図形の認識から見た van Hiele の水準論

布　川　和　彦

1．はじめに

van Hiele の水準論は，学校での幾何について考える場合，一つの枠組みを与えてくれる。米国ではそれに基づく調査がいろいろと行われている（例えば Burger & Shaughnessy, 1986; Senk, 1989)。また Teppo (1991) は，米国の数学教育の今後の方向を示す全米数学教師協議会の「スタンダード」(NCTM, 1989) もその影響を受けていると述べている。さらにソ連ではその理論は早くから注目され，カリキュラムの構成に影響を与えたことが指摘されている (Wirszup, 1976; Hoffer, 1983)。

わが国でも van Hiele の理論は，幾何についての調査（富坂，1989）ばかりでなく，カリキュラムの分析で利用されたり（荻野，1989)，関数（礒田，1987）や問題解決（廣谷，岡部，1988）への適用が試みられてきた。また，その理論の実証的な検証（北川，佐々木，1991）も行われている。

しかし各水準の記述は利用する各研究者により様々であり，水準を構成する原理も不明確であった。そこで本稿では，一つの原理として「対象に対する認識の変化」を提出する。原理の妥当性を調べるために，van Hiele のシンボルの概念を基にまず図形の認識の変化の仕方を構成した後，それにより水準論が十分説明しうることを示す。また他の解釈にはない利点についても検討する。

2．van Hiele の水準論について

van Hiele は，5つの思考水準 (levels of thinking) と水準間の移行を促す5段階の学習過程を提案している。van Hiele (1986) によれば，彼が中等学校の教師として幾何学を教えた際に，その導入の部分で自分と生徒とで言葉が通じないかのような印象を受けた。ここから彼は教師と生徒が異なる思考の水準にいると考えた (p. 39)。この教師と生徒とで言葉が通じない状況は，繰り返し指摘される (van Hiele, 1959, 1969, 1986)。

各水準の具体的な内容を示すと，次のようになる (1984b, pp. 245-246)[(1)]；

〔第１水準〕：図形はその外観 (appearance) により判断される。子どもは長方形をその形 (form) により認識する。彼にとっては長方形は正方形とは異なる。子どもはジオボードの上に図形を再生できる。しかし，菱形の形の中に平行四辺形を認めることはない。この水準では菱形は平行四辺形ではなく，菱形は彼には全く異なったものに見える。

〔第２水準〕：図形はその性質の運搬者 (bearer) である。図形が長方形であるということは，それが四つの直角を持ち，対角線の長さが等しく，向かい合う辺の長さが等しいということを意味する。図形はその性質により認識される。もしも黒板にかかれた図が四つの直角を持つと言われたなら，それが正確にかけていなくても長方形である。しかしこの水準では性質は整列されていないので，正方形が長方形として認められる必要はない。

〔第３水準〕：諸性質は整列されている。それらは他のものから演繹される。ある性質が他のものに先行したり，それから導かれたりする。この水準では，演繹ということの本質的な意味は生徒により理解されていない。この水準では図形の定義が働くようになるので，正方形は長方形として認識される。

〔第４水準〕：思考は演繹の意味，定理の逆，

公理，必要条件，十分条件に関わる。

van Hiele (1986) は5番目の水準を加えているが，他の水準には本質的な変化はない。各水準はそれぞれ次の名称でまとめられる；「視覚的水準」，「記述的水準」，「理論的水準」，「フォーマルな論理」，「論理法則の本性」(p. 53)。

van Hiele (1984b) の各水準の記述を見ると，〔第1水準〕は図形の判断のされ方，〔第2水準〕は図形の身分により特徴づけられていたのが，〔第3水準〕では諸性質が秩序づけられているという諸性質の状態，〔第4水準〕は思考が関わる対象により特徴づけられている。そこに一つの原理を見出すことは難しい。

次節で見るように他の研究者による水準の記述では新しい内容が付加されるが，中には van Hiele の見解に矛盾するものもある。また調査に際し，生徒の水準を決定する方法の妥当性について意見のくい違いが生じている (Wilson, 1990; Crowley, 1990; Usiskin & Senk, 1990)。さらに van Hiele の述べる水準間の不連続性を疑う者も出てきた (Bruger & Shaughnessy, 1986; 北川，佐々木，1991)。これらの混乱の原因の一つに，van Hiele の水準の記述が明確な原理に基づいていないことがあると思われる。水準を構成する原理が明確でないために，多少の記述の変更が行われても，それが van Hiele の水準論に適合するものかどうかの判断が難しくなっているのである。

3．他の研究者の水準の記述

本稿の立場を述べる前に，まずこれまでの他の研究者の水準の記述を見ておく（具体的記述は表1参照)。

3.1 Wirszup (1976) の記述

Wirszup は米国の van Hiele 理論の紹介者である (Hoffer, 1983)。彼の記述では第2水準で図形の構成要素を生徒が見分けることや，実験的な要素が導入される。また，生徒が分析をすることができるとか，証明を作ることができるといった，生徒の活動による記述が多い。van Hiele では〔第3水準〕で演繹を行うことになっていたが，Wirszup では教師の助けが必要となっている。

3.2 Hoffer (1983) の記述

Hoffer も米国の van Hiele 研究に大きな影響を持つ (Senk, 1989)。Hoffer (1983) は van Hiele の水準論を次の二点で特徴づける；(a) n－1水準では対象のある制限されたバージョンが研究される（まだ明白に述べられていない関係がある）；(b) n 水準では，研究される対象は，n－1水準で明白に述べられた陳述，およびn－1水準では暗黙的であった陳述である (p. 206)。各水準の記述で〔第2水準〕以降は主語が「生徒」になっており，生徒が何をするかにより水準が記述される。この際，上の(a), (b)に対応した記述にはなっていない。また演繹ができることが〔第4水準〕に移される。

3.3 Crowley (1987) の記述

近年の標準的解釈として Crowley (1987) をあげておく。彼女はインフォーマルな演繹とフォーマルな演繹を分けた上で，証明ができることを〔第4水準〕に持ち越している。また〔第2水準〕は生徒の分析活動により特徴づけられる。

3.4 平林 (1978) の記述

わが国では van Hiele 理論は平林 (1978) により紹介され，その解釈が基本的に受容されている（小山，1986；橋本，1982)。彼は水準論を学習水準の理論として取り上げ，方法の対象化という原理により説明する；「数学の学習では……ある水準での研究方法は，研究の進展とともに突然研究対象となり，それによって，学習の水準は一段上昇する」(p. 70)。各水準の記述はそこでの研究対象と方法とで述べられ，ある水準の方法であったものが次の水準の研究対象となるように構成される。この解釈は「学習水準論」の名からもわかるように，水準を子どもの学習活動と最も明確に結びつけたものと言える。〔第3水準〕で図形が運搬者とされることは van Hiele の記述に合わない。

以上の4つの先行研究では，van Hiele 自身の記述に比べ，子どもの活動に関する記述が多くなっていると言えよう。

表1　先行研究における水準の記述

	第1水準	第2水準	第3水準	第4水準	第5水準
Wirszup (1976)	この水準は，幾何学的図形を実在物として全体として知覚することで特徴づけられる。図形はその外観で判断される。子どもは図形の部分を見ないし，構成要素間の関係や図形間の関係を見ない。共通の性質により図形を比較することもできない。図形を見せられれば，ジオボードの上にこれを再生することができる。こうした図形の名前はすぐに覚える。	第2水準に到達した子どもは図形の構成要素を見分け始める。また構成要素間の関係，図形間の関係を確立する。よって，図形の分析をすることができる。性質は実験的に確立され，記述されるが，まだフォーマルには定義されない。これらの性質が図形を認識する手段となる。図形は性質の運搬者として作用し，生徒は図形を性質により認識する。しかしこうした性質は互いに結びつけられていない。	生徒は性質間の関係や図形間の関係を確立する。図形内の性質や図形のクラスに論理的順序が生ずる。子どもはある性質が別の性質から導ける可能性を見分ける。定義の役割が明らかになる。図形の性質の論理的つながりは定義によって確立される。しかし演繹の意味を全体としては把握していない。論理的帰結の順序は教科書や教師の助けがあれば作れるが，自分で修正したり作る方法は知らない。公理の役割は理解できず，命題の論理的つながりも見えない。演繹的方法が実験と結びついて現れ，実験的に得られた性質を用いて推論をすることも認める。	生徒は，全ての幾何学の定理を構成する手段としての，演繹の意義を把握する。この水準への移行は，公理，定義，定理の役割や本質，証明の論理的構造，概念と命題の論理的関係の分析を理解することにより，支援される。様々な前提（例えば図形の異なる定義の仕方）から理論を作る可能性が分かる。	厳密性の現代的（ヒルベルト流の）基準に対応する。対象の具体的本性やこれらを結びつける関係の具体的意味から抽象されたものへ到る。この水準の人は，具体的な解釈なしに理論を発展させることができる。幾何学は一般的な特徴と広い応用を獲得する。
Hoffer (1983)	生徒は図形をその大局的な外観により認識する。三角形，正方形，立方体などと言うことができるが，図形の性質を明白には同定していない。	生徒は図形の性質を分析する。「長方形は等しい長さの対角線を持つ」「菱形は全て等しい長さの辺を持つ」しかし，図形や性質を明白には関係づけていない。	生徒は図形や性質を関係づける。「全ての正方形は長方形である」しかし，観察を正当化するような命題の系列を組織することはしない。	生徒はある命題から他の命題を演繹するために，命題の系列を開発する。例えば，平行線の公準が三角形の内角の和が180°であることを如何に含意するかを示す。しかし，厳密さの要求を認識せず，他の演繹体系の間の関係も理解しない。	生徒は幾何学の基礎に対するヒルベルトの方法に匹敵する高次の厳密さをもって，様様な演繹体系を分析する。演繹体系の性質を公準の無矛盾性，独立性，完全性として理解する。
Crowley (1987)	視覚化：生徒は空間を身の回りに存在する何かとしてのみ意識する。幾何学的概念は構成要素や属性を持つというよりも，全体的な実在物として見られる。図形は形全体で，つまり部分や性質よりも物理的外観により認識される。この水準の人は，幾何学的な語彙を学び，特定の形を同定し，図形が与えられればそれを再生することができる。しかし図形が直角を持つとか，向かい合う辺が平行であるといったことは認識しない。	分析：幾何学的概念の分析が始まる。観察や実験を通して生徒は図形の特徴を見分け始める。この性質が今度は形のクラスを概念化するのに用いられる。図形は部分を持つものとして認識され，その部分により認識される。しかし，性質間の関係は生徒により説明されず，図形間の相互関係はまだわからない。また定義はまだ理解されていない。	インフォ　マルな演繹：生徒は図形内および図形間の性質の相互関係を確立できる。図形の性質を演繹でき，図形のクラスを認識できる。クラスの包含関係は理解される。定義は意味を持つ。インフォーマルな議論についていくことができ，またそれを与えることができる。しかし演繹全体の意味や公理の役割を把握していない。実験的に得られた結果が演繹的なテクニックと一緒に用いられる。フォーマルな証明についていける。しかし論理的順序を変えたり，慣れない前提から証明を構成する方法は知らない。	演繹：公理系の中で幾何学の理論を確立する方法としての演繹の意義が理解される。無定義語，公理，公準，定義，定理，証明の関係や役割がわかる。証明を記憶するのではなく構成することができる。二通り以上の方法で証明を構成する可能性がわかる。必要条件と十分条件の関係が理解される。命題とその逆との区別ができる。	厳密さ：学習者は様々な公理系で作業することができる。異なる体系を比較できる。幾何学は抽象的なものとして見られる。
平林 (1978)	身の回りのものを形によって分類し表現している段階。研究対象は身の回りのものであり形は方法になっている。机の表面，窓，本が長方形という形によって同一のものとしてまとめられる。身の回りの事物は図形によって表現され認識される。図形そのものは研究対象ではなく手段にすぎない。小学校1年生およびそれ以前の段階。	形が研究対象として意識される。その手段としては形の性質が意識されて用いられる。例えば辺の数，直角の有無，辺の相等などが形を分類する基準にとられる。性質そのものは形分類の基準または目安として使われており，研究対象ではない。小学校中学年の水準。	性質が研究対象として捉えられ，性質を整理する手段として，性質間の関係，あるいは命題が用いられる。「2辺が等しい」という性質と「2角が等しい」という性質は「2辺が等しければ2角が等しい」あるいは「二等辺三角形の底角は等しい」という命題としてつながれる。形そのものは意識の表面から消え，性質の運搬者になり下がっている。いいかげんな図を示して，必要に応じてそれを二等辺三角形と見てくれる。小学校の最終目標。	命題が研究対象となり，命題を関係づけるのに論理が登場する。論証幾何が本格的に始められる。証明というのは論理による命題の結合である。中学校以後の段階。	論理が直接研究対象になる。これは既に数学者の水準であり，学校ではめったに達成されない。ここでの方法は，おそらく各数学者に属する固有のものと思われる。

4．シンボルとシグナル

以下「対象の認識の変化」の原理による水準論の再構成を試みるが，その出発点として，従来水準論に関する議論であまり注意が払われていないシンボルの概念を出発点として用いる。以下の引用で van Hiele のものは出版年のみ示す。また‘1958’は van Hiele & van Hiele-Geldof (1958) を指す。

van Hiele 自身の考えでは，シンボルは水準論と密接に関わっている。むしろ「ある水準に到達するための第一の要件は……この水準に属する対象と，その対象がシンボルとしてこの水準にどのように属するかを知る」(1959, pp. 14-15) ことなので，彼の水準論の基本的概念となっている。

彼はシンボルを「子どもの頭の中で徐々に精緻化される未分化な関係の複合体に対する，思考のための代替物」とする。例えば菱形は，四辺の長さが等しい，向かい合う角が等しい，対角線が角を二等分する，対角線が直交する等の諸性質のシンボルである (1958, p. 77)。つまり対象が明確に規定されていない時，諸性質の総体 (Ganzheit, 1976, p. 167) の替わりをするのがシンボルである。

van Hiele はシンボルの内容が変化する点を強調する；「観察されたり発見された性質と関係は，シンボル（それは最も低い水準ではイメージとして始まった）の中に凝縮される。これらの性質と関係が議論され分析の中で明確になると，シンボルは言葉で表された内容を持つようになる。こうして，シンボルは思考のためによりよく利用されるようになる。いくつかのシンボルを与えられた文脈で比較したり関連づけることにより，シンボルの内容は徐々に豊かになり，ゲシュタルトはより分化される」(1959, p. 15)。シンボルがある内容の代替物であることを思い出せば，内容の変化はまたシンボル自身の変化をも意味する。

内容が豊かになると，今度は「生徒の反省 (reflection) により，シンボルはシグナルの特性を獲得」(1986, p. 63) し，ある内容をまとめる象徴として働くだけではなく，その内容を引き起こす契機として機能する。そしてシグナルとして「シンボルが思考の方向性に影響を与え」(1986, p. 62)，「シグナルは一連の周辺概念を呼び起こす」(1974, p. 413) ことになる。さらには「その特性のほんの一部が見えただけでそのシンボルが認識される」(1958, p. 77) ようになる。この時点では，性質の一つが，そのシンボルを逆に誘起するシグナルになるのだと解釈できる。

こうしたシンボルの変化は最終的に何処へ向かうのか。van Hiele (1984a) は「そこで用いられるシンボルはその最初の意味を徐々に失い，ついには，その唯一の機能が，関係網の接合点 (junction) の働きになってしまう」(p. 240) とする。これは，いくつかのシンボルの内容の間にネットワークが形成され，ある性質がシグナルとしてあるシンボルを誘起し，次にそのシンボルが背後に持っている別の性質を誘起する状態であり，シンボルはある性質から他の性質を媒介する通り道に成り下がった状態と解釈される。

シンボルがまとめているものが漠然としたイメージから言語で表現された内容になることは，シンボルの内容の質的な変化であり，水準における身分の変化である。さらにシンボルがいくつかの性質を媒介する通り道になった時点で，その身分はさらに変わる。よって，本節の初めに述べた van Hiele の基準 (1959, pp. 14-15) に従えば，この２つの時点で水準は移行すると考えることができよう。

5．図形の認識の変容

前節で引いた van Hiele と van Hiele-Geldof (1958) からの引用では，菱形という図形の用語をシンボルの例としていた。そこで，本節では，「菱形」という用語[(2)]（以下，菱形と略記）をシンボルとして取り上げ，前節のシンボルについての議論に沿って考えた場合，菱形というシンボルの内容がどのように変わりうるか，その変化を追ってみる。

そもそも，概念も「その指導の中でより多くの内容を獲得する」(1974, p. 413) と述べられているので，図形がシンボルとしてその内容を

変化させていくことは問題はない。

まず，視覚的な形を見てそれが菱形かどうかの判断ができる認識の状態を考え，そのときそうした形に対して，菱形という用語がシンボルとして結びついているとする。これを図式的に表すと，次のようになろう；

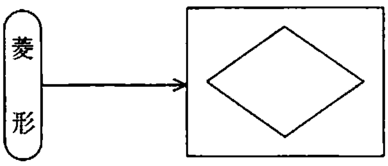

図1

菱形というシンボルは漠然とした「菱形らしさ」，あるいはある一定の視覚的イメージに対する代替物である。

次にシンボルの議論に従えば，漠然としていた「性質と関係」が明確化され，「言葉で表された内容」を持たねばならない。そこで，「菱形らしさ」をもった形の性質あるいは構成部分（辺や角）の間の関係を言語化し，これら性質の総体に対するシンボルとしての図形が想定される。つまり Vygotsky (1982) の擬概念 (psevdoponyatie) に対応するシンボルである。ここで菱形というシンボルの内容が豊かになる。

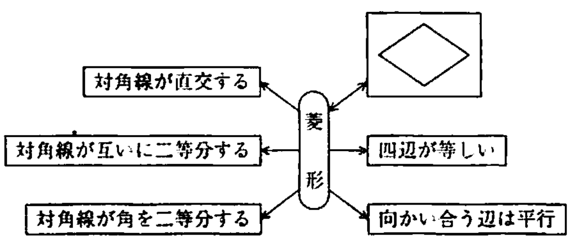

図2

ここで，性質を言語化するために，辺，角等の要素が新たに導入される点に注意する。つまり構成部分への着目は性質の言語化のために必要とされる。この状態では，菱形というシンボルは，諸性質を想起させる契機ともなるので，シグナルとしての性格を獲得していると考えられる。また，van Hiele (1959) が強調するシンボルの比較を，共通の性質を媒介として行うことができる。例えば，菱形と正方形を結びつけると次のようになる；

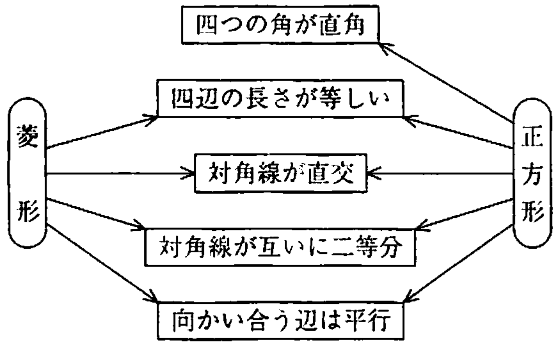

図3

これにより，正方形独自の性質が明らかになれば，諸性質の間にある程度の優先順位が自然につくと思われる。その結果，優先的ないくつかの性質により，図形が判別される状態が現れる。つまり「シンボルは比較され，最後にはその性質により認識される」(1986, p. 62) のである。優先的な性質が現れたことで，シンボルは Vygotsky (1982) の潜勢的概念 (potential'noe ponyatie) に対応したものとなっている。

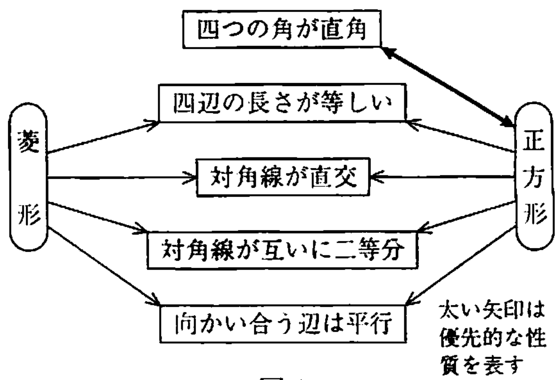

図4

しかし，菱形や正方形は，あくまでも一群の性質の総体の代替物であるから，ある図形が例えば菱形として認められるには，結局は，菱形というシンボルが代替する諸性質の総体を必要とすると考えられる。

先のシンボルの議論によれば，次の段階は，図形としてのシンボルが，いくつかの性質を媒介する通り道のようになる状態である。これは「必要な図をかいたり作図をすること」(1958, p. 77) により，他の性質よりも優先順位の高いものが明確化されるとともに，先にシンボルの

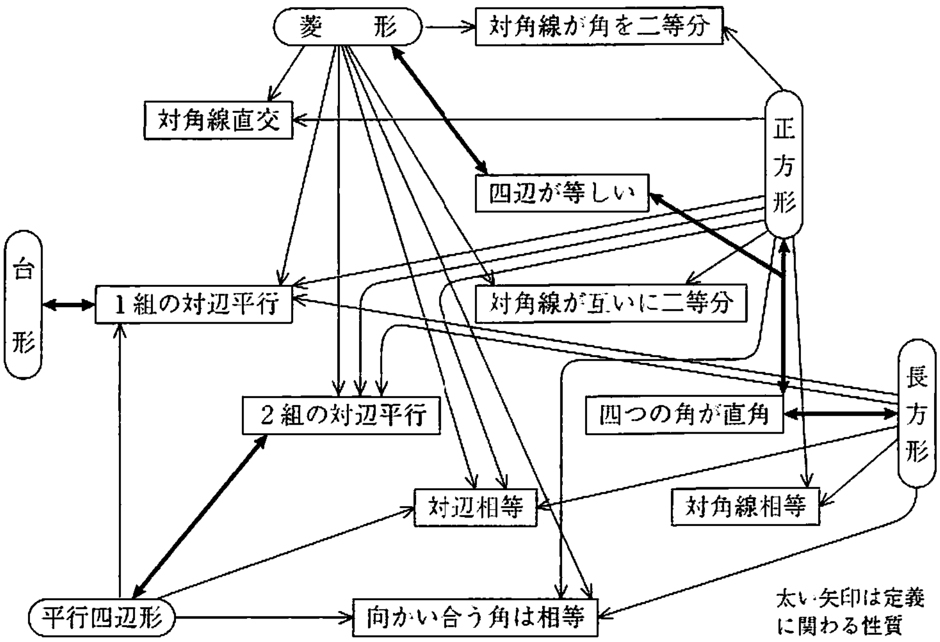

図5

最終的な状態として見た，ネットワークの接合点の状態に図形が達することを必要とする。例えば，先の菱形と正方形を中心として，そこでの性質や，他の図形との関わりを統合してみると，上記のような図式を得る。

このとき，正方形や菱形はこうした関係網の接合点になっている。そのため，ある性質から別の性質への通り道のようになっている。こうした状態は次のような記述に見られる；「菱形というシンボルに属する諸性質（四辺が等しい，対辺が平行，向かい合う角が等しい，対角線が互いに二等分し，しかも直交する）から，シグナルとしての菱形（四辺が等しい）が生じる。というより，一つの性質（四辺が等しい）が，そこで知られている諸性質の複合体としての菱形というシンボルに対するシグナルとなる。」(1958, p.74)。図形が接合点である以上，それには特別な意味はなくなり，単に先の優先的な性質により規定されるもの以上のものではなくなる。これは数学的な意味で，図形が定義されている状態と考えられる（Hershkowitz, 1990, p.81参照）。

上で見たシンボルの二番目の状態，すなわち諸性質をまとめるシンボルとしての図形が，自然に関係網を構成することは，van Hiele の師でもある Freudenthal (1973) が van Hiele 理論に関連して次のように述べることに見られる；「これは視覚的な性質の集まりであり，組織化されるのを求めている。……それは押しつけられるものでなく，局所的な芽生えから開いていくのである」(p.417)。その関係網から，接合点としての図形というものが確立されると考えることができる。

また，van Hiele のシンボルの議論をもとに図形の認識を構成した場合，上で見たようにある図形の定義は最終的に得られるものである。その一方で，定義が成り立つために必要とされる関係網の形成には，図形の性質を調べたり，図形を比較することが必要である。つまり図形が定義される以前に，図形に関する操作をすることが必要となる。定義がない状態で図形に関する操作をするのは少し奇妙な感じもするが「定義を知っていることはもの自身を知るために必要な条件ではない」(1974, p.413）ので問題はない。むしろ van Hiele が「ここでなされている誤りは，専門用語自身が，自分の意味を表すことができるという仮定である。実際は，専門用語は，その例を通して意味を獲得するし

かない」(1986, p.57) と考えていた以上，幾何学の専門用語としての各図形が，図形の例となる視覚的な形に対する経験を経た後で定義される方が，その考えに適合すると言えよう。

以上のように，van Hiele のシンボルについての議論を図形に関して適用すると，シンボルとしての図形が，その内容を変化させ，視覚的なイメージに対するシンボルから，ある諸性質の総体を代替するシンボルへ，さらにはいくつかの優先的な性質により完全に規定される接合点へと変わることになる。つまり，図形をどのようなものと考えるのか，その認識の仕方が変わるのである。

6．図形の認識の変化と構造との関わり

構造の概念は van Hiele の理論のやはり基本的概念である。したがって，図形の認識の変化という原理が構造の概念と明確な関係を持つことが望ましい。本節は，この関係を明確にすることを目的とする。

6.1 活動を支えるものとしての構造

構造の概念が van Hiele の理論の中で重要な位置を占めることは，その著書 (1986) の題名に「構造」の語が含まれていること，また「思考の発達は，大部分は，ある構造への同化である」(1976, p.160) という彼の主張から伺える。しかし，構造の概念が van Hiele の理論全体を統括するものとして機能していないという指摘もある (Nodding, 1987)。そうした指摘がなされる原因の一つは，van Hiele の構造の概念がかなり広いということにあると思われる。

そもそも van Hiele は，人が対象に対して反応するときには，その対象に何らかの構造を既に認めているのだと考える；「交通量の多い道路で車を運転する人も，弱い (feeble) 構造の中に住んでいる。……我々の研究から弱い構造を除いてしまったら，人間や動物の多くの行動は理解できないものとなる」(1986, p.20)。自分の撮った建築物や植物の写真を数葉示した後で「あなたがどうしてかはわからなくてもそれらの写真を好きだと感じたなら，あなたは既にその構造を理解している」(1986, p.12) と述べるのも，同じ理由からと考えられる。従って，図形に対しても，それに反応する子どもは，既に図形の中に何らかの構造を見ていることになる。

6.2 図形の認識と構造との関係

前項の構造の概念に従えば，図形を分類したり，ジオボードの上に図形を再生するなど，図形に反応できる子どもは，既に図形の中に何らかの構造を見ている。つまり，図形を視覚的，全体的なものとして把握していても，その背後には何らかの構造を捉えていることになる。van Hiele が視覚的構造 (visual structure) と呼ぶものは，このときの構造だと考えられる。これを無理に明示的にしようとすれば，図形の性質を言語的に記述する必要があるだろうし，そのためには図形の構成要素を用いて記述することになろう。

視覚的構造を，明示的にせずにそのまま受け入れ，構造を代表させるものとして「菱形」のような用語を割り当てることにより，菱形はそうした構造のシンボルになりうるし，そうした構造を想起させるものとしてのシグナルともなりうる。つまり，視覚的構造は，低い水準でのシンボルの内容に当たると思われる。シンボルがイメージとして始まるという van Hiele の言葉 (1959, p.15) を思い出そう。

視覚的構造を明示的に記述することにより，図形は一群の性質を持った形として認識されることになるが，前節で述べたように，その諸性質の間には漠然とした関係が見られていると思われる。この諸性質の集合に漠然とした関係の入ったものが，新たな構造と考えられる。幾何学的に価値のある性質により認識されながらも，依然として視覚的な形であるという点で，van Hiele が視覚的幾何学的構造 (visual geometrical structure) と呼ぶものが，これに当たると思われる。また他所で「系統図のような(未分化な) 構造」(1958, p.79) と呼ぶものも，幾何学の性質から構成されながら，その間の関係は明示化されていない構造を指すと思われる。

最後に，シンボルとしての図形が，関係網の接合点になっている状態では，諸性質間の関係

が明示的になり，諸性質および図形からなる関係網という新たな構造が生じている。また，いくつかの優先的な性質により図形が定義されるということは，その性質と接合点との関係が，まさにその図形そのものだということであり，従って，定義により認識されている図形も，部分的関係網としての構造を持つと言える。

以上のように，図形の認識の仕方は，図形の背後にどのような構造を認めるかに対応する。また図形の認識の変化は，「強調点の移動により視覚的構造が幾何学的構造になりうる」（1958, p. 74）過程を表している。

6.3　構造の明示化としての図形の認識の変化

上の三通りの図形の認識の仕方を互いに比べると，次のような特徴が見られる。まず図形を視覚的，全体的に認識している時点では，図形に反応できるという事実の背後に，図形の諸性質に関連する漠然とした構造を仮定した。その諸性質を明示化，言語化することで，次の図形の認識，すなわち一群の性質を持つ形としての図形の認識の仕方が生じた。さらにこのとき，諸性質の間には漠然とした未分化な構造があると考えたが，それが明確化されることで関係網という構造，およびその部分構造としての定義による図形の認識が成立している。従って，ある図形の認識に背後にある構造を明示的にすることによって，別の図形の認識の仕方が生じていると捉えることができる。つまり，図形の認識の変化は，明示的でなかった構造を明示的にすることだと言える。

7．図形の認識の変化による第1水準から第3水準の再構成

ここまでの議論を基にして，第1水準から第3水準までの記述が，実際に図形の認識の変化により説明できることを確かめる。

7.1　各水準の図形の認識の変化による説明

第4節の最後の議論から図形の認識の違いは，シンボルとしての図形の身分の違いなので，そこで水準が変わると考えてよい。

〔第1水準〕の「図形がその外観により判断される」には視覚的構造に対応する図形の認識を当てる。このときこの水準にいる人にとって「長方形と正方形とは異なる」ことは，長方形と正方形の視覚的イメージが異なることで説明される。例えば長方形の視覚的構造が“横に長細い形”とされ，正方形の視覚的構造が“縦と横が同じ長さの形”とされれば，両者は異なるものとして判断されよう。全体的な形を認めているので，元の図形と比べながら「ジオボードの上に図形を再生」したり，作ったものを元の形と視覚的に比較するすることで確認することができる。菱形と平行四辺形についても，例えば菱形を“真四角をつぶしたような形”，平行四辺形を“長四角をつぶしたような形”として，視覚的，全体的に捉えていると，菱形の中に平行四辺形を見ることはできず「異なったものに見える」はずである。

〔第2水準〕では「図形はその性質の運搬者」であるが，諸性質を内容とするシンボルあるいは諸性質を想起させるシグナルとしての図形の認識をこれに当てる。このとき，図形は「整列されていない」一群の諸性質を持った形として認識されるので「図形はその性質により認識される」と言える。ここで優先的な性質が現れていれば，優先的な性質により視覚的イメージを補うことで「黒板の上にかかれた図が四つの直角を持つと言われたなら，それが正確にかけていなくても長方形」と認めることが可能となる。ただし“四辺を持つ”，“四つの角が直角”という性質の接合点として長方形が認識されていないので，正方形がこれらの条件を満たしても「長方形として認められる必要はない」。

〔第3水準〕は接合点としての図形の認識，つまり定義による図形の認識に当てる。定義は関係網の接合点として図形を認識することなので「諸性質は整列されている」はずである。また図形が接合点となり，優先的な性質がむしろシグナルとして機能しているので，ある性質が「他のものから演繹される」。定義を与える優先的な性質が「他のものに先行」したり，ある性質が「別の性質から導かれたりする」。「図形の定義が働くようになる」ことは，既に述べたように，図形が接合点になっていることで説明さ

れる。そして，正方形から「四つの角が直角」という性質が誘起されれば，それがシグナルとなり長方形が誘起されので「正方形は長方形として認識される」。

このようにvan Hiele（1984b）による〔第1水準〕〜〔第3水準〕の内容は，図形の認識の変化を背後に仮定しておけば，それに基づき全て説明することができる。

7.2 図形の認識の変容による水準論の諸特徴の説明

van Hiele（1984b）は，各水準を記述した後で，水準論の明確化に役立たせるために，その特徴を次のようにあげる（p. 246）；

a．各水準では，前の水準で内在的であったものが外在的な仕方で現れる。

b．各水準は，それ自身の言語的シンボルとこうした記号の体系を結びつける関係のシステムを持つ。

c．異なる水準で推論している二人の人は，互いに理解することができない。

d．高い水準へと導くような成熟は，特別の仕方で起こる。

このうち，dは，水準間の思考を促す学習過程について述べたものであるので，以下では水準そのものについて言及したa〜cの特徴を，図形の認識の変化により説明してみる。

aについては，前の水準で内在的なものを，明示的になっていない構造と見れば，既に6.3で議論している。それは「構造を見ていた，それについて議論した，そして構造の諸関係を言葉に置き換え」（1986, p. 57）る過程である。

bについては，まず第2水準では図形の性質を記述するために，辺や角といった図形の構成要素を表す単語が導入され，第1水準とは異なる言語シンボルを持つ。また，正方形や長方形という第1水準と共通の言語シンボルも見られるが，それらは新たに構成要素を表す単語と関係し，また正方形と長方形とは類似な性質に基づき比較されるので正方形と長方形との関係も第1水準とは異なる。従って，記号を結びつける関係のシステムは第1水準と異なっている。さらに，第3水準ではある性質から他の性質が引き出される含意（implication）が重視され（例えば1958），含意を表現するための「〜ならば〜」，「→」という言語的シンボルが導入される。正方形や長方形といった言語的シンボルは第3水準でも用いられるが，それが諸性質の関係網の接合点として規定されていることから，記号を結びつける関係のシステムも第2水準と異なっていると言える。以上より，bの特徴も，図形の認識の変化により説明しうる。

最後にcについては，水準が違うと図形に対する認識が異なることから，異なる水準にいる二人は，同じ正方形や長方形について話をしていても正方形や長方形という単語により意味される内容は異なる。「初心者にとっては図形ですら，教師にとって図形が持っているような意味を持たない」（1958, p. 74）。これはVygotsky（1982）が「子どもの言葉は対象となる指示物においては大人の言葉と一致しても，その意味においては一致しない」（pp. 162-163）と述べる状況である。またある図形が正方形であると推論する場合に，第1水準の人は視覚的に判断すれば十分であるが，第2水準の人は正方形が持つべき一群の性質により判断し，第3水準の人は正方形の定義に基づき判断するので，互いの推論の妥当性は理解できないことになる。よって図形の認識の違いは，異なる水準にいる人が互いに理解することを不可能にしてしまう。

以上から，3つの特徴が図形の認識の変化に基づき説明できることがわかり，本節のまとめとして，図形の認識の変化という原理に基づいて，第1〜3水準の内容およびそれらの持つ諸特徴が説明できる，つまり第1〜3水準を再構成できることが結論される。

8．高次の水準の再構成

本節では残された第4水準と第5水準について考察する。ここでvan Hieleの次の記述（1959, pp. 8-9）に注意しよう；

a．前幾何学的推論。特に観察により得られるような空間的知識に注意が向けられる。

b．幾何学的推論。パターンの性質に注意が向けられる。この第1の水準を幾何学のアスペ

クトと呼ぶ。

c．幾何学的推論の数学的形式。パターンの相互関係に注意が向けられる。この第２の水準を幾何学のエッセンスと呼ぶ。

d．論理的推論の能力。研究の対象は幾何学それ自身ではなく，幾何学的相互関係に本来備わる立案の仕方（planning）である。この水準を幾何学に対する洞察と呼ぶ。

ここでシンボルとしての図形が背後に持つ構造を含めた図形をパターンと見れば，ａ～ｃは第１～３水準に対応する。このときａ～ｃでは，注意が向けられる（concentrate）側面が変化しているが，ｄすなわち第４水準については，幾何学それ自身から，幾何学的相互関係に本来備わる立案の仕方，つまり演繹的な関係に研究対象が変わるとして記述されている。

ところで，第３水準では定義を可能にする関係網を考え，その関係網に従い生徒は推論を行えるとした。ただし演繹的な推論ができることと「形式的論理の助けを借りて推論を行うことは同じではない」（1959, p.8）ので，推論を行う際の規則を意識し，自分の推論をそれにより制御することは，第３水準の状態ではなく，それを明示的にするのが第４水準だと考えられる。

この２つの水準の関係は，図形の性質を意識せずに図形に反応できる第１水準と，その性質が明示的になり，性質に基づいて判断や推論を行う第２水準との関係に同型である。そこで，第３水準で論じた関係網について，その未分化な認識を第３水準とし，関係網の構造の明示的な認識を第４水準として考え，この関係網に例えば「幾何学の体系」というシンボルを与えてみる。この体系の性質，つまり「演繹の意味」を言語化するためには，van Hiele が第４水準で扱うとした「定理の逆，公理，必要条件，十分条件」（1984b, p. 246）といった用語が必要となろう。これらを用いて体系の性質を記述することは「幾何学の体系」というシンボルの内容を豊かにすると考えられる。

さらにこれらの性質の中に優先的なものが現れ，それにより「幾何学の体系」が逆に定義されれば，非ユークリッド幾何学の可能性が開かれる。これは幾何学の体系の構築を支える原理の探究であり，「論理法則の本性」という van Hiele（1986）の第５水準の記述（p. 53）と一致する。

以上より，第３水準から第５水準は，幾何学の体系を対象とし，その全体的な認識から，ある一群の性質を持った体系としての認識，さらに定義を満たす体系としての認識に至る変化として，再構成できることがわかる。

以上の結果をまとめると次のようになる；

	図形の認識	幾何学の体系の認識
第１水準：	視覚的全体的な図形の認識	
第２水準：	一群の性質を持つ形としての図形の認識	
第３水準：	定義による図形の認識	幾何学の体系の全体的な認識
第４水準：		一群の性質を持つ体系としての幾何学の体系の認識
第５水準：		定義による幾何学の体系の認識

図６

ここでは同型なユニットが２回繰り返されている。対象に対する認識の変化という原理からは，水準論はこのように再構成される。

９．本稿の解釈の持つ利点

本稿の，「対象に対する認識の変化」という原理に基づいて水準論を構成するという解釈の存在意義を問うために，それが持ついくつかの利点を指摘しておく。

9.1　学習過程との関係の明確さ

van Hiele は水準間の移行のために学習過程を考える。例えば第２水準から第３水準への移行を促す学習過程では「幾何学的図形の諸性質を整列させることが勉強の目標」（1986, p. 63）とされる。この記述は，生徒が諸性質を関係づけたり整理するという Wirszup（1976），Hoffer（1983），Crowley（1987），平林（1978）の第３水準の記述と同じになる。そのため，これらの

解釈では水準と学習過程との間の関係が立てにくい。一方本稿の解釈では，認識の仕方を変化させるものとして学習過程を容易に位置づけることができる。

9.2 異なる水準間で互いに理解できないという事態の説明可能性

水準を生徒の活動により見ると，この事態の説明がしにくい。例えば平林（1987）は，各水準での研究対象と方法が異なり，そのため異なる水準にいる人の関心が異なることで説明しようとする（p. 187)。これは互いの意図が理解できないことを意味するが，「教師にとっては生徒とは比べものにならない位単語は概念に結びついているので，議論はその価値の大部分を失う」（1969, p. 344）という状況は説明しない。こうした状況に対して，対象の認識の変化によれば，7.2で行ったような説明が可能である。

9.3 他の科学における水準論の可能性

van Hiele（1986）によれば「数学，物理学，化学，生物学，歴史学，そして言語学といった異なる科学はそれぞれ異なった仕方で構成された第3水準を持つ」（1986, p. 51)。よって水準論は他の科学でも考えられうる。ただし第3水準のあり方はそれぞれの科学により異なる。例えば，平林（1978）のように方法の対象化という構成原理が数学的だとすると，水準論自体が数学的なものとなり，上の考えに合わないように思われる。一方対象の認識の変化という原理は，他の科学でも適用可能と思われる。

この場合，数学的な第3水準のあり方は，対象が関係網の単なる接合点となる点に見ることができる。例えば距離の一つの性質であった三角不等式により逆に距離の概念は定義される。多面体の概念についての類似の状況は Lakatos（1976）に見える。まさに「定義は『成熟した』理論の複雑な構造の内部で現れ，従って純粋に数学的発見である」（ボタチーニ，p. 3-4)。よって本稿の解釈でも水準の数学的特徴は保存しうる。

9.4 統括的な概念としての構造

構造の概念が他の記述を統一するようなものとなっていないという Nodding（1987）の指摘は先に述べた。従来の水準論の説明では，構造の概念に基づいていない（表1参照）のでこの要求に応えることができない。一方本稿の解釈は第5節で見たように，構造の概念と密接な関係を保っているので，この要求に応えるものと言える。

9.5 3つの水準の自然なまとまり

本稿の解釈では，最初の3つの水準が一つのユニットとして自然にまとまりができてしまう。しかし van Hiele（1984b）の記述が最初の3つの水準に重点が置かれていることに加え，van Hiele（1986）が最初の3つの水準に重点を置いているという指摘（Teppo, 1991）や，van Hiele 自身が最初の3つの水準に特に関心を持っていると語ったとする指摘（Crowley, 1987）を考えると，むしろ最初の3つの水準が一つのユニットとしてまとまることは，本稿の解釈の利点と言える。

10. おわりに

本稿は対象に対する認識の変化という原理を提出し，それに基づき van Hiele の水準論を再構成した。その結果として図6のような新たな解釈が提案された。このように図形の認識を中心に van Hiele の水準論を考えることは，Freudenthal（1973）の水準論に対する次のような評価にも合致すると思われる；「このコース〔van Hiele 理論に基づく幾何の入門コース；引用者〕で生徒は定義をすることを学び，定義が記述以上のものであること，定義が対象の諸性質の演繹的な組織化の一手段であることを経験するのである」（p. 417)。

わが国では，van Hiele が指摘するようなことは van Hiele 理論の登場以前から幾何教育の中で配慮されていると，考える向きがある。また水準が離散的ではなく連続的ではないかという指摘もある（北川，佐々木，1991)。しかし，こうした指摘は従来の解釈に基づくものと思われるので，新たな解釈の下での再検討が必要であろう。

注および引用・参考文献

（1）van Hiele (1984b) は実際は，第0水準から第3水準として記述しているが，本稿では Senk (1989) らと同様，van Hiele (1986) の用いた番号の付け方に従うこととし，最初の水準を第1水準，以下第2水準～第5水準として記述する。引用に際し付け替えた番号は〔 〕に入れて示すことにする。

（2）ここで「菱形」という用語を取り上げ，菱形の視覚的シメージを考えないことは，不自然と思われるかもしれない。実際，Hershkowitz (1990) によれば，近年の研究は，視覚的な典型例 (prototype) に基づいて思考を行う現象を示している。しかしまた Hershkowitz (1990) が述べるように，数学的な意味では，概念はいくつかの属性の結合 (conjunction) に過ぎないという点で，言語的である。以下の議論は，論証幾何の準備としての菱形の数学的な概念の形成を考えていること，および第2節で述べたように，van Hiele の水準論が言葉が通じないという問題意識から生じたという点に鑑み，言語的な側面に重点を置く。

ただし実際には上に述べた典型例のように，視覚的なイメージが重要な役割を果たしている。数学的な証明は言語的に行われるにしても，証明の方針は図の上で見出されることが多い。このような図に対して直接反応することを，van Hiele が否定するものではないことは注意すべきである。むしろ，よく理解された領域では，視覚的，直接的に反応することが普通であり，視覚的なものと言語的なものが相補的に働くと考えられている (1986, pp. 127-128)。つまり，上の水準に到達したとしても，最高の水準でのみ思考が行われるのではなく，適宜，下の水準での思考が利用されうるものと思われる。

＊ボタチーニ，U.（好田順治訳）(1990).「解析学の歴史―オイラーからワイアストラスへ―」京都：現代数学社.

＊Bruger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 31–48.

＊Crowley, M. L. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook.* Reston, VA: NCTM.

＊Crowley, M. L. (1990). Criterion-Referenced Reliability Indices Associated with the van Hiele Geometry Test. *Journal for Research in Mathetics Education, 21*, 238–241.

＊Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dortrecht, Holland: D. Reidel.

＊Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (eds.) (1984). *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* Brooklyn College.

＊橋本是浩 (1982).「ファン・ヒーレの『学習水準の理論』とその幾何教育への示唆」新しい算数研究，1982年4月号～6月号.

＊Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Cambridge: Cambridge University Press.

＊平林一榮 (1978).「量と測定・図形に関する諸研究」伊藤一郎ほか（編）「新・算数指導講座7：量と測定・図形〔高学年〕」東京：金子書房.

＊平林一榮 (1987).「数学教育の活動主義的展開」東京：東洋館出版社.

＊廣谷真治，岡部初江 (1988).「算数・数学科における『L－O理論』による指導の研究」数学教育学研究紀要（西日本数学教育学会）第14号，81－88.

＊Hoffer, A. (1983). Van Hiele-Based Research. In R. Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* Orland, FL: Academic Press.

＊礒田正美 (1987).「関数の水準の思考水準としての同定と特徴付けに関する一考察」日本数学教育学会第20回論文発表会発表要項，123-128.

＊北川如矢，佐々木徹郎 (1991).「Van Hiele の

図形学習理論の検証について」日本数学教育学会第24回論文発表会論文集．151－156.
＊小山正孝（1986）．「数学教育における学習水準に関する基礎的考察―ファン・ヒーレの『学習水準理論』について―」日本数学教育学会第19回論文発表会発表要項．29－32.
＊Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations:Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.
＊National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The Council.
＊Nodding, N. (1987). A World's Stage. (Book-review of van Hiele (1986)) *Journal for Research in Mathematics Education, 18,* 403–407.
＊荻野正男（1990）．「日，米，英のカリキュラム開発に関する一考察―幾何内容の比較を通して―」筑波数学教育研究第9号A．1－12.
＊Senk, S. L. (1989). Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 309–321.
＊Teppo, A. (1991). Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited. *Mathematics Teacher, 84,* 210–221.
＊富坂耕次（1989）．「小学生の幾何学的思考水準について― van Hiele の学習水準理論に基づく実態調査を中心にして―」日本数学教育学会第22回論文発表会論文集．1－6.
＊Usiskin, Z. & Senk, S. (1990). Evaluating a Test of van Hiele Levels: A Response to Crowley and Wilson. *Journal for Research in Mathematics Education, 21,* 242–245.
＊van Hiele, P. M. (1959). *Development and Learning Process: A Study of Some Aspects of Piaget's Psychology in relation with the Didactics of Mathematics.* Groningen, Holland: J. B. Wolters.
＊van Hiele, P. M. (1969). Quelques Aspects Didactiques du Développement de la Pensée des Enfants dans les Mathématiques et la Physique. *Educational Studies in Mathematics, 1,* 343–346.
＊van Hiele, P. M. (1974). System Separation and Transfer. *Educational Studies in Mathematics, 5,* 413–417.
＊van Hiele, P. M. (1976). Wie Kann Mann im Mathematikunterricht den Denkstufen Rechnung Tragen? *Educational Studies in Mathematics, 7,* 157–169.
＊van Hiele, P. M. (1984a). A Summary of Pierre van Hiele's Dissertation Entitled: The Problem of Insight in Connection with School Children's Insight into the Subject-Matter of Geometry. In Fuys et al. (1984).（初出は1957年）
＊van Hiele, P. M. (1984b). A Child's Thought and Geometry. In Fuys et al.(1984).（初出は1957年）
＊van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education.* Orland, FL: Academic Press.
＊van Hiele, P. M. (1987). *A Method to Facilitate the Finding of Levels of Thinking in Geometry by Using the Levels in Arithmetic.* Paper presented at the Conference on Learning and Teaching Geometry:Issues for Research and Practice, Syracuse University, June 11–13, 1987.
＊van Hiele, P. M. & van Hiele-Geldof, D. (1958). A Method of Initiation into Geometry at Secondary Schools. In H.Freudenthal (ed.), *Report on Methods of Initiation into Geometry.* Groningen, Holland: J. B. Wolters.
＊van Hiele-Geldof, D. (1984). The Didactics of Geometry in the Lowest Class of Secondary School. In Fuys et al. (1984).（初出は1957年）
＊Vygotsky, L. S. (1982). Myshlenie i Rech', V *Sobranie Sochinenii, tom 2.* Moskva: Pedagogika.（柴田義松訳「思考と言語」東京：明治図書．初出は1934年）
＊Wilson, M. (1990). Measuring a van Hiele Geometry Sequence: A Reanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 21,* 231–237.
＊Wirszup, I. (1976). Breakthrough in the Psychology of Learning and Teaching Geometry. In J. L. Martin (ed.). *Space and Geometry: Paper from a Research Workshop.* Columbus, OH: ERIC.

A Consideration on van Hiele Levels from the Perspective of Recognizing Figures

Kazuhiko Nunokawa

Van Hiele levels of thinking are accepted as a standard framework in many countries, and used in research and curriculum developing. His description of the levels is not, however, based on a explicit principle. So interpretations of the levels by other researchers are slightly different each other, and sometimes include what contradict the original description by van Hiele. The aim of this paper is to present a principle for re-constructing van Hiele levels. This principle can make the relationship among the levels clearer.

We start by analyzing the concept 'symbol', which is one of the most important concepts in van Hiele's theory. It is found that according to van Hiele, symbols have three different roles in one's thought and change from one role to the next as the thought develops. Applying this idea to the concept of figure, we can find three different ways in recognizing figures. First, people see a figure totaly as a kind of visual images. Then the figure gets to be recognized as a form having a certain set of characteristics. Finaly it is recognized as a junction of the network of the geometry system. Taking the geometry system as a new object of thinking and applying the same argument to it, we can also get three ways of recognizing the geometry system.

We then relate these ways of recognition to other important concepts in van Hiele's theory. We find we can fully re-construct van Hiele levels using the ways of recognition above mentioned. This discussion leads us to the following new framework;

level 1:	recognizing a figure as an indifferentiated image	
level 2:	recognizing a figure by a set of characteristics	
level 3:	recognizing a figure by its definition	recognizing a geometry system as an indifferentiated network
level 4:		recognizing a geometry system by a set of characteristics
level 5:		recognizing a geometry system by its definition

As the result of our discussion, 'the change in ways of recognizing the object' is presented as the principle for re-constructing van Hiele levels.