせる側面

前節の(2)で見たように、算数・数学の世界を迂回する場合のメリットを感じることが大切になる。このために、上でもふれたように、現実場面の世界で同様の操作をしようとするとかなり大変になるという経験、あるいは手持ちの算数・数学では扱いにくいという経験を用意する必要がある。そこから新たな算数・数学を作る必要性、あるいは手持ちの算数・数学を拡張する必要性を感じる場面が生まれるものと期待される。

例えば、森尚水氏の実践として知られる３年生のわり算の導入は、これを端的に示している。森氏はクラスでとれた 4188 個のアブラナの種をクラスの 38 人で分けると一人いくつずつになるかという課題を、単元の冒頭にいきなり提示している。種を１つずつ、あるいは 10 個ずつ分けていた子どもたちは、１時間では分けることができず、「ご飯を食べずにせないかん」という感想を残している。その後のわり算の学習では、子どもたちが熱心に学ぶ姿が見られたとされる。新たな情報がほしいのにそれが求めにくいという経験が、新たな迂回路の必要感を高めたものであろう。

同じように考えると、割合であれば、割合という１つの値を迂回しないと比べにくいようないくつかの場合を比べようとする経験が必要となろう。あるいは、比べるために子どもが用いそうな算数の知識（例えばひき算）では直観的な比較と結果があわなくなるといった経験も考えられる。２次方程式の単元を、田口(2002)は次のような課題の解決を中心に構成している。

「長方形の土地に幅一定の道と花壇を作りたい。花壇の面積 $144m^2$、道の面積を $25m^2$ にしたい。縦と横にいくつかの道をつくるとき、道幅をいくつにすれば

良いだろうか。いろいろなデザインを考えてみよう。」
その探求の中で、自分が作りたいデザインのためには２次方程式が解けるとよいこと、それまでの知識ではその解が求めにくいことが経験されている。

(2) 数学の世界での操作に対する信用を育てる側面

これは言うまでもなく、「割合＝比べられる量÷もとにする量」「もとにする量＝比べられる量÷割合」などの算数的な操作、あるいは２次方程式の解法などの数学的な操作を作る部分になる。これらの操作は教科書等によく見られるように、最初は現実場面での課題を考える中で導入されることも多い。その際、算数・数学的な操作が確立する前では、操作の一部を現実場面での操作やそこからの情報により補うことも多い。

例えば、割合の場合、どちらの方が混んでいるか、現実場面でおおよそ見当をつけ、それを表現するための方法として割合の規定を洗練させていくことが考えられる。また 60%の広さが $30m^2$ のときの元の面積を求める際に、$30m^2$ の面積を表した図を６等分して１つ分を 5 m^2 と求め、これを 10 倍することは、形式的な処理というよりも、現実場面での操作の補助を受けているように思われる。２次方程式の平方完成を考える場面で田口(2002)は、上の課題の流れの中で、図３のような操作を生徒に示している。

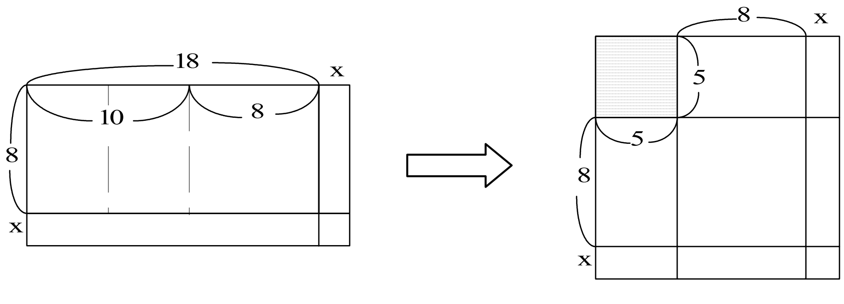


図３

ここでは x の長さを求めることは、花壇のかたちについての操作に支えられていることになる。

図１の流れから考えると、こうした操作が迂回路の一部となるためには、数学の世界での操作と現実場面の世界での操作の関係が、ある意味で逆転する必要がある（図４参照)。つまり、数学の操作が現実場面により支えられている状態から

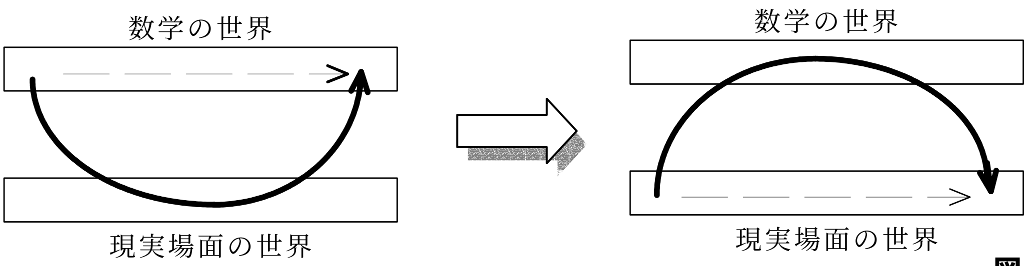


図４

現実場面での感覚とは別個に、数学の世界での結果を子どもが新たな情報として捉え、それを信用できるような状態に移行するということである。

例えば、現実場面での感覚とは別に、計算された割合を一つの判断材料として安心して用いたり、「もとにする量＝比べられる量÷割合」で求められた結果を安心して次に使っていけることである(3)。また、花壇の形に対する操作とは別個に、形式的な式変形およびそれから得られた２次方程式の解を信用して思考を進められるということである。単なる習熟とは別に、子どもの側のこうした信用や安心感を、単元の中で育む必要があろう。

算数・数学的な操作に対する信用は、一方では、その操作が他の算数・数学の知識と結びつく、あるいはそれをもとに説明されることで感じられる面もあると考えられる。しかしまた他方では、次の(3)で述べるような迂回路全体の妥当性により、その一部である算数・数学的な操作に対する信頼性が支えられるという側面も持つと考えられる。

(3) 数学の世界を迂回して大丈夫という実感を育てる側面

ある操作が他の算数・数学の知識との関わりで妥当と感じられることが、コンピュータのメカニズムに基づきその働きを信用することだとすれば、別の信用の仕方として、自分の仕事をする中でコンピュータが確かに有用な働きをしてくれることを実感することが考えられる。つまり、数学の世界を経由する迂回路が有用な情報を与えてくれることを実感することで、この迂回路やそれを支える算数・数学的な操作を信用し始める、という側面が単元の中で必要となろう。

内山(2003)は、ある条件の下で赤玉が出やすいくじを生徒たちが確率の知識を参照しながら自分たちで構成し、その後作ったくじを実際に引いてみるという活動を取り上げている。これを参考にすると、割合の学習においても、割合をもとにくじを作ってみて、割合から予想される出やすさと実際に引いたときの出やすさを比較するという活動が考えられる。例えば次のような２つのくじを考える。

(a) 40 本中 16 本の当たりが入っているくじ

(b) 20 本中７本の当たりが入っているくじ

実際にそれぞれのくじを作り 50 回ずつ引いてみたところ、(a)では 50 回中あたりが 21 回となり、(b)ではあたりが 17 回となった。これは割合で予想される結果とほぼ一致する。割合で予想したことを現実場面の操作による結果と比較することは、図１の(d1)の操作により(b)の妥当性を感じる形になっている。

田口(2002)の課題において図３のような花壇のデザインを考え、x の値を２次方程式で求めたとする。このとき、求めた x にしたがって花壇を具体化し、確かに条件を満たすことを確認することは、数学の操作から得られた情報をもとにさらなる操作(d2)をし、それにより当初の目的の達成されたことを実感することとなる。

ここでは具体的な場面を扱っていること自体が大切なのではない。 ４(3)で述

べたように、(d1)や(d2)の操作を行うことで迂回路が確かに機能することを実感するための活動になっていることが必要である。具体的場面を用いても、「計算すると〜だから結論は〜」と進めるならば、これは単に迂回路を経由するだけであり、上のような実感は得られにくい。逆に言えば、算数・数学的な操作ができるようになった後でも、情報を与えてくれるものとしての安心感が不足している場合には、(d1)や(d2)に当たる活動を採り入れることも必要だということになる。

数学の問題として提示されないと、数学の知識が使える場面でもそれを用いて考えないとの報告もある（石井ほか, 1996）。こうした問題に対応するためにも、これら３つの側面に注意を向け、算数・数学の世界を経由する迂回路を子どもたちが信頼できるようにする必要があるのではないだろうか。

６．おわりに

上の３つの側面を振り返ると、単元の流れは、現実場面に支えられていた数学の世界が、習熟を経ることでそこから独立する、といった単純な流れではないと思われる。３つの側面は単元を通して適宜呼び出され、その中で、迂回路の必要性や算数・数学的操作への信頼が感じられていくのではないだろうか。

電子メールが使われだした頃、メールが届いたかどうか不安であった。メールが日常的なツールとして感じられたのは、メールでの連絡で用事がきちんと伝わるという経験を積み重ねてのことだった気がする。算数・数学についても、それを使ってうまくいったという経験を重ね、時間をある程度かけて、それが自らのツールになるのではないだろうか。そうした経験を単元を通して、さらには学年や学校段階を通して提供していくことが、算数・数学の世界が子どもたちにとってリアルなものとなるために大切なことの一つであると考えられる。

例えば、「わり算により１あたり量が求まる」ということは小学校３年生のわり算の導入から扱われ、その後、÷小数や÷分数の単元ではこのアイデアが前提として除法の拡張が行われる。しかしこのアイデアに必ずしも信頼をおけず、結果として除法の拡張がうまくできない様子がしばしば見られる。算数・数学的な操作に対する信頼を育み、迂回路のメリットを感じられるような工夫をすることは、算数・数学の学習の流れを作る上でも大切なことと考えられる。

本稿では現実場面の世界として、算数・数学的なものも含め自分が考えようとしている事象が生じている世界を考えてきた。これは言いかえれば、算数・数学的な内容も私たちが観察し探求する事象や出来事として捉えるということでもある。日常や自然、社会の現象と同じように図１下段に入り、興味をもって観察・探求するような対象として、算数・数学が立ち現れる場面もまた必要ということであろう。図１の図式は、算数・数学の学習において、数学の世界を経由することで今まで知っていた世界との関わり方が変わるという側面と、数学の現象が生じている今まで知らなかった世界が広がるという側面の必要性を、浮き彫りにしているとも言えるのである。

註および引用文献

(1) この部分は中学校の学習内容では扱えないので、松宮と柳本(1995)では教師が判別式を用いた方法を提示し、また大澤(1996)ではグラフ電卓を用いている。

(2) こうした扱いは、私たちも日常の場面で出会う“かたち”についてはよく行っていることであろう。

(3) これは計算結果に機械的に単位をつけるといったことではない。あくまで元の事象を考察するための一つの情報あるいは判断材料として信用するということである。

Hanna, G. (1996). 学校教育における証明の役割 (磯野正人訳). 上越数学教育研究, *11*, 155-168.

池田敏和. (1999). 数学的モデリングを促進する考え方に関する研究. 数学教育学論究, *71・72*, 3-18.

石井俊行, 箕輪明寛, 橋本美彦. (1996). 数学と理科との関連を図った指導に関する研究：文脈依存性を克服した指導への提言. 科学教育研究, *20* (4), 213-220.

木幡　寛. (2000). 算数のできる子どもを育てる. 講談社.

小寺隆幸. (1999). カリキュラム構成の視点：数学教育を現実世界に開くために. 汐見稔幸, 井上正允, 小寺隆幸 (編), 時代は動くどうする算数・数学教育(pp. 164-181). 国土社.

松宮哲夫, 柳本哲. (編). (1995). 総合学習の実践と展開：現実性をもつ課題から. 明治図書.

三輪辰郎. (1996). 文字式の指導序説. 筑波数学教育研究, *15*, 1-14.

布川和彦. (1991). 数学的問題解決過程における数学的知識の問題場面の構造への作用について. 筑波数学教育研究, *10*, 45-55.

Nunokawa, K. (2001). Surprises in mathematics lessons. *For the Learning of Mathematics, 21* (3), 43-50.

Nunokawa, K. & Fukuzawa, T. (2002). Questions during problem solving with dynamic geometric software and understanding problem situations. *Proceedings of the National Science Council, Republic of China, Part D: Mathematics, Science, and Technology Education*, *12* (1), 31-43.

大澤弘典. (1996). 現実場面に基づく問題解決：グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して. 日本数学教育学会誌, 78 (9), 248-252.

田口隆夫. (2002). 中学校数学における課題学習による単元構成についての研究. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

内山公明. (2003). ＜学び・生きる＞を総合する学習過程に関する研究：中学校における数学的活動を中核として. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

梅川貢司. (2001). 証明の意義理解に関する調査からの一考察. 上越数学教育研究, *16*, 115-126.