上越教育大学教職大学院研究紀要　第11巻　令和6年　月

算数科における数と計算および数量関係の学習内容の整理

布川和彦*
(受付；受理)

要　旨

本稿は教師が算数の授業の構想をするにあたり、学年や単元を越えた見通しを持つことができるよう、数や量に関わる学習内容をできるだけ共通の観点から、整合的かつ統合的に整理することを目指すものである。そのために最初に３つの前提を設定し、その前提に基づく形で「数と計算」、「測定」、「変化と関係」の領域の基本的な学習内容を整理することを試みた。

その結果として、小学校第１学年の数と計算の学習から、第６学年の比例と反比例の学習までを、およそその方針により整理し、算数の学習内容の多くの部分を統合的に整理することができた。他方で、第５学年で学習する単位量あたりの大きさはこの展開に組み込むことが難しいことが明らかとなり、その扱いが今後の課題として残されることとなった。

KEY WORDS
Elementary-School Mathematics 算数，Curriculum カリキュラム，Numbers and Quantities 数と量

１　はじめに

授業を構想するに当たっては、指導する内容がまずはどのようなものであるかを理解していることが必要である。加えて、算数では、既習の内容に基づいて新たな内容を学習することが多いことから、指導する内容と算数の他の内容との関わりをできるだけ視野に入れておくことが重要となる。例えば数は四則の計算との関わりで指導されることも多いが、同時に量を表現するために用いられることから、量と測定とも関わる。さらに量の間の関係や量の変化を調べる際にも数は当然用いられるので、数量関係の学習とも関わっている。逆に数や計算の学習をする際には量の操作や数量関係を基にして学習することも多いので、数の学習と量の学習との関係は相互作用的なものと言える。

その意味において、数と計算、量と測定、数量関係といった学習内容に関しての全体像を持っておくことは、算数の授業を構想するために有用であると考えられる。算数で学習する内容については、文部科学省が発行する学習指導要領解説の算数編においてていねいに説明がされている。しかし算数編が大部であることに加え、上述の内容が異なる領域にまたがることもあり、その全体像を把握することは容易ではない。

そこで本稿では、上述の内容に対する基本的な捉え方を、あえて数ページという短い中で論ずることにより、その全体像を授業者にとって見通しよいものとすることを試みる。その際、単に内容を短くまとめるのではなく、次節で述べる数学教育学等の研究に基づく３つの前提を元にして論ずることにする。これにより内容同士の関連付けを明確にし、全体像をより把握しやすくすることを目指すものである。

２　前提

本章では本稿で学習内容を整理するにあたっての前提を述べる。

前提１として、数を量の「倍変換」 (田村, 1978)と考える(宮下, 2011; Nagumo, 1977)。例えばある長さ q に対して、同じ長さを合わせた長さ $q+q$ を作る変換を「2」とし、q にこの変換を施すことを $q\times2$、その結果得られる長さを $2q$ と書くことにする。特に算数で学習する量の単位である m や kg については、国際単位系の考えに従い、基準として用いられる「ある量の特定の例」、つまり基本的に量であると考え、単位の前の数値は「その単位に対する量の値の比」(国際度量衡局, 2019, p. 96)とする。上の書き方も用いれば、例えば m$\times$2＝2 m ということになる。

前提２として、日常的な量についての経験から納得できる関係については、根拠として用いることができるとする。

*学校教育学系

前提３として、操作が瞬時に行われるようになり、操作の結果得られる状態が直接想起されるようになると、その操作が数学的な対象として扱われるようになると想定する(Pegg & Tall, 2005; Sfard, 1991)。例えば $3a+1$ という式は 3 にある数をかけて 1 を加える操作として捉えられるが、徐々にその結果得られる数としても捉えられるようになる。この数は操作から派生する構造を持つことになるが、他方で 1 つの数として他の式に代入をしたり、この式と別の式を加えるといった操作の対象になったりする。以下ではこの変化を「対象化」と呼ぶことにする。ただしある算数・数学的なアイデアが操作であるか対象であるかは現れ方の違いであり、いわば「同じコインの裏表」(Sfard, 1991)に過ぎず、私たちは通常、両者の捉え方を適宜使い分けている。学習においては操作としての捉え方が先行し、学習が進むにつれ、上述のように対象としても捉えられるようになるとされる。

３　数

前提１にしたがい、数を量の倍変換として整理する。この前提は、小数と分数も自然数と同一の仕方で捉えることができるように選択されたものであるが、これは 16 世紀にシモン・ステヴィンなどが 1 も数であることを明確に述べたり、数を「量を表すもの」と捉えたりすることで小数が受容されていった(Malet, 2006; 山本, 2018)こととも整合する。なお「個」や「人」といった助数詞は通常は単位とは見なされない(虫明, 2019)が、算数における自然数の学習では個数や人数などが多用される。そうしたこともあり、算数教育では、小数や分数の学習で用いられる長さや液量などの「連続量」と対比させ、個数や人数を「離散量」と呼び、両者とも量として扱っている(久保(2009)も参照)。そこで本稿では便宜的に「個」や「人」など離散量を表す際に用いる助数詞も単位に準ずるものと考え(二村, 2002)、便宜上、単位と同じように扱うこととする。例えば「個」は今の数える操作において「1 個」と数えるような多さを表すと考える。同時にそれは、今の数える操作では何を数える単位とみなしているかも表すと考えられる。

３．１　自然数

まずは前提１に基づき、リンゴなどの個物に同じものを併せた多さ、個➕個を作る倍変換として数 2 が導入される。もちろん変換自体は見えないので、第 1 学年の自然数の学習では倍変換 2 を個物に施し(個✕2)、その結果である個物 2 個の状態を提示することで、倍変換を間接的に感得することが目指されていると考えられる。リンゴ 2 個や犬 2 匹、おはじき 2 個などの絵が提示されるが、本稿の立場では、そこから倍変換 2 が抽象されることが期待される。その際、個物を指さしながら数えて確認することもあろうが、これは倍変換の操作を再現する行為とも考えられる。個物を順次追加して併せていくことで、新たな倍変換として 3、4、…などの自然数を作ることができる。

前提３に基づくと、ある多さを作る操作が対象化されることで数として捉えられると考えられる。つまり個物を順次追加して合併していく操作を対象化することが、数を対象として捉えることには必要になる。これにより数えなくても数を考えることは可能になる。例えば、リンゴを 5 個並べた絵を見て、数えなくても 5 を直接、「直観的把握(subitizing)」(高原, 2020)ができるような場合である。

数の学習の初歩においては、数の大小は数を施した結果の量の多寡により判断される(田村, 1978)。例えば 5 と 7 であれば個✕5 と個✕7、つまり 5 個と 7 個の多さの比較により $5<7$ という数の大小が決められる。このように、初期の段階においては、変換である数の諸性質は、その変換をある個物に施して得られる多さという量の考察を通して把握される。他方で、数自体の性質が量を通して決まっていくことは、数がある性質を持つような対象であるとの捉え方を促し、結果として数の対象化につながると考えられる(Slavitt, 1997)。

第 1 学年の早い時期に、10 以下の数の分解と合成が扱われる。8 は 5 と 3 といったことが個物の集まりの分割操作などを通して見いだされるが、結果は助数詞を伴わずに数だけで記録されることが多い。この活動により 8 と 5 と 3 という数の間の関係が考察され、数がある性質を持ったり他の数と関係したりしている対象であるとの捉え方につながるという意味でも、数に対し操作が行われるという意味でも、分解と合成の操作は数の対象化を促すと考えられる。

様々な多さから数を構成して大小関係を決め、それらを小さい順に並べて数の系列を作り，さらにそれに対応する数詞の系列「いち、に、さん、よん、…」を作ったとする。ものの集まりを数えることは、その集まりの要素を数詞の系列に対応させることであり、集まりの多さがどの倍変換により得られたのかを見いだすことだと考えられる。いわば数詞の系列を“ものさし”として、ものの集まりの多さを測定することになる。なおその結果が、集まり全体の多さを表していると考えることもできるし、最後に数えた個物の全体における位置、すなわち順番を示すと考えることもできる。ここから数を前者の目的で用いる「基数」と、後者の目的で用いる「序数」の区別が生じる。

より大きな数については個物に対する倍変換だけでなく、個物 10 個や 100 個のまとまりに対する倍変換も併用して

構成される。すなわち 10 個のまとまりを✕4 した量と個物を✕7 した量を併せて 47 個を作るといった方法である。さらに 10 個のまとまりとして 100 個を作り、この 100 個のまとまりへの倍変換も併用すれば、より大きい多さを作ることができる。この操作を繰り返すことで基本的にいくらでも大きい多さを作ることができ、その多さを作る倍変換として大きな数を構成できる。十進位取り記数法は、位という数字の位置によりどのまとまりに対する倍変換かを表すと約束することにより、こうして構成される数を簡潔に表すことができる表記法となっている。ただし上の多さの作り方を理解するためには、10 個や 100 個のまとまりを、倍変換を施すことができる対象として捉えること(Cobb & Wheatley, 1988)が必要となる。また十進位取り記数法の説明では 1 がいくつ、10 がいくつ、100 がいくつといった表現が使われることから、数 10 や 100、さらに数 1 自身を数えることのできる対象として理解している必要もある。

なお第 1 学年では 0 も数として学習する。0 は位取り記数法において空位を表す記号として導入されたとも言われる(林, 1993)が、算数では個物がなくなった状態を表すための数として導入される。しかし他の自然数が個物を順に合併していく倍変換を表すのに対し、0 は個物を置かない“変換”やその結果である個物が存在しない状態を表すために用いられるので、両者には違いがある。さらに個物が存在しない状態をあえて数により表現することは、不自然とも言える。実際、彌永(1978)は自然数の集合に 0 を追加することを、数範囲の拡張として扱っている。

３．２　小数と分数

自然数は、基準量のいくつ分かに当たる量を作る変換から生じた。小数や分数では、基準量に加えて、前提２に基づいて基準量を何等分かした小さい量を考え、それを用いた変換も考える。この量を本稿では下位基準量と呼ぶ。単位 m に 10^{-2} を表す接頭辞 c (国際度量衡局, 2019, p. 112)をつけて下位単位 cm を作るが、同様に、基準量 p を 10 等分した量を作る倍変換を「0.1」あるいは「1/10」で表し、p✕0.1 あるいは p✕(1/10)を下位基準量として併用することにする。なお前提２は量だけについて述べており、数 1 自体の 10 等分は保証していない点には注意する必要がある。

下位基準量 p✕0.1 の 2 倍の量(p✕0.1)✕2 を作る変換を 0.2 で表す。同様に 0.3、0.4 などを作り、また同様に 2/10、3/10 を作ることができる。さらに倍変換 2 を施して得られる量と倍変換 0.6 を施して得られる量を合わせた量 p✕2＋p✕0.6 を作る変換を 2.6 と表すことにする。つまり p✕2.6＝p✕2＋p✕0.6 とする。帯分数も同様に作ることができる。10 等分以外の量の等分による下位基準量を作ることで、分母が 10 以外の分数を作ることができる。これらの数の大小比較などについては、自然数の場合と同様に考えることとする(分数の詳細については布川(2023)参照)。

ただし、小数や分数のこの作り方では、下位基準量を作り、その何倍かを構成する分だけ倍変換を実行するステップ数が多くなる。したがって前提３に基づく対象化が、自然数よりは生じ難くなると推測される。加えて自然数や小数が下位基準を作る操作として 10 倍と 10 等分を用いるのに対し、分数では 2 等分、3 等分など多様な操作を用いることから、分数の理解はさらに難しくなると考えられる。

３．３　測定

基準量を 1 つ決めると、各数 a に対してその基準量の a 倍の量を作る操作が考えられる。このことを生かすと、逆に、ある量に対して数を対応させることができる。例えば、基準量の k 倍を作るとちょうどその量と等しくなったとすると、その量の大きさを「基準量の k 倍」として表すことができる。測定は、このように基準量の何倍かを求め、基準量の何倍かとして量を表現する操作と考えることができる(小林, 2002)。基準量として m や kg などの「普遍単位」を採った場合が、上で見た国際単位系における量の表現である。ただし、算数の学習では学習者が身の回りから選んだ基準量が用いられることがあり、こうした基準量は「任意単位」と呼ばれる。以下では「単位(unit)」と「基準量」を同義で用い、単位や基準量の何倍かを表す数値を「測定値」と呼ぶことにする。2 m の 5 倍で 10 m と考える際は、一つの長さであるが、m を単位とすれば測定値は 10 であり、2 m を単位とすれば測定値は 5 となっている。

上で述べたように助数詞も単位に準ずるものとすると、数えることも測定の一種と考えることもできる(布川, 2021)。

４　加法構造

数の加法と減法については、数の大小比較と同様に考えられる。つまり 2 数 a, b の和 a+b は、ある量 q に q✕a＋q✕b を対応させる変換として、つまり q✕(a+b)＝q✕a＋q✕b として決まると考える(田村, 1978; 小林(1999)も参照)。これは、2+3 という数の加法を、2 個と 3 個を併せると 5 個になるので 2+3=5 と決めるとか、(2/5)+(1/5)という数の加法を、2/5 m と 1/5 m を併せると 3/5 m になるので(2/5)+(1/5)=3/5 と決めるということである。

なお 2 個が 1 個を 2 つ併せたものであることや、2/5 m が 1/5 m を 2 つ併せたものであることを想起すれば、上の量の合併は結局、基準となる量(1 個や 1/5 m)の個数を数えることに帰着され、数の加法も同様になる。また 10 個のまと

まりや100個のまとまりを考えて合併の操作を行うことで効率化を図ることを考えると、数が十進位取り記数法により表現されている場合には、対応する数の操作は位ごとの処理となるため、ここから筆算の手順が導かれる。
基準量qのa倍の量q✕aからb倍の量q✕bを取り除く操作を考え、結果の量をq✕aーq✕bと表すことにする。q✕$(a–b)$=q✕aーq✕bとして数の減法$a–b$を決めると，筆算の手順などは加法と同様に導かれる。また□$–b=a$となる□は$a+b$で求まることを学習して加法と減法が関連付けられるが、量の操作からq✕(□$–b$)＋q✕b=q✕□ーq✕b＋q✕b=q✕□と考えられるので、□$–b$の結果にbを加えると□に戻ることがわかり、この関連付けも確認される。量の操作と前提２を組み合わせることにより、減法に関わる関係や性質も確認されることになる。

５　乗法構造

５．１　乗法

ある量の２つ分、３つ分の量などを２倍、３倍と言うことは、現在も小学校第２学年で学習している。本稿ではこれをq✕2、q✕3などと書いてきた。ここで量q✕2に対してさらに続けて３倍の倍変換を施す、つまり倍変換を合成すると、その結果得られる量は(q✕2)✕3と書くことができる。量qに対して(q✕2)✕3を与える変換を$2×3$と考えることで、数の乗法を決めることができる。すなわちq✕(2×3)=(q✕2)✕3である。２ｍはm✕2であり、(m✕2)✕3は２ｍの３倍の長さであるから、今のことは２ｍの３倍という量の操作を通して、数の乗法$2×3$を決めるということである。また逆に、２ｍの３倍の長さの測定値が、$2×3$という数の乗法により求まるということも示している。
この決め方の利点は、３項や４項の乗法も考えることができることである。量を何倍かしたものは同じ種類の量となるので、((q✕2)✕3)✕5も同様に考えられ、したがって数の乗法$2×3×5$も考えることができる。
ここまで倍は量に対して考えてきたが、量の倍である✕3に基づいて数の乗法×3を規定したので、この数の乗法×3も３倍と捉えることが一部の教科書で扱われている。すなわち$2×3$は数２の３倍と捉えるものである。この場合、数２の３つ分を考えるので、数自体も数えたり倍操作を施したりできる対象としての単位と捉えていることになる。基準量を含めて(q✕2)✕3を考えている間は、２は基準量$2q$を示し３はこの基準量に施す倍変換を示すので２と３の役割には違いがあるが、他方でqを含めず$2×3$を考える際は、両者とも倍変換、つまり数として役割の違いはない。
教科書では例えば「4人ずつ3台分で12人です」ということを「4×3=12」と書くとし、「1つ分の数」に「いくつ分」をかけると「ぜんぶの数」が求まるとして乗法が導入される。(人✕4)✕3=人✕(4×3)=人✕12と捉えるならば、本稿の説明と同じになる。しかし「いくつ分」も「3台」という量だとする解釈は、本稿の説明とは異なってくる。科学などで用いられる単位を含めた「量の四則演算」(国際度量衡局, 2019, p. 117; 伊藤と山下 (2020)も参照)において、倍を単位のつかない無次元量と考えると、前者は「人」に無次元量をかけて「人」となるので整合性がとれるが、後者の場合は「人」に「台」をかけて「人」ということになり、いわゆる「次元の合わない式」(小牧, 2018; Sonin(2001)も参照)になる。整合性を持たせるには、被乗数を「人／台」を単位とする組立量として解釈する必要がある。しかしこの場合でも、得られる「12人」を改めて「12人／台」と組立量として捉え直さないと、この積にさらにかけ算を施すことができなくなる。そもそも後者の解釈では、ここまで見てきた量の倍変換「✕」とも数の乗法「×」とも異なる、量と量の乗法(Lodge, 1888)を考えざるを得なくなる。そこで以下では、全体像を簡潔にするために前者の立場を採用し、全体量=基準量✕倍として捉え，数の乗法は倍変換の合成から決まると考えていく。
小数倍や分数倍も基本的には基準量の倍変換であるが、その際に3.2で述べた下位基準量も用いる点が異なっている。例えばp✕2.6という量を3.7倍した量(p✕2.6)✕3.7は、p✕2.6という量の３つ分と、p✕2.6を10等分して得られる下位基準量(p✕2.6)✕0.1の７つ分をあわせた量となる。そしてpを(p✕2.6)✕3.7に対応させる変換を$2.6×3.7$と考える。これは2.6ｍの3.7倍の長さの測定値を求める演算として、$2.6×3.7$という数の乗法を決めることに相当する。
乗法について成り立つ性質も、量に施した時の結果の観察から導かれる。例えば、乗数が10倍になると積も10倍になるといった乗法の性質は、ある量の0.2倍と２倍の関係を考察することにより確認される。乗法の結合法則を確認しておけば、同じ性質を$a×(0.2×10)=(a×0.2)×10$より確認できそうではある。ただしこの場合は、乗法の結合法則が小数の範囲でも成り立つと言えるのか、あるいは成り立つと仮定するのかといった前提を明確にする必要がある。
乗法の筆算は分配法則を用いた計算を効率的に遂行する表現と考えられる。例えば$26×37=(20+6)×(30+7)=6×7+20×7+6×30+20×30$であるが、筆算では２つの数字を縦に並べることで、この４つの乗法を考えやすくし、さらに$(20+6)×7$と$(20+6)×30$の積が縦に並ぶようにすることで、２つの積を加える筆算が自然に生ずるようにしている。小数を含む乗法の筆算では、$2.6×3.7=(26×0.1)×(37×0.1)=(26×37)×(0.1×0.1)$などと考えて、自然数の乗法を行った後に小数点の処理をすることで計算できるようにしている。この場合、小数点の処理は0.1の累乗の指数により決

まるので、小数点をいくつ動かすかの判断は指数法則に依拠することになる。

乗法は基準量の何倍かを求めることになるので、基準量が一定であることが前提となる。そのため、基準量が必ずしも一定とは限らなくても、場面を適当に捉えて一定と見なすことで乗法を適用できるようにする場合もある。また全体では基準量が一定とは言えないが、非常に小さい範囲では一定と見なせるとする考え方は、区分求積法を通して積分につながると考えられる (瀬山, 1993)。

なお倍についても前提３を基に考えると、操作の面と対象の面がある。つまりある数 r について、１つの量 q から別の量 $q'=q\times r$ を作る操作、あるいは１つの数 a から別の数 $a'=a\times r$ を作る操作の面と、操作の結果に基づき、一方の量 q'がもう一方の量 q の r 倍、あるいは一方の数 a'がもう一方の数 a の r 倍であるという関係を表す面がある。前提３にしたがうならば、この場合も、操作として理解する方が関係として理解するよりも容易であり、前者の理解を通して後者の理解へと至ることが必要になることが推察される。

５．２　除法

乗法を全体量＝基準量✕倍として捉える場合、乗法の逆操作としての除法は二通りのものが考えられる。倍を求める除法と基準量を求める除法である。前者は 12 個＝4 個✕x の x を求める操作であり、後者は 12 個＝x 個✕4 の x を求める操作である。ここから数の除法 $12\div4$ を $12=4\times x$ となる x、あるいは $12=x\times4$ となる x を求める演算として決めることができる。乗法の交換法則が確認できていれば、$4\times x=x\times4$ なので両者は一致する。2 つの除法は適用される場面としては区別されても、数の演算として違いはない。なお数の除法 $12\div4$ の結果である商を求めるにも、教科書で九九を用いているように、乗法を用いて $4\times x=12$ になる x や $x\times4=12$ になる x を求めることになる。

この方針は筆算においても引き継がれている。確かに除法の筆算においても被除数に対して分配法則を用いて分解する部分もあるが、除数については分解ができない。そのため、基本的には除数を何倍すべきかを考えながら、筆算を遂行することになる。例えば $918\div27$ であれば$(910+8)\div27$ ととらえた後、27 に何をかけると 910 に近くなるかを確認しながら $27\times30\leqq910<27\times40$ を見いだす。次に $910-27\times30$ を実行し、あまり 100 を用いて $918\div27$ を改めて$(810+108)\div27$ と捉え直した後、$810\div27+108\div27=30+4=34$ により商を求める。$108\div27$ の部分も、基本的には 27 に何をかけると 108 になりそうかを考えて、4 を見いだしている。つまり、数の除法を実際に遂行する際には、数の乗法の逆演算であるということが、中心的な考え方になっている。

教科書では 12 個＝4 個✕x を「12 個のあめを 4 個ずつ分けると何人に分けることができるか」という場面で考えるので、答えは 3 倍ではなく 3 人となる。本稿の立場ではこれは、4 個の 3 倍が 12 個なので 3 人に分けることができる、と考えていることになる。12 個＝x 個✕4 も「12 個のあめを 4 人で等しく分けると何個ずつもらえるか」という場面で考える。これも 4 倍で 12 個になるのは 3 個なので 1 人分は 3 個だと考えていることになる。

12 個＝x 個✕4 の場面での操作は「等分除」と呼ばれ、トランプを配るようにあめを 4 人に 1 個ずつ配って 12 個を 4 等分することが行われる。しかしこの配ることも、1 個✕4、2 個✕4 と逐次近似的に考え、✕4 をしてちょうど 12 個になる基準量を見いだしているのであり、上で除法では乗法を用いて商を求めるとしたことと同様の考え方と言える。また 1 個ずつ配る等分の仕方は、4.7 倍して 23.5 m になる基準量を求めるには使いにくいが、1 m✕4.7、2 m✕4.7、…と逐次近似的に考えて 5 m を見いだすという解釈であれば、同様に考えることができる。ここから数の除法 $23.5\div4.7$ も 4.7 倍して 23.5 になる数を見いだすこととして規定される。分数の場合も、除数をかけると被除数になるような分数を見いだすこととして構成することができる(布川, 2023)。

以上のように、数の除法は乗法の逆演算として規定され、また商が求められる。乗法の逆演算であるからこそ、12 個＝4 個✕x となる x を求めること、つまり何倍かを求めることにも、12 個＝x 個✕4 となる x を求めること、つまり基準量を求めることにも用いることができるのだと考えられる。

除法については、「被除数と除数に同じ数をかけても商は変わらない」という性質が特に重要であり、除数が小数や分数の場合の商を求める学習においても用いられる。この性質も量の操作とその結果を観察することで確認できる。あるいは数の乗法で乗数を k 倍すると積も k 倍になることがわかっていれば、$x\times a=b$ より $x\times(a\times k)=b\times k$ となるので、$b\div a=x$ ならば$(b\times k)\div(a\times k)=x$ となるとして確認することもできよう。

６　２量の関係

６．１　割合

長さどうしのように同じ種類の 2 量では、3.3 で見たように、一方を基準量として他方を測定することで、その量を

基準量の何倍かとして表すことができた。3.2 に基づけば、小数倍でも分数倍でも同じように考えることができる。ここで一方の量 q_1 を基準量として設定することを、q_1 の測定値を 1 と定めるという意味で「q_1 を 1 とする」あるいは「q_1 を 1 と見る」と呼び、もう一方の量 q_2 の測定値は「基準量 q_1 のいくつ分で q_2 と等しくなるか」、つまり「q_2 がいくつにあたるか」を表していると考えるならば、q_2 が q_1 の r 倍という際の r、あるいは $q_2=q_1 \times r$ の r は「q_1 を 1 とするとき q_2 がいくつにあたるか」を表す数ということになる。この r を、小学校第 4 学年や第 5 学年の学習では「割合」と呼ぶようになる。

ここで量に対する数 r による操作 $\times r$ が量に対する倍変換であったことを想起するならば、割合は「基準量をどの程度の倍変換を施して得られる量か」を表す数と言える。なお変換のイメージとしては、基準量や下位基準量の合併のイメージと、図の拡大・縮小のようなイメージとがありうる(Brousseau et al., 2014)。いずれにしろ、変換の程度を考えることで、当該の量が基準量のどの程度に当たるかや 2 量の間の関係を、数値により表そうとするものである。

ある量を基準量により測定すると何倍となるかは、5.2 の議論から除法でも求めることができる。すなわちある単位 p に対して基準量が $q_1=p \times s_1$、測定される量が $q_2=p \times s_2$ と表される時、$q_2=q_1 \times r$ である r は、$p \times s_2=q_1 \times r=(p \times s_1) \times r=p \times (s_1 \times r)$ より $s_2=s_1 \times r$ となる r なので、数の除法 $s_2 \div s_1$ で求めることができる。14 m が 5 m の 2.8 倍などと考えるときは、この単位として m や kg などの普遍単位を用いていることになる。r の値が自然数でない場合、2 量が連続量ならば、3.2 や 5.1 の議論のように下位基準量を構成して小数倍を考えることは自然である。しかし 2 量が離散量であると、個や人などの下位基準量の意味が不自然になる。この場合、下位基準量の構成は具体的な操作というよりも、程度を求めるための仮想的な操作である点に注意する必要があろう。

なお上述の議論では、基準量の測定値を 1 と設定した上で、他の量がいくつにあたるかを考えているが、基準量の測定値を他の数として設定して 2 量の関係を表すこともできる。例えば、基準量の測定値を 100 とした割合は百分率と呼ばれる。つまり、元の基準量の測定値が 100 となるような下位基準量を想定し、それにより他の量を測った時の測定値を求めている。これにより多くの場合、割合を小数ではなく自然数で表すことが可能となる。あるいは基準量の測定値を 10 とした割合では、他の量は 2 割、3 割などと表される。さらに一方の測定値が 2 となるような基準量を設定したときに他の量の測定値が 3 となることを、2 : 3 と比により表すこともできる。この場合、2÷3 の商は比の値と呼ばれるが、これは測定値 3 の量を改めて基準量として設定し、もう一方の量を測定し直した測定値と言える。このように、割合に関わる様々な表現は基準量を表す測定値の違いとして解釈できる。

場面によっては m や kg などの同じ単位で測定された測定値どうしで比較するのではなく、それぞれの基準量で測定した測定値である割合により比較する方が妥当となる。これは基準量が異なる測定値どうしの比較である。例えばアリが 0.02 g、つまり 0.00002 kg の物をくわえて運び、人間が 130 kg の物を持ち上げたとする。両者の体の大きさの違いを考慮した場合は、同じ kg を基準量とする測定値ではなく、それぞれの体重を基準量とする測定値を用いて、体重と持ち上げた重さの関係を比較する方が妥当と考えられる。野球で打者の成績を単純に安打数ではなく、打率を用いて評価するのも、選手により打数が異なるからである。基準量が大きい方が自然に有利になるような場合など、ある量と基準量との相対的な関係のみに着目する方が妥当な場合に、割合による比較が用いられることになる。

一つの対象に関する 2 つの同種の量が比例の関係にある場合、基準量の採り方に依らず割合が一定になる。例えばいくつかの小学校第 4 学年の教科書ではゴム紐の例が用いられている。ゴム紐の伸び方がある範囲で一様であり、取り出した長さに対してその伸びの長さが比例すると考えられる場合、取り出した元の長さに依らず伸びの長さの割合は一定となる。ここから、この割合がこのゴム紐自体の伸びに関する特性を表すと考えられる。そして他のゴムの同様の特性との間で割合を用いて比較ができることになる。ジュースの濃度なども同様に考えることができよう。つまり、割合により対象のある側面の特性を数値化して記述し、またそれにより同様の対象の間の比較を可能にしている。

６．２　単位量当たりの大きさ

上のゴム紐の場合と同様に、針金のどの部分も同じ状態にあり全体として均質であるとすると、長さが 2 倍、3 倍、…になると質量も 2 倍、3 倍、…になると想定される。この時、どの部分の 1 m を考えても質量は同じであり、この質量を a kg とすると長さ x m とその時の質量 y kg の間には $y=a \times x$ の関係がある。a は元々 1 m 分の質量の値であるが、比例定数として用いられることで、この針金では長さに対してどの程度の質量が対応するかの指標となる。針金の材質や状態等によりこの a の値が異なるとすれば、a の値は針金のある種の質を表現していることになる。1 m は長さの単位である量 m の 1 つ分と等しい長さ、つまり単位量であるので、1 m の質量を針金の質を表現するために用いる場合、「単位量当たりの大きさ」と呼ぶ。

上で述べた $y=a \times x$ の y、a、x を数として考えるか、x は 1 m の何倍かを表すとして y kg $=a$ kg $\times x$ と質量の倍関係と解釈するならば矛盾はないが、長さの部分も x m と量として解釈しようと思うと、今のままでは不都合が生じる。

5.1 で行ったように両辺の単位を考えてみると、y kg＝a kg×x m では左辺の単位は kg、右辺の単位は kg と m の積になってしまい、等しくならないからである。この不整合を解消するには、a の単位を kg ではなく、組立単位 kg・m^{-1} (kg/m) とすることになる。ここから、単位量当たりの大きさとしての a の単位は kg・m^{-1} とされ、これを単位とする組立量としての内包量の考えが現れる。それにより単位量当たりの大きさと長さをかける量の乗法や、質量を長さで割るという量の除法が想定されるものと考えられる。さらに、この量の除法を前提に単位量当たりの大きさを「異種の 2 量の割合」と特徴づけることにもなっている。ただし算数の学習では組立単位は扱われず、「1 m の重さ」という表現が「1 m あたりの重さ」という表現に変わることで、単位量当たりの大きさという質を表す量を扱っていることが示唆される。それに加えて、通常は測定値である数の乗法や除法で処理するので、単位の整合性などの量に関わる問題は表面化せず、同種の量の倍関係なのか内包量を含む異種の量の関係なのかは曖昧になっている。

単位量当たりの大きさの学習では、全体の状態が必ずしも均質とは言えない場合についても、均質であると仮定することにより、その全体の質を記述することを考える。例えば人口密度などの混み具合が扱われるが、通常はある面積の上に人は均等にいるわけではないので、混み具合の点で全体は均質ではない。単位量当たりの大きさの学習では人の配置を「均して」考え、全体が均質であると「仮定して」単位面積当たりの人数を求めることになる。さらに均そうとする量が人数や個数のような離散量の場合には、均す操作自体が問題となる。均す操作を実行することが現実的には不可能なことも多く、また得られた単位量当たりの大きさが小数値だと、それをどのように解釈すべきかも自明ではない。全体が均質であると暗黙に想定し、一方の量が他方の量に比例している、つまり $y=a\times x$ となるようにある数 a を選ぶことができると仮定した上で、単位量当たりの大きさである a はその質を表す指標に過ぎないと捉えていくことになろう。6.1 で離散量に関わる小数倍を、程度を表す仮想的な数値であるとしたのと同様である。

7　関数の考え

7．1　ともなって変わる量

大きさの決まった量の場合は、3.3 の測定の操作によりその測定値は一つに決まり、したがってその量は数と測定の単位の組み合わせにより表すことができる。しかし量が変化している場合、つまり変量(variable quantities)を扱う場合は、測定値も変化するので 1 つの数にならず、「いろいろな値をとる文字」である変数(variables)と単位との組み合わせにより表すことになる。算数では、動きや変化のある事象に現れる量など、2 つのともなって変わる変量について調べることも学習される。

2 変量の関係については 2 通りの捉え方が扱われる。第一のものは、それぞれの量の変化の関係に着目するものである。例えば一方の量が 2 倍、3 倍、…となったときに他方の量が 1/2 倍、1/3 倍、…と変化するといった関係や、一方の量が 1 増えると他方の量が 5 ずつ増えるといった関係である。ともなって変わる様子、共変(covariation)に着目した捉え方である。第二のものは 2 量の測定値どうしの関係に着目するものである。例えば、一方の量の測定値を 0.6 倍すると他方の量の測定値になるとか、一方の量の測定値を 3 倍して 1 をたすと他方の量の測定値になるといった関係である。2 量の対応(correspondence)に着目した捉え方となる。2 変量を表として表す場合、共変は表を横に見ることに当たり、対応は縦に見ることに当たる。式は対応の表現であるが、式で一方の変数の値を変化させたときの他方の変数の値の変化を観察することで、共変的な見方も可能となる。グラフの概形は変数間の対応を表すが、読み方により共変的な見方もやはり可能となる。「ともなって変わる量」として算数では共変が基本な捉え方と考えられるが、中学校の関数の学習で式を中心に扱うことを考慮すると、対応の捉え方もできることを目指す必要があり、実際、対応をことばの式で表すことも学習している。また算数では具体的場面に現れる 2 変量の関係を扱うが、中学校では 2 変数の関係を考察することへ移行し、具体的な量を伴わない学習場面が多く見られる。

なお対応の場合、異種の量の関係が扱われることが多い。これを測定値間の関係、つまり数の間の関係ではなく、2 量の間の関係として扱う場合には、5.1 で述べた単位の不整合の問題が生じたり、内包量の導入が必要となったりする。

2 変量の間の関係が明確にされた場合、その関係を用いて与えられたデータにはない測定値を推定することができる。例えば与えられたデータの途中にある値を推定する内挿(interpolation)や、データの範囲の外にある値を推定する外挿(extrapolation)である。算数では関数自体は扱わないものの「関数の考え」に言及するのは、2 量間の関係を用いて新たな情報を得るという手法や、そのための 2 量間の関係の調べ方を重視するからだと考えられる。

7．2　比例的推論

場面中の 2 変量について、あるいは着目する量を変量だとみなして、一方を 2 倍、3 倍、…すると他方も 2 倍、3

倍、…になると考えて推論を行うことは「比例的推論 (proportional reasoning)」と呼ばれる。この考えは一方で 7.3 で述べる比例の素地であるが、他方で第 2 学年から繰り返し学習される乗法や除法の学習を支える考え方でもある。

例えば 1 個 80 円の商品を 7 個買ったときの代金を 80×7 で求められるとする考え方は、個数が 7 倍になったら代金も 7 倍になるという比例的推論により支えられている。あるいは 15 m で 250 g の針金 1 m の重さは 250÷15 で求められるとする考え方は、長さが 1/15 になれば重さも 1/15 になるという比例的推論に支えられている。乗数が小数の乗法の導入で、1 m で 80 円のリボン 2.4 m の代金を求める際、0.1 m の値段を 8 円と考える部分では、長さが 1/10 になると代金も 1/10 になるという比例的推論が用いられている。長方形の面積の公式は 2 辺の長さの乗法により表されるが、これも、1 辺が一定である場合に、他方の辺が k 倍になると面積も k 倍になるという比例的推論が適用できるからである。6.2 の議論を想起すれば、単位量あたりの大きさの学習でも比例的推論が利用されているし、6.1 の最後で述べたような対象の特性を表す割合でも比例的推論が用いられていると言えよう。逆に比例的推論を適用する際には、当該の対象において 6.2 で見たような「均質」が想定されているとも言える。

除法 $a\div b$ において a と b を k 倍しても商は変わらないという、いわゆる「わり算のきまり」も比例的推論の一種と考えられる。今、商を c と置くと $c\times b=a$ となるが、この乗法で表される関係において、b が k 倍になったときに a も k 倍になると考えることで、c が不変となるからである。さらに比では $a:b$ の a と b をともに k 倍した比や、$a\div b$ の商である比の値が等しい比は等しいとされるので、同じ比を考える場合には比例的推論が用いられる。

しかし同時に、比例的推論を用いる場合には、2 つの量それぞれについて倍変換が用いられるが、着目している 2 量が実際には何倍の関係にあるのかや、一方の量を何倍かしたら具体的にいくつになるのかなどを求める際には、乗法や除法が用いられることが多い。また小数でも分数でも数をそれ自身でわると 1 になるといった除法の知識は、小数や分数が関わる比例的推論を用いる際に必要となる。したがって比例的推論は、乗法がかかわる場面、いわゆる乗法構造(multiplicative structures)を扱うことを支えると同時に、乗法や除法により支えられてもいる。したがって、比例的推論と乗法・除法とを互いに精緻化していくことが、算数の学習を長期的に見通す場合に重要となろう。

７．３　比例と反比例

第 5 学年で比例を学習するが、その際は「一方の変量が 2 倍、3 倍、…になると、それに伴いもう一方の変量も 2 倍、3 倍、…になる」ような関係として導入される。これは比例的推論を用いる際に前提されていた数量間の関係だと言える。7.2 で述べたように比例的推論は第 2 学年で乗法を学習して以降、様々な場面で用いられる考え方であるから、比例の学習はそれまで背景で前提とされ、学習を支えてきた数量関係を取り出して定式化し、それ自身を探究の対象とすることだと言える。その数量関係を表で表したり、第 6 学年では式やグラフで表したりするのは、比例を表現して探究する方法を導入し、比例を用いた「関数の考え」を可能にするとともに、その特徴を調べることで比例自身を探究する対象として位置づけることにもなっている。

なお算数では比例を 7.1 の共変に基づき定義するが、中学校では対応に基づいて捉え、2 つの変数 x, y の間の $y=ax$ ($a\neq 0$ は定数)と表される関係により定義する。ここでは定義の違いに加えて、7.1 で述べた変量から変数への移行も見られる。2 つの定義は同値であると考えられるが、学習者にとっては第 6 学年で比例の一つの特徴であった $y=a\times x$ と書けるという性質が、中学校第 1 学年では比例の定義へと変わるように見えるという点には留意する必要があろう。

第 6 学年では反比例も学習される。反比例は一方の量がもう一方の量の逆数に比例する関係であるが、算数では比例と同様、一方の変量が n 倍になるともう一方の変量が $1/n$ 倍になるような関係として導入される。比例と異なり、反比例はそれまでの乗法などの学習で自然に用いられていたわけではない。しかし、$c=a\times b$ という乗法を考えると、比例は a が一定の場合の b と c の関係であり、反比例は c が一定の場合の a と b の関係である。したがって、比例的推論を背景に考えてきた乗法で表される数量関係は、見方を変えることで反比例の関係も含んでいる。例えば単価が一定であれば代金は買う個数に比例するが、払える代金が一定の場合を考えれば買える個数は単価に反比例する。反比例の学習を視野に入れた場合、乗法の関わる学習で a を一定にして b を変化させるだけでなく、c を一定にして b を変化させるといった経験も設定しておくことが考えられる。

なお反比例の場合も定義に関して、比例と同様の変更が中学校で生じる。また中学校では反比例の定義域や比例定数を負の数に拡張することは形式的に行われることが多いが、算数ではいずれも正の数の範囲に留まるため、比例と同様、具体的場面に現れる変量の関係として学習するようになっている。

比例と反比例を含め、式の形で表現されるともなって変わる 2 変量の関係は、中学校で 2 変数間の対応関係である関数として探究の対象となり、上述の前提３のような対象化により微分や積分といった操作の対象となっていくと見ることができる。

８　おわりに

　ある授業における学習は、学習者のそれまでの学習の上に構築され、また将来の学習の基礎になるので、今の学習にとって最適な内容の扱い方であるかだけでなく、以前の学習との整合性や将来の展開の可能性にも配慮をすべきである。それが可能となるためには、今の学習内容と以前や将来の内容とが整合した基礎の上に構成され、互いに関連づけられていることが必要となる。そのためにも、私たち教師が、算数の学習内容についての見通しのよい全体像を持つことは重要であると考えられる。

　本稿は第２節で示した３つの前提に基づいて、数と計算や、量と測定、数量関係に関わる学習内容の全体像を構築しようとしたものである。したがって、それらの前提を変更した場合には、全体像も別のものになる可能性はある。重要なのは、整合した全体像ということであり、教師にとっての見通しのよさが学習者にとっての見通しのよさにつながるということである。また 5.1 で乗法を考える際に内包量の使用を避けたものの、6.2 で単位量当たりの大きさを考える際にはやはり内包量を導入せざるを得なかった。速さや混み具合についての日常の経験を前提２の日常の量の経験として含めることで、内包量を本稿の枠組みに組み込んでいけるのかを、今後検討する必要があろう。

注

1）本稿ではゴシック太字の演算記号**×**、**＋**は量に対する倍変換及び合併の操作を表し、そうでない演算記号×、＋は数についての二項演算を示すものとする。

引用及び参考文献

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment*. Dordrecht: Springer.

Cobb, P. & Wheatley, G. (1988). Children’s initial understandings of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *10* (3), 1-28.

林　隆夫 (1993). インドの数学：ゼロの発明. 中央公論社.

伊藤雅貴, 山下和之 (2020). 量計算の式に単位を含めるか. 山梨大学教育学部紀要, *31*, 215-224.

久保和良 (2009). 量と単位をめぐる問題と討論. 小山工業高等専門学校研究紀要, *41*, 123-132.

国際度量衡局 (2019). 国際単位系(SI)第９版 (産業技術総合研究所計量標準総合センター訳). 同センター.
https://unit.aist.go.jp/nmij/public/report/si-brochure/pdf/SI_9th_日本語版_r.pdf　(最終アクセス日: 2023 年 8 月 28 日)

小林幸夫 (1999). 物理量の概念の誤記と混乱. 物理教育, *47* (6), 338-340.

小林幸夫 (2002). 物理量の測定の意味：物理教育と算数・数学教育の接点. 物理教育, *50* (4), 243-247.

小牧研一郎 (2018). 教育現場における単位の扱い. 大学の物理教育, *24*, 117-121.

Lodge, A. (1888). The multiplication and division of concrete quantities. *Nature*, *38*, 281-283. https://doi.org/10.1038/038281a0

Malet, A. (2006). Renaissance notions of number and magnitude. *Historia Mathematica*, 33, 63-81.
https://doi.org/10.1016/j.hm.2004.11.011　(最終アクセス日: 2023 年 8 月 28 日)

宮下英明 (2011). 数と量の関係は, <数は量の比>であって<数は量の抽象>ではない. 日本数学教育学会誌, *93* (8), 2-11.
https://doi.org/10.32296/jjsme.93.8_2

虫明　基 (2019). 計量単位と助数詞の識別の明確化. 川崎医学会誌一般教養篇, *45*, 71-82.

Nagumo, M. (1977). Quantities and real numbers. *Osaka Journal of Mathematics*, *14*, 1-10.
https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1200770204　(最終アクセス日: 2023 年 8 月 28 日)

二村隆夫 (2002). 単位の辞典. 丸善.

布川和彦 (2021). 量から数への移行の観点からの自然数と分数の学習の比較. 上越教育大学研究紀要, *40* (2), 361-372.

布川和彦 (2023). 数としての分数導入への試論. 上越教育大学研究紀要, *43*, 107-116.

Pegg, J., & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37* (6), 468-475.　https://doi.org/10.1007/BF02655855 (最終アクセス日: 2023 年 8 月 28 日)

瀬山士郎 (1993). 数学の目・算数のすがた. 日本評論社.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same

coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715 (最終アクセス日: 2023年8月28日)
Slavitt, D. (1997). An alternative route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 259-281.
Sonin, A.A. (2001). *The Physical Basis of Dimensional Analysis*. Department of Mechanical Engineering, MIT.
高原光恵 (2020). 数の直観的把握：発達および障害に関する資料から. 鳴門教育大学学校教育研究紀要, *34*, 93-97.
田村二郎. (1978). 量と数の理論. 日本評論社.
山本義隆 (2018). 小数と対数の発見. 日本評論社.

Refounding the Curriculum for Numbers, Calculations, and Relations of Quantities in Elementary School Mathematics

Kazuhiko NUNOKAWA*

ABSTRACT

Teachers' pedagogical content knowledge is important in their design of their mathematics lessons. Because learning mathematics is cumulative, teachers need to grasp the larger picture of the mathematics curriculum and understand how its contents are related to each other. It is not easy for teachers, however, to draw this big picture from the official teaching guide of the national mathematics curriculum, a document of more than 300 pages published by the Ministry of Education. This paper describes the larger part of the elementary school mathematics curriculum, that is involving numbers and calculation, variations and relations, and measurements, in only nine pages to clarify the basic structure of this part of the curriculum.

For this purpose, drawing on previous research, three premises were presented at the beginning of the discussion. Then, the learning contents for the above three areas were described on the basis of these three premises, along with the descriptions of other contents given previously in this paper to maintain the consistency of the overall curricular picture.

From the work in this paper, (a) the entirety of the above three areas, with the exception of only one concept, can be integrated into an interrelated body of concepts on the basis of the three premises; (b) this exception is the concept of "quantity per unit", requiring a new concept of intensive quantity from the viewpoint of dimensional analysis. This result implies that while the three premises can be used for integrating the greater part of the elementary school mathematics curriculum, it is necessary to examine whether the concept of intensive quantity can also be induced likewise from the three same promises.

* School Education