二つの楕円保型形式から重さ半整数 Siegel 保型形式へのリフト*

林田秀一
(大阪大学インターナショナルカレッジ)

0　要旨

0.1　内容

k を自然数としたとき、重さ $2k-2$ と重さ $2k-4$ の楕円保型形式から重さ $k-\frac{1}{2}$ の次数 2 のジーゲル保型形式へのリフトが、伊吹山-林田 [HI 05] で予想されていた。特にこのリフトの行き先のジーゲル保型形式は、次数 2 のプラス空間に属する。ここで、プラス空間とは、Kohnen plus 空間の高次元への拡張であり、レベル 1 に相当する空間である。（普通、重さ半整数のジーゲル保型形式を考える場合は、レベルが 4 で割り切れる必要があるが、プラス空間は部分空間であり、ニューホームの空間にあたる空間である。）

このリフトの予想を部分的 (k が偶数で、かつ構成したジーゲル保型形式が消えないという仮定の下) に証明したので、この論説ではその証明について解説を行いたい。

0.2　証明の方針

２つの楕円保型形式から次数２の重さ半整数のジーゲル保型形式を構成する方法は、重さ半整数の場合での宮脇-池田リフト (cf.　池田 [Ik 06]) の構成の類似により与えられる（この構成法は池田保氏のご指摘による）。構成には、Duke-Imamoglu-伊吹山-池田リフト (以下、池田リフトと略す)、フーリエ・ヤコビ展開、指数 1 のヤコビ形式と重さ半整数のジーゲル保型形式との対応、の３つを用いる。この構成した重さ半整数のジーゲル保型形式が、ヘッケ作用素の同時固有関数となるという事実を、マース関係式を一般化することにより証明する。つまり、次数 3 の重さ半整数のジーゲル保型形式に対し、フーリエ・

* 第 19 回整数論サマースクール 2011 年 9 月 9 日 報告集原稿。

ヤコビ係数の間の関係式を示す。

謝辞：オーガナイザーの軍司圭一さん、成田宏秋さんには、講演の機会を頂き、またサマースクールの期間を通じて大変お世話になりました。深く感謝いたします。

1 マース関係式

1.1 ヤコビ形式とマース関係式

ジーゲル保型形式の定義については、報告集の軍司 [Gu 11a] を参照されたい。楕円保型形式から次数 2 のジーゲル保型形式へのリフトで斎藤・黒川リフトというのがある。H. Saito と N. Kurokawa[Ku 78] により独立に予想され、H. Maass、A. Andrianov、D. Zagier (cf. [EZ 85]) により証明が与えられた。そのリフトは、間に重さ半整数の一変数保型形式の空間と指数 1 のヤコビ形式の空間を経由することにより証明が与えられている。記号で書くと次の通りである。k を偶数とすると、次の 3 つの同型を得る

$$S_{2k-2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \cong S^{+}_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4)) \cong J^{(1)\,cusp}_{k,1} \cong S^{Maass}_{k}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$$

ここで、$S^{+}_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ は、重さ k の Kohnen プラス空間で、$J^{(1)\,cusp}_{k,1}$ は次数 1 かつ指数 1 で重さ k のヤコビ尖点形式の空間 (ただしレベルは 1)、更に、$S^{Maass}_{k}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ はマース空間である。それぞれの空間の定義については、報告集の坂田 [Sk 11]、高瀬 [Tk 11]、伊吹山 [Ib 11] などを参照されたい。特に、上記の 3 つの同型写像はそれぞれの空間のヘッケ作用素の作用と可換である。(ただし、一番左の志村対応は、k が奇数でも成り立つ。)

マース関係式とは、次数 2 のジーゲル保型形式のフーリエ係数の間の関係式である。$F \in S_k(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ を次数 2 のジーゲル尖点形式とし、$F(Z) = \sum_N A(N) exp(2\pi i \mathrm{tr}(NZ))$ を F のフーリエ展開とする。F がマース関係式を満たすとは、任意の半整数対称行列 $\begin{pmatrix} n & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & m \end{pmatrix}$ に対して、関係式

$$A\left(\begin{pmatrix} n & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & m \end{pmatrix}\right) = \sum_{d|(n,m,r)} d^{k-1} A\left(\begin{pmatrix} \frac{nm}{d^2} & \frac{r}{2d} \\ \frac{r}{2d} & 1 \end{pmatrix}\right).$$

を満たすときにいう。マース関係式を満たす重さ k のジーゲル尖点形式のなす部分空間を $S^{Maass}_{k}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ と表した。次数 2 のジーゲル・アイゼンシュタイン級数は尖点形式ではないが、この関係式を満たす。

自然数 l に対し、V_l、U_l をそれぞれヤコビ形式の指数を l、l^2 倍する作用素とする。(ヤコビ形式および V_l、U_l の定義については [EZ 85, p.41]、あるいは報告集の伊吹山 [Ib 11]、

菅野 [Su 11]、青木 [Ao 11] を参照されたい。) $M_k(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$、$S_k(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ をそれぞれ、重さ k の次数 2 のジーゲル保型形式とジーゲル尖点形式のなすベクトル空間とする。

$F \in M_k(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ を重さ k の次数 2 のジーゲル保型形式とし、そのフーリエ・ヤコビ展開を

$$F\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ z & \omega\end{smallmatrix}\right) = \sum_m \psi_m(\tau,z)q^m$$

とする。ここで、$q := e^{2\pi i m\omega}$ とおいた。ϕ_m は重さ k で指数 m のヤコビ形式である。

V_l の定義より、次の補題が従う。

補題 1.1. F がマース関係式を満たす必要十分条件は、任意の自然数 m に対し

$$\psi_m = \psi_1 | V_m$$

を満たすことである。(この両辺のフーリエ係数を見比べたものがマース関係式である。)

補題 1.2. F がマース関係式を満たす必要十分条件は、任意の自然数 m と任意の素数 p に対し、

$$\psi_m | V_p = \psi_{mp} + p^{k-1}\phi_{\frac{m}{p}} | U_p$$

を満たすことである。

証明. 補題 1.1 と V_m の結合の関係式 $V_m \circ V_n = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} V_{\frac{mn}{d^2}} \circ U_d$ より従う。(この関係式の証明は [EZ 85, p.43] 参照 (ちなみに、[EZ 85, p.43] の式 (10) 左辺の $U_{l'}$ は $V_{l'}$ の誤植)。V_n, U_d 達を作用させた後のフーリエ係数を見比べることで得られる。) □

自然数 l に対し $T(l)$ を $S_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ に作用するよく知られたヘッケ作用素とする。

補題 1.3. ϕ を重さ k、指数 m のヤコビ尖点形式とするとき、次の二点を満たす。

(1) $\phi(\tau,0) \in S_k(SL(2,\mathbb{Z}))$

(2) 任意の自然数 l に対し、$(\phi|V_l)(\tau,0) = (\phi(\tau,0))|_k T(l)$

証明. これらは定義より直接得られる。 □

1.2 Pullback

次に、マース空間に属する次数 2 のジーゲル保型形式の pullback について述べたい。記号 $\mathfrak{H}_n$ を n 次のジーゲル上半空間とする。

$F \in M_k(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ を重さ k の次数 2 のジーゲル保型形式とする。F の $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ での pullback を考えると、$F\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)$ は τ の関数として楕円保型形式であり、ω の関数としても楕円保型形式である。ω を固定し、$F\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)$ を τ の関数とみて、その展開を

$$F\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right) = \sum_i u_i(\tau) f_i(\omega) \tag{1.1}$$

とする。ここで、$\{f_i\}_i$ は $M_k(SL(2,\mathbb{Z}))$ のヘッケ作用素の同時固有関数達の基底とする。$\{f_i\}_i$ が直交基底であることより、$\{u_i\}_i$ は一意に定まる。更に、F がジーゲル保型形式の変換公式を満たすことより、各 u_i は重さ k の楕円保型形式となる (ただし、ヘッケ作用素の同時固有関数とは限らない)。

恒等式 $F\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right) = F\left(\begin{smallmatrix} \omega & z \\ z & \tau \end{smallmatrix}\right)$ を考慮すると、pullback により、写像

$$M_k(Sp(2\mathbb{Z})) \to (M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z})))^{sym}$$

が得られる。つまり、$F\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right) = \displaystyle\sum_{i,j} C_{i,j}(F)\, f_i(\tau) f_j(\omega)$ と書いた時に、行列 $(C_{i,j}(F))_{i,j}$ は対称行列である。

今、更に F がマース関係式を満たすと仮定する。補題 1.2 と補題 1.3 の (2) より、任意の自然数 m と任意の素数 p に対し、

$$\psi_m(\tau,0)|T(p) = \psi_{mp}(\tau,0) + p^{k-1}\psi_{\frac{m}{p}}(\tau,0)$$

となる。この両辺に q^m を掛けて、m について和をとることで、

$$\begin{aligned} F\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)|_\tau T(p) &= \sum_m (\psi_m(\tau,0)|T(p)) q^m \\ &= \sum_m (\psi_{mp}(\tau,0) + p^{k-1}\psi_{\frac{m}{p}}(\tau,0)) q^m \\ &= F\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)|_\omega T(p) \end{aligned}$$

を得る。ここで、上記において $F\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)|_\tau T(p)$ は $F\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)$ を τ の関数と見てヘッケ作用素 $T(p)$ を、$F\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)|_\omega T(p)$ は $F\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)$ を ω の関数と見てヘッケ作用素 $T(p)$ を作用させている。(最後の等式は、楕円保型形式のヘッケ作用素が、$(\displaystyle\sum_m a_m q^m)|_k T(p) = \sum_m (a_{mp} + p^{k-1}a_{\frac{m}{p}}) q^m$ で与えられることによる。) よって、

$$\sum_i (u_i|T(p))(\tau)\, f_i(\omega) = F\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)|_\tau T(p) = \sum_i u_i(\tau) a_i(p) f_i(\omega)$$

となる。ここで、$a_i(p)$ は f_i の p 番目のフーリエ係数である。すなわち、任意の素数 p に対し、$u_i|T(p) = a_i(p)f_i$ であり、$u_i = C_{i,i}(F)f_i$ となる。つまり、F がマース関係式を満たす場合は、

$$F\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right) = \sum_i C_{i,i}(F)f_i(\tau)f_j(\omega)$$

である。(これは F 自体が次数 2 のジーゲル保型形式として、ヘッケ作用素の同時固有関数でなくても成り立つ。) つまり、pullback により線形写像

$$M_k^{Maass}(Sp(2,\mathbb{Z})) \to (M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z})))^{diag} \tag{1.2}$$

が得られる。ここで、上記の $(M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z})))^{diag}$ は、$M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z}))$ の部分空間で、$\sum_{i,j} C_{i,j}f_i \otimes f_j \in M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z}))$ の $(C_{i,j})_{i,j}$ が対角行列となる空間である。

Remark. 次の事柄が既に知られている。

1. 写像 (*1.2*) は、マース関係式から直接導くこともできる (市野 [*Ic 05*, $Lemma$1.1] 参照)。
2. F をマース空間に属するジーゲル保型形式でヘッケ作用素の同時固有関数としたときに、上記の $C_{i,i}(F)$ の絶対値は、6 次のオイラー因子を持つある L-関数の特殊値などを使って記述できる (市野 [*Ic 05*, $Theorem$2.1] 参照)。
3. $F \in M_k(Sp(2,\mathbb{Z}))$ の *pullback* が $(M_k(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes M_k(SL(2,\mathbb{Z})))^{diag}$ に入ったとしても、F がマース空間に属するとは限らないが、$F\left(\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ z & \omega\end{smallmatrix}\right)\right)$ の z に関するマクローリン展開の係数達 (τ, ω の関数達) が、微分作用素に関するある適当な条件を満たすときに、F はマース空間に属する (*Heim*[*He 10*] 参照)。

この論説では、次数 2 の重さ整数のジーゲル保型形式の代わりに、次数 3 の重さ半整数のジーゲル保型形式でこれと同様のことを考察する。つまり、次数 3 の重さ半整数のある良いジーゲル保型形式を対角成分に制限し、次数 1 と次数 2 のジーゲル保型形式（ただし重さ半整数）の対称性にあたる性質を導く。その事実から、２つの楕円保型形式から重さ半整数の次数 2 のジーゲル保型形式へのリフティングが得られることになる。

2 主結果

群 $\Gamma_0^{(n)}(4)$ をシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \subset M_{2n,2n}(\mathbb{Z})$ の部分群で、$\Gamma_0^{(n)}(4) := \{\left(\begin{smallmatrix}A & B\\ C & D\end{smallmatrix}\right) \mid C \equiv 0_n \bmod 4\}$ とおく。$M_{k-\frac{1}{2}}^{+}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ を次数 n の一般化プラス空間とする。

$M^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ は次数 n で重さ $k-\frac{1}{2}$ のジーゲル保型形式のなす空間の部分空間である。k を偶数としたとき、次数 n で重さ k かつ指数 1 のヤコビ形式のなす空間 $J_{k,1}^{(n)}$ と $M^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ の同型対応が成り立つ。(この同型は Eicher-Zagier[EZ 85] $n=1$、伊吹山 [Ib 92] $n>1$ により与えられた。また、表現論的な解釈が高瀬 [Tk 99] で与えられている。報告集の高瀬 [Tk 11] を参照されたい。)

次のリフティング予想は、伊吹山-林田 [HI 05] により与えられていた。

予想 1 ([HI 05])**.** k を自然数とし、f と g をそれぞれ重さ $2k-2$ と $2k-4$ の正規化された楕円保型形式でヘッケ作用素の同時固有関数とする。この時、$\mathcal{F}_{f,g}\in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ で、ヘッケ作用素の同時固有関数となるものが存在し、その L-関数は

$$L(s,\mathcal{F}_{f,g})=L(s,f)L(s-1,g)$$

を満たす。

ここで、重さ半整数のジーゲル保型形式の L-関数は、Zhuravlev [Zh 84] により与えられている。その L-関数は次で与えられる。F を次数 n のジーゲル保型形式でヘッケ作用素の同時固有関数とし、$\{\alpha_{i,p}^{\pm}\}$ を F の p-parameter とした時に、

$$L(s,F):=\prod_p\prod_{i=1}^n\left\{\left(1-\alpha_{i,p}p^{-s+k-3/2}\right)\left(1-\alpha_{i,p}^{-1}p^{-s+k-3/2}\right)\right\}^{-1}$$

で定義する。ただし、上記の積で p は F のレベル N を割らないところをはしるとする。プラス空間の場合は、指数 1 でレベル 1 のヤコビ形式の空間と同型となるので、そちらからヘッケ作用素を引用する。つまり、プラス空間に属するジーゲル保型形式の場合は、上記の無限積はすべての素数 p をとることとする。$L(s,f)$ および $L(s,g)$ は、それぞれ f と g のよく知られたヘッケの保型 L-関数である。

上記の予想は、オイラー因子の具体的な数値計算に根拠があった。(この予想の数値計算や次数 2 のプラス空間の構造定理、および吉田リフトとの関連などに関しては、[HI 02] にも解説があるので、興味のある方はそちらも参照されたい。尚、伊吹山知義氏により、次数 2 のジーゲル保型形式での志村対応型予想 [Ib 08] が立てられているが、そこに出てくる次数 2 のプラス空間は Nebentype (指標付き) のベクトル値の空間であり、上記の予想 1 のプラス空間はスカラー値の Haupttype (指標無し) の空間であるので、予想 1 と [Ib 08] の志村対応型予想の直接の関係はない。)

次の定理が、表題のリフティングである。

定理 2.1. k が偶数の時、上記の予想 1 の f と g から $\mathcal{F}_{f,g} \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ を構成することができ、$\mathcal{F}_{f,g} \neq 0$ であれば、$\mathcal{F}$ はヘッケ作用素の同時固有関数で、その *Zhuravlev* L-関数は、予想 *1* の中の等式を満たす。即ち、$L(s, \mathcal{F}_{f,g}) = L(s-1, g)\, L(s, f)$ である。

3 $\mathcal{F}_{f,g}$ の構成

この節では、定理 2.1 の $\mathcal{F}_{f,g}$ の構成について解説する。筆者はこの構成を池田保氏よりご指摘頂いた。

k を偶数とし、$g \in S_{2k-4}(SL(2,\mathbb{Z}))$ をヘッケ作用素の同時固有関数で正規化された尖点形式とする。ここで、正規化という意味は、$g = \sum_m b(m)\, q^m$ とフーリエ展開した時に、$b(1) = 1$ となることである。池田リフトを用いて、g から $I(g) \in S_k(Sp(4,\mathbb{Z}))$ を構成する。(k が偶数という条件はここで必要。) $I(g)$ は次数 4 のジーゲル尖点形式であり、ヘッケ作用素の同時固有関数となる。$I(g)$ の 1 番目のフーリエ・ヤコビ係数を $I_1(g)$ とする。つまり、

$$I(g)\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ {}^t z & \omega \end{smallmatrix}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} (I_m(g)(\tau, z)) e^{2\pi i m \omega}$$

(ここで $\tau \in \mathfrak{H}_3,\ \omega \in \mathfrak{H}_1,\ z \in M_{3,1}(\mathbb{C})$) と $I(g)$ をフーリエ・ヤコビ展開したときに、各 $I_m(g)$ は次数 3、重さ k、指数 m のヤコビ尖点形式となるが、$I_1(g)$ だけ取り出す。重さ $k - \frac{1}{2}$ の次数 3 のジーゲル尖点形式で、$I_1(g)$ と対応するものが存在する。このジーゲル尖点形式を G とする。まとめると、以下の通りである。

$$g \in S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \to I(g) \in S_k(\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})) \to I_1(g) \in J_{k,1}^{(3)\, cusp} \to G \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4))$$

ここで、$J_{k,1}^{(3)\, cusp}$ は重さ k、指数 1、次数 3 のヤコビ尖点形式のなす空間とした。

Remark. 講演の際に、吉田敬之氏により、$I_1(g)$ が恒等的にゼロでないかどうか、質問を受けた。$I_1(g)$ は恒等的にはゼロではない ([*Ha 11a*] 参照)、しかし、一般に $S_k(Sp(n,\mathbb{Z}))$ に属するヘッケ作用素の同時固有関数の $1st$ フーリエ・ヤコビ係数がゼロでないかどうかという問題の答えは、まだ知られていない。特に $n = 2$ の場合、つまり次数 2 の $S_k(Sp(2,\mathbb{Z}))$ の場合は、*Kohnen-Skoruppa* [*KS 89*] の結果により、$1st$ フーリエ・ヤコビ係数の非零がいえれば、その次数 2 のジーゲル保型形式のスピノル L-関数の解析接続と関数等式の別証明が与えられることになり、重要である。講演の際に述べることはできなかったが、ここで吉田氏に感謝したい。

埋め込み $\mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_3$ による G の pullback を考える。

$$G\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right) = \sum_h \mathcal{F}_{h,,g}(\tau) h(\omega) \tag{3.1}$$

ここで、$\tau \in \mathfrak{H}_2$、$\omega \in \mathfrak{H}_1$ で上記の和の h は $S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ のヘッケ作用素の同時固有関数で、基底をはしる。

上記で $g \in S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ から $G \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4))$ を構成したが、一方において、$f \in S_{2k-2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ からは志村対応で f に対応する $\hat{f} \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ が存在する。そこで、上記 (3.1) の G の展開を用いて、

$$\mathcal{F}_{f,g} := \mathcal{F}_{\hat{f},g}$$

と定めることにする。$\mathcal{F}_{f,g} \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ となることは、G の保型性と、プラス空間の定義から分かる。これにより、k が偶数の場合は、写像

$$S_{2k-2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \otimes S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \to S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4)) \qquad ((f,g) \mapsto \mathcal{F}_{f,g})$$

が得られる。

Remark. 上記の写像は、$S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z})) \otimes S_{2k-4}(SL(2,\mathbb{Z}))$ の代わりに、*Kohnen* プラス空間の 2 つからの写像

$$S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4)) \otimes S^+_{k-\frac{3}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4)) \to S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$$

と見たほうが、双線形写像になるので自然である、と以前 *Zagier* 氏によりご指摘を頂いた。確かにそのほうが自然ではあるが、[*HI 05*] での予想は重さ整数の保型形式の組からのリフトとしているので、この論説では、[*HI 05*] に従うこととする。

定理 2.1 を証明するために、示すべきことは、(1) $\mathcal{F}_{f,g}$ がヘッケ作用素の同時固有関数、(2) $\mathcal{F}_{f,g}$ の L-関数が f と g の L-関数の積で書き表せる、という二点である。(1) と (2) について、次の節で解説を与える。

4 重さ半整数ジーゲル保型形式 G の Fourier-Jacobi 展開と一般化マース関係式

前節で定めた G の Fourier-Jacobi 展開を考察し、その一般化マース関係式をこの節で述べたい。

4.1　G の Fourier-Jacobi 展開

k を偶数とし、関数 $G \in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4))$ を 3 節で与えたものとする。つまり、G はヘッケ作用素の同時固有関数 $g \in S_{2k-4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ から池田リフト、Fourier-Jacobi 展開、Eichler-Zagier-伊吹山対応の 3 つを経由することで構成できた。

定理 2.1 を証明する為に、G の Fourier-Jacobi 展開を考える

$$G\left(\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ {}^t z & \omega \end{smallmatrix}\right)\right) = \sum_{m \equiv 0,3 \mod 4} \phi_m(\tau, z) q^m,$$

ここで、$\tau \in \mathfrak{H}_2$, $\omega \in \mathfrak{H}_1$, $z \in M_{2,1}(\mathbb{C})$ であり、G の Fourier 係数がプラス空間の条件を満たすので、自然数 m は $m \equiv 0, 3 \mod 4$ となるものをはしる。ϕ_m は重さ $k - \frac{1}{2}$ の指数 m のヤコビ形式となる。

Remark. ϕ_m の保型性は、G の保型性より示せるが、その群はフルモジュラー $Sp(2,\mathbb{Z})$ ではなくレベル 4、つまり $\Gamma_0^{(2)}(4)$ に関してである。ただし、G はプラス空間の元であるので、ϕ_m のフーリエ係数にもある条件がつく。つまり、ϕ_m は重さが半整数ではあるが、ヤコビ形式の中のプラス空間にあたるような部分空間に属していて、レベルが 1 であるとみなせる。

4.2　一般化マース関係式

斎藤・黒川リフトの古典的な証明には、ヤコビ形式の指数を変える作用素 V_l が重要であったように、重さ半整数のヤコビ形式の空間に対しても、指数を変える作用素を導入することができ、リフトの証明において有用である。

$J^{(2)}_{k,m}$ を次数 2、重さ k、指数 m のヤコビ形式のなす空間とし、p を奇素数とする。$i = 1$, 2 に対して、

$$V^{(2)}_{p,i} \;:\; J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},m} \to J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},mp^2}$$

となる作用素 $V^{(2)}_{p,i}$ が定義できる。(cf. [Ha 11b].) この $V^{(2)}_{p,i}$ はヘッケ作用素のように、ヤコビ群での両側剰余類を片側剰余分解し、その代表元の作用の和として定義できる。$V^{(2)}_{p,1}$ と $V^{(2)}_{p,2}$ の二つ存在する理由は、それぞれ $\mathrm{diag}(1, p, p^2, p)$ と $\mathrm{diag}(1, 1, p^2, p^2)$ に対応しており、次数 2 の重さ半整数を考察しているからであるが、詳しい説明は省略する。$p = 2$ に対しても、同様に $V^{(2)}_{2,i}$ を定義できるが、その場合は $J^{(2)}_{k-\frac{1}{2},m}$ の部分空間を考察する必要がある。

また次の作用素を定義する。

$$U_l^{(2)} \ : \ J_{k-\frac{1}{2},m}^{(2)} \to J_{k-\frac{1}{2},ml^2}^{(2)}$$

ここで、この写像は、$\phi \in J_{k-\frac{1}{2},m}^{(2)}$ に対し、$\phi(\tau, z) \mapsto \phi(\tau, lz)$ で与えられる。(ただし、$\tau \in \mathfrak{H}_2$、$z \in M_{2,1}(\mathbb{C})$.) 次の命題を得る。

命題 4.1. 任意の素数 p と任意の自然数 m に対し、次の 2 つの等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\phi_m|V_{p,1}^{(2)} &= p\, b(p)\, \phi_m|U_p + \phi_{mp^2} + p^{k-2}\left(\frac{-m}{p}\right)\phi_m|U_p + p^{2k-3}\phi_{\frac{m}{p^2}}|U_{p^2}, \\
\phi_m|V_{p,2}^{(2)} &= (p^{2k-4} - p^{2k-6})\, \phi_m|U_p \\
&\qquad + b(p)\left(\phi_{mp^2} + p^{k-2}\left(\frac{-m}{p}\right)\phi_m|U_p + p^{2k-3}\phi_{\frac{m}{p^2}}|U_{p^2}\right).
\end{aligned}$$

ここで、$b(p)$ は $g \in S_{2k-4}(SL(2,\mathbb{Z}))$ の p 番目のフーリエ係数である。また、m が p^2 で割れないときは、$\phi_{\frac{m}{p^2}} \equiv 0$ とする。$\left(\frac{*}{p}\right)$ は二次剰余記号であり、$p = 2$ のときは、$\left(\frac{t}{2}\right) = (-1)^{\frac{t^2-1}{8}}$ ($t \equiv 1 \mod 2$ のとき)、$\left(\frac{t}{2}\right) = 0$ ($t \equiv 0 \mod 2$ のとき) である。

この命題 4.1 の証明は次節で説明したい。この命題 4.1 が補題 1.2 で記述したマース関係式の、次数 3 重さ半整数での拡張である。

Remark. 命題 *4.1* は補題 *1.3* と違い、$b(p)$ が現れることが特徴である。つまり、関係式は g のとり方に依存する。また、指数が p 倍ではなく、p^2 倍で移りあうことにも注意したい。

重さが整数の場合の、高次元ジーゲル保型形式の一般化マース関係式については、山崎 [Yz 86, Yz 89]、Kohnen [Ko 02]、Kohnen-小嶋 [KK 05]、山名 [Yn 10]、林田 [Ha 11a] などにより得られている。重さが半整数の場合は、次数 2 の場合に谷川 [Tn 86] により得られていた。

4.3 命題 4.1 から定理 2.1 の証明

この小節では、一般化マース関係式 (命題 4.1) を用いて、定理 2.1 を示す。

記号 $\tilde{T}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & p & & \\ & & p^2 & \\ & & & p \end{pmatrix}$ と $\tilde{T}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & p^2 & \\ & & & p^2 \end{pmatrix}$ をそれぞれ、$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & p & & \\ & & p^2 & \\ & & & p \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & p^2 & \\ & & & p^2 \end{pmatrix}$ の両側剰余に対応する、$S_{k-\frac{1}{2}}^{+}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ に作用するヘッケ作用素とする。

補題 1.3 と同様に次が成り立つ。

補題 4.2. ϕ_m を G のフーリエ・ヤコビ展開に現れた m 番目のフーリエ・ヤコビ係数とする。ϕ_m は重さ $k-\frac{1}{2}$、指数 m のヤコビ尖点形式であり、また次を満たす。

(1) $\phi_m(\tau,0)\in S^{+}_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4))$

(2) 任意の素数 p に対し、$(\phi_m|V^{(2)}_{p,1})(\tau,0) = (\phi_m(\tau,0))|\tilde{T}\begin{pmatrix}1&&&\\&p&&\\&&p^2&\\&&&p\end{pmatrix}$ および、$(\phi_m|V^{(2)}_{p,2})(\tau,0) = (\phi_m(\tau,0))|\tilde{T}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&p^2&\\&&&p^2\end{pmatrix}$ が成り立つ。

これらは、定義より簡単に示せる。詳しい計算は省略する。□

命題 4.1 と補題 4.2 より

$$
\begin{aligned}
&(\phi_m(\tau,0))|\tilde{T}\begin{pmatrix}1&&&\\&p&&\\&&p^2&\\&&&p\end{pmatrix} = (\phi_m|V^{(2)}_{p,1})(\tau,0)\\
&= p\,b(p)\,\phi_m(\tau,0) + \left(\phi_{p^2m}(\tau,0) + \left(\frac{-m}{p}\right)p^{k-2}\phi_m(\tau,0) + p^{2k-3}\phi_{\frac{m}{p^2}}(\tau,0)\right)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
&G\left(\begin{pmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{pmatrix}\right)\Big|_{\tau}\tilde{T}\begin{pmatrix}1&&&\\&p&&\\&&p^2&\\&&&p\end{pmatrix} = \sum_m\left(\phi_m(\tau,0)|\tilde{T}\begin{pmatrix}1&&&\\&p&&\\&&p^2&\\&&&p\end{pmatrix}\right)q^m\\
&= p\,b(p)\sum_m \phi_m(\tau,0)q^m\\
&\quad + \sum_m\left(\phi_{p^2m}(\tau,0) + \left(\frac{-m}{p}\right)p^{k-2}\phi_m(\tau,0) + p^{2k-3}\phi_{\frac{m}{p^2}}(\tau,0)\right)q^m\\
&= p\,b(p)\,G\left(\begin{pmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{pmatrix}\right) + G\left(\begin{pmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{pmatrix}\right)\Big|_{\omega}\tilde{T}(p^2).
\end{aligned}
$$

ここで、$G\left(\left(\begin{smallmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{smallmatrix}\right)\right)|_\tau$ と $G\left(\left(\begin{smallmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{smallmatrix}\right)\right)|_\omega$ はそれぞれ、$G\left(\left(\begin{smallmatrix}\tau&0\\0&\omega\end{smallmatrix}\right)\right)$ を τ と ω の関数とみて、ヘッケ作用素を作用させている。(それぞれ、次数 2 と 1 のプラス空間の元である。) また、$\tilde{T}(p^2)$ は Kohnen プラス空間に作用するヘッケ作用素で、$h(\omega)=\sum_m c_m q^m \in S^{+}_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ に対し、

$$
(h|\tilde{T}(p^2))(\omega) := \sum_m\left(c_{mp^2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}m}{p}\right)p^{k-2}c_m + p^{2k-3}c_{\frac{m}{p^2}}\right)q^m
$$

と定義される。

更に、$G\left(\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)\right) = \sum_h \mathcal{F}_{h,g}(\tau)h(\omega)$ と一意に分解され、$\mathcal{F}_{f,g} = \mathcal{F}_{\hat{f},g}$ であったので、

$$\mathcal{F}_{f,g}|\tilde{T}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & p & & \\ & & p^2 & \\ & & & p\end{pmatrix} = (p\,b(p) + a(p))\mathcal{F}_{f,g}$$

となる。ここで、$a(p)$ は $\hat{f}$ の $\tilde{T}(p^2)$ でのヘッケ固有値であり、つまり、f の p 番目のフーリエ係数である。同様に、命題 4.1 の 2 つ目の等式から

$$\mathcal{F}_{f,g}|\tilde{T}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & p^2 & \\ & & & p^2\end{pmatrix} = (p^{2k-4} - p^{2k-6} + a(p)b(p))\mathcal{F}_{f,g}$$

を得る。

これらのことより、$\mathcal{F}_{f,g}$ がヘッケ作用素の同時固有関数となることが分かり、またヘッケ固有値もわかっているので、$\lambda_1(p) = p\,b(p) + a(p)$ と $\lambda_2(p) = p^{2k-4} - p^{2k-6} + a(p)b(p)$ を $\mathcal{F}_{f,g}$ の固有値とすると、$\mathcal{F}_{f,g}$ の L-関数は

$$\begin{aligned}
&L(s, \mathcal{F}_{f,g}) \\
&= \prod_p \left(1 - \lambda_1(p)p^{-s} + (p\lambda_2(p) + p^{2k-5}(1+p^2))p^{-2s} - \lambda_1(p)p^{2k-3-3s} + p^{4k-6-4s}\right)^{-1} \\
&= \prod_p \left\{\left(1 - b(p)\,p^{1-s} - p^{2k-3-2s}\right)\left(1 - a(p)\,p^{-s} - p^{2k-3-2s}\right)\right\}^{-1} \\
&= L(s-1, g)\,L(s, f)
\end{aligned}$$

となり、命題 4.1 から主結果 (定理 2.1) が得られる。

5 命題 4.1 の証明の概略

命題 4.1 を証明するために、次の 5 つを考察する。

1. 重さ k、指数 1 のヤコビ形式の、行列指数でのフーリエ・ヤコビ展開。
2. 重さ k、行列指数 $\mathcal{M}$ のヤコビ形式と重さ $k-1/2$、整数指数 $\det(2\mathcal{M})$ のヤコビ形式との対応。及び、それぞれの空間に作用する作用素との可換性。
3. 命題 4.1 の一般化マース関係式をジーゲル・アイゼンシュタイン級数の場合で示し、池田リフトの場合に適用する。
4. S. Böcherer による、ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ・ヤコビ係数とヤコビ・アイゼンシュタイン級数との対応の公式の特別な場合。
5. ヤコビ・アイゼンシュタイン級数へのインデックス・チェンジ作用素の作用の計算。

5.1　ヤコビ形式のフーリエ・ヤコビ展開

$I_1(g)(\tau,z)$ を 3 節で定めた、次数 3、指数 1 で重さ k のヤコビ形式とする。ここで $(\tau,z)\in\mathfrak{H}_3\times M_{3,1}(\mathbb{C})$ である。$\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ {}^tz & \omega\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{H}_4$ ($\tau\in\mathfrak{H}_3$、$\omega\in\mathfrak{H}_1$、$z\in M_{3,1}(\mathbb{C})$) に対し、

$$I_1(g)(\tau,z)e^{2\pi i\omega}=\sum_{\mathcal{M}\in Sym_2^*}\phi_{\mathcal{M}}(\tau',z')e^{2\pi i\mathrm{Tr}(\mathcal{M}\omega')}$$

と展開すると、各 $\phi_{\mathcal{M}}$ は次数 2、重さ k、指数 $\mathcal{M}$ のヤコビ尖点形式となる。上記の和で、Sym_2^* はサイズが 2 の半整数対称行列の全体であり、$\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ {}^tz & \omega\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\tau' & z'\\ {}^tz' & \omega'\end{pmatrix}$ ($\tau'\in\mathfrak{H}_2$、$\omega'\in\mathfrak{H}_2$、$z'\in M_{2,2}(\mathbb{C})$) としている。上記の和の $\mathcal{M}$ が $\mathcal{M}=\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ * & 1\end{smallmatrix}\right)$ となることに注意。(ただし、$I_1(g)$ でなくても、$J_{k,1}^{(3)\,cusp}$ の任意の元に対して、同様の展開を得る。) これにより、写像

$$J_{k,1}^{(3)\,cusp}\to\bigoplus_{\substack{\mathcal{M}\in Sym_2^*\\ \mathcal{M}=\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ * & 1\end{smallmatrix}\right)}}J_{k,\mathcal{M}}^{(2)\,cusp}$$

が得られる。ここで、$J_{k,\mathcal{M}}^{(2)\,cusp}$ は次数 2、重さ k、指数 $\mathcal{M}$ のヤコビ尖点形式の空間とした。(一般次元かつ行列指数のヤコビ形式の定義については、Ziegler [Zi 89] 参照。)

Remark. $\phi_{\mathcal{M}}$ は、3 節の $I(g)$ (g の次数 4 への池田リフト) をフーリエ・ヤコビ展開した場合の $\mathcal{M}$ 番目のフーリエ・ヤコビ係数と同じヤコビ形式となる。

これまでの写像をまとめると、以下の通りである。

$$\begin{tikzcd}
 & I(g)\in S_k(\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})) \arrow[d, "\text{1st F-J}"] & \\
 & I_1(g)\in J_{k,1}^{(3)\,cusp} \arrow[r, "\text{E-Z-I}"'] \arrow[d, "\text{F-J}"] & G\in S^+_{k-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^{(3)}(4)) \arrow[d, "\text{F-J}"] \\
 & \{\phi_{\mathcal{M}}\}_{\mathcal{M}}\in\bigoplus_{\substack{\mathcal{M}\in Sym_2^*\\ \mathcal{M}=\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ * & 1\end{smallmatrix}\right)}}J_{k,\mathcal{M}}^{(2)\,cusp} \arrow[r, "\iota"] & \{\phi_m\}_m\in\bigoplus_{m\equiv 0,3 \bmod 4}J_{k-\frac{1}{2},m}^{(2)\,cusp} \\
g\in S_{2k-4}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \arrow[uuur, "\text{Ikeda lift}"] & &
\end{tikzcd}$$

ここで、$J^{(2)\,cusp}_{k-\frac{1}{2},m}$ は次数 2、重さ $k-\frac{1}{2}$、指数 m のヤコビ尖点形式の空間である。また、上図の最後の写像 ι については次の 5.2 節で解説したい。

$\{\phi_m\}_m$ の間で一般化マース関係式を証明する代わりに、$\{\phi_{\mathcal{M}}\}_{\mathcal{M}}$ の間で一般化マース関係式を証明したい。

5.2 行列指数 (重さ整数) と整数指数 (重さ半整数) のヤコビ形式の対応

Eichler-Zagier-伊吹山により、指数 1 の重さ整数のヤコビ形式の空間と一般次元プラス空間 (重さ半整数のジーゲル保型形式の部分空間) との空間の対応が知られていた。両方の空間の関数のフーリエ・ヤコビ展開を考察することで、行列指数 (重さ整数) のヤコビ形式の部分空間と整数指数 (重さ半整数) のヤコビ形式の部分空間との対応が得られる。この行列指数 (重さ整数) から整数指数 (重さ半整数) へのヤコビ形式の空間の写像を ι とする。

また、$J^{(2)\,cusp}_{k-\frac{1}{2},m}$ に指数を p^2 倍する写像 $V^{(2)}_{p,i}$ $(i=1,2)$ と $U^{(2)}_p$ が定義できるが (ただし $p=2$ の場合は、$J^{(2)\,cusp}_{k-\frac{1}{2},m}$ の部分空間に制限)、同様に、$J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}}$ にも指数を $\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]$ に変える写像が定義できる (ここで、$A[B] := {}^tBAB$ はジーゲルの記号) この写像を、それぞれ $V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ $(i=1,2)$、$U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ とおく

$$
\begin{aligned}
V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i} &: J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}} \to J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]} \qquad (i=1,2),\\
U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} &: J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}} \to J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]}.
\end{aligned}
$$

行列指数ヤコビ形式 $\phi_{\mathcal{M}}$ と整数指数ヤコビ形式 ϕ_m を対応させることが出来たが、これは、互いのフーリエ係数を同一視することにより対応が得られる。同様に、フーリエ係数を見比べることで、$\phi_{\mathcal{M}}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ には、$\phi_m|V^{(2)}_{p,i}$ が対応し、$\phi_{\mathcal{M}}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ には、$\phi_m|U^{(2)}_p$ が対応することが分かる。つまり、次の可換図を得る。

$$
\begin{array}{ccc}
J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}} & \to & J^{(2)\,cusp}_{k-\frac{1}{2},m} \\
\downarrow & & \downarrow \\
J^{(2)\,cusp}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]} & \to & J^{(2)\,cusp}_{k-\frac{1}{2},mp^2}
\end{array}
$$

以上により、命題 4.1 を重さ半整数で指数整数のヤコビ形式 $\{\phi_m\}_m$ で証明する代わりに、重さ整数で行列指数のヤコビ形式 $\{\phi_{\mathcal{M}}\}_{\mathcal{M}}$ で証明すれば命題 4.1 を示せたことになる。

Remark. $p=2$ が割と簡単に扱えるようになる、というのも重さ整数のヤコビ形式で考察するメリットの一つである。

5.3 一般化マース関係式のジーゲル・アイゼンシュタイン級数の場合

池田リフトの性質の一つとして、リフトで得られるジーゲル尖点形式のフーリエ係数がジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数と同じような振る舞いをする、というのがある。これは、リフトのフーリエ係数がジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数と同じような形をしているからであり、詳しくは、池田 [Ik 01] あるいは、この報告集の河村 [Ka 11] を参照されたい。$\phi_{\mathcal{M}}$ のフーリエ係数は $I(g)$ のフーリエ係数と同一なので、$\phi_{\mathcal{M}}$ は次数 4 のジーゲル・アイゼンシュタイン級数の $\mathcal{M}$ 番目のフーリエ・ヤコビ係数とおなじ振る舞いをする。また 5.2 節の $V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ $(i=1,2)$ と $U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ はヘッケ作用素のように両側剰余類の片側剰余の代表系の作用の和として記述できるので、これらの作用素を作用させた後のフーリエ係数の形も分かる。以上の考察より、尖点形式で命題 4.1 を証明する代わりに、ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ・ヤコビ係数達で命題 4.1 の関係式 (ただし十分多くの重さ k について) がいえれば、尖点形式でも同じ関係式が得られることになる。

5.4 ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ・ヤコビ係数とヤコビ・アイゼンシュタイン級数の関係式

この小節では、ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ・ヤコビ係数とヤコビ・アイゼンシュタイン級数の間の関係式について、指数が $\mathcal{M}=\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right) \in Sym_2^*$ の場合について述べる。この関係式は、Boecherer [Bo 83, Satz 7] により得られた一般の行列指数の場合を、行列のサイズが 2 で右下が 1 という特別な場合に制限した時の関係式である。尚、この関係式は次数 2 のみでなく、一般の次数でも成り立つので、次数は一般の自然数 n とする。

関係式を述べるために、いくつか記号を用意する。$\mathcal{M}=\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sym}_2^*$ をサイズが 2 の正定値の半整数対称行列とする。$m=\det(2\mathcal{M})$ とおき、D_0 を $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ の判別式とする。$f := \sqrt{\frac{m}{|D_0|}}$ とおくと、$m \equiv 0,3 \bmod 4$ であるので、f は自然数である。$h_{k-\frac{1}{2}}(m)$ を重さ $k-\frac{1}{2}$ の Cohen 型アイゼンシュタイン級数 ([Co 75] 参照) の m-番目のフーリエ

係数とする ([Co 75, p.272] の $H(k-1,m)$ に等しい)。

$$h_{k-\frac{1}{2}}(m) = h_{k-\frac{1}{2}}(|D_0|)\, m^{k-\frac{3}{2}} \sum_{d|f} \mu(d) \left(\frac{D_0}{d}\right) d^{1-k} \sigma_{3-2k}\left(\frac{f}{d}\right)$$

という関係式が成り立つ。ここで、$\sigma_l(a) = \sum_{d|a} a^l$ であり、μ はメビウス関数である。関数 g_k を $g_k(m) := \sum_{d|f} \mu(d)\, h_{k-\frac{1}{2}}\Big(\frac{m}{d^2}\Big)$ とおくと、$g_k(p^2m) = \Big(p^{2k-3} - \Big(\frac{-m}{p}\Big) p^{k-2}\Big) g_k(m)$ という関係式が任意の素数 p に対して成り立つ。(k が奇数の場合は、$\Big(\frac{-m}{p}\Big)$ の部分を $\Big(\frac{m}{p}\Big)$ に代えると同様に成立する。)

$e^{(n-2)}_{k,\mathcal{M}}$ を次数 n の重さ k のジーゲル・アイゼンシュタイン級数の $\mathcal{M}$ 番目のフーリエ・ヤコビ係数とし、$E^{(n-2)}_{k,\mathcal{M}}$ を次数 $n-2$ の重さ k の指数 $\mathcal{M}$ のヤコビ・アイゼンシュタイン級数 (定義は [Zi 89, Theorem 2.1] 参照) とする。この時、次の関係式が成り立つ。

命題 5.1. $k > n+1$ の時、

$$e^{(n-2)}_{k,\mathcal{M}}(\tau, z) = \sum_{d|f} g_k\Big(\frac{m}{d^2}\Big) E^{(n-2)}_{k,\mathcal{M}[{}^tW_d{}^{-1}]}(\tau, zW_d)$$

となる。ここで、それぞれの d に対して、二つの条件 $\det(W_d) = d$ および $W_d^{-1}\mathcal{M}{}^tW_d{}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right) \in Sym_2^*$ を満たす行列 $W_d \in M_{2,2}(\mathbb{Z})$ をとる。上記の和は、W_d のとり方によらない。

この証明は、[Bo 83, Satz 7] の公式からの直接の計算による。

この命題により、ジーゲル・アイゼンシュタイン級数 (のフーリエ・ヤコビ係数 $e^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$) での命題 4.1 の公式を得るためには、$e^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$ の代わりに $E^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$ に $V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ を作用させたものを計算すればよい、ということになる。

5.5 ヤコビ・アイゼンシュタイン級数への指数を変える作用素の作用

最後に $E^{(2)}_{k,\mathcal{M}}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ $(i = 1,2)$、つまりヤコビ・アイゼンシュタイン級数 $E^{(2)}_{k,\mathcal{M}}$ に $V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ を作用素させた関数の計算を行う。記号 $\mathcal{M}$、m、D_0、f などは 5.4 節と同じものを用いる。

任意の自然数 n に対し、次数 n のジーゲル・アイゼンシュタイン級数がヘッケ作用素の同時固有関数となることは良く知られているが、これは、次のような行列計算

から分かる。$E_k^{(n)} := \sum_{\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma} 1|_k\gamma$ を次数 n のジーゲル・アイゼンシュタイン級数とする。(cf. 軍司 [Gu 11b].)（ここで、$\Gamma := \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$, $\Gamma_0 := \left\{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma\right\}$ とおいた。）$\alpha \in M_{2n}(\mathbb{Z}) \cap GL_{2n}^+(\mathbb{Q})$ に対し、$M_0 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma\alpha\Gamma\right\}$ とおく。このとき、両側剰余 $\Gamma\alpha\Gamma$ で定まるヘッケ作用素の作用に対して

$$\begin{aligned} E_k^{(n)}|\Gamma\alpha\Gamma &= \sum_{\gamma'\in\Gamma\backslash\Gamma\alpha\Gamma}\ \sum_{\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma} 1|_k\gamma\gamma' = \sum_{\gamma''\in\Gamma_0\backslash\Gamma\alpha\Gamma} 1|_k\gamma'' \\ &= \sum_{\delta\in\Gamma_0\backslash M_0}\ \sum_{\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma} 1|_k\delta\gamma = \sum_{\delta\in\Gamma_0\backslash M_0} c_{\delta,k} \sum_{\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma} 1|_k\gamma \end{aligned}$$

となる。ここで、$c_{\delta,k}$ は定数である。つまり、$E_k^{(n)}$ はヘッケ作用素の作用で固有関数である。

ヤコビ・アイゼンシュタイン級数 $E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}$ も $E_k^{(n)}$ と同じように、ヤコビ群に関する代表系の作用の和で定義されている。また、$V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ の作用も、ある両側剰余類を片側剰余分解したときの、代表系の作用の和で与えられる。ただし、$V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ の作用は、ヤコビ形式の指数を変えるので $E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}$ は $V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ の固有関数にはなり得ない。この場合、$E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ は $E^{(2)}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]}$、$E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$、$E^{(2)}_{k,\mathcal{M}[X^{-1}\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}]}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right){}^tX\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ の 3 つの関数の和として具体的に記述できる。（3 つ目の関数は、$p|f$ となる場合にのみ現れ、行列 X は 行列式 1 で $\mathcal{M}[X^{-1}\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}]$ が半整数対称行列となるような行列である。）例えば、$p\nmid f$ のときは、

$$\begin{aligned} E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),1} &= \left(p^{-2k+3} + p^{-4k+8} + p^{-4k+7} - p^{-3k+5}\left(\frac{-m}{p}\right)\right) E_{k,\mathcal{M}}^{(2)}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \\ &\quad + \left(p^{-2k+4} + p^{-3k+5}\left(\frac{-m}{p}\right)\right) E^{(2)}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]}. \end{aligned}$$

などとなる。先ほどと同様に、行列計算からこのような関係式が得られるが、サイズ 2 の指数に関するヤコビ群を扱っている関係上、上記のような等式を得るために、次の形の一般化ガウス和 $G_p^{2,l}(A)$ の値を求めることも必要となる。これは、サイズ 2 の半整数対称行列 $A \in Sym_2^*$ と自然数 $l \le 2$ に対し、

$$G_p^{2,l}(A) := \sum_{\substack{x'={}^tx'\in M_{2,2}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ rank_p(x')=l}} e\left(\frac{1}{p}\mathrm{tr}(Ax')\right).$$

で定義される。この一般化ガウス和は、斎藤 [Sa 91] で扱われている一般化ガウス和のサイズが 2 の特別の場合であることに注意する。奇素数 p に対しては、[Sa 91] の結果を

用いて計算ができる。(ちなみに [Sa 91, Proposition 1.9 (1)] の式の右辺の $q^{\frac{n-(t+1)}{2}}$ は $q^{n-\frac{t+1}{2}}$ の誤植。) 行列 A のサイズが 2 なので、直接の計算でも求まる。

$E^{(2)}_{k,\mathcal{M}}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ の詳しい形は、[Ha 11b] を参照されたい。

Remark. $p = 2$ の場合は、計算が少し複雑になるが、奇素数の場合と同じ形の $E^{(2)}_{k,\mathcal{M}}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ の関係式が得られる。

以上の計算と、命題 5.1 を用いることで、$e^{(2)}_{k,\mathcal{M}}|V^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),i}$ を 3 つの関数 $e^{(2)}_{k,\mathcal{M}[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]}$、$e^{(2)}_{k,\mathcal{M}}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$、$e^{(2)}_{k,\mathcal{M}[X^{-1}\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}]}|U^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)^{t}X\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ の和で具体的に書きあらわすことができ、これは、任意の $k > 5$ に対して成り立つ関係式である。つまり十分多くの k について成り立つ関係式であるので、5.3 節の考察より、池田リフトで得られる尖点形式にも適用することができる。これにより、次数 3 の重さ半整数ジーゲル保型形式のフーリエ・ヤコビ係数に関する一般化マース関係式、つまり命題 4.1 を得たことになる。

参考文献

[Ao 11] 青木宏樹: 「Borcherds product」, 本報告集

[Bo 83] S. Boecherer: Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen. I, *Math.Z.* **183** (1983), 21–46.

[Co 75] H. Cohen: Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, *Math. Ann.* **217** (1975), 171–185.

[EZ 85] M. Eichler and D. Zagier: Theory of Jacobi Forms, Progress in Math. **55**, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, (1985).

[Ha 11a] S. Hayashida: Fourier-Jacobi expansion and the Ikeda lift, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **81** no.1 (2011), 1–17.

[Ha 11b] S. Hayashida: Maass relations for generalized Cohen-Eisenstein series of degree two and of degree three, preprint.

[HI 02] S. Hayashida and T. Ibukiyama: Siegel modular forms of half integral weights and a lifting conjecture. (Automorphic forms, automorphic representations and automorphic L-functions over algebraic groups), 数理解析研究所考究録 No. 1173 (2000), 98–112.

[HI 05] S. Hayashida and T. Ibukiyama: Siegel modular forms of half integral weights and a lifting conjecture, *Journal of Kyoto Univ.* **45** no.3 (2005) 489–530.

[He 10] B. Heim: On the Spezialschar of Maass, *Int. J. Math. Math. Sci.* (2010) 15pp.

[Gu 11a] 軍司圭一: 「Siegel 保型形式の Hecke 理論」, 本報告集

[Gu 11b] 軍司圭一: 「Siegel Eisenstein 級数の Fourier 展開」, 本報告集

[Ib 92] T. Ibukiyama: On Jacobi forms and Siegel modular forms of half integral weights, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **41** no.2 (1992), 109–124.

[Ib 08] T. Ibukiyama: A conjecture on a Shimura type correspondence for Siegel modular forms, and Harder's conjecture on congruences, *Modular forms on Schiermonnikoog, Cambridge Univ. Press, Cambridge*, (2008) 107–144.

[Ib 11] 伊吹山知義: 「Saito Kurokawa for level N」, 本報告集

[Ic 05] A. Ichino: Pullbacks of Saito-Kurokawa lifts. *Invent. Math.* **162** no. 3, (2005), 551–647.

[Ik 01] T. Ikeda: On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree 2n, *Ann. of Math. (2)* **154** no.3, (2001), 641–681.

[Ik 06] T. Ikeda: Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's conjecture, *Duke Math. J.* **131** no.3, (2006), 469–497.

[Ka 11] 河村尚明：「Ikeda リフト」, 本報告集

[Ko 02] W. Kohnen : Lifting modular forms of half-integral weight to Siegel modular forms of even genus, *Math, Ann.* **322** (2002), 787–809.

[KK 05] W. Kohnen and H. Kojima : A Maass space in higher genus, *Compos. Math.* **141** No.2, (2005), 313–322.

[KS 89] W. Kohnen and N. -P. Skoruppa: A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two, *Invent. Math.* **95** (1989), 541–558.

[Ku 78] N. Kurokawa: Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two. *Invent. Math.* **49** (1978), 149–165.

[Sa 91] H. Saito: A generalization of Gauss sums and its applications to Siegel modular forms and L-functions associated with the vector space of quadratic forms, *J. Reine Angew. Math.* **416** (1991), 91–142.

[Sk 11] 坂田裕: 「Shimura 対応」, 本報告集

[Su 11] 菅野孝史: 「Oda Lift」, 本報告集

[Tk 99] K. Takase: On Siegel modular forms of half-integral weights and Jacobi forms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** No. 2, (1999), 735–780.

[Tk 11] 高瀬幸一: 「重さ半整数の Siegel モジュラー形式と Jacobi 形式」, 本報告集

[Tn 86] Y. Tanigawa: Modular descent of Siegel modular forms of half integral weight and an analogy of the Maass relation. *Nagoya Math. J.* **102** (1986), 51–77.

[Yn 10] S. Yamana: Maass relations in higher genus, *Math. Z.* **265** No.2, (2010), 263–276.

[Yz 86] T. Yamazaki: Jacobi forms and a Maass relation for Eisenstein series, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.* **33** (1986), 295–310.

[Yz 89] T. Yamazaki: Jacobi forms and a Maass relation for Eisenstein series II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.* **36** (1989), 373–386.

[Zh 84] V. G. Zhuravlev: Euler expansions of theta transforms of Siegel modular forms of half-integral weight and their analytic properties, *Math. sbornik.* **123 (165)** (1984), 174–194.

[Zi 89] C. Ziegler: Jacobi forms of higher degree, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* **59** (1989), 191–224.

林田秀一

〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-30

大阪大学インターナショナルカレッジ兼理学研究科

Email : hayashida@math.sci.osaka-u.ac.jp