次数 2 の重さ半整数ジーゲル保型形式へのリフティング*

林田秀一† (大阪大学)

0　要旨

この論説で述べる内容は、二つの楕円保型形式から重さ半整数の次数 2 のジーゲル保型形式へのリフティング、すなわち次の写像である。

$$S_{2k-2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \times S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \to S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4)),$$

ここで $S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ は次数 2 のプラス空間で、次数 2 の重さ $k-\frac{1}{2}$ のジーゲル保型形式のなす空間のレベル 1 に相当する部分空間である。(Kohnen プラス空間の次数 2 への拡張である。) 異なる群に属する保型形式の間で、L-関数に対応がつくような写像を一般的にリフティングというが、上の写像も L-関数の間の対応がある。ただし、上のリフティングは k が偶数の場合に証明されており、奇数の場合は数値例による予想である。

志村対応を用いると、上記のリフティングは、重さが $k-\frac{1}{2}$ と $k-\frac{3}{2}$ の楕円保型形式から重さ $k-\frac{1}{2}$ の次数 2 のジーゲル保型形式へのリフティングと思うことができ、その k が偶数の場合は、双線形写像にできる。

フルモジュラー群の場合 (すなわちレベル 1) で知られているジーゲル保型形式のリフティングの例を挙げながら、上記のリフティングについて述べるのが、この論説の趣旨である。

尚、レベルが 1 でない場合は、次数 2 の重さ整数ベクトル値ジーゲル保型形式へのリフティングである吉田リフティングが知られており、また次数 2 のベクトル値ジーゲル保型形式の重さ整数と重さ半整数の対応の伊吹山知義氏による予想があり、上記のリフティングはレベル 1 でこれらを組み合わせたものに相当すると考えられる。

*第 56 回代数学シンポジウム 2011 年 8 月 11 日 報告集原稿。
†JSPS 科学研究費若手 (B) 23740018 により援助を受けております。

1　楕円保型形式からジーゲル保型形式へのリフティング

1.1　重さ整数のジーゲル保型形式

自然数 n に対し、ジーゲル上半平面 $\mathfrak{H}_n$ と実シンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ を次のように定める

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}_n &:= \left\{\tau \in M_n(\mathbb{C}) \,|\, \tau = {}^t\tau,\ \mathrm{Im}(\tau) > 0\right\}, \\
\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) &:= \left\{M \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}) \,|\, M \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{smallmatrix}\right) {}^tM = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Definition 1 (ジーゲル保型形式)**.** k を整数とする。ジーゲル上半平面 $\mathfrak{H}_n$ 上の正則関数 F が次の変換公式を満たすとき、F を重さ k 次数 n のジーゲル保型形式という。

(変換公式) 任意の $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in Sp(n,\mathbb{Z}) := Sp(n,\mathbb{R}) \cap M_{2n}(\mathbb{Z})$ と任意の $\tau \in \mathfrak{H}_n$ に対し、

$$\det(C\tau + D)^{-k} F((A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}) = F(\tau).$$

ただし、 $n = 1$ のときは定義にカスプ条件も必要とする。

重さ k 次数 n のジーゲル保型形式全体のなすベクトル空間を $M_k(\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}))$ であらわし、ジーゲル尖点形式のなすベクトル空間を $S_k(\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}))$ で表す。ジーゲル尖点形式はジーゲル・ファイ作用素の核となる関数であるが、詳しい定義などは、Klingen[Kl 90] などを参照されたい。

1.2　斎藤・黒川リフティング

Theorem 1.1 (斎藤, 黒川, Maass, Andrianov, Zagier)**.** k を偶数とし、楕円保型形式 $f \in S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ を正規化 (最初のフーリエ係数が *1*) されたヘッケ作用素の同時固有関数とする。この時、 $F \in S_k(Sp(2,\mathbb{Z}))$ で F はヘッケ作用素の同時固有関数であり、

$$L(s,F,sp) = \zeta(s-k+1)\,\zeta(s-k+2)L(s,f).$$

となるものが存在する。ここで、 $L(s,F,sp)$ は F の *Spinor* L-関数である.

このリフティングは、黒川信重氏と斎藤裕氏により独立に予想された。黒川氏は、オイラー因子の具体的数値例を計算することで、一般化されたラマヌジャン予想の反例を与えている [Ku 78]。このリフティングは A. Andrianov 氏, H. Maass 氏, D. Zagier 氏により証明された ([E-Z 85] 参照)。

1.3 Duke-Imamoglu-池田 リフティング

斎藤・黒川リフティングを一般の偶数次数に拡張したものが、次の定理である。

Theorem 1.2 (Duke-Imamoglu, 伊吹山, 池田 [Ik 01]). k を偶数とし、n を自然数とする。この時、すべてのヘッケ作用素の同時固有関数で正規化された $f \in S_{2(k-n)}(SL(2,\mathbb{Z}))$ に対し、次の性質を持つような $F \in S_k(Sp(2n,\mathbb{Z}))$ が構成できる。F はすべてのヘッケ作用素の同時固有関数であり、F の *standard* L-関数は

$$L(s,F,st) = \zeta(s)\prod_{i=1}^{2n} L(s+k+n-i,f)$$

である。

このリフティングは、W. Duke 氏とÖ.Imamoglu 氏により予想され、池田保氏により証明されている。また、伊吹山知義氏も Koecher-Maass 級数を用いることで、Duke-Imamoglu とは独立に予想をしていた。

また、内積 $\langle F,F\rangle$ と $L(s,f,\mathrm{Ad})$ の特殊値の関係式は、池田保氏により予想されていたが、この予想は、桂田英典氏と河村尚明氏により証明されている。ここで、$L(s,f,\mathrm{Ad})$ は f の adjoint L-関数である。ただし、$n=1$ の場合、つまり斎藤・黒川リフティングの場合の関係式は、W. Kohnen 氏と N.-P. Skoruppa 氏 [KS 89] により与えられている。

1.4 宮脇・池田 リフティング

楕円保型形式とジーゲル保型形式のペアからジーゲル保型形式へのリフティングとして次が知られている。

Theorem 1.3 (宮脇 [Mi 92], 池田 [Ik 06]). k を偶数とし、n と r をそれぞれ自然数とする。$f \in S_{2(k-n-r)}(SL(2,\mathbb{Z}))$ と $g \in S_k(Sp(r,\mathbb{Z}))$ をすべてのヘッケ作用素の同時関数とする。このとき、$\mathcal{F}_{f,g} \in S_k(Sp(2n+r,\mathbb{Z}))$ を構成でき、もし、$\mathcal{F}_{f,g} \not\equiv 0$ であれば、$\mathcal{F}_{f,g}$ はすべてのヘッケ作用素の同時固有関数で、その *standard* L-関数が

$$L(s,\mathcal{F}_{f,g},st) = L(s,g,st)\prod_{i=1}^{2n} L(s+k-r-i,f).$$

となる。

このリフティングは、宮脇伊佐夫氏により $n = r = 1$ の場合に予想され、池田保氏により、n と r が一般の形で証明された。また 池田保氏は $n = r = 1$ の場合に、$\mathcal{F}_{f,g} \not\equiv 0$ となる例を与えている。（$\mathcal{F}_{f,g} \equiv 0$ となる例は今のところ知られていない。）$\mathcal{F}_{f,g}$ の構成には、先の Duke-Imamoglu-池田リフティングを用いている。

宮脇氏は [Mi 92] で重さ $2k-2$ と $k-2$ の楕円保型形式の組から重さ k の次数 3 のジーゲル保型形式へのリフティングを予想しているが、こちらはまだ解かれていない。

また、池田氏は、内積 $\langle \mathcal{F}_{f,g}, \mathcal{F}_{f,g} \rangle$ と L-関数 $L(k-r, \mathrm{st}(g) \boxtimes f)$, $L(s, f, \mathrm{Ad})$ の特殊値との関係式を予想している。詳しくは池田 [Ik 06] を参照されたい。

2　重さ半整数の保型形式

この節では、重さ半整数の楕円保型形式および、次数 2 のジーゲル保型形式について述べる。

2.1　志村対応

関数 $\theta^{(n)}$ を $\theta^{(n)}(\tau) := \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} exp(2\pi\sqrt{-1}\,{}^t p \tau p)$ $(\tau \in \mathfrak{H}_n)$ とする、ただし和の p は列ベクトルである。また、$\Gamma_0^{(n)}(4) := \{ \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) \,|\, C \equiv 0 \mod 4 \} \subset \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ とおく。

任意の $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0^{(n)}(4)$ に対し、$\theta^{(n)}(\tau)$ は次の関係式を満たす。

$$\left(\frac{\theta^{(n)}(M \cdot \tau)}{\theta^{(n)}(\tau)} \right)^2 = \left(\frac{-4}{\det D} \right) \det(C\tau + D),$$

ここで、$\left(\frac{-4}{\det D}\right) = (-1)^{\frac{\det D - 1}{2}}$ は平方剰余記号で、$M \cdot \tau := (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$ は一次分数変換である。

k を整数とする。$\mathfrak{H}_n$ 上の正則関数 f が重さ $k - \frac{1}{2}$、次数 n の $\Gamma_0^{(n)}(4)$ に属するジーゲル保型形式であるとは、すべての $M \in \Gamma_0^{(n)}(4)$ に対し、次の変換公式を満たすときにいう。

$$f(M \cdot \tau) = \left(\frac{\theta^{(n)}(M \cdot \tau)}{\theta^{(n)}(\tau)} \right)^{2k-1} f(\tau).$$

ただし、 $n = 1$ のときは、 f のカスプ条件も必要とする。

ジーゲル・ファイ作用素の核となるジーゲル保型形式をジーゲル尖点形式という。(あるいは、自乗が重さ整数のジーゲル尖点形式になる、としてもよい。) 記号 $S_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ を、重さ $k - \frac{1}{2}$、次数 n のジーゲル尖点形式のなす空間とする。

一般化されたプラス空間 $S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ をつぎのように定める。

$$\begin{aligned}&S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(n)}(4)) := \\ &\Big\{ f\in S_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(n)}(4)) \,|\, A_f(N)=0 \text{ unless } N\equiv(-1)^{k+1}\lambda^t\lambda \mod 4 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{with some } \lambda\in\mathbb{Z}^n \Big\}.\end{aligned}$$

ここで、 $A_f(N)$ は f の N 番目のフーリエ係数である、つまり

$$f(\tau)=\sum_{N\in Sym_n} A_f(N)\, exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(N\tau)).$$

特に $n=1$ の時は、$S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ は Kohnen プラス空間である。

Kohnen プラス空間へのヘッケ作用素は次のように定義される。任意の $h=\sum_m a_m q^m\in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ と任意の素数 p ($p=2$ も含む) に対し、

$$h|T_1^+(p^2) \;\;:=\;\; \sum_m \left(a_{mp^2}+\left(\frac{(-1)^{k-1}m}{p}\right)p^{k-2}a_m+p^{2k-3}a_{\frac{m}{p^2}}\right)q^m.$$

志村五郎氏により、重さ半整数の楕円保型形式から重さ整数の楕円保型形式へのリフティングが与えられ、このレベルが 1 の場合の定式化は W. Kohnen 氏により次のように与えられている。

Theorem 2.1 (志村 [Sh 73], Kohnen [Ko 80])**.** k を整数とする。このとき、

$$S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))\cong S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$$

であり、互いの空間のヘッケ作用素の作用と可換である。つまり、$S(h)$ を重さ $k-\frac{1}{2}$ の尖点形式 $h\in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ のこの同型写像の像とした場合に、

$$S(h)|T(p) \;\;=\;\; h|T_1^+(p^2)$$

が成り立つ。ここで、$T(p)$ は $S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ に作用するヘッケ作用素である。

2.2 次数 2 の重さ半整数のジーゲル保型形式

志村対応の次数 2 への拡張ついては、次の予想が知られている。

Conjecture 1 (伊吹山 [Ib 08])**.** k を 3 以上の整数とし、j を正の偶数とする。このとき、

$$S_{j+3,2k-6}(Sp(2,\mathbb{Z})) \cong S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0^{(2)}(4), \left(\frac{-4}{*}\right)).$$

ここで $S_{j+3,2k-6}(Sp(2,\mathbb{Z}))$ は重さが $\det^{j+3} Sym_{2k-6}$ のベクトル値ジーゲル尖点形式のなす空間で、$S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0^{(2)}(4), \left(\frac{-4}{*}\right))$ は重さが $\det^{k-\frac{1}{2}} Sym_j$ の指標付きベクトル値の次数 2 のプラス空間である。

2.3 主結果

重さ半整数の次数 2 のスカラー値のジーゲル保型形式について、伊吹山知義氏と筆者の共同研究により、次の予想が知られていた。

Conjecture 2 (林田-伊吹山 [HI 05])**.** k を自然数とし、 $f \in S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ と $g \in S_{2k-4}(SL(2,\mathbb{Z}))$ を正規化されたすべてのヘッケ作用素の同時固有関数とする。

このとき、$\mathcal{F}_{f,g} \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ が存在し、$\mathcal{F}_{f,g}$ はすべてのヘッケ作用素の同時固有関数で、その L-関数が

$$L(s, \mathcal{F}_{f,g}) \;\; = \;\; L(s,f)\, L(s-1,g)$$

を満たす。ここで、 $S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ は次数 2 のプラス空間である。また、$L(s,\mathcal{F}_{f,g})$ は *Zhuravlev [Zh 84]* により導入された重さ半整数ジーゲル保型形式の L-関数で、これは志村五郎氏により導入された重さ半整数楕円保型形式の L-関数のジーゲル保型形式への拡張である。ただし、この予想は、$p=2$ のオイラー因子も含んでおり、$p=2$ のオイラー因子は *[HI 05]* で導入されている。$L(s,f)$ と $L(s,g)$ は *Hecke* により導入された f と g の通常の L-関数である。

この予想の根拠はオイラー因子の具体的な数値例にある。また、$F \in M^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ が尖点形式でなく、ヘッケ作用素の同時固有関数となる場合に、F の L-関数が予想の形となることは、*[HI 05]* で証明されている。この時、g はアイゼンシュタイン級数である。

この論説の主結果は次の定理である。

Theorem A. ([H 11b]) k が偶数の時は、上記予想の f と g から $\mathcal{F}_{f,g} \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ を構成することができ、$\mathcal{F}_{f,g} \not\equiv 0$ という仮定のもとで、$\mathcal{F}_{f,g}$ はすべてのヘッケ作用素の同時固有関数となり、その L-関数は、先の予想の形となる。つまり、k が偶数の時は、$\mathcal{F}_{f,g} \not\equiv 0$ という仮定のもとで Conjecture 2 は正しい。

2.4 $\mathcal{F}_{f,g}$ の構成

Thorem A の $\mathcal{F}_{f,g}$ の構成については、池田保氏からご教示頂いた。この節では、その構成の仕方について述べる。

以下、k を偶数とする。次の写像を得る。

$$g \in S_{2k-4}(SL(2,\mathbb{Z})) \to G \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4))$$

ここで、$S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4))$ は次数 3 のプラス空間であり、この写像は、次の三つの写像の合成である。

$$S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \to S_k(\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})) \to J_{k,1}^{(3)} \to S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4)).$$

最初の写像は、Duke-Imamoglu-池田リフティングで、次の写像は、フーリエ・ヤコビ展開で得られる指数 1 のヤコビ形式への写像、最後の写像は、指数 1 のヤコビ形式とプラス空間の同型対応 [Ib 92] である。これらの写像は、ヘッケ作用素の作用と可換である。

重さ $2k-4$ の楕円保型形式 g から次数 3 の重さ $k-\frac{1}{2}$ のジーゲル保型形式 G を構成したが、重さ $2k-2$ の楕円保型形式 f からは重さ $k-\frac{1}{2}$ の楕円保型形式 h を得る。これには志村対応を用いる

$$f \in S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z})) \to h \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4)).$$

この重さ $k-\frac{1}{2}$ の G と h を用いて、$\mathfrak{H}_2$ 上の次の関数 $\mathcal{F}_{f,g}$ を定義する。

$$\mathcal{F}_{f,g}(\tau) := \frac{1}{6}\int_{\Gamma_0^{(1)}(4)\backslash\mathfrak{H}_1} G\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)\overline{h(\omega)}\mathrm{Im}(\omega)^{k-\frac{5}{2}}d\omega$$

この時 $\mathcal{F}_{f,g} \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ となる。

問題は、この $\mathcal{F}_{f,g}$ がヘッケ作用素の同時固有関数となること、及び、Zhuravlev L-関数が二つの楕円保型形式 f と g の L-関数の積としてかけること、を示すことである。

3 マース関係式

この節では、一般化マース関係式と、主結果の証明について簡単に述べる。

3.1 ヤコビ形式

自然数 n と m に対しヤコビ群は次で定義される

$$\Gamma^J_{n,m} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & 0 & B & * \\ * & 1_m & * & * \\ C & 0 & D & * \\ 0 & 0 & 0 & 1_m \end{smallmatrix} \right) \in \mathrm{Sp}(n+m,\mathbb{Z}) \;\middle|\; \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix} \right) \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \right\}.$$

Definition 2 (ヤコビ形式)**.** $\mathcal{S}$ をサイズ m の半整数対称行列とする。$\mathfrak{H}_n \times M_{n,m}(\mathbb{C})$ 上の正則関数 ϕ が次の変換公式を満たすときに、ϕ を重さ k、指数 $\mathcal{S}$、次数 n のヤコビ形式という。

(変換公式) 任意の $\gamma \in \Gamma^J_{n,m}$ に対し、

$$F_\phi|_k\gamma = F_\phi.$$

ここで、$F_\phi \left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ {}^t z & \omega \end{smallmatrix} \right) := \phi(\tau,z)exp(2\pi\sqrt{-1}tr(\mathcal{S}\omega))$ は $\mathcal{H}_{n+m}$ 上の正則関数である。ただし、$n=1$ のときは、定義にカスプ条件も必要とする。

3.2 フーリエ・ヤコビ展開

重さ k、指数 $\mathcal{S}$、次数 n のヤコビ形式のなすベクトル空間を $J^{(n)}_{k,\mathcal{S}}$ と書く。

関数 F を重さ k の次数 $n+m$ のジーゲル保型形式とする。この F の次の展開を考察する

$$F \left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ {}^t z & \omega \end{smallmatrix} \right) = \sum_{\mathcal{M} \in Sym_m} \phi_{\mathcal{M}}(\tau,z)\, exp(2\pi i\sqrt{-1}\mathrm{tr}(M\omega))$$

ここで、$\tau \in \mathfrak{H}_n,\ \omega \in \mathfrak{H}_m$、$z \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ である。このとき、

$$\phi_{\mathcal{M}} \in J^{(n)}_{k,\mathcal{M}}$$

となる。上の展開をフーリエ・ヤコビ展開とよび、$\phi_{\mathcal{M}}$ を F の $\mathcal{M}$ 番目のフーリエ・ヤコビ係数とよぶことにする。

次数 n を固定し、k を偶数とするとき、指数 1 の重さ k のヤコビ形式のなす空間と重さ $k-\frac{1}{2}$ のプラス空間との同型対応が知られている。

Theorem 3.1 (Eichler-Zagier ($n=1$)[E-Z 85], 伊吹山 ($n \geq 2$)[Ib 92])**.** k を偶数とするとき、線形同型

$$J^{(n)}_{k,1} \cong M^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma^{(n)}_0(4)).$$

が得られ、互いの空間へのヘッケ作用素の作用とこの同型写像は可換である。この同型写像はフーリエ係数の間の対応として与えられる。また、尖点形式同士が対応する。

3.3 一般化マース関係式 (重さ整数で指数がスカラーの場合)

l と m を自然数とする。Eichler-Zagier[E-Z 85] により写像

$$V_m \,:\, J_{k,l}^{(1)} \to J_{k,lm}^{(1)}$$

が次のように定義されている。$\phi \in J_{k,l}^{(1)}$ に対し、

$$\begin{aligned}(\phi|_{k,l}V_m)(\tau,z) \quad &:= \quad m^{k-1} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z})\backslash M_2(\mathbb{Z}) \\ ad-bc=m}} (c\tau+d)^{-k} \\ &\times exp\left(2\pi\sqrt{-1}ml\frac{-c}{c\tau+d}z^2\right)\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{mz}{c\tau+d}\right).\end{aligned}$$

次にマース関係式を述べるために、$F \in S_k(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ とし、その m 番目のフーリエ・ヤコビ係数を ϕ_m とする、つまり

$$F\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \phi_m(\tau,z)\, exp(2\pi i\sqrt{-1}m\omega)$$

とする。

Theorem 3.2 (Maass, Zagier)**.** 上記の F が斎藤・黒川リフティングの像である必要十分条件は、

$$\phi_m \quad = \quad \phi_1|V_m$$

をすべての m に対し満たすことである。

マース関係式はふつう、フーリエ係数間の関係式のことをいうが、その関係式は、このフーリエ・ヤコビ係数の間の関係式から得られる。ここでは上記のフーリエ・ヤコビ係数の間の関係式をマース関係式とよぶことにする。

また、n と m を自然数としたときに、次が知られている。

$$V_m \circ V_n = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} V_{mn/d^2} \circ U_d$$

ここで、$\phi \in J_{k,l}^{(1)}$ に対し、

$$(\phi|U_d)(\tau,z) := \phi(\tau,dz) \in J_{k,ld^2}^{(1)}$$

とおいた。

上記の $V_n \circ V_m$ の式と Theorem 3.2 から次が得られる。

Lemma 3.3. 次数 2 のジーゲル尖点形式 $F\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ z & \omega\end{smallmatrix}\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \phi_m(\tau,z)exp(2\pi im\omega)$ がマース関係式を満たす必要十分条件は、任意の自然数 m と素数 p に対し、

$$(\phi_m|V_p)(\tau,z) = \phi_{mp}(\tau,z) + p^{k-1}\phi_{m/p}(\tau,pz)$$

を満たすことである。

Corollary 3.4. F がマース関係式を満たすとき、

$$F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)|_\tau T(p) \;=\; F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)|_\omega T(p).$$

ここで、$T(p) \in End(M_k(SL(2,\mathbb{Z})))$ は素数 p でのヘッケ作用素

$$(\sum_m a_m q^m)|_k T(p) = \sum_m (a_{pm} + p^{k-1}a_{m/p})q^m.$$

であり、左辺は $F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)$ を τ の関数、右辺は ω の関数とみなしている。

また、Theorem 3.2 は一般次数のジーゲル・アイゼンシュタイン級数の場合に、山崎正氏によって拡張されている。

Theorem 3.5 (山崎 [Ya 86]). $E_k^{(n+1)}\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ {}^t z & \omega\end{smallmatrix}\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}} e_{k,m}^{(n)}(\tau,z)exp(2\pi\sqrt{-1}m\omega)$ を次数 $n+1$ 重さ k のジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ・ヤコビ展開とする。すなわち、$e_{k,m}^{(n)}$ は次数 n、重さ k、指数 m のヤコビ形式である。

この時、フーリエ・ヤコビ係数 $\{e_{k,m}^{(n)}\}_m$ は次の一般化マース関係式をみたす

$$e_{k,m}^{(n)} = e_{k,1}^{(n)}|D_m(k,n).$$

ここで、$D_m(k,n)$ は V_m-作用素を次数 n に拡張したもので、ヤコビ形式の指数を m 倍する作用素である。

この定理と同様の結果が、Duke-Imamoglu-池田リフティングの像においても成り立つことが次のように得られている。

Theorem 3.6 ([H 11a]). 関数 $F\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ {}^t z & \omega\end{smallmatrix}\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \psi_m^{(2n-1)}(\tau,z)exp(2\pi\sqrt{-1}m\omega)$ を *Duke-Imamoglu*-池田リフティングで得られる次数 $2n$ のジーゲル保型形式のフーリエ・ヤコビ展開とする。このとき、$\{\psi_m\}_m$ は次の一般化マース関係式をみたす

$$\psi_m^{(2n-1)} = \psi_1^{(2n-1)}|D_m(\{\alpha_p^\pm\}_p, 2n-1).$$

ここで、$D_m(\{\alpha_p^\pm\}_p, 2n-1)$ は V_m-作用素を次数 n に拡張したもので、ヤコビ形式の指数を m 倍する作用素である。ただし、この作用素は、*Duke-Imamoglu*-池田リフティングの原像のとり方により依存している。

ちなみに、この定理を用いると、Duke-Imamoglu-池田リフティングの像がゼロにならないということの別証明が得られる。また、宮脇・池田リフティングの spinor L-関数を求める際にも部分的に有用である (Heim[He 07] 参照)。

3.4 一般化マース関係式 (重さ半整数で指数がスカラーの場合)

自然数 k を偶数とする。2.4 節で現れた次の写像を考察する。

$$g \in S_{2k-4}(SL(2,\mathbb{Z})) \to G \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4))$$

ここで $S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4))$ は次数 3 のプラス空間であった。

関数 G の次のフーリエ・ヤコビ展開を考える

$$G\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ {}^t z & \omega \end{smallmatrix}\right) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}_{>0} \\ m \equiv 0,3 \bmod 4}} \phi_m(\tau, z)\, exp(2\pi\sqrt{-1}m\omega).$$

ここで、$\phi_m : \mathfrak{H}_2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ は重さ $k-\frac{1}{2}$ の指数 m の次数 2 のヤコビ形式である。

任意の素数 p と、$i = 1{,}2$ に対し、次の写像を構成することができる

$$V^{(2)}_{i,p^2} : J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},m} \to J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},mp^2}.$$

ここで $J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},m}$ は重さ $k-\frac{1}{2}$ の指数 m の次数 2 のヤコビ形式のなす空間であり、$V^{(2)}_{i,p^2}$ は Eichler-Zagier の V_m 作用素の重さ半整数かつ次数 2 での拡張である。つまり、$V^{(2)}_{i,p^2}$ は指数を p^2 倍する作用素である。

また、次の写像を定義する。

$$U^{(2)}_p : J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},m} \to J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},mp^2}.$$

この写像は、$\phi \in J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},m}$ に対し、$\phi(\tau, z) \to \phi(\tau, pz)$ で与えられる。

主結果の証明には、次の関係式を示すことが鍵となる。

Proposition B. (次数 3 での重さ半整数の一般化マース関係式) 上で定めた ϕ_m に対し、次の 2 つの関係式が成り立つ

$$\begin{aligned}
\phi_m|V^{(2)}_{1,p^2} &= p\, b(p)\, \phi_m|U_p \\
&\quad + \phi_{mp^2} + \left(\frac{-m}{p}\right) p^{k-2}\phi_m|U_p + p^{2k-3}\phi_{\frac{m}{p^2}}|U_{p^2} \\
\phi_m|V^{(2)}_{2,p^2}, &= b(p)\left(\phi_{mp^2} + \left(\frac{-m}{p}\right) p^{k-2}\phi_m|U_p + p^{2k-3}\phi_{\frac{m}{p^2}}|U_{p^2}\right) \\
&\quad + (p^{2k-4} - p^{2k-6})\phi_m|U_p.
\end{aligned}$$

ここで $b(p)$ は $g \in S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ の p 番目のフーリエ係数である。

Corollary 3.7. 関数 G の $\mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_3$ の *pull-back* を考える。$T^{(2)}_{i,p^2}$ $(i=1,2)$ を次数 2 の重さ半整数のジーゲル保型形式へのヘッケ作用素 (*cf. [Zh 84], [HI 05]*) とし、$T_1^+(p^2)$ を *Kohnen* プラス空間でのヘッケ作用素とした時、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} G\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)|_\tau T^{(2)}_{1,p^2} &= p\,b(p)\,G\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right) + G\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)|_\omega T_1^+(p^2), \\ G\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)|_\tau T^{(2)}_{2,p^2} &= (p^{2k-4} - p^{2k-6})\,G\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right) \\ &\quad + b(p)\,G\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)|_\omega T_1^+(p^2). \end{aligned}$$

この関係式と、

$$\mathcal{F}_{f,g}(\tau) = \frac{1}{6}\int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathfrak{H}_1} G\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)\overline{h(\omega)}\det(\omega)^{k-\frac{5}{2}}\,d\omega \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4)).$$

であることから、$\mathcal{F}_{f,g}$ がヘッケ作用素の同時固有関数であることが示せ、また固有値も分かるので、Theorem A を得る。(ただし、$\mathcal{F}_{f,g} \not\equiv 0$ を仮定する。)

4 Proposition B の証明のスケッチ

1. 重さ $k-\frac{1}{2}$ で指数 m のヤコビ形式 ϕ_m の代わりに重さ k で指数 $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} n & r/2 \\ r/2 & 1 \end{pmatrix}$ のヤコビ形式 $\phi_{\mathcal{M}}$ を考察する、ここで、$m = 4n - r^2$ である。図で書くと次の通り

$$\begin{array}{ccc} g \in S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) & \to & S_k(\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})) \\ & & \downarrow \\ G \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4)) & \cong & J^{(3)}_{k,1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \phi_m \in J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},m} & \leftrightarrow & J^{(2)}_{k,\begin{pmatrix} n & r/2 \\ r/2 & 1 \end{pmatrix}} \ni \phi_{\mathcal{M}}. \end{array}$$

   すなわち、重さ半整数のスカラー指数のヤコビ形式の代わりに、重さ整数の行列指数のヤコビ形式を考察する。

2. 次数 3 の一般化マース関係式をジーゲル・アイゼンシュタイン級数で証明する。すなわち、上の図で、g の代わりに重さ $2k-4$ のアイゼンシュタイン級数 e_{2k-4} からはじめて、$\phi_{\mathcal{M}}$ に相当する関数 $e^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$ の間で関係式を証明すればよい。これは、

Duke-Imamoglu-池田リフティングで得られるジーゲル尖点形式のフーリエ係数が、ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数と同様の形で書けているという理由による。つまり、ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のほうでフーリエ係数の関係式が得られれば、Duke-Imamoglu-池田リフティングの像のほうでも同様のフーリエ係数の関係式を得ることが出来る。

3. 上記の 2. において、$e^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$ は次数 4 のジーゲル・アイゼンシュタイン級数の $\mathcal{M}$ 番目のフーリエ・ヤコビ係数であるが、これは次数 2 のヤコビ・アイゼンシュタイン級数の線形和で書き表すことができる (Boecherer [Bo 83, Satz 7] 参照)。一方、Proposition B の $V^{(2)}_{i,p^2}$ に対応するものが、重さ整数で行列指数のヤコビ形式の空間 $J^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$ でも定義することができ、それはヘッケ作用素のように両側剰余類の片側剰余分解の代表系の作用として定義できる。ヤコビ・アイゼンシュタイン級数の定義は、ある作用の無限和で与えられるので、片側剰余の代表系の作用との交換、すなわち群論的な計算により、ヤコビ・アイゼンシュタイン級数の間での関係式が得られ、また、その関係式を $e^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$ の間の関係式に置き換えることができる。

参考文献

[Bo 83] S. Boecherer: Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen, *Math. Z.* **183** (1983), 21–46

[E-Z 85] M. Eichler and D. Zagier: Theory of Jacobi Forms, Progress in Math. **55**, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, (1985).

[H 11a] S. Hayashida: Fourier-Jacobi expansion and the Ikeda lift, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **81** no.1 (2011), 1–17.

[H 11b] S. Hayashida: On the lifting of pairs of elliptic modular forms to Siegel modular forms of half-integral weight of degree two, in preparation.

[HI 05] S. Hayashida and T. Ibukiyama: Siegel modular forms of half integral weights and a lifting conjecture, *Journal of Kyoto Univ.* **45** no.3 (2005) 489–530.

[He 07] B. Heim: Miyawaki's F_{12} spinor L-function conjecture, arXiv:0712.1286v1 [math.NT] (2007).

[Ib 92] T. Ibukiyama: On Jacobi forms and Siegel modular forms of half integral weights, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **41** no.2 (1992), 109–124.

[Ib 08] T. Ibukiyama: A conjecture on a Shimura type correspondence for Siegel modular forms, and Harder's conjecture on congruences, *Modular forms on Schiermonnikoog, Cambridge Univ. Press, Cambridge*, (2008) 107–144.

[Ik 01] T. Ikeda: On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree 2n, *Ann. of Math. (2)* **154** no.3, (2001), 641–681.

[Ik 06] T. Ikeda: Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's conjecture, *Duke Math. J.* **131** no.3, (2006), 469–497.

[Kl 90] H. Klingen: Introductory lectures on Siegel modular forms, *Cambridge Std. in Adv. Math. 20, Cambridge Univ. Press, Cambridge* (1990).

[Ko 80] W. Kohnen: Modular forms of half integral weight on $\Gamma_0(4)$, *Math, Ann.* **248** (1980), 249–266.

[KS 89] W. Kohnen and N. -P. Skoruppa: A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two, *Invent. Math.* **95** (1989), 541–558.

[Ku 78] N. Kurokawa: Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two. *Invent. Math.* **49** (1978), 149–165.

[Mi 92] I. Miyawaki: Numerical examples of Siegel cusp forms of degree 3 and their zeta functions. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.* **46** (1992), 307–339.

[Sh 73] G. Shimura: On modular forms of half integral weight, *Ann. of Math* (2) **97** (1973), 440–481.

[Ya 86] T. Yamazaki: Jacobi forms and a Maass relation for Eisenstein series, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.* **33** (1986), 295–310.

[Zh 84] V. G. Zhuravlev: Euler expansions of theta transforms of Siegel modular forms of half-integral weight and their analytic properties, *Math. sbornik.* **123 (165)** (1984), 174–194.

林田秀一
〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-30
大阪大学インターナショナルカレッジ兼理学研究科
Email : hayashida@math.sci.osaka-u.ac.jp