

”ON A DYNAMICAL TOP” の解説

高野 浩志*

上越教育大学 学校臨床研究コース 情報教育分野

943-8512 新潟県上越市山屋敷町1番地

2024年2月

概要

1896年にG.T.Walker氏がラトルバック（Wobble stoneやceltとも呼ばれている）という不思議な動きをするコマに関して”ON A DYNAMICAL TOP”[1]という題の論文を発表した。本レポートはこの解説である。

1 はじめに

ラトルバックはコマの一種で、さまざまなものがある。図1は「頑固な亀」というロシアのおもちゃである。楕円体のような底面をもち、上面に重り（ここでは亀）がある。これを手で回



図1: 頑固な亀：ロシア製のおもちゃ



図2: ナリカ社製ラトルバック

すのだが、上から見て亀が時計回りに向いている場合、ラトルバックを亀のしっぽ方向（上から

*e-mail:takano@juen.ac.jp

見て反時計回りに回すと、しばらくしてがたがたと振動し（ラトル）、そのうち亀の向いている方向（時計回りに）に回り出す。亀が左に向いている場合はこれの逆が起こる。また、図2はナリカ株式会社が販売しているラトルバックである。これも同様な反転を示す。ラトルバックによっては複数反転を示すものがあるが、摩擦によってエネルギーが散逸するため、筆者が実際に見たのは、せいぜい2回までである。youtubeには4回反転するもの¹や9回反転するもの²がある。

図3は楕円体とおもり2つが棒で結合しているラトルバックの図である。このラトルバックのシミュレーションが筆者のWebサイト[4]にあるので、興味のある方は訪れてほしい。図3中の $\tilde{e}_x, \tilde{e}_y, \tilde{e}_z$ は楕円体の形の幾何主軸である。棒の中心は楕円体の重心を通り、棒は楕円体の \tilde{e}_z 軸に垂直な平面内で回転ができる。

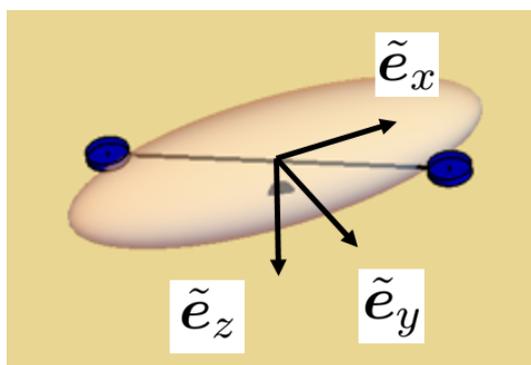


図3: 楕円体とおもり2つが棒で結合しているラトルバック

おもりを図3のように上からみて時計回りにすこしずらして配置し、（亀の場合、進行方向を時計回りに向かせた場合に対応する）ラトルバックを反時計回りに回すと、そのうちがたがたと振動して（ \tilde{e}_y 軸周りの振動）回転が止まり、反転して時計回りに回りだす。このシミュレーションは滑らない場合の運動なのでエネルギーが保存している。そのためしばらくすると、時計回りの回転のため横方向のゆっくりした振動（ \tilde{e}_x 軸周りの振動）が励起され回転が止まり、ふたたび反転して反時計回りに回りだす。このサイクルが繰り返される。

ラトルバックのような剛体には慣性テンソルを対角化する軸すなわち慣性主軸が存在する。おもりが無い場合、慣性主軸と楕円体の形の幾何主軸は一致するが、おもりのある場合、一致しない。この不一致が、奇妙な動きの原因の一つである。

ラトルバックの奇妙な動きに触発されて、いままで多くの人がラトルバックの運動を解析し論文を発表してきた。これら多数の論文の中で必ず引用されているのが、G.T.Walker（以下著者と呼ぶ）が1896年に発表した”ON A DYNAMICAL TOP”（以下、論文と呼ぶ）である。この論文はデジタルアーカイブ[2]としてWebで誰でも閲覧できる。また、1895年に学会講演要旨”Curious Dynamical Property of Celts”[3]も出していて、これもWebで閲覧できる。（2024年2月に確認）

筆者もラトルバックを研究し始めたときにこの論文を一読してみた。しかしよくわからなかった。その他ラトルバックに関する論文[5][6][7][8][9]を勉強し、筆者自信も論文[10]を書くことで、

¹<http://www.youtube.com/watch?v=tUi9he2KTe8>

²<http://www.youtube.com/>

ようやく”ON A DYNAMICAL TOP”を理解することができた。ラトルバックの研究を志す人たちの一助になることを目的にこの論文の解説を試みる。

2 論文の最初の部分

論文の最初の部分は概要にあたる。著者は E. H. Douty 氏からラトルバックを見せてもらい、この不思議な動きを研究しようと思ったようである。ラトルバックは Wobblestone や Celt と呼ばれていて、著者は celt という言葉を使っている。

著者は楕円体に円板をつけたものを作成し、動きを調べている。円板にはおもりがついているようで、この円板を回転させることで、慣性主軸と楕円体の幾何主軸をずれを生じさせている。作成したラトルバックの図が (fig 1) であるが、この図が論文にはないので形がよくわからないし、文章もわからない。論文が掲載されている巻を調べると、差し込み図はあったが、(fig 1) に対応するものは残念ながらなかった。

論文では、「1.」「2.」というように部分に分けられているが、タイトル等はない。そこで本レポートでは第1章、第2章と記述する。

論文では、楕円体におもりが乗っているラトルバックを考えている。第1章では、運動方程式の慣性主軸に関する成分を求めている。第2章では、近似を用いて p, q, n の3変数に関する運動方程式を求めている。 p, q はそれぞれ e_2 軸、 e_1 軸方向の振動に関する変数であり、 n は u 軸まわりの角速度である。第3章では、 $\theta = 0$ ($\beta = 0$) 場合、 q, p の固有振動がどのようなのか求めている。第4章では、 $\theta \neq 0$ の場合の振動の安定性を調べている。第5章では n^2 の大きさによって安定性がどうなるのか吟味している。第6章は、静止しているラトルバックの端をつついたときどのような $\dot{\omega}_3$ が生じるかを吟味するための準備がなされている。第7章では、 p 軸の端をつついたときの $\dot{\omega}_3$ の時間平均を求めてどの方向への回転が誘導されるかを議論している。第8章は第7章にひきつづき q 軸の端をつついたときどうなるかを議論している。第9章10章は一般的な場所をつついたときのことを議論している。

3 第1章

最初の文章から読み取っていこう。

1. Take the principal axes at the centre of gravity as axes of coordinates, so that OZ is directed vertically downwards in the position of equilibrium: of OX,OY the former is to be the axis of less moment of inertia.

「慣性主軸を座標軸とし、原点は重心と一致させる。OZが平衡位置で鉛直下方に向くようにする：OX,OYのうち、前者が慣性モーメントの小さい軸となる。」

この文を理解するための予備的知識を解説する。論文では、楕円体の底面を持ったラトルバックを考える。図4(a)のように、ラトルバックの形の幾何主軸の単位ベクトルを $\tilde{e}_x, \tilde{e}_y, \tilde{e}_z$ とし、

慣性主軸の単位ベクトルを e_x 、 e_y 、 e_z とする。原点は重心 O にある。 \tilde{e}_x 方向の長さを a 、 \tilde{e}_y 方向の長さを b 、 \tilde{e}_z 方向の長さを h とする。

重りが偏って乗っているために、慣性主軸は、幾何主軸と角度 θ だけずれている。また、重りは \tilde{e}_x, \tilde{e}_y 平面に乗っているため、 $\tilde{e}_z = e_z$ である。これを次式で表現する。

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_x \\ \tilde{e}_y \\ \tilde{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

図 4(b) のように、 $\theta > 0$ の場合は上から見て重りが \tilde{e}_x の軸よりも少し左側、反時計回り方向に乗っていることに対応する。

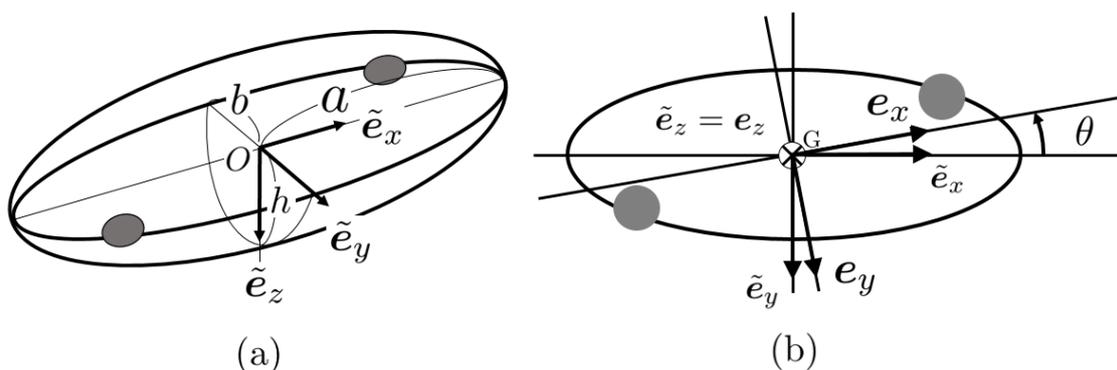


図 4: (a) 楕円体の形状、 \tilde{e}_i は幾何主軸。(b) e_i は慣性主軸、おもりが乗っているために角度 θ だけずれる。

論文中の OX 、 OY 、 OZ は慣性主軸なので、それぞれ e_x 、 e_y 、 e_z に対応している。 OZ は下向きに正としている。 OX 方向に関する慣性モーメントのほうが OY 方向に関する慣性モーメントより小さいと述べているので、 OX 方向は楕円体の長軸方向に対応している。

In the neighborhood of the point of contact the equation of the surface may be expressed in the form

$$z = h - \frac{1}{2}(\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 xy + \gamma_1 y^2), \quad (3.2)$$

and if p, q, r be in the direction-cosines of the normal at (x, y, z) , we shall have

$$\frac{p}{\alpha_1 x + \beta_1 y} = \frac{q}{\beta_1 x + \gamma_1 y} = \frac{r}{1} = 1, \quad (3.3)$$

and

$$x = \gamma' p - \beta q, \quad y = -\beta p + \alpha' q, \quad (3.4)$$

where

$$\frac{\alpha'}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma'}{\gamma_1} = \frac{1}{\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2}. \quad (3.5)$$

ラトルバックと床との接点を P とし、重心 O からの接点 P までの位置ベクトルを \mathbf{x}_p とする。位置ベクトル \mathbf{x}_p のラトルバックの形の幾何主軸に関する成分の値をそれぞれ \tilde{x}, \tilde{y} および \tilde{z} とし、慣性主軸に関する成分の値をそれぞれ x, y, z とすると、位置ベクトル \mathbf{x}_p は次式のように表せる。

$$\mathbf{x}_p = \tilde{x}\tilde{\mathbf{e}}_x + \tilde{y}\tilde{\mathbf{e}}_y + \tilde{z}\tilde{\mathbf{e}}_z = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \quad (3.6)$$

論文中の x, y, z はここでの x, y, z に対応している。

この表式を座標系がわかるような成分表記として、次式のように書くことにする。

$$\mathbf{x}_p = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})\tilde{\mathbf{e}} = (x, y, z)\mathbf{e}. \quad (3.7)$$

または、行列の積のルールを使って次式のようにも書くことにする。

$$\mathbf{x}_p = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_x \\ \tilde{\mathbf{e}}_y \\ \tilde{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$= (x, y, z) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

式 (3.1) を式 (3.8) に代入すると次式を得る。

$$\mathbf{x}_p = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_x \\ \tilde{\mathbf{e}}_y \\ \tilde{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

式 (3.9) と比較することで、 x, y, z と $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ の間に次式が成立することがわかる。

$$(x, y, z) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\tilde{x} \cos \theta - \tilde{y} \sin \theta, \tilde{x} \sin \theta + \tilde{y} \cos \theta, z), \quad (3.11)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, z) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, z) \quad (3.12)$$

\tilde{x}, \tilde{y} および \tilde{z} の値は楕円体の上の点で、幾何主軸に関する座標の値なので、次式を満たす。

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} + \frac{\tilde{z}^2}{h^2} = 1 \quad (3.13)$$

ただし、 $\tilde{e}_x, \tilde{e}_y, \tilde{e}_z$ 軸の方向にそれぞれ a cm, b cm, h cm の楕円体である。 $z = \tilde{z}$ に関して表せば、

$$z = h \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} \right)}, \quad (3.14)$$

となる。接点は底面に限られるので、+の符号をとっている。

接点の座標の値 x や y は $|x| < a, |y| < b$ であるので、 $|\frac{x}{a}| < 1, |\frac{y}{b}| < 1$ である。このことに注意して式 (3.12) を式 (3.14) に代入し、ルートを展開して2次の項までとると次式を得る。

$$z = h - \frac{1}{2}(\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 xy + \gamma_1 y^2), \quad (3.15)$$

ここで、

$$\alpha_1 \equiv h \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right), \quad (3.16)$$

$$\beta_1 \equiv -h \cos \theta \sin \theta \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right), \quad (3.17)$$

$$\gamma_1 \equiv h \left(\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2} \right) \quad (3.18)$$

である。式 (3.15) が論文の式 (3.2) に対応する。

パラメータ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ は長さの逆数の次元をもつ量である。これらの式から

$$\alpha_1 \beta_1 - \gamma_1^2 = \frac{h^2}{a^2 b^2} \quad (3.19)$$

という関係式が得られる。

接点 $(x, y, z)_e$ での法線単位ベクトルがどのように表されるか考えてみよう。接点 $(x, y, z)_e$ とすぐ近くの点 $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)_e$ は底面上の点なので、次式を満たす。

$$f(x, y, z) = f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0. \quad (3.20)$$

ここで、 $f(x, y, z)$ は

$$f(x, y, z) = z - h + \frac{1}{2}(\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 xy + \gamma_1 y^2), \quad (3.21)$$

である。 $f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0$ を展開すると、

$$f(x, y, z) + f_x \delta x + f_y \delta y + f_z \delta z = 0, \quad (3.22)$$

となる。ここで、

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_z \equiv \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (3.23)$$

である。 $f(x, y, z) = 0$ なので、

$$f_x \delta x + f_y \delta y + f_z \delta z = 0, \quad (3.24)$$

となる。ところで、 $(\delta x, \delta y, \delta z)_e$ は接点での接ベクトルなので、式 (3.24) はベクトル $(f_x, f_y, f_z)_e$ は接ベクトルに垂直な法線方向のベクトルであることを示している。したがって法線方向の単位ベクトル $\mathbf{u} = (p, q, r)_e$ は次式となる。

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} (f_x, f_y, f_z)_e. \quad (3.25)$$

式 (3.21) より

$$f_x = \alpha_1 x + \beta_1 y, \quad (3.26)$$

$$f_y = \beta_1 x + \gamma_1 y, \quad (3.27)$$

$$f_z = 1, \quad (3.28)$$

となる。 $|\frac{x}{a}| < 1, |\frac{y}{b}| < 1$ と式 (3.16) ~ 式 (3.18) より

$$|\sqrt{\alpha_1} x| < 1, |\sqrt{\gamma_1} y| < 1, |\sqrt{\beta_1} x| < 1, |\sqrt{\beta_1} y| < 1, \quad (3.29)$$

である。これらの2次を落とす線形近似を使うと、 $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \sim 1$ となり、次式を得る。

$$p = \frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \sim f_x = \alpha_1 x + \beta_1 y, \quad (3.30)$$

$$q = \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \sim f_y = \beta_1 x + \gamma_1 y, \quad (3.31)$$

$$r = \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \sim 1. \quad (3.32)$$

これらの式を著者は式 (3.3) のように表している。

また、 x, y を p, q で表せば

$$x = \gamma' p - \beta q, \quad y = \alpha' q - \beta p, \quad (3.33)$$

となる。ここで

$$\alpha' \equiv \frac{\alpha_1}{\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2}, \quad \beta \equiv \frac{\beta_1}{\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2}, \quad \gamma' \equiv \frac{\gamma_1}{\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2}, \quad (3.34)$$

である。 β にダッシュがついていないことに注意。これらは長さの次元を持つ量である。式 (3.33) と式 (3.34) がそれぞれ論文中の式 (3.4) と式 (3.5) に対応する。

$\tilde{x}, \tilde{y}, x, y, p, q$ の関係式をもう一度列挙し、 $\theta > 0$ の時にどういう方向に座標軸が向いているかを図5に示す。式 (3.11) (3.30) (3.31) より

$$x = \tilde{x} \cos \theta - \tilde{y} \sin \theta, \quad (3.35)$$

$$y = \tilde{x} \sin \theta + \tilde{y} \cos \theta, \quad (3.36)$$

$$p = \alpha_1 x + \beta_1 y, \quad (3.37)$$

$$q = \beta_1 x + \gamma_1 y, \quad (3.38)$$

であった。 x 軸は $y = 0$ の直線なので、式 (3.36) より

$$\tilde{y} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \tilde{x} \quad (3.39)$$

となる。 $\theta > 0$ と仮定しているなので図5の x 軸となる。すなわち e_x 方向であり、図3.1(b) で示したものである。同様、 y 軸は $x = 0$ の直線なので図5の y 軸となる。 p 軸は $q = 0$ の直線なので、

$$y = -\frac{\beta_1}{\gamma_1} x = \tan \theta \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 + \tan^2 \theta \frac{b^2}{a^2}} x \quad (3.40)$$

となる。ここで式 (3.17) (3.18) を使った。

$$1 - \frac{b^2}{a^2} < 1 + \tan^2 \theta \frac{b^2}{a^2}, \quad (3.41)$$

なので、この直線の傾きは $\tan \theta$ より小さい。 $y = \tan \theta x$ の直線は \tilde{e}_x 方向なので、 p 軸は図5のように \tilde{e}_x 方向と e_x 方向の間にある。

同様に q 軸は

$$y = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} x \quad (3.42)$$

で表される。傾きは正なので、図5の q 軸のようになる。 p 軸の傾きと q 軸の傾きをかけても -1 とはならないので、直交していないことに注意。

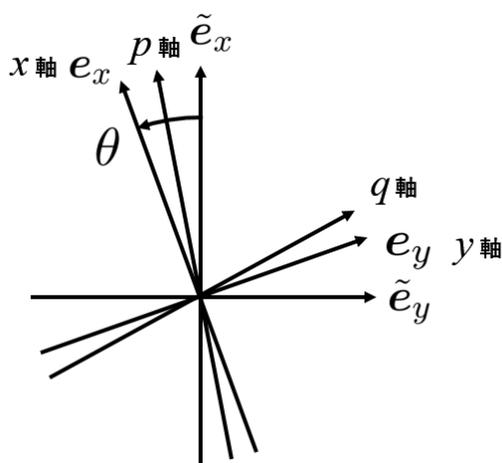


図5: p 軸と q 軸

If X, Y, Z be the components of the reaction at the point of contact, the equations of motion consist of two groups of (t)hree, of which the following are types:

$$A\omega_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 = yZ - zY \dots\dots (1), \quad (3.43)$$

$$\dot{u} - v\omega_3 + w\omega_2 = gp + X \dots\dots (2). \quad (3.44)$$

There are also two groups of geometric equations:

$$\dot{p} - q\omega_3 + r\omega_2 = 0 \dots\dots (3), \quad (3.45)$$

$$u - y\omega_3 + z\omega_2 = 0 \dots\dots (4). \quad (3.46)$$

ラトルバックの運動を解析するためには運動方程式を求める必要がある。回転に関する方程式 (3.47) と、重心に関する方程式 (3.48) であるが、それぞれ次式で表せる。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{N}, \quad (3.47)$$

$$m\frac{d}{dt}\mathbf{v}_g = \mathbf{F} + mg\mathbf{u}, \quad (3.48)$$

ここで、 \mathbf{L} は角運動量、 \mathbf{N} はトルク、 m は全質量、 \mathbf{v}_g は重心の速度、 \mathbf{F} は接点に床から働く力、 g は重力加速度である。この2つの方程式は慣性主軸の3つの方向に対しそれぞれ成分が3つある。ひとつ目の成分を論文中の (1)(2) で示している。また、法線ベクトル \mathbf{u} は常に床から垂直方向に向いていて時間変化がないことから条件式がでてくる。このひとつ目の成分を論文中の (3) で示している。さらに、ラトルバックと床は滑らない場合を考えていて、このことから条件式がでてくる。ひとつ目の成分を論文中の (4) で示している。詳しく見ていこう。

論文では、接点に床から働く力の成分 (慣性主軸に関する) を質量 m で割ったものと考えていて、 $\mathbf{F} = m(X, Y, Z)\mathbf{e}$ としている。ラトルバックの角運動量を \mathbf{L} とすると、慣性主軸に関する成分は次式で与えられる。

$$\mathbf{L} = m(A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3)\mathbf{e}. \quad (3.49)$$

ここで、 A, B, C と $\omega_{1,2,3}$ はそれぞれ $\mathbf{e}_{1,2,3}$ 軸に関する慣性モーメント (を m でわったもの) と角速度である。ラトルバックに働くトルクを \mathbf{N} とすると、これは次式で与えられる。

$$\mathbf{N} = \mathbf{x}_p \times \mathbf{F}, \quad (3.50)$$

$$= m(yZ - zY, zX - xZ, xY - yX)\mathbf{e}. \quad (3.51)$$

慣性主軸 \mathbf{e}_i はラトルバックに固定されているので、ラトルバックが回転するとそれに合わせて動く。したがって慣性主軸 \mathbf{e}_i には時間変化がある。このことから、一般のベクトル $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)\mathbf{e}$ の時間微分は単に成分を微分するだけでなく、次式のように \mathbf{e}_i の時間微分が存在する。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{d}{dt}a_i \right) \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^3 a_i \left(\frac{d}{dt}\mathbf{e}_i \right). \quad (3.52)$$

(以後、同じ添え字があらわれたら $\sum_{i=1}^3$ の操作が必要という約束にして、 $\sum_{i=1}^3$ を省略する。(アインシュタインの規約)) 一方、慣性主軸 \mathbf{e}_i の時間微分と角速度には次式の関係がある。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i = \omega_k \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i = \omega_k \epsilon_{kij} \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \omega_k \mathbf{e}_j. \quad (3.53)$$

ここで、 ϵ_{ijk} はレビ・チビタの記号である。 (ijk) の足に関して反対称、 $\epsilon_{123} = 1, \epsilon_{132} = -1$) よって、式 (3.52) を成分で表示すると、次式となる。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A} = (\dot{a}_1 - (a_2\omega_3 - a_3\omega_2), \dot{a}_2 - (a_3\omega_1 - a_1\omega_3), \dot{a}_3 - (a_1\omega_2 - a_2\omega_1))_{\mathbf{e}}. \quad (3.54)$$

ここで、 $\dot{a}_i = \frac{d}{dt}a_i$ である。

この式を $\frac{d}{dt}\mathbf{L}$ に活用すると、式 (3.49) より次式を得る。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = m(A\dot{\omega}_1 - (B-C)\omega_2\omega_3, B\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_3\omega_1, C\dot{\omega}_3 - (A-B)\omega_1\omega_2)_{\mathbf{e}}. \quad (3.55)$$

式 (3.55) と式 (3.51) を $\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{N}$ に代入して回転に関する運動方程式を得る。

$$A\dot{\omega}_1 - (B-C)\omega_2\omega_3 = yZ - zY \quad (3.56)$$

$$B\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_3\omega_1 = zX - xZ \quad (3.57)$$

$$C\dot{\omega}_3 - (A-B)\omega_1\omega_2 = xY - yX \quad (3.58)$$

式 (3.56) が論文中の (1) (式 (3.43)) に対応する。

次に重心の運動を見ていこう。重心の速度を $\mathbf{v}_g = (u, v, w)_{\mathbf{e}}$ としている。式 (3.48) の左辺に式 (3.54) を活用すると、重心に関する運動方程式として次式を得る。

$$\dot{u} + \omega_2 w - \omega_3 v = pg + X, \quad (3.59)$$

$$\dot{v} + \omega_3 u - \omega_1 w = qg + Y, \quad (3.60)$$

$$\dot{w} + \omega_1 v - \omega_2 u = rg + Z. \quad (3.61)$$

式 (3.59) が論文中の (2) (式 (3.44)) に対応する。

法線ベクトル \mathbf{u} は常に床から垂直方向に向いていて時間変化がないことから $\frac{d}{dt}\mathbf{u} = 0$ である。この式に式 (3.54) を活用すると、次式を得る。

$$\dot{p} + \omega_2 r - \omega_3 q = 0, \quad (3.62)$$

$$\dot{q} + \omega_3 p - \omega_1 r = 0, \quad (3.63)$$

$$\dot{r} + \omega_1 q - \omega_2 p = 0 \quad (3.64)$$

式 (3.62) が論文中の (3) (式 (3.45)) に対応する。

最後が滑らない条件式

$$\mathbf{v}_g - \mathbf{x}_p \times \boldsymbol{\omega} = 0$$

である。この式は、接点が瞬間の回転中心となって動かず、回転によって重心が動いているということを意味する。慣性主軸に関して成分表示すると次式を得る。

$$u - y\omega_3 + z\omega_2 = 0, \quad (3.65)$$

$$v - z\omega_1 + x\omega_3 = 0, \quad (3.66)$$

$$w - x\omega_2 + y\omega_1 = 0. \quad (3.67)$$

式 (3.65) が論文中の式 (4) (式 (3.46)) に対応する。

4 第2章

2. As long as the oscillations about the state of steady motion remain small, $x, y, p, q, u, v, w, \omega_1, \omega_2$ will be small quantities, and by (2) $X, Y, (Z + g)$ will also be small. Hence by (1) ω_3 will, if squares of small quantities may be neglected, have a constant value and may be replaced by n .

There are now four pairs of equations of which

$$A\dot{\omega}_1 - (B - C)n\omega_2 = -gy - hY, \quad (4.1)$$

$$\dot{u} - nv = gp + X, \quad (4.2)$$

$$\dot{p} - nq + \omega_2 = 0, \quad (4.3)$$

$$u - ny + h\omega_2 = 0 \quad (4.4)$$

are specimens.

運動方程式を近似を用いて解析しやすい方程式にもっていかようとしている。3つの変数 p, q, n ($\sim \omega_3$) で表すことを目的にしている。

ラトルバックを e_3 軸まわりに、ゆっくりと回し始めた状況を考えると、まだ激しい振動を起こさずに、すーとまわっている。この状況では、図のように接点の z 座標はほぼ h のところにある。式 (3.29) で考えたように、 $\frac{|x|}{a}, \frac{|y|}{b}$ は 1 より小さい量であるがゆっくりと回し始めた状況ではさらに小さい量であり、これらの 2 次の項は落とせると考えられる。連動して、式 (3.30) (3.31) より、 p, q は小さい量であり

$$r \sim 1, \quad (4.5)$$

と考えられる。がたがたという振動すなわち e_1 軸や e_2 軸まわりの振動 (それぞれ角速度の ω_1, ω_2 が対応する) も小さいと考えられる。さらに振動に応じて重心も速度をもつが、その速度に関する量 u, v, w も小さい量と考えられる。接点はほぼ重心の真下 $\sim (0, 0, h)_e$ にあるので床からの抗力はほぼ垂直抗力が占めていて、 X, Y は小さい量であり、

$$Z + g \sim 0, \quad (4.6)$$

だと考えられる。

式 (3.58) より、 $\omega_1\omega_2$ が 2 次の項および $xY - yX$ も 2 次の項より無視できて、

$$\dot{\omega}_3 \sim 0, \quad (4.7)$$

となる。したがって ω_3 はこの状況では定数と考えられるから、この定数を n とする。近似式である

$$r \simeq 1, \quad (4.8)$$

$$z \simeq h, \quad (4.9)$$

$$\omega_3 \sim n, \quad (4.10)$$

を、式 (3.56) (3.57) に代入して次式を得る。

$$A\dot{\omega}_1 - (B - C)n\omega_2 = -gy - hY, \quad (4.11)$$

$$B\dot{\omega}_2 - (C - A)n\omega_1 = hX + gx. \quad (4.12)$$

式 (4.11) が論文中の式 (4.1) に対応する。重心に関する運動方程式である式 (3.59) ~ (3.61) に代入し、2 次の項を落とすと次式を得る。

$$\dot{u} - nv \sim pg + X, \quad (4.13)$$

$$\dot{v} + nu \sim qg + Y, \quad (4.14)$$

$$\dot{w} \sim 0. \quad (4.15)$$

式 (4.13) が論文中の式 (4.2) に対応する。法線ベクトル \mathbf{u} が時間によらない式 (3.62) (3.63) からは次式を得る。

$$\dot{p} + \omega_2 - nq \sim 0, \quad (4.16)$$

$$\dot{q} + np - \omega_1 \sim 0. \quad (4.17)$$

式 (4.16) が論文中の式 (4.3) に対応する。最後に滑らない条件式 (3.65) (3.66) から次式を得る。

$$u - ny + h\omega_2 \sim 0, \quad (4.18)$$

$$v - h\omega_1 + nx \sim 0. \quad (4.19)$$

式 (4.18) が論文中の式 (4.4) に対応する。

運動方程式には $x, y, u, v, \omega_1, \omega_2$ や X, Y があるので、これらすべてを p, q で書き表していく。まずは、 p, q, n, x, y (とその時間微分等) で表し、次に式 (3.33) を使って x, y を消去し、 p, q に関する運動方程式を得る。

On eliminating in succession $X, Y, u, v, w_1(\omega_1), w_2(\omega_2)$ we obtain

$$(A + h^2)(\ddot{q} + n\dot{p}) + (B - C + h^2)(n\dot{p} - n^2q) - nh\dot{x} + (g + n^2h)y - ghq = 0, \quad (4.20)$$

$$(B + h^2)(\ddot{p} - n\dot{q}) + (C - A - h^2)(n\dot{q} + n^2p) + nh\dot{y} + (g + n^2h)x - ghp = 0. \quad (4.21)$$

If x, y be expressed in terms of p, q and the substitutions

$$A + h^2 = A', \quad B + h^2 = B', \quad C + h^2 = C', \quad A' + B' - C' = D, \quad (4.22)$$

$$\alpha' - h = \alpha, \quad \gamma' - h = \gamma, \quad g + n^2h = g', \quad (4.23)$$

be effected, there result the equations

$$A'\ddot{q} + nh\beta\dot{q} + \{(C' - B')n^2 + \alpha g'\}q + (D - h\gamma)n\dot{p} - g'\beta p = 0, \quad (4.24)$$

$$B'\ddot{p} - nh\beta\dot{p} + \{(C' - A')n^2 + \gamma g'\}p - (D - h\alpha)n\dot{q} - g'\beta q = 0 \quad (4.25)$$

ω_1, ω_2 を p, q, n で表すと、式 (4.16) (4.17) より、

$$\omega_1 \sim \dot{q} + np, \quad (4.26)$$

$$\omega_2 \sim nq - \dot{p}, \quad (4.27)$$

となる。また、 u, v を p, q, n, x, y で表すと、式 (4.18) (4.19) より、

$$\begin{aligned} u &\simeq yn - h\omega_2 \\ &\simeq yn - h(nq - \dot{p}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} v &\simeq h\omega_1 - nx \\ &\simeq h(\dot{q} + np) - nx \end{aligned} \quad (4.29)$$

となる。また、2次の項である w は

$$w = x\omega_2 - y\omega_1 \sim 0, \quad (4.30)$$

と近似できる。抗力 X, Y は、式 (4.13) (4.14) に式 (4.28) (4.29) を代入して

$$\begin{aligned} X &\sim -pg + \dot{u} - nv \\ &= -pg + (\dot{y}n - h(n\dot{q} - \ddot{p})) - n(h(\dot{q} + np) - nx) \\ &= -pg + h\dot{p} + n(\dot{y} - 2h\dot{q}) - n^2(hp - x) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} Y &\sim -qg + \dot{v} + nu \\ &= -qg + h(\ddot{q} + n\dot{p}) - n\dot{x} + n(yn - h(nq - \dot{p})) \\ &= -qg + h\ddot{q} - n(\dot{x} - 2h\dot{p}) - n^2(hq - y) \end{aligned} \quad (4.32)$$

となる。

式 (4.11) の左辺は、式 (4.26) と式 (4.27) を使って次式を得る。

$$A\dot{\omega}_1 - (B - C)n\omega_2 = A(\ddot{q} + n\dot{p}) - (B - C)n(nq - \dot{p}). \quad (4.33)$$

式 (4.11) の右辺は、式 (4.32) より次式となる。

$$\begin{aligned} yZ - zY &= -yg - h(-qg + h(\ddot{q} + n\dot{p}) - n\dot{x} + n(yn - h(nq - \dot{p}))) \\ &= -y(g + n^2h) + hqg - h^2(\ddot{q} + n\dot{p}) + nh\dot{x} + nh^2(nq - \dot{p}) \end{aligned}$$

となる。まとめると

$$(A + h^2)(\ddot{q} + n\dot{p}) + (B - C + h^2)(n\dot{p} - n^2q) - nh\dot{x} + (g + n^2h)y - ghq = 0 \quad (4.34)$$

となり、論文中の式 (4.20) が得られた。同様なことを式 (3.57) に関しておこなうと、論文中の式 (4.21) を得る。

x, y を消去するために式 (3.33) を式 (4.34) に代入して、 p, q に関する運動方程式にすると、 q に関する 2 階の微分方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} A'(\ddot{q} + n\dot{p}) + (B' - C' + h^2)(n\dot{p} - n^2q) - nh(\gamma'\dot{p} - \beta\dot{q}) \\ + (g + n^2h)(\alpha'q - \beta p) - ghq = \\ A'\ddot{q} + nh\beta\dot{q} + (-n^2(B' - C') + \alpha'(g + n^2h) - gh)q \\ + (A' + B' - C' + h^2 - h\gamma')n\dot{p} - (g + h^2h)\beta p = \\ A'\ddot{q} + nh\beta\dot{q} + ((C' - B')n^2 + \alpha g')q + (D - h\gamma)n\dot{p} - g'\beta p = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

ここで

$$\begin{aligned} A' &\equiv A + h^2, & B' &\equiv B + h^2, & C' &\equiv C + h^2, & D &\equiv A' + B' - C', \\ \alpha' &\equiv \alpha + h, & \gamma' &\equiv \gamma + h, & g' &\equiv g + n^2h \end{aligned}$$

である。式 (4.35) が論文中の式 (4.24) に対応する。

ω_2 に関する運動方程式 (3.57) について同様なことをすると、 p に関して 2 階の微分方程式 (論文中の式 (4.25)) を得る。

複雑な式が得られたが、回転せず $n = 0$ でおもりも無い状況 $\beta = 0$ だと、次式となる。

$$A'\ddot{q} + \alpha g'q = 0, \quad (4.36)$$

$$B'\ddot{p} + \gamma g'p = 0. \quad (4.37)$$

これは単なる振動の式であり、がたがたの運動を表している。式 (4.36) は長軸 e_1 回りの振動 (がたがた) を表し、式 (4.37) は短軸 e_2 回りの振動 (がたがた) を表している。

次に n や β が入った場合の振動数を求めていこう。

Thus p, q may be replaced by quantities varying as $e^{\lambda t}$, where λ is given by

$$\{A'\lambda^2 + nh\beta\lambda + (C' - B')n^2 + \alpha g'\}\{B'\lambda^2 - ng\beta\lambda + (C' - A')n^2 + \gamma g'\} \\ + \{(D - h\gamma)n\lambda - g'\beta\}\{(D - h\alpha)n\lambda + g'\beta\} = 0, \quad (4.38)$$

or, expanded in powers of β ,

$$[A'(C - A) + \{B'(C - B) + (D - h\gamma)(D - h\alpha)\}n^2 + (A'\gamma + B'\alpha)g']\lambda^2 \\ + A'B'\lambda^4 + \{(C - B)n^2 + \alpha g'\}\{(C - A)n^2 + \gamma g'\} \\ + (B - A)nh\lambda(\lambda^2 + n^2)\beta - (n^2h^2\lambda^2 + g'^2)\beta^2 = 0 \dots (5). \quad (4.39)$$

式 (4.24) (4.25) は 2 階の線形微分方程式なので、1 階の微分方程式に書き直す。そのため、新しい変数として、

$$Q \equiv \frac{d}{dt}q, \quad P \equiv \frac{d}{dt}p, \quad (4.40)$$

を定義する。すると式 (4.24) (4.25) は次式となる。

$$a_1 \frac{d}{dt}Q = a_2Q + a_3q + c_1P + c_2p, \quad (4.41)$$

$$b_1 \frac{d}{dt}P = b_2P + b_3p + d_1Q + d_2q. \quad (4.42)$$

ここで、

$$a_1 = A', \quad a_2 = -nh\beta, \quad a_3 = -((C' - B')n^2 + \alpha g'), \quad (4.43)$$

$$c_1 = -(D - h\gamma)n, \quad c_2 = g'\beta, \quad (4.44)$$

$$b_1 = B', \quad b_2 = nh\beta, \quad b_3 = -((C' - A')n^2 + \gamma g') \quad (4.45)$$

$$d_1 = (D - h\alpha)n, \quad d_2 = g'\beta, \quad (4.46)$$

である。 Q, P の定義式と式 (4.41) (4.42) は次式のように行列形式によって表せる。

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}q \\ \frac{d}{dt}p \\ \frac{d}{dt}Q \\ \frac{d}{dt}P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a_3}{a_1} & \frac{c_2}{a_1} & \frac{a_2}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ \frac{d_2}{b_1} & \frac{b_3}{b_1} & \frac{d_1}{b_1} & \frac{b_2}{b_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \\ Q \\ P \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

このような 1 階の連立微分方程式を解くには、右辺の固有値を求める必要がある。それには次式の行列式を解けばよい。

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ \frac{a_3}{a_1} & \frac{c_2}{a_1} & \frac{a_2}{a_1} - \lambda & \frac{c_1}{a_1} \\ \frac{d_2}{b_1} & \frac{b_3}{b_1} & \frac{d_1}{b_1} & \frac{b_2}{b_1} - \lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1 b_1} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a_3 & c_2 & a_2 - a_1 \lambda & c_1 \\ d_2 & b_3 & d_1 & b_2 - b_1 \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.48)$$

この行列式に基本変形をほどこしていく。

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a_3 & c_2 & a_2 - a_1\lambda & c_1 \\ d_2 & b_3 & d_1 & b_2 - b_1\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ a_2 - a_1\lambda & c_1 & a_3 & c_2 \\ d_1 & b_2 - b_1\lambda & d_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (4.49)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ a_2 - a_1\lambda & c_1 & a_3 + \lambda(a_2 - a_1\lambda) & c_2 \\ d_1 & b_2 - b_1\lambda & d_2 + d_1\lambda & b_3 \end{vmatrix} \quad (4.50)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 - a_1\lambda & c_1 & a_3 + \lambda(a_2 - a_1\lambda) & c_2 + c_1\lambda \\ d_1 & b_2 - b_1\lambda & d_2 + d_1\lambda & b_3 + \lambda(b_2 - b_1\lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.51)$$

式 (4.49) では 1, 2 列と 3, 4 列をそれぞれ入れ替えている。式 (4.50) では 1 列の λ 倍を 3 列に加えている。式 (4.51) では 2 列の λ 倍を 4 列に加えている。式 (4.51) の最後の等式より次式を得る。

$$(a_3 + \lambda(a_2 - a_1\lambda))(b_3 + \lambda(b_2 - b_1\lambda)) - (c_2 + c_1\lambda)(d_2 + d_1\lambda) \quad (4.52)$$

$$= (a_1\lambda^2 - a_2\lambda - a_3)(b_1\lambda^2 - b_2\lambda - b_3) - (c_2 + c_1\lambda)(d_2 + d_1\lambda) = 0. \quad (4.53)$$

この式に式 (4.43) ~ (4.46) を代入して、次式を得る。

$$\begin{aligned} & (A'\lambda^2 + nh\beta\lambda + (C' - B')n^2 + \alpha g')(B'\lambda^2 - nh\beta\lambda + (C' - A')n^2 + \gamma g') \\ & + ((D - h\gamma)n\lambda - g'\beta)((D - h\alpha)n\lambda + g'\beta) = 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

この式 (4.54) が論文中の式 (4.38) に対応する。

β のべきでまとめると、

$$\begin{aligned} & \{A'(C - A) + (B'(C - B) + (D - h\gamma)(D - h\alpha))n^2 + (A'\gamma + B'\alpha)g'\} \lambda^2 \\ & + A'B'\lambda^4 + ((C - B)n^2 + \alpha g')((C - A)n^2 + \gamma g') \\ & + (B - A)nh\lambda(\lambda^2 + n^2)\beta - (n^2h^2\lambda^2 + g'^2)\beta^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.55)$$

となる。この式 (4.55) が論文中の式 (5) (4.39) に対応する。

θ が小さいとき、 $\beta \sim (\rho' - \rho)\theta$ になるので、 β のべきは θ のべきと等しくなる。すると $\cos \theta \sim 1$, $\sin \theta \sim \theta$ として式 (4.59) (4.61) より、 $\alpha \sim \rho' - h + \rho\theta^2$ 、 $\gamma \sim \rho - h + \rho'\theta^2$ と、 θ の 2 次の項が含まれてくる。したがって、式 (4.39) の λ^2 の係数の中に $(A'\gamma + B'\alpha) \sim A'(\rho - h) + B'(\rho' - h) + A'\rho'\theta^2 + B'\rho\theta^2$ という θ の 2 次の項が含まれる。こういう項を抜き出して θ のべきでまとめる方がよい。しかし、 θ の 2 次なので、 $\beta \sim \theta$ の 1 次までを考えるのならこのままでよい。

If the principal raddi of curvature at the original point of contact be ρ, ρ' , and if the line whose radius of curvature ρ is greatest have direction cosines $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, then we find

$$\alpha' = \rho \sin^2 \theta + \rho' \cos^2 \theta, \quad (4.56)$$

$$\beta = -(\rho - \rho') \sin \theta \cos \theta, \quad (4.57)$$

$$\gamma' = \rho \cos^2 \theta + \rho' \sin^2 \theta. \quad (4.58)$$

Also, denoting by k^2 the moment of inertia with respect to the plane XY , the value of D is $(A + B - C + h^2)$ or $(h^2 + 2k^2)$.

式 (3.34) に式 (3.16) ~ (3.19) を代入すると

$$\alpha' = \rho \sin^2 \theta + \rho' \cos^2 \theta, \quad (4.59)$$

$$\beta = -(\rho - \rho') \sin \theta \cos \theta, \quad (4.60)$$

$$\gamma' = \rho \cos^2 \theta + \rho' \sin^2 \theta. \quad (4.61)$$

となる。ここで

$$\rho \equiv \frac{a^2}{h}, \quad \rho' \equiv \frac{b^2}{h} \quad (4.62)$$

である。式 (4.59) ~ (4.61) が論文中の式 (4.56) ~ (4.58) に対応する。したがって、論文中の角度 θ は式 (3.1) で定義した角度であることがわかる。

一般に楕円を表す次式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (4.63)$$

に関して曲率半径 $\rho(x)$ は $z(x) = c\sqrt{1 - x^2/a^2}$ として、

$$\rho(x) = \frac{(1 + z')^{3/2}}{|z''|} \quad (4.64)$$

と表せる。ここで $z' = \frac{dz(x)}{dx}$ である。式 (4.63) を x で微分して

$$\frac{x}{a^2} + z \frac{z'}{c^2} = 0, \quad (4.65)$$

$$z' = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad (4.66)$$

が得られる。さらに x で微分して

$$\frac{1}{a^2} + \frac{(z')^2}{c^2} + \frac{z z''}{c^2} = 0, \quad (4.67)$$

$$z'' = -\frac{1}{z} \left(z'^2 + \frac{c^2}{a^2} \right) \quad (4.68)$$

となる。以上より次式を得る。

$$\rho(x) = \frac{(1 - \frac{c^2}{a^2} \frac{2x}{z})^{\frac{3}{2}}}{|-\frac{1}{z}(z'^2 + \frac{c^2}{a^2})|} \quad (4.69)$$

$x = 0$ での曲率半径の値は $z' = 0, z'' = -\frac{c}{a^2}$ なので $\rho = \frac{a^2}{c}$ となる。式 (4.62) に一致することから ρ は e_1 軸方向の静止している接触点での曲率半径だということがわかる。さらに ρ' は e_2 軸方向の曲率半径であることもわかる。

あらたに

$$k^2 \equiv \frac{A + B - C}{2} \quad (4.70)$$

すなわち $h^2 + 2k^2 \equiv D$ と k^2 を定義している。

5 第3章

3. Hence, for a body in which $\theta = 0$, and the line of least curvature is parallel to the axis of least moment of inertia, the equation (5) becomes

$$\begin{aligned} & [\{A'(C - A) + B'(C - B) + (h\rho - 2h^2 - 2k^2)(h\rho' - 2h^2 - 2k^2)\}n^2 \\ & + \{A'(\rho - h) + B'(\rho' - h)\}g']\lambda^2 + A'B'\lambda^4 \\ & + \{(C - B)n^2 + (\rho' - h)g'\}\{(C - A)n^2 + (\rho - h)g'\} = 0, \dots (6) \end{aligned} \quad (5.1)$$

and for such bodies as we are considering ρ' is usually greater than $4h$, and h^2 greater than $5k^2$, so that the coefficient of λ^2 is positive.

おもりがないか、あっても対称的に置かれていて、慣性主軸 e_i と形状主軸 \tilde{e}_i が一致（平行）の場合を考える。すなわち $\theta = 0 (\beta = 0)$ の場合を最初に考えていく。論文では、最小曲率（曲率半径が最大）の line、すなわち \tilde{e}_1 の方向と慣性モーメントが最小の軸（A に関する軸）、すなわち e_1 の方向が平行の場合を考えると記述されている。

式 (4.23) と式 (4.59) (4.61) より γ, α は以下であった。

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma' - h = \rho \cos^2 \theta + \rho' \sin^2 \theta - h \\ \alpha &= \alpha' - h = \rho' \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta - h \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} D - h\gamma &= 2k^2 + 2h^2 - h(\rho \cos^2 \theta + \rho' \sin^2 \theta) \\ D - h\alpha &= 2k^2 + 2h^2 - h(\rho' \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

となる。 $\theta = 0 (\beta = 0)$ であるので

$$\gamma = \rho - h, \quad \alpha = \rho' - h, \quad (5.2)$$

$$D - h\gamma = 2k^2 + 2h^2 - h\rho, \quad (5.3)$$

$$D - h\alpha = 2k^2 + 2h^2 - h\rho', \quad (5.4)$$

となる。式 (4.55) に $\beta = 0$ を代入し、式 (5.2) ~ (5.4) を使うと次式を得る。

$$A'B'\lambda^4 + E\lambda^2 + F = 0, \quad (5.5)$$

ここで

$$\begin{aligned} E &\equiv \{A'(C-A) + B'(C-B) + (h\rho - 2h^2 - 2k^2)(h\rho' - 2h^2 - 2k^2)\}n^2 \\ &\quad + \{A'(\rho - h) + B'(\rho' - h)\}g' \\ F &\equiv \{(C-B)n^2 + (\rho' - h)g'\}\{(C-A)n^2 + (\rho - h)g'\} \end{aligned}$$

である。式 (5.5) が論文中の式 (5.1) に対応する。

λ^2 の値はこの式を解けばわかるが、まずその値の正負を考える。 $e^{\lambda t}$ の形に入っているので、 $\lambda^2 > 0$ ならば λ は正負の実数値がでてきて、正ならば振幅が大きくなり、負ならば振幅が小さくなる。一方、 $\lambda^2 < 0$ ならば、 λ は正負の純虚数値なので、振動解を表すことになる。

係数 $A'B' > 0$ であることはすぐわかる。次に λ^2 の係数 E の正負を考えよう。

おもりが乗っているがおもりの質量が軽ければ、ラトルバックの慣性モーメント（を質量 m でわった） A, B, C はほぼ楕円体の慣性モーメントとみなせて次式で表せる。

$$A \sim \frac{b^2 + h^2}{5}, \quad B \sim \frac{a^2 + h^2}{5}, \quad C \sim \frac{a^2 + b^2}{5} \quad (5.6)$$

これらの式と $a > b > h$ より

$$A + B - C \sim \frac{2}{5}h^2, \quad k^2 \sim \frac{h^2}{5} \quad (5.7)$$

$$C - A \sim \frac{a^2 - h^2}{5} > 0, \quad C - B \sim \frac{b^2 - h^2}{5} > 0, \quad (5.8)$$

がわかる。 E の中にある n^2 の係数だが、 $\rho' = b^2/h^2$ なので

$$h\rho' - 2h^2 - 2k^2 \sim b^2 - \frac{12}{5}h^2, \quad (5.9)$$

となる。したがって論文中では $b > 2h$ というラトルバックを考えているので $h\rho' - 2h^2 - 2k^2 > 0$ という条件が満たされる。また、 $a > b$ なので、

$$h\rho - 2h^2 - 2k^2 \sim a^2 - \frac{12}{5}h^2 > 0, \quad (5.10)$$

も満たされる。これらの条件式と式 (5.8) より係数 E は正であることがわかる。

$$\rho - h = \frac{a^2 - h^2}{h} > 0, \quad \rho' - h = \frac{b^2 - h^2}{h} > 0, \quad (5.11)$$

より、 $F > 0$ であることもわかる。

If (6) be written in the form $A'B'\lambda^4 + E\lambda^2 + F = 0$, and its roots be $\lambda^2 = -m_1^2, \lambda^2 = -m_2^2$, it is essential for the stability of the motion that m_1 and m_2 be real: the ordinary condition for this requires that an expression containing

$$\{A'(\rho - h) + B'(\rho' - h)\}^2 g'^2 - 4A'B'(\rho - h)(\rho' - h)g'^2 \quad (5.12)$$

together with terms in n^2, n^4 shall be positive. The equations thus show, as might have been expected, that a symmetrical body such as this will spin stably in either direction if the square of the angular velocity be not too great.

式 (5.5) の判別式が正の場合、すなわち $E^2 - 4A'B'F > 0$ が成り立てば、2つの実数解をもつ。また

$$A'B'\lambda^4 + E\lambda^2 + F = A'B' \left(\lambda^2 + \frac{E}{2A'B'} \right)^2 - \frac{E^2}{4A'B'} + F \quad (5.13)$$

と変形できるので、 $\frac{E}{2A'B'} > 0, F > 0$ より横軸を λ^2 とした $A'B'\lambda^4 + E\lambda^2 + F$ のグラフは図 6 のようになることがわかる。この図から解は負の実数解を 2 つもつことがわかる。それぞれ解の $\lambda^2 = -m_1^2, \lambda^2 = -m_2^2$ として $m_1^2 > m_2^2$ とする。これらは負の実数解であるので、 λ は純虚数となり安定な振動をあらわしている。

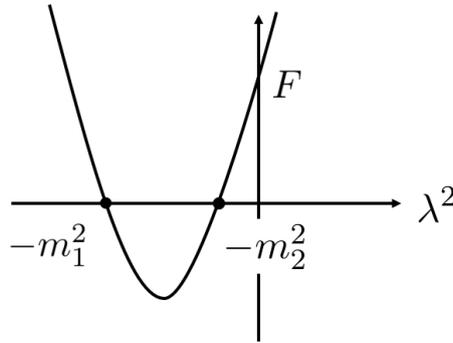


図 6: $A'B'\lambda^4 + E\lambda^2 + F$ のグラフとその解 $-m_1^2, -m_2^2$

n が小さくて無視できる場合は判別式は次式となり、正であることから振動は安定であることがわかる。

$$E^2 - 4A'B'F = \{A'(\rho - h) + B'(\rho' - h)\}^2 g'^2 - 4A'B'(\rho - h)(\rho' - h)g'^2, \quad (5.14)$$

$$= g'^2(A'(\rho - h) - B'(\rho' - h))^2 > 0, \quad (5.15)$$

式 (5.14) が論文中の式 (5.12) に対応する。

m_1^2, m_2^2 がどういう値をとるか調べよう。式 (5.15) より

$$\lambda^2 = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4A'B'F}}{2A'B'}, \quad (5.16)$$

$$= \frac{-g'(A'(\rho - h) + B'(\rho' - h)) \pm g'(A'(\rho - h) - B'(\rho' - h))}{2A'B'}, \quad (5.17)$$

$$= -\frac{g'(\rho - h)}{B'}, -\frac{g'(\rho' - h)}{A'}, \quad (5.18)$$

となる。どちらが大きい値をとるであろうか。 $A' < B'$ なので、一見 $\frac{g'(\rho' - h)}{A'}$ のほうが大きく見える。 A', B' に対し式 (5.6) を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{g'(\rho' - h)}{A'} &= \frac{5g' b^2 - h^2}{h b^2 + 6h^2} \\ \frac{g'(\rho - h)}{B'} &= \frac{5g' a^2 - h^2}{h a^2 + 6h^2} \end{aligned}$$

となる。これらの値の大小だが、次の関数がこれを決める。

$$m(x) \equiv \frac{x - 1}{x + 6}$$

この関数は、単調増加なので、 $a > b$ で $\frac{g'(\rho - h)}{B'} > \frac{g'(\rho' - h)}{A'}$ である。したがって、

$$m_1^2 = \frac{g'(\rho - h)}{B'}, \quad m_2^2 = \frac{g'(\rho' - h)}{A'} \quad (5.19)$$

である。この値は式 (4.36) (4.37) から確認できる。 p に対する振動数が m_1 に対応しているので、長い軸、OX の方向に沿った振動 (OY 軸まわりの) が激しいことがわかる。

6 第4章

$\theta \neq 0$ の場合の振動の安定性、すなわち振幅が増大するか、減少するかを吟味していく。

4. Let us now consider the effect of a small angle θ between the line of least curvature and the dynamical axis of least moment. Corresponding to a root λ_0 of $A'B'\lambda^4 + E\lambda^2 + F = 0$, there will be a root $\lambda_0 + \epsilon$ of the equation (5)

$$A'B'\lambda^4 + E\lambda^2 + F + (B - A)nh\lambda(\lambda^2 + n^2)\beta = 0, \quad (6.1)$$

(neglecting squares of β), where ϵ is a small quantity given by

$$4A'B'\lambda_0^3\epsilon + 2E\lambda_0\epsilon + (B - A)nh\lambda_0(\lambda_0^2 + n^2)\beta = 0. \quad (6.2)$$

Hence

$$2\epsilon(2A'B'\lambda_0^2 + E) = -(B - A)nh(\lambda_0^2 + n^2)\beta. \quad (6.3)$$

式 (4.55) で β の 1 次だけを抜き取ると、論文中の式 (6.1) となる。 $\lambda = \lambda_0 + \epsilon$ を代入し、 ϵ が小さい量であることと、

$$A'B'\lambda_0^4 + E\lambda_0^2 + F \sim 0, \quad (6.4)$$

を使うと論文中の式 (6.2) を得る。 ϵ でまとめると論文中の式 (6.3) を得る。

If m_1, m_2 be real and $m_1^2 > m_2^2$, we shall have

$$2A'B'm_1^2 - E = \sqrt{E^2 - 4A'B'F}, \quad (6.5)$$

$$2A'B'm_2^2 - E = -\sqrt{E^2 - 4A'B'F}, \quad (6.6)$$

so that the values ϵ_1, ϵ_2 of ϵ corresponding to $\lambda_0^2 = -m_1^2, \lambda_0^2 = -m_2^2$, respectively will be given by

$$2\epsilon_1\sqrt{E^2 - 4A'B'F} = -\beta(A - B)nh(n^2 - m_1^2), \quad (6.7)$$

$$2\epsilon_2\sqrt{E^2 - 4A'B'F} = -\beta(A - B)nh(m_2^2 - n^2). \quad (6.8)$$

式 (6.4) の解は、

$$\lambda_0^2 = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4A'B'F}}{2A'B'} \quad (6.9)$$

と求められるので、 $-$ と $+$ でそれぞれ $-m_1^2, -m_2^2$ として次式を得る。

$$-m_1^2 = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4A'B'F}}{2A'B'}, \quad (6.10)$$

$$-m_2^2 = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4A'B'F}}{2A'B'}. \quad (6.11)$$

それぞれ変形して次式となる。

$$2A'B'm_1^2 - E = \sqrt{E^2 - 4A'B'F}, \quad (6.12)$$

$$2A'B'm_2^2 - E = -\sqrt{E^2 - 4A'B'F}. \quad (6.13)$$

式 (6.12) (6.13) が論文中の式 (6.5) (6.6) に対応する。これらの式を式 (6.3) に代入すると、論文中の式 (6.7) (6.8) を得る。

For the motion to be completely stable, both ϵ_1 and ϵ_2 must be negative. Hence $n\beta$ must be positive and the value n^2 intermediate between those of m_1^2 and m_2^2 , provided that such a value does not make m_1, m_2 imaginary.

ここでの文章は以下のことを述べている。

振動の様子は $e^{\lambda t}$ のように表されるので、 $\lambda = im_1 + \epsilon_1$ となると、

$$e^{\lambda t} = e^{im_1 t} e^{\epsilon_1 t}, \quad (6.14)$$

となる。 ϵ_1 が正の実数だと振幅が増大し不安定になり、負の実数だと振幅が減少し安定となる。したがって、振幅が安定であるためには ϵ_1, ϵ_2 の両方が負の実数でなければならない。式 (6.7) の右辺より、 $-(A - B) > 0$ なので $n\beta > 0$ ならば、回転数 n は

$$n^2 - m_1^2 < 0, \quad (6.15)$$

である必要がある。一方、式 (6.8) からは

$$m_2^2 - n^2 < 0, \quad (6.16)$$

である必要がある。以上より、回転数 n^2 は m_2^2 と m_1^2 の間 $m_2^2 < n^2 < m_1^2$ になければならない。

回転数 n^2 がはいつてくると、式 (5.5) の係数 E, F に n^2 がはいつているので、解 λ^2 は負の値ではなく虚数をとるかもしれない。すると $\lambda \sim a + ib$ (a, b はある実数) となるから、振幅に対応する a の値が議論に絡んでくる。 ϵ の値と a の値の両方を考えて安定性を議論する必要がでてややこしくなってくる。こういう状況にならなければ上記の条件式は安定性を保証する。

We have seen that if θ be positive β is negative: hence the condition that $n\beta$ shall be positive is equivalent to the requirement that the direction of rotation shall be such as is obtained by passing from the direction of the line of least curvature to the dynamical axis of least moment. This is the direction which has been described as the steady direction.

式 (4.60) より、 $\rho = \frac{a^2}{c} > \rho' = \frac{b^2}{c}$ なので、 $\theta > 0$ ならば、 $\beta < 0$ ということがわかる。よって、 $n\beta > 0$ ということは $n < 0$ すなわち、 \tilde{e}_1 (the direction of the line of least curvature) から e_1 (the dynamical axis of least moment) への方向に回転することを示している。図 3.1 のようなおもりの位置ならば、上から見て反時計回り (亀のラトルバックなら亀が向いている方向) に回る状況である。この方向を "steady" 方向と呼ぶことにする。

7 第5章

n^2 の大きさによって、安定性がどうなるか吟味している。

If n^2 be less than m_2^2 , then for the steady direction ϵ_1 is negative and ϵ_2 positive: thus the amplitude of the more rapid oscillations will diminish indefinitely, while that of the slower will increase. The rotation will thus set up violent oscillations of the longer period.

n^2 が m_2^2 より小さい場合、 ϵ_1 は負の値のままだが、 ϵ_2 が正の値となる。 ϵ_1 に対応する e_2 回りの振動（振動数が $m_1 (> m_2)$ で表されているので”rapid”の振動）の振幅は小さくなって安定するが、 e_1 まわりのゆっくり(”slower”)とした振動（振動数が m_2 あらわされている）の振幅が大きくなっていく。エネルギーが保存していると振幅が大きくなるにつれて n^2 は小さくなり、そのうち0となる。振動によって反転トルクが生じれば反転し $n > 0$ となりラトルバックは上から見て時計周りに回りだす。実際に反転トルクが生じるかどうかを次章で議論する。

With the top is rotating in the unsteady direction with n^2 less than m_2^2 , ϵ_1 is positive and ϵ_2 is negative: oscillations of the shorter period will arise. To compare the degrees of instability of the motions in opposite directions with numerically equal values of n , we notice that the ratio of the positive value of ϵ_2 for the steady direction to that of ϵ_1 for the opposite is $(m_2^2 - n^2)$ to $(m_1^2 - n^2)$. Hence, if n be small enough to render motion in each direction unstable, the unsteady direction will give rise to more violent oscillations than the steady direction: we should further expect that an extremely small value of β might give rise to oscillations when the top was spun in the unsteady direction, while motion in the opposite direction continued unimpeded.

時計回りに回っている場合(”unsteady”方向)、 $n > 0$ なので、 ϵ_1 が正の値となり、 ϵ_2 は負の値となる。すると、 ϵ_1 に対応する e_2 回りの”rapid”な振動（周期は小さい”shorter period”）の振幅が大きくなってくる。

ϵ_1 と ϵ_2 とどちらが大きいかというと、同じ n^2 の値だと、式(6.7)(6.8)の比をとって次式が得られる。

$$\left| \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right| = \left| \frac{m_1^2 - n^2}{m_2^2 - n^2} \right| \tag{7.1}$$

n^2 が小さければ $m_1 > m_2$ より $\epsilon_1 > \epsilon_2$ となるので、”unsteady”方向で生じる振動の振幅の成長の様子 $e^{\epsilon_1 t}$ は”steady”方向で生じる振動の振幅の成長の様子 $e^{\epsilon_2 t}$ よりも激しく見える(”violent oscillation”)。亀のラトルバックの回転の様子からやシミュレーションからも確認できる。(亀のラトルバックの場合、摩擦があるので確認しづらいが。)

8 第6章

Oscillations about the position of equilibrium

6. With the same axes as before, the equations of motion are represented by (1),(2),(3),(4). As long as the oscillations remain small, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, u, v, w, x, y, p, q, X, Y$ will be small. The equations thus become, if squares of small quantities be neglected,

$$A\dot{\omega}_1 = yZ - hY, \quad B\dot{\omega}_2 = hX - xZ, \quad C\dot{\omega}_3 = 0, \quad (8.1)$$

$$\dot{u} = gp + X, \quad \dot{v} = gq + Y, \quad \dot{w} = g + Z, \quad (8.2)$$

$$\dot{p} + \omega_2 = 0, \quad \dot{q} - \omega_1 = 0, \quad (8.3)$$

$$u + h\omega_2 = 0, \quad v - h\omega_1 = 0, \quad w = 0. \quad (8.4)$$

Eliminating $X, Y, Z, u, v, \omega_1, \omega_2$ from these equations, and substituting for x, y in terms of p, q we find

$$A'\ddot{q} + (\alpha q - \beta p)g = 0, \quad (8.5)$$

$$B'\ddot{p} + (\gamma p - \beta q)g = 0 \dots \dots (6). \quad (8.6)$$

静止しているラトルバックの端をかるくつついたとき、どのようなトルクが生じるかを議論する。初期の回転は与えていないので、 $\omega_3 = n \simeq 0$ とする。以前おこなった $\omega_1, \omega_2, \omega_3, u, v, w, x, y, p, q, X, Y$ は小さい量で、これらの項の2次は落とすという近似を使う。

$\omega_3\omega_{1,2} = n\omega_{1,2} \simeq 0$ であり2次の項である $\omega_1\omega_2$ は落とせる。これらの近似と $z \sim h$ を使うと

$$A\dot{\omega}_1 = yZ - hY \quad (8.7)$$

$$B\dot{\omega}_2 = hX - xZ \quad (8.8)$$

$$C\dot{\omega}_3 = 0 \quad (8.9)$$

が得られる。 X, Y に関しては、式(4.31)(4.32)に $n = 0$ を代入したものと、式(4.28)(4.29)に $n = 0$ を代入したものを使うと、次式が得られる。

$$X \simeq -pg + \dot{u} = -pg + h\ddot{p} \quad (8.10)$$

$$Y \simeq -qg + \dot{v} = -qg + h\ddot{q} \quad (8.11)$$

Z に関しては式(4.6)($Z + g \sim 0$)である。 $\omega_{1,2}$ に関しては、式(4.26)(4.27)に $n = 0$ を代入し、次式を得る

$$\omega_1 \simeq \dot{q} \quad (8.12)$$

$$\omega_2 \simeq -\dot{p} \quad (8.13)$$

同様に u, v に関しても $n = 0$ を代入し、次式を得る。

$$u \simeq -h\omega_2 \simeq h\dot{p}, \quad (8.14)$$

$$v \simeq h\omega_1 \simeq h\dot{q}. \quad (8.15)$$

w に関しては、式 (4.30) で $w \simeq 0$ であった。式 (8.7) ~ (8.15) が論文中の式 (8.1) ~ (8.4) に対応する。

式 (8.7) に y の式 (3.33)、式 (8.12) 式 (4.6) および式 (8.11) を代入すると次式を得る。

$$A'\ddot{q} + (\alpha q - \beta p)g = 0 \quad (8.16)$$

同様にすると次式を得る。

$$B'\ddot{p} + (\gamma p - \beta q)g = 0 \quad (8.17)$$

これらの式は式 (4.24) (4.25) で $n = 0$ としても得られる。 $n = 0$ なので式 (4.23) より $g' = g$ に注意。

Hence p, q may be replaced by quantities varying as $e^{\lambda t}$ where λ is given by

$$(A'\lambda^2 + \alpha g)(B'\lambda^2 + \gamma g) - \beta^2 g^2 = 0 \dots \dots (7) \quad (8.18)$$

Corresponding to $\beta = 0$ there are oscillations, in which p, q are separately involved, of periods $2\pi/\kappa_1, 2\pi/\kappa_2$ given by

$$B'\kappa_1^2 - \gamma g = 0, \quad A'\kappa_2^2 - \alpha g = 0. \quad (8.19)$$

If in (7) we write $-l^2$ for λ^2 and treat β^2 as a small quantity, we obtain roots l_1^2, l_2^2 (of the equation in l^2) which can be put in the form

$$l_1^2 = \kappa_1^2 + \epsilon, \quad l_2^2 = \kappa_2^2 - \epsilon, \quad (8.20)$$

where $\epsilon = \beta^2 g / \Delta, \Delta = A'\gamma - B'\alpha$.

論文中の式 (4.38) に $n = 0$ を代入すると、論文中の式 (8.18) が得られる。式 (8.18) に $\beta = 0$ を代入すると

$$(A'\lambda^2 + \alpha g)(B'\lambda^2 + \gamma g) = 0 \quad (8.21)$$

となる。この方程式の解を $\lambda_1^2 = -\kappa_1^2, \lambda_2^2 = -\kappa_2^2$ とおくと、

$$B'\kappa_1^2 - \gamma g = 0, \quad (8.22)$$

$$A'\kappa_2^2 - \alpha g = 0, \quad (8.23)$$

となり、論文中の式 (8.19) が得られる。 κ_1^2, κ_2^2 を求めると、

$$\kappa_1^2 = \frac{\gamma g}{B'}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\alpha g}{A'} \quad (8.24)$$

となる。 κ_1, κ_2 は角振動数なので、周期はそれぞれ $2\pi/\kappa_1, 2\pi/\kappa_2$ となる。 β が入った時の解は κ^2 からすこしずれて $\lambda_1^2 = -l_1^2, \lambda_2^2 = -l_2^2$ と l_{12} を定義すると、

$$l_1^2 = \kappa_1^2 + \epsilon_1, \quad (8.25)$$

$$l_2^2 = \kappa_2^2 + \epsilon_2, \quad (8.26)$$

となる。この $\epsilon_{1,2}$ を求めよう。式 (8.25) を式 (8.18) に代入して ϵ_1^2 の項を落とし、式 (8.22) (8.24) を使えば

$$\epsilon_1 = \frac{\beta^2 g}{\Delta}, \quad (8.27)$$

が得られる。ここで $\Delta = A'\gamma - B'\alpha$ である。同様にすると、

$$\epsilon_2 = -\frac{\beta^2 g}{\Delta}, \quad (8.28)$$

が得られる。よって、

$$\epsilon \equiv \frac{\beta^2 g}{\Delta}, \quad (8.29)$$

と定義すると式 (8.18) の解は次式のように表されて、論文中の式 (8.20) を得る。

$$l_1^2 = \kappa_1^2 + \epsilon, \quad l_2^2 = \kappa_2^2 - \epsilon \quad (8.30)$$

Δ はどのような値であろうか。 A', B', α, γ はラトルバックが楕円体を本体に持つとして、 β が小さいならば、式 (5.6) と式 (4.59) ~ (4.61) より

$$A' = A + h^2 = \frac{b^2 + 6h^2}{5}, \quad (8.31)$$

$$B' = B + h^2 = \frac{a^2 + 6h^2}{5}, \quad (8.32)$$

$$\alpha = \alpha' - h \sim \rho' - h = \frac{b^2 - h^2}{h}, \quad (8.33)$$

$$\gamma = \gamma' - h \sim \rho - h = \frac{a^2 - h^2}{h} \quad (8.34)$$

より、

$$\Delta = A'\gamma - B'\alpha = \frac{7h}{5}(a^2 - b^2), \quad (8.35)$$

となる。

9 第7章

振動によってどの方向の回転が誘導されるかを議論する。そのために、 $\dot{\omega}_3$ に関する方程式を吟味する。

7. The accurate equation of ω_3 is

$$C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2 = xY - yX, \quad (9.1)$$

so that ω_3 is constant to the first approximation.

If squares of small quantities be included, we find that

$$C\dot{\omega}_3 = (B - A)\dot{q}\dot{p} + (\gamma'p - \beta q)(h\ddot{q} - q\dot{q}) - (\alpha'q - \beta p)(h\ddot{p} - p\dot{q}), \quad (9.2)$$

$$= (B - A)\left(\dot{q}\dot{p} - \frac{h}{g}p\ddot{q}\right) + B\ddot{p}q - A\ddot{q}p \dots \dots (8) \quad (9.3)$$

and the value of $\dot{\omega}_3$ depends on the initial conditions.

すでに記述した ω_3 に関する運動方程式 (3.58) が論文中の式 (9.1) である。これらは2次の項だけからなっていたので、最初の近似で、 $\dot{\omega}_3 \sim 0$ と考えた。近似をあげて2次の項を吟味していく。

左辺に含まれている項で、 $\omega_1\omega_2$ の2次の項は式 (4.26) (4.27) より、

$$\omega_1\omega_2 \simeq -\dot{p}\dot{q} + n(q\dot{q} - p\dot{p}) + n^2qp \quad (9.4)$$

である。右辺に関しては式 (3.33) (4.31) (4.32) より

$$\begin{aligned} xY - yX &\simeq (\gamma'p - \beta q)(-q\dot{q} + h\ddot{q} - n(\dot{x} - 2h\dot{p}) - n^2(hq - y)) \\ &\quad - (\alpha'q - \beta p)(-p\dot{q} + h\ddot{p} + n(\dot{y} - 2h\dot{q}) - n^2(hp - x)) \\ &= (\gamma'p - \beta q)(-q\dot{q} + h\ddot{q}) - (\alpha'q - \beta p)(-p\dot{q} + h\ddot{p}) \\ &\quad - n\{(\gamma^2 - h^2 + \beta^2)p\dot{p} + (\alpha^2 - h^2 + \beta^2)q\dot{q} - \beta(\gamma + \alpha)(q\dot{p} + \dot{q}p)\} \\ &\quad - n^2h\beta(p^2 - q^2) \end{aligned}$$

となる。まとめると次式を得る。

$$\begin{aligned} C\dot{\omega}_3 &= (B - A)\dot{q}\dot{p} + (\gamma'p - \beta q)(-q\dot{q} + h\ddot{q}) - (\alpha'q - \beta p)(-p\dot{q} + h\ddot{p}) \\ &\quad - n\{(\gamma^2 - h^2 + \beta^2)p\dot{p} + (\alpha^2 - h^2 + \beta^2)q\dot{q} - \beta(\gamma + \alpha)(q\dot{p} + \dot{q}p) - (A - B)(q\dot{q} - p\dot{p})\} \\ &\quad - n^2(h\beta(p^2 - q^2) + B - A) \end{aligned} \quad (9.5)$$

この式で $n = 0$ とおくと、

$$C\dot{\omega}_3 = (B - A)\dot{q}\dot{p} + (\gamma'p - \beta q)(-q\dot{q} + h\ddot{q}) - (\alpha'q - \beta p)(-p\dot{q} + h\ddot{p}), \quad (9.6)$$

となる。

次に β が入っている項を消去していく。運動方程式 (8.16) (8.17) より

$$(\alpha q - \beta p)g = ((\alpha' - h)q - \beta p)g = -A'\ddot{q}, \quad (9.7)$$

$$(\gamma p - \beta q)g = ((\gamma' - h)p - \beta q)g = -B'\ddot{p}, \quad (9.8)$$

だから

$$(\alpha'q - \beta p) = hq - \frac{A'\ddot{q}}{g}, \quad (9.9)$$

$$(\gamma p - \beta q) = hp - \frac{B'\ddot{p}}{g}, \quad (9.10)$$

となる。これらの式を式 (9.6) に代入すると次式を得る。

$$C\dot{\omega}_3 = (B - A)(\dot{q}\dot{p} - \frac{h}{g}\ddot{p}\ddot{q}) + B\ddot{p}q - A\ddot{q}p. \quad (9.11)$$

論文では右辺の第1項中、 $-\frac{h}{g}p\ddot{q}$ と誤植がある。式 (9.6) (9.11) が論文中の式 (9.2) (9.3) である。

Suppose that

$$p = \mu_1 \cos l_1 t + \mu_2 \cos l_2 t + \nu_1 \sin l_1 t + \nu_2 \sin l_2 t, \dots \quad (9.12)$$

then by (6)

$$g\beta q = -B'[l_1^2(\mu_1 \cos l_1 t + \nu_1 \sin l_1 t) + l_2^2(\mu_2 \cos l_2 t + \nu_2 \sin l_2 t)] + g\gamma p, \dots \quad (9.13)$$

l_1, l_2 に対応して2つの振動モードがあるので、 p, q はこれらの線形結合で書ける。よって次式 (論文中の式 (9.12)) の形を仮定できる。

$$p = \mu_1 \cos l_1 t + \mu_2 \cos l_2 t + \nu_1 \sin l_1 t + \nu_2 \sin l_2 t$$

式 (8.17) に上式を代入し q に関する次式 (論文中の式 (9.13)) を得る。

$$g\beta q = -B'[l_1^2(\mu_1 \cos l_1 t + \nu_1 \sin l_1 t) + l_2^2(\mu_2 \cos l_2 t + \nu_2 \sin l_2 t)] + g\gamma p$$

Let us suppose further that initially p, q, \dot{q} are zero and the top is oscillating about an axis parallel to OY; we shall have

$$\mu_1 + \mu_2 = 0 \quad (9.14)$$

$$l_1^2 \mu_1 + l_2^2 \mu_2 = 0 \quad (9.15)$$

$$B'(\nu_1 l_1^3 + \nu_2 l_2^3) - \gamma g(\nu_1 l_1 + \nu_2 l_2) = 0. \quad (9.16)$$

Hence $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$; and, unless Δ is small,

$$l_2 \nu_2 = \frac{A'B'\beta_2}{\Delta^2} l_1 \nu_1 \quad (9.17)$$

初期条件として、 $p(0) = q(0) = \dot{q}(0) = 0$ とする。 $\dot{p} \neq 0, \dot{q} = 0$ の方向は図の p 軸の先端のところをつつく状況に対応する。すると OY 軸周りの振動が生じる。4つの変数 $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ があって、初期条件が3つあるので、変数は一つのみになる。 ν_1 で $C\dot{\omega}_3$ を表すことが目標である。

$$p(0) = \mu_1 + \mu_2 = 0 \quad (9.18)$$

$$\beta g q(0) = -B'(l_1^2 \mu_1 + l_2^2 \mu_2) = 0 \quad (9.19)$$

であり、 $\dot{p}(0) = \nu_1 l_1 + \nu_2 l_2$ なので

$$\beta g \dot{q}(0) = -B'(\nu_1 l_1^3 + \nu_2 l_2^3) + \gamma g(\nu_1 l_1 + \nu_2 l_2) = 0 \quad (9.20)$$

となる。式 (9.18) (9.19) より

$$\mu_1 = \mu_2 = 0$$

である。 $l_2 \nu_2$ を ν_1 であらわす。

$$\begin{aligned} l_2 \nu_2 &= -\frac{B'l_1^2 - g\gamma}{B'l_2^2 - g\gamma} l_1 \nu_1, \quad (\text{式 (9.20) を使った}) \\ &= -\frac{B'(\kappa_1^2 + \epsilon) - g\gamma}{B'(\kappa_2^2 - \epsilon) - g\gamma} l_1 \nu_1, \quad (\text{式 (8.20) を使った}) \\ &= -\frac{B'\epsilon}{B'(\kappa_2^2 - \epsilon + \kappa_1^2)} l_1 \nu_1, \quad (\text{式 (8.22) を使って } g\gamma \text{ を消去}) \\ &= -\frac{\epsilon}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2 - \epsilon} l_1 \nu_1 \sim -\frac{\epsilon}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2} l_1 \nu_1 \\ &= -\frac{\epsilon}{\frac{g\alpha}{A'} - \frac{g\gamma}{B'}} l_1 \nu_1 = -\frac{A'B'\epsilon}{g(\alpha B' - A'\gamma)} l_1 \nu_1, \quad (\text{式 (8.22) (8.23) を使った}) \\ &= \frac{A'B'\beta^2}{\Delta} l_1 \nu_1 \end{aligned} \quad (9.21)$$

となり、論文中の式 (9.17) が導出された。ただし、 $\beta_2 \rightarrow \beta^2$ 、 $\Delta^2 \rightarrow \Delta$ に修正する必要がある。

On substitution, we find

$$p = \frac{\nu_1}{\Delta^2 l_2} (l_2 \Delta^2 \sin l_1 t - A' B' l_1 \beta^2 \sin l_2 t), \quad (9.22)$$

$$q = \frac{\nu_1 B' \beta}{\Delta l_2} (-l_2 \sin l_1 t + l_1 \sin l_2 t), \quad (9.23)$$

leading to the chief term of $C\dot{\omega}_3$ in the form

$$\frac{\beta \nu_1^2 l_1 B'}{l_2 \Delta} \left[\begin{array}{c} (B - A) l_1 l_2 \cos l_1 t (\cos l_2 t - \cos l_1 t) \\ + ((B - A) h l_1^2 / g - A) l_2 \sin l_1 t (l_1 \sin l_1 t - l_2 \sin l_2 t) \\ + B l_1 \sin l_1 t (l_2 \sin l_1 t - l_1 \sin l_2 t) \end{array} \right], \quad (9.24)$$

式 (9.21) を $\mu_1 = \mu_2 = 0$ とした式 (9.12) に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} p(t) &= \nu_1 \sin l_1 t + \frac{A'B'l_1}{\Delta l_2} \beta^2 \sin l_2 t \\ &= \frac{\nu_1}{\Delta l_2} (l_2 \Delta \sin l_1 t + A'B'l_1 \beta^2 \sin l_2 t) \end{aligned}$$

論文中の式 (9.22) に対応する。ただし、第2項目の $-$ を $+$ に、 Δ^2 を Δ に修正する必要がある。
 $q(t)$ に関しては、まず

$$q(t) = \frac{\gamma g - B'l_1^2}{\beta g} \nu_1 \sin l_1 t + \frac{\gamma g - B'l_2^2}{\beta g} \nu_2 \sin l_2 t$$

となる。第1項の係数は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} \frac{\gamma g - B'l_1^2}{\beta g} &= -\frac{B'\epsilon}{\beta g}, \quad (\text{式 (8.20) を使った}) \\ &= -\frac{B'\beta^2 g}{\beta g \Delta} = -\frac{B'\beta}{\Delta} \quad (\text{式 (8.29) を使った}) \end{aligned}$$

第2項の係数は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} \frac{\gamma g - B'l_2^2}{\beta g} &= \frac{\gamma g - B'(\kappa_2^2 - \epsilon + \kappa_1^2 - \kappa_1^2)}{\beta g} \\ &\simeq -\frac{B'(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)}{\beta g}, \quad (\text{式 (8.22) を使った}) \\ &= -\frac{B'}{\beta g} \left(\frac{g\alpha}{A'} - \frac{g\gamma}{B'} \right) = \frac{\Delta}{A'\beta} \end{aligned}$$

第1項も第2項も β に比例する項である。式 (9.21) を使って ν_2 を消去すると $q(t)$ は以下となり、論文中の式 (9.23) を得る。

$$q(t) = \frac{\nu_1 B'\beta}{\Delta l_2} (-l_2 \sin l_1 t + l_1 \sin l_2 t).$$

まとめると以下となる。

$$\begin{aligned} p(t) &= p_1 \sin l_1 t + p_2 \sin l_2 t \\ q(t) &= q_1 \sin l_1 t + q_2 \sin l_2 t \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv \nu_1 \\ p_2 &\equiv \frac{\nu_1 A'B'l_1}{\Delta^2 l_2} \beta^2 \\ q_1 &\equiv -\frac{\nu_1 B'}{\Delta} \beta \\ q_2 &\equiv \frac{\nu_1 B'l_1}{\Delta l_2} \beta = -\frac{l_1}{l_2} q_1 \end{aligned} \tag{9.25}$$

である。

これらより $C\dot{\omega}_3$ を吟味する。 q_1, q_2 は β に比例するオーダーで残す。 p_2 は β^2 のオーダーなので落とすことにして、 $p(t)$ は最初から $p(t) = p_1 \sin l_1 t$ とする。式 (9.25) を使って次式を得る。

$$p(t) = p_1 \sin l_1 t \quad (9.26)$$

$$q(t) = q_1(\sin l_1 t - \frac{l_1}{l_2} \sin l_2 t), \quad (9.27)$$

$$\dot{p}(t) = p_1 l_1 \cos l_1 t, \quad (9.28)$$

$$\ddot{p}(t) = -p_1 l_1^2 \sin l_1 t, \quad (9.29)$$

$$\dot{q}(t) = q_1 l_1 (\cos l_1 t - \cos l_2 t), \quad (9.30)$$

$$\ddot{q}(t) = -q_1 l_1 (l_1 \sin l_1 t - l_2 \sin l_2 t). \quad (9.31)$$

式 (9.11) の第 1 項は次式となる。この項は $(B - A)\omega_1\omega_2$ から来た項である。

$$(B - A)\dot{q}\dot{p} = (B - A)p_1 q_1 l_1^2 (\cos^2 l_1 t - \cos l_1 t \cos l_2 t)$$

第 2 項は静止摩擦によるトルクから来た項の一部である。

$$-\frac{h}{g}(B - A)\ddot{p}\ddot{q} = -\frac{h}{g}(B - A)p_1 q_1 l_1^3 (l_1 \sin^2 l_1 t - l_2 \sin l_1 t \sin l_2 t)$$

第 3, 4 項も静止摩擦によるトルクから来た項で、以下となる。

$$\begin{aligned} B\ddot{p}q &= -Bq_1 p_1 l_1^2 (\sin^2 l_1 t - \frac{l_1}{l_2} \sin l_1 t \sin l_2 t) \\ -A p\ddot{q} &= A p_1 q_1 l_1^2 (\sin^2 l_1 t - \frac{l_2}{l_1} \sin l_1 t \sin l_2 t) \end{aligned}$$

まとめると、

$$\begin{aligned} C\dot{\omega}_3 &= p_1 q_1 l_1^2 (C_1 + C_2) \\ C_1 &\equiv (B - A)(\cos^2 l_1 t - \frac{h}{g} l_1^2 \sin^2 l_1 t - \sin^2 l_1 t) \\ C_2 &\equiv -(B - A)(\cos l_1 t \cos l_2 t - \frac{h}{g} l_1 l_2 \sin l_1 t \sin l_2 t) \\ &\quad + (B \frac{l_1}{l_2} - A \frac{l_2}{l_1}) \sin l_1 t \sin l_2 t \end{aligned}$$

後述するが C_1 は時間平均をとると残る項、 C_2 は時間平均をとると残らない項である。この式を

$$p_1 q_1 = -\frac{\beta \nu_1^2}{\Delta} B'$$

に注意して変形すると、論文中の式 (9.24) になる。

the mean value of which is

$$\beta\nu_1^2 l_1^2 B' [(B - A)(-1 + hl_1^2/g) + B - A]/2\Delta, \quad (9.32)$$

or

$$\beta\nu_1^2 h B' (B - A) l_1^4 / 2g\Delta. \quad (9.33)$$

Now the initial angular velocity may be denoted by $\Omega_2 (= -\nu_1 l_1)$, and $g\Delta = A'B'(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)$: hence the mean value $\dot{\omega}_3$ is

$$\beta\gamma h \Omega_2^2 (B - A) / 2\Delta C \quad \text{or} \quad \beta h \Omega_2^2 \kappa_1^2 (B - A) / 2A'C(\kappa_1^2 - \kappa_2^2). \quad (9.34)$$

時間平均に関しては振動部分に関する平均である。振動している量 $A(t)$ に関し、ある時間間隔 T に関する平均を計算する。そして T を大きくとって $O(\frac{1}{T})$ の部分を落とした結果を時間平均 $\langle A \rangle$ と定義する。すなわち

$$\langle A \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt, \quad (9.35)$$

である。例えば

$$\langle \sin l_1 t \cos l_1 t \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \sin l_1 t \cos l_1 t dt = -\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\cos 2l_1 T - 1) = 0, \quad (9.36)$$

$$\langle \sin l_1 t \sin l_2 t \rangle = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\cos(l_1 - l_2)t - \cos(l_1 + l_2)t) dt, \quad (9.37)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\sin(l_1 - l_2)T - \sin(l_1 + l_2)T) = 0, \quad (9.38)$$

となることがわかる。同じような計算をすると次式だけが残り、残りの時間平均は 0 となることがわかる。

$$\langle \cos^2 l_1 t \rangle = \langle \sin^2 l_1 t \rangle = \langle \cos^2 l_2 t \rangle = \langle \sin^2 l_2 t \rangle = \frac{1}{2}$$

前述したが、 $\langle C_2 \rangle = 0$ であり、

$$\langle C_1 \rangle = (B - A) \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{2g} l_1^2 - \frac{1}{2} \right) = -(B - A) \frac{h}{2g} l_1^2, \quad (9.39)$$

となることがわかるので、

$$\langle \dot{\omega}_3 \rangle = \frac{\beta\nu_1^2 B'}{\Delta} \frac{l_1^4 h}{2gC} (B - A), \quad (9.40)$$

となり、論文中の式 (9.33) を得る。 $B'l_1^2 = B'(\kappa_1^2 + \epsilon)$ だが、 ϵ が β^2 のオーダーなので無視して $B'l_1^2 \sim B'\kappa_1^2 = \gamma g$ となる。この式と $\Omega_2 = -\nu_1 l_1$ を使うと

$$\langle \dot{\omega}_3 \rangle = \frac{\beta\nu_1^2 B'}{\Delta} \frac{l_1^4 h}{2gC} (B - A) = \frac{\beta\gamma h \Omega_2^2}{2\Delta C} (B - A) \quad (9.41)$$

となり、論文中の式 (9.34) の最初の項を得る。また $A'\kappa_2^2 = \alpha g, B'\kappa_1^2 = \gamma g$ より

$$g\Delta = gA'\gamma - gB'\alpha = A'B'(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \quad (9.42)$$

となるので、 $l_1^2 \sim \kappa_1^2$ も使うと

$$\langle \dot{\omega}_3 \rangle = \frac{\beta \nu_1^2 B'}{\Delta} \frac{l_1^4 h}{2gC} (B - A) \sim \frac{\beta \Omega_2^2}{A'(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)} \frac{\kappa_1^2 h}{2C} (B - A), \quad (9.43)$$

となり、論文中の式 (9.34) の 2 番目の項を得る。

10 第 8 章

前章から議論が続いている。

8. Thus a longitudinal oscillation will give rise to rotation in the steady or the unsteady direction according as $\kappa_1^2 - \kappa_2^2$ is positive or negative, *i.e.* according as longitudinal oscillations have a shorter or longer period than the transverse. When ω_3 becomes finite our equations cease to hold, and we must go back to the former discussion.

図 3.1 のようにおもりが乗っていて ($\theta > 0$ で $\beta < 0$ の場合) p 軸の先端のところをつつくという状況、OY 軸まわりの振動 (longitudinal oscillation) を与える状況を考えていた。 $B > A$ なので、 $\kappa_1^2 - \kappa_2^2 > 0$ ならば $\langle \dot{\omega}_3 \rangle < 0$ となり、反時計回りの回転が (steady direction) が誘起される。一方、 $\kappa_1^2 - \kappa_2^2 < 0$ ならば $\langle \dot{\omega}_3 \rangle > 0$ となり、時計回りの回転が (unsteady direction) が誘起される。回転が誘起されて ω_3 が有限の値をもつと、以前の第 4 章、5 章の議論につながっていく。

In exactly the same way a transverse oscillation, given by p, \dot{p}, q initially zero and \dot{q} equal to Ω_1 , will set up rotation and the mean value of $\dot{\omega}_3$ will be

$$-\beta \alpha h \Omega_1^2 (B - A) / 2\Delta C \quad \text{or} \quad \beta h \Omega_1^2 \kappa_2^2 (B - A) / 2B'C(\kappa_2^2 - \kappa_1^2), \quad (10.1)$$

and the direction will be opposite to that corresponding to the longitudinal oscillations.

次に、 q 軸の先端のところをつつくとどのような回転を誘起するか議論する。初期条件は

$$p(0) = 0, \quad q(0) = 0, \quad \dot{p}(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = \Omega_1, \quad (10.2)$$

である。同様な計算をおこなって、論文中の式を得る。この計算は省略する。式 (10.1) より $\kappa_2^2 - \kappa_1^2$ という形ではいっているので、 q 軸の先端のところをつつく、すなわち OX 軸まわりの振動では $\langle \dot{\omega}_3 \rangle > 0$ となり、時計回りの回転が (unsteady direction) が誘起される。

All these cases are included in the rule that whether purely longitudinal or purely transverse oscillations are initially communicated to the body, these will set up rotation in that direction which is stable for oscillations of corresponding frequency (corresponding oscillations about rest and about steady rotation being each of greater or each of less frequency)

ラトルバックが静止している時に、縦方向（OX 方向、OY 軸まわり）の振動を与えると、反時計回りに回転する。第5章で議論したように、反時計回りだと縦方向の振動は振幅が減少して安定であった。一方、横方向（OY 方向、OX 軸まわり）の振動を与えると、時計回りに回転し、この回転は横方向の振動に対し安定であった。結局、与えられた振動に対し安定な方向に回転を起こす、というようなことを述べている。

それでは、 p 軸と q 軸の間をつつくとどうなるであろうか。次章ではこれに関して議論している。

11 第9章

We shall now consider the more general case in which β, Δ may be each numerically small and Ω_1, Ω_2 initially exist together.

The equations (6) will still hold and such an expression as (9) for p, q will be suitable. If p, q be initially zero, it follows as before, that in the expressions for p, q there will be no terms in $\cos lt$, and we shall therefore assume

$$\begin{aligned} p(t) &= \mu_1 \sin l_1 t + \mu_2 \sin l_2 t \\ q(t) &= \nu_1 \sin l_1 t + \nu_2 \sin l_2 t \end{aligned}$$

where l_1^2, l_2^2 are roots of the equation

$$(A'x - \alpha g)(B'x - \gamma g) - \beta^2 g^2 = 0 \dots \dots (11). \quad (11.1)$$

一般的な場合を考える。初期条件は

$$p(0) = 0, q(0) = 0, \dot{p}(0) = -\Omega_2, \dot{q}(0) = \Omega_1$$

とする。 $p(0) = 0, q(0) = 0$ より、 $\cos lt$ の係数は 0 となるので、次式のように展開ができる。

$$\begin{aligned} p(t) &= \mu_1 \sin l_1 t + \mu_2 \sin l_2 t \\ q(t) &= \nu_1 \sin l_1 t + \nu_2 \sin l_2 t \end{aligned}$$

ここで、以前式 (9.12) で展開に使われた $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ とは違うことに注意しておこう。

さて、 $C\dot{\omega}_3$ は式 (9.11) で与えられ

$$C\dot{\omega}_3 = (B - A)(\dot{q}\dot{p} - \frac{h}{g}\ddot{p}\ddot{q}) + B\ddot{p}q - A\ddot{q}p, \quad (11.2)$$

であった。各項の時間平均は以下のように求められる。

$$\dot{p}(t) = l_1\mu_1 \cos l_1 t + l_2\mu_2 \cos l_2 t, \quad (11.3)$$

$$\dot{q}(t) = l_1\nu_1 \cos l_1 t + l_2\nu_2 \cos l_2 t, \quad (11.4)$$

$$\ddot{p}(t) = -l_1^2\mu_1 \sin l_1 t - l_2^2\mu_2 \sin l_2 t, \quad (11.5)$$

$$\ddot{q}(t) = -l_1^2\nu_1 \sin l_1 t - l_2^2\nu_2 \sin l_2 t, \quad (11.6)$$

より

$$\langle \dot{p}\dot{q} \rangle = \frac{1}{2}(\mu_1\nu_1 l_1^2 + \mu_2\nu_2 l_2^2)$$

$$\langle \ddot{p}\ddot{q} \rangle = \frac{1}{2}(\mu_1\nu_1 l_1^4 + \mu_2\nu_2 l_2^4)$$

$$\langle \ddot{p}q \rangle = \langle p\ddot{q} \rangle = -\frac{1}{2}(\mu_1\nu_1 l_1^2 + \mu_2\nu_2 l_2^2)$$

となる。したがって、第1項と第3, 4項がキャンセルして

$$\langle C\dot{\omega}_3 \rangle = -\frac{(B - A)h}{2g}(\mu_1\nu_1 l_1^4 + \mu_2\nu_2 l_2^4), \quad (11.7)$$

となる。

次からの式変形は $\mu_1\nu_1 l_1^4$, $\mu_2\nu_2 l_2^4$ を求めるために行われる。

Then

$$\left. \begin{aligned} l_1\mu_1 + l_2\mu_2 &= -\Omega_2 \\ l_1\nu_1 + l_2\nu_2 &= \Omega_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (12), \quad (11.8)$$

and by (6),

$$\beta g q = B' p + \gamma g p. \quad (11.9)$$

Differentiating and substituting initial values, we find

$$-B'(l_1^3\mu_1 + l_2^3\mu_2) = \beta g \Omega_1 + \gamma g \Omega_2. \quad (11.10)$$

$\dot{p}(0) = -\Omega_2, \dot{q}(0) = \Omega_1$ より、論文中の式 (11.8) を得る。

p に関する運動方程式 (11.9) では $B'p \rightarrow B'\ddot{p}$ と修正が必要。これをもう一回時間微分した式 $\beta g \dot{q} = B'\ddot{\ddot{p}} + \gamma g \dot{p}$ に

$$\dot{p}(t) = l_1\mu_1 \cos l_1 t + l_2\mu_2 \cos l_2 t, \quad (11.11)$$

$$\dot{q}(t) = l_1\nu_1 \cos l_1 t + l_2\nu_2 \cos l_2 t, \quad (11.12)$$

$$\ddot{p}(t) = -l_1^2\mu_1 \sin l_1 t - l_2^2\mu_2 \sin l_2 t, \quad (11.13)$$

$$\ddot{\ddot{p}}(t) = -l_1^3\mu_1 \cos l_1 t - l_2^3\mu_2 \cos l_2 t, \quad (11.14)$$

を代入し $t = 0$ とすると

$$\beta g(l_1\nu_1 + l_2\nu_2) = -B'(l_1^3\mu_1 + l_2^3\mu_2) + \gamma g(l_1\mu_1 + l_2\mu_2) \quad (11.15)$$

となるので、 $l_1\mu_1 + l_2\mu_2 = -\Omega_2$, $l_1\nu_1 + l_2\nu_2 = \Omega_1$ を代入して論文中の式 (11.10) を得る。

Combined with the first equation of (12), this gives

$$\left. \begin{aligned} -B'l_1\mu_1(l_1^2 - l_2^2) &= \beta g\Omega_1 + (\gamma g - B'l_2^2)\Omega_2, \\ B'l_2\mu_2(l_1^2 - l_2^2) &= \beta g\Omega_1 + (\gamma g - B'l_1^2)\Omega_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (13). \quad (11.16)$$

式 (11.10) の左辺に $0 = -B'(-l_1l_2^2\mu_1 + l_1l_2^2\mu_1)$ を加えてまとめると論文中の式 (11.16) の上式を得る。同様に、 $0 = -B'(-l_1^2l_2\mu_2 + l_1^2l_2\mu_2)$ を加えてまとめると論文中の式 (11.16) の下式を得る。

The equations obtained by treating the other equations of (6) and (13) in precisely the same manner can be written down,

$$\left. \begin{aligned} A'l_1\nu_1(l_1^2 - l_2^2) &= \beta g\Omega_2 + (\alpha g - A'l_2^2)\Omega_1 \\ -A'l_2\nu_2(l_1^2 - l_2^2) &= \beta g\Omega_2 + (\alpha g - A'l_1^2)\Omega_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (14). \quad (11.17)$$

q に関する運動方程式に対して同様なことをすると、式 (11.17) を得る。詳細な計算は省略するが、運動方程式の形から次の置き換えでも得られることがわかる。

$$B' \rightarrow A', \quad \mu_{1,2} \rightarrow \nu_{1,2}, \quad \Omega_1 \rightarrow -\Omega_2, \quad \Omega_2 \rightarrow -\Omega_1, \quad \gamma \rightarrow \alpha \quad (11.18)$$

On substituting the values of p, q in (8) the mean value of $2C\dot{\omega}_3$ comes out as

$$(B - A)\{l_1^2\mu_1\nu_1 + l_2^2\mu_2\nu_2 - (l_1^4\mu_1\nu_1 + l_2^4\mu_2\nu_2)h/g\} - (B - A)(l_1^2\mu_1\nu_1 + l_2^2\mu_2\nu_2) \quad (11.19)$$

or

$$-(B - A)(l_1^4\mu_1\nu_1 + l_2^4\mu_2\nu_2)h/g, \quad (11.20)$$

or, on substituting from (13) and (14),

$$\frac{(B - A)\beta h}{A'B'(l_1^2 - l_2^2)^2} \left[\begin{aligned} &\{\alpha g(l_1^2 + l_2^2) - 2A'l_1^2l_2^2\}\Omega_1^2 \\ &+ \{\gamma g(l_1^2 + l_2^2) - 2B'l_1^2l_2^2\}\Omega_2^2 + 2\beta g(l_1^2 + l_2^2)\Omega_1\Omega_2 \end{aligned} \right]. \quad (11.21)$$

式 (11.19) の第 1 項と第 3 項がキャンセルして式 (11.20) を得るが、これは式 (11.7) です でに求めている。

(13) の第 1 式と (14) の第 1 式をかけると次式を得る。ここで、式 (11.1) より $(\gamma g - B'l_2^2)(\alpha g - A'l_2^2) = \beta^2 g^2$ を使った。

$$\begin{aligned} -A'B'l_1^2\mu_1\nu_1(l_1^2 - l_2^2)^2 &= (\beta g\Omega_1 + (\gamma g - B'l_2^2)\Omega_2)(\beta g\Omega_2 + (\alpha g - A'l_2^2)\Omega_1), \\ &= \beta g(\alpha g - A'l_2^2)\Omega_1^2 + \beta g(\gamma g - B'l_2^2)\Omega_2^2 + 2\beta^2 g^2\Omega_1\Omega_2 \quad (11.22) \end{aligned}$$

同様に (13) の第 2 式と (14) の第 2 式をかけると次式を得る。

$$\begin{aligned} -A'B'l_2^2\mu_2\nu_2(l_1^2 - l_2^2)^2 &= (\beta g\Omega_1 + (\gamma g - B'l_1^2)\Omega_2)(\beta g\Omega_2 + (\alpha g - A'l_1^2)\Omega_1), \\ &= \beta g(\alpha g - A'l_1^2)\Omega_1^2 + \beta g(\gamma g - B'l_1^2)\Omega_2^2 + 2\beta^2 g^2\Omega_1\Omega_2 \quad (11.23) \end{aligned}$$

よって、次式を得る。

$$\begin{aligned} 2C\langle\dot{\omega}_3\rangle &= -(B-A)\frac{h}{g}(l_1^4\mu_1\nu_1 + l_2^4\mu_2\nu_2) \\ &= \frac{(B-A)}{A'B'(l_1^2 - l_2^2)^2}h\beta[l_1^2\{(\alpha g - A'l_2^2)\Omega_1^2 + (\gamma g - B'l_2^2)\Omega_2^2 + 2\beta g\Omega_1\Omega_2\} \\ &\quad + l_2^2\{(\alpha g - A'l_1^2)\Omega_1^2 + (\gamma g - B'l_1^2)\Omega_2^2 + 2\beta g\Omega_1\Omega_2\}] \\ &= \frac{(B-A)}{A'B'(l_1^2 - l_2^2)^2}h\beta[\Omega_1^2(\alpha g(l_1^2 + l_2^2) - 2A'l_1^2l_2^2) + \Omega_2^2(\gamma g(l_1^2 + l_2^2) - 2B'l_1^2l_2^2) \\ &\quad + 2\beta g(l_1^2 + l_2^2)\Omega_1\Omega_2] \quad (11.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(B-A)}{A'B'(l_1^2 - l_2^2)^2}h\beta[(l_1^2 + l_2^2)g(\Omega_1^2\alpha + \Omega_2^2\gamma + 2\beta\Omega_1\Omega_2) \\ &\quad - 2l_1^2l_2^2(\Omega_1^2A' + \Omega_2^2B')] \quad (11.25) \end{aligned}$$

式 (11.24) が論文中の式 (11.21) に対応する。 $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ が消去できたので次に l_1^2, l_2^2 を消去していく。

Now by (11),

$$A'B'(l_1^2 + l_2^2) = (\gamma A' + \alpha B')g, \quad A'B'l_1^2l_2^2 = (\alpha\gamma - \beta^2)g^2, \quad (11.26)$$

whence the mean value of $2C\dot{\omega}_3(l_1^2 - l_2^2)^2/(B-A)h$ becomes

$$\beta g^2\{(\gamma A' + \alpha B')(\alpha\Omega_1^2 + \gamma\Omega_2^2 + 2\beta\Omega_1\Omega_2) - 2(\alpha\gamma - \beta^2)(A'\Omega_1^2 + B'\Omega_2^2)\}, \quad (11.27)$$

or

$$\beta g^2\{\Delta(\gamma\Omega_2^2 - \alpha\Omega_1^2) + 2\beta(\gamma A' + \alpha B')\Omega_1\Omega_2 + 2\beta^2(A'\Omega_1^2 + B'\Omega_2^2)\}. \quad (11.28)$$

Also

$$\begin{aligned} A'^2B'^2(l_1^2 - l_2^2)^2 &= (\gamma A' + \alpha B')^2 - 4A'B'(\alpha\gamma - \beta^2) \\ &= \Delta^2 + 4\beta^2A'B'. \quad (11.29) \end{aligned}$$

l_1^2, l_2^2 は、式 (11.1) の解だった。したがって、解と係数の関係より次式が成り立つ。論文中の式 (11.26) に対応する。

$$l_1^2 + l_2^2 = \frac{g}{A'B'}(\alpha B' + \gamma A'), \quad l_1^2 l_2^2 = \frac{g^2(\alpha\gamma - \beta^2)}{A'B'}. \quad (11.30)$$

これらの式を式 (11.25) に代入すると、論文中の式 (11.27) を得る。

式 (11.30) と $\Delta = A'\gamma - B'\alpha$ より次式 (論文中の式 (11.29)) も成り立つ。

$$\begin{aligned} (l_1^2 - l_2^2)^2 &= (l_1^2 + l_2^2)^2 - 4l_1^2 l_2^2 \\ &= \frac{g^2}{A'^2 B'^2} \{ \Delta^2 + 4A'B'\beta^2 \} \end{aligned}$$

If then β, Δ be small, the chief terms in the mean value of $\dot{\omega}_3$ give

$$\frac{(B-A)h\{\beta\Delta(\gamma\Omega_2^2 - \alpha\Omega_1^2) + 2\beta^2(\gamma A' + \alpha B')\Omega_1\Omega_2\}}{2C(\Delta^2 + 4A'B'\beta^2)}. \quad (11.31)$$

If β be small compared with Δ , this agrees with the two expressions already found: the direction of the spin set up changes sign with β and with Δ , but not with Ω_1 or Ω_2 .

式 (11.29) も式 (11.25) に代入すると結局次式 (論文中の式 (11.31)) を得る。

$$\langle \dot{\omega}_3 \rangle = \frac{(B-A)h}{2C(\Delta^2 + 4A'B'\beta^2)} \{ \beta\Delta(\gamma\Omega_2^2 - \alpha\Omega_1^2) + 2\beta^2(\gamma A' + \alpha B')\Omega_1\Omega_2 \} \quad (11.32)$$

β が小さいとして $O(\beta^2)$ の量を落とすと、

$$\langle \dot{\omega}_3 \rangle \sim \frac{(B-A)h}{2C\Delta^2} \{ \beta\Delta(\gamma\Omega_2^2 - \alpha\Omega_1^2) \}, \quad (11.33)$$

となって、7章で得た式 (9.34) と8章で得た式 (10.1) を加えたものが得られる。

12 第10章

最後の章であるが、短文で終わっている。

10. If $\Omega_2^2/\Omega_1^2 - \alpha/\gamma$ be small, the first term within the numerator becomes unimportant and the second term $\beta^2(\gamma A' + \alpha B')\Omega_1\Omega_2$ determines the motion. Thus the direction of the rotation changes sign with Ω_1 or Ω_2 , but not with β or Δ .

式 (11.31) より、 $\gamma\Omega_2^2 - \alpha\Omega_1^2$ が小さい値をとるような場所をつつくと、 β^2 の項が効いてくる。すると $\Omega_1\Omega_2$ の正負だけが $\langle \dot{\omega}_3 \rangle$ の符号によるので、 β の符号すなわちおもりがどこに乗っているのかによらず回転の角加速度がきまると述べている。特殊な状況があることを指摘している。

以上で論文の解説を終える。

参考文献

- [1] G.T.Walker. "On a Dynamical Top", Quarterly journal of pure and applied mathematics **Vol.28**,175-185(1896)
- [2] https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN600494829_0028
- [3] G.T.Walker. "On a Curious Dynamical Property of Celts" Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **8**, 305-306(1895).
<https://www.biodiversitylibrary.org/item/95857#page/323/mode/1up>
- [4] 高野研究室 Web サイト
<https://www.juen.ac.jp/lab/takano/indexjp.html>
- [5] H.K.Moffatt and T.Tokieda. "Celt reversals:a prototype of chiral dynamics", Proc. R. Soc. Edinburgh. A **138**,361-368(2008)
- [6] M.Pascal "Asymptotic Solution of the Equations of Motion for a Celtic Stone", Prikl.Matem.Mekhan. **V.47**,No2,321-329(1983). English translation:Journal of Applied Mathematics and Mechanics.**V.47**,No2,269-276(1983)
- [7] A.P.Markeev. "On the dynamics of a solid on an absolutely rough plane", Prikl.Matem.Mekhan. **V.47**,No4,575-582(1983). English translation:Journal of Applied Mathematics and Mechanics.**V.47**,No4,473-478(1984)
- [8] H.Bondi. "The rigid body dynamics of unidirectional spin", Proc. R. Soc. Lond. A **405**,265-274(1986)
- [9] A.Garcia and M.Hubbard "Spin reversal of the rattleback:theory and experiment" Proc.R.Soc. Lond. A**148**,165-197(1988)
- [10] H.Takano "Spin Reversal of a Rattleback with Viscous Friction" Regular and Chaotic Dynamics, Vol.19(1), 81-99, Feb, (2014)