ラトルバックの運動を可視化したシミュレーション

高野　浩志 *

上越教育大学　学校臨床研究コース　情報教育分野

943-8512 新潟県上越市山屋敷町 1 番地

2023 年 12 月

概 要

ラトルバックの運動方程式を構成し、この方程式をもとに、Mathematica により数値計算を実行した。さらに Mathematica のアニメーション機能により、ラトルバックの 3 次元の運動を可視化させた。ラトルバックは楕円体とおもりで構成されていて、滑らない場合の運動のみを解析する。楕円体の大きさ、おもりの位置や回転の初期値を変えることができるので、さまざまなラトルバックに対して、どのように、どのような時間で回転・反転するかがわかるシミュレーションとなっている。Mathematica ファイルは筆者の Web サイト [1] にアップされている。

1　はじめに

ラトルバックのシミュレーションは多くの論文で示されていて、オイラー角や回転の角速度の時間変化をグラフで表示等の解析がされている。しかし、このようなグラフからだと、ラトルバックのほんとの動きは想像するしかなく、非常にわかりにくい。そこで、３次元的な動きを可視化したシミュレーションを探したが、運動方程式を数値的に解き、それをもとにしたシミュレーションは見当たらなかったので、自作を試みた。本レポートはその解説である。

2　ラトルバックの形状

本レポートで考えるラトルバックとしては、図 1 のような、質量 m_1 g をもった楕円体に、灰色の丸で示した質量 m_2 g の円柱のおもりが乗っているものである。重心を G とする。楕円体の

*e-mail:takano@juen.ac.jp

形の対称軸を $\bar{\boldsymbol{e}}_i, (i=1,2,3)$ として、原点を重心 G と一致させる。$\bar{\boldsymbol{e}}_i(i=1,2,3)$ 軸方向の長さをそれぞれ $\bar{a}$ cm、$\bar{b}$ cm、$\bar{c}$ cm とする。これらの長さに関して、

$$\bar{a} > \bar{b} > \bar{c}, \tag{1}$$

という条件を仮定する。底面と床の接点の原点 G を始点とした位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_p$ とする。

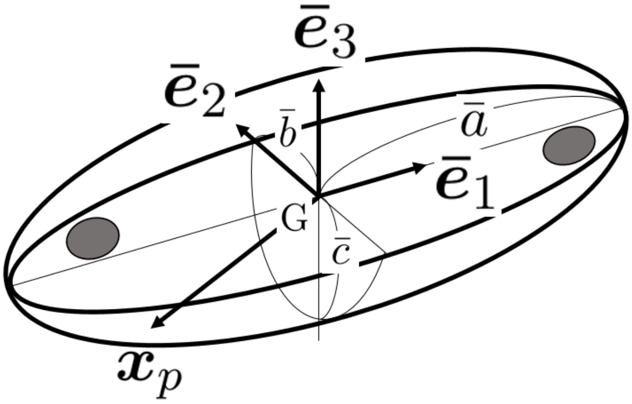

図 1: ラトルバックの形状。灰色の丸はおもりを表している。重心を G とする。楕円体の対称軸を $\bar{\boldsymbol{e}}_i, (i=1,2,3)$ として、原点を重心 G と一致させる。$\bar{\boldsymbol{e}}_i(i=1,2,3)$ 軸方向の長さをそれぞれ $\bar{a}$ cm、$\bar{b}$ cm、$\bar{c}$ cm とする。

おもりは半径 $\bar{l}_2$、厚さ $\bar{d}$、密度 ρ_2 の円柱であり、図 2 のように重心 G から $\bar{l}_1$ cm 離れたところにある。重心 G と円柱の中心点を結ぶ線と楕円体の長軸との角度を α とする。図の位置で $\alpha > 0$ とする。質量を m_2 とすると、$m_2 = \pi \bar{l}_2^2 \bar{d} \rho_2$ である。

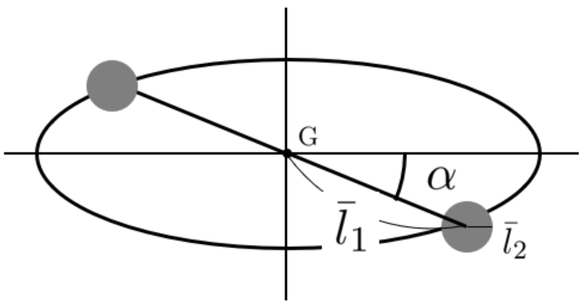

図 2: おもりは半径 $\bar{l}_2$ の円柱状のもので重心 G から $\bar{l}_1$ cm 離れたところにある。重心 G と円柱の中心点を結ぶ線と楕円体の長軸との角度を $\alpha > 0$ とする。

ラトルバックの慣性主軸を $\boldsymbol{e}_i, (i=1,2,3)$ とする。図 3 のように、おもりが偏って乗っているために、慣性主軸 $\boldsymbol{e}_{1,2}$ は幾何主軸 $\bar{\boldsymbol{e}}_{1,2}$ と角度 δ だけずれている。3 軸方向は一致している。この角度は、主慣性モーメントを求める時、同時に求められる。

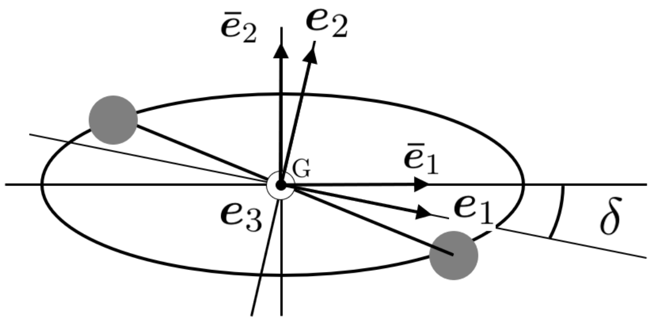

図 3: 慣性主軸 $\boldsymbol{e}_{1,2}$ は対称軸 $\bar{\boldsymbol{e}}_{1,2}$ と角度 $\delta > 0$ だけずれている。

このラトルバックを机の上のような平面上に置く。図 4 のように、平面内には座標系（以下実験系）の単位ベクトル $\boldsymbol{E}_i, (i = 1, 2, 3)$ が固定されていて、原点を O とする。O から接点までの位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_t$ とし、O から重心 G までの位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_g$ とする。

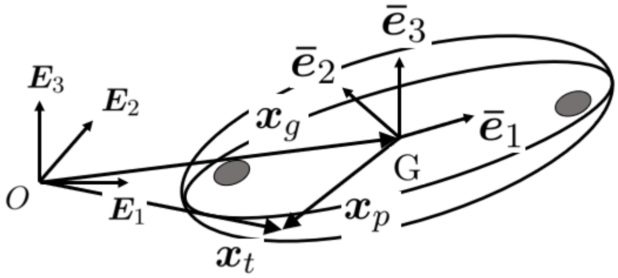

図 4: 平面内には座標系（以下実験系）の単位ベクトル $\boldsymbol{E}_i, (i = 1, 2, 3)$ が固定されていて、原点を O とする。O から接点までの位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_t$ とし、O から重心 G までの位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_g$ とする。

以下の議論で、長さの単位を $\bar{c}$ とする。そして、位置ベクトル $\boldsymbol{x}_p$ の対称軸に関する成分や慣性主軸に関する成分を $\bar{c}$ で割ったものをそれぞれ、$\bar{x}_{p1}, \bar{x}_{p2}, \bar{x}_{p3}$、$x_{p1}, x_{p2}, x_{p3}$ とすると、以下のように表せる。

$$\boldsymbol{x}_p = \bar{c}(\bar{x}_{p1}\bar{\boldsymbol{e}}_1 + \bar{x}_{p2}\bar{\boldsymbol{e}}_2 + \bar{x}_{p3}\bar{\boldsymbol{e}}_3) = \bar{c}(x_{p1}\boldsymbol{e}_1 + x_{p2}\boldsymbol{e}_2 + x_{p3}\boldsymbol{e}_3). \tag{2}$$

これをどの座標系の成分かがわかるように、以下のように表すことにする。

$$\boldsymbol{x}_p = \bar{c}(\bar{x}_{p1}, \bar{x}_{p2}, \bar{x}_{p3})_{\bar{\boldsymbol{e}}} = \bar{c}(x_{p1}, x_{p2}, x_{p3})_{\boldsymbol{e}}. \tag{3}$$

底面は 2 次曲面と仮定すると、成分の間に以下の式が成立する。

$$\frac{\bar{x}_{p1}^2}{a^2} + \frac{\bar{x}_{p2}^2}{b^2} + \bar{x}_{p3}^2 \quad = \quad 1 \tag{4}$$

ここで、$a = \frac{\bar{a}}{\bar{c}}, b = \frac{\bar{b}}{\bar{c}}$ である。

図3より対称軸 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ と慣性主軸 $\boldsymbol{e}$ には以下の関係式があることがわかる。

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{e}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

式 (5) を次式のように表す。

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{e}}_i &= \sum_{j=1,2,3} (R_{3\delta})_{ij} \boldsymbol{e}_j \\ R_{3\delta} &\equiv \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

以後、同じ文字が出るとそれはその文字に関して和を表す規則を適用し、次式のように記述する。

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i = (R_{3\delta})_{ij} \boldsymbol{e}_j. \tag{7}$$

成分間の関係は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_p &= (\bar{x}_{p1}, \bar{x}_{p2}, \bar{x}_{p3}) \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{e}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{e}}_3 \end{pmatrix} = (\bar{x}_{p1}, \bar{x}_{p2}, \bar{x}_{p3}) \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_{p1}, x_{p2}, x_{p3}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{8}$$

より、

$$(x_{p1}, x_{p2}, x_{p3}) = (\bar{x}_{p1}, \bar{x}_{p2}, \bar{x}_{p3}) \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

すなわち

$$x_{pi} = \bar{x}_{pj} (R_{3\delta})_{ji} = (R_{3\delta}^{\top})_{ij} \bar{x}_{pj}, \tag{10}$$

または、

$$\bar{x}_{pi} = (R_{3\delta})_{ij} x_{pj} \tag{11}$$

が成立する。$R_{3\delta}^{\top}$ は $R_{3\delta}$ の転置行列であり、回転行列の場合は逆行列と一致する。すなわち $R_{3\delta}^{\top} = R_{3\delta}^{-1}$ である。式（7）と式（11）を比較すると、単位ベクトルと成分の値が同じように変換していることがわかる。

3　主慣性モーメント

楕円体とおもりの系、すなわちラトルバックの主慣性モーメントを求めよう。そのために、$\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 系に関する慣性テンソルを求める。慣性テンソルを対角化すると、対角成分に主慣性モーメントが現れ、対角化するための回転行列の角度が δ となる。

おもりは半径 $\bar{l}_2$ cm、厚さ $\bar{d}$ cm の円板とする。楕円体とおもりの密度をそれぞれ $\rho_1, \rho_2(g/cm^3)$ とすると、楕円体の質量 m_1 とおもりの質量 m_2 はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \frac{4\pi}{3}\rho_1\bar{a}\bar{b}\bar{c} \\
m_2 &= \pi\bar{l}_2^2\rho_2\bar{d}
\end{aligned}
$$

である。

図 5 のように、おもりの重心 G' を通る軸に関する慣性モーメント $\bar{I}_{wi}(i = 1, 2, 3)$ は、楕円体と同じ軸方向に関して、以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\bar{I}_{w1} &= \bar{I}_{w2} = \frac{m_2}{4}\bar{l}_2^2 \\
\bar{I}_{w3} &= \frac{m_2}{2}\bar{l}_2^2
\end{aligned}
$$

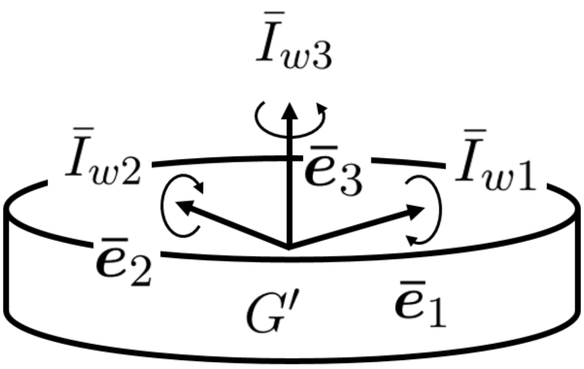

図 5: おもりの慣性モーメント

楕円体の慣性モーメント $\bar{I}_i(i = 1, 2, 3)$ は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\bar{I}_1 &= m_1\frac{\bar{b}^2 + \bar{c}^2}{5} \\
\bar{I}_2 &= m_1\frac{\bar{a}^2 + \bar{c}^2}{5} \\
\bar{I}_3 &= m_1\frac{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}{5}
\end{aligned}
$$

ラトルバックの $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 系に関する慣性テンソル $\bar{I}_r$ の対角成分を求める。おもりが図 6 にように配置されているとすると、楕円体の主慣性モーメントに、おもりの主慣性モーメント $\bar{I}_{wi}$ と各軸からおもりの重心までの距離に関するモーメントがに加算される。

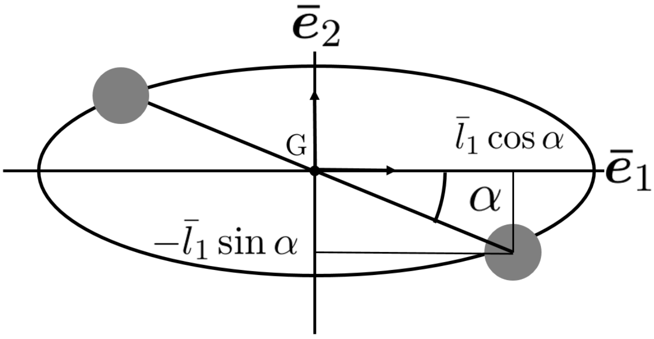

図 6: おもりの配置

また、おもりによる慣性乗積が慣性テンソルの非対角項に現れる。その項はおもりの重心に全質量があるとして（質点）$\bar{\boldsymbol{e}}_1$ 軸の座標 $\bar{l}_1 \cos\alpha$ と $\bar{\boldsymbol{e}}_2$ 軸の座標 $-\bar{l}_1 \sin\alpha$ （ここで負の符号がつくのは、図 6 では $\alpha > 0$ と定義したから。）の積の 2 倍である。結局、慣性テンソルは次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
I_r &= \begin{pmatrix} \bar{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_3 \end{pmatrix} + 2m_2 \begin{pmatrix} \bar{l}_1^2 \sin\alpha^2 + \frac{\bar{l}_2^2}{4} & -\bar{l}_1^2 \cos\alpha \sin\alpha & 0 \\ -\bar{l}_1^2 \cos\alpha \sin\alpha & \bar{l}_1^2 \cos\alpha^2 + \frac{\bar{l}_2^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{l}_1^2 + \frac{\bar{l}_2^2}{2} \end{pmatrix}, \\
&= m_1 \bar{c}^2 \left(\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} + \rho_m \begin{pmatrix} l_1^2 \sin\alpha^2 + \frac{l_2^2}{4} & -l_1^2 \cos\alpha \sin\alpha & 0 \\ -l_1^2 \cos\alpha \sin\alpha & l_1^2 \cos\alpha^2 + \frac{l_2^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & l_1^2 + \frac{l_2^2}{2} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
I_i &= \frac{\bar{I}_i}{m_1 \bar{c}^2} (i = 1, 2, 3), \\
l_i &= \frac{\bar{l}_i}{\bar{c}} (i = 1, 2, 3), \\
\rho_m &= \frac{2m_2}{m_1}.
\end{aligned}
$$

である。一般に対称行列

$$
\begin{pmatrix} e & -h & 0 \\ -h & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}
$$

を対角化する行列を

$$
\begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{13}
$$

とすると、δ は次式で与えられる。

$$\delta = \frac{1}{2}\arctan\frac{2h}{f-e}. \tag{14}$$

ここで、

$$\begin{aligned} e &= I_1 + \rho_m(l_1^2\sin\alpha^2 + \frac{l_2^2}{4}) \\ f &= l_2 + \rho_m(l_1^2\cos\alpha^2 + \frac{l_2^2}{4}) \\ h &= \rho_m l_1^2\cos\alpha\sin\alpha \end{aligned}$$

である。結局ラトルバックの主慣性モーメントを $\bar{J}_i,(i=1,2,3)$ とすると、

$$\begin{aligned} \bar{J}_i &= m_1\bar{c}^2 J_i,(i=1,2,3) \qquad (15) \\ J_1 &= e\cos^2\delta - 2h\cos\delta\sin\delta + f\sin^2\delta \\ J_2 &= e\sin^2\delta + 2h\cos\delta\sin\delta + f\cos^2\delta \\ J_3 &= I_3 + \rho_m(\frac{l_2^2}{2} + l_1^2) \end{aligned}$$

と求められる。

4 楕円体の対称軸と実験系の座標軸との関係

シミュレーションでは、楕円体やおもりなどの表示において実験系 $\boldsymbol{E}_i$ での成分を使うので、運動方程式から得られた $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 系での成分の値を、$\boldsymbol{E}_i$ での成分の値に変換する必要がある。そのためには楕円体の対称軸 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ と $\boldsymbol{E}_i,(i=1,2,3)$ との関係式が必要である。これは次のように回転を表すオイラー角で表現できる。

まず、図 7 のように、$\boldsymbol{E}_i,(i=1,2,3)$ と $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ を一致させておいて、$\boldsymbol{E}_3$ 軸に関して反時計回りに ϕ 回転させる。

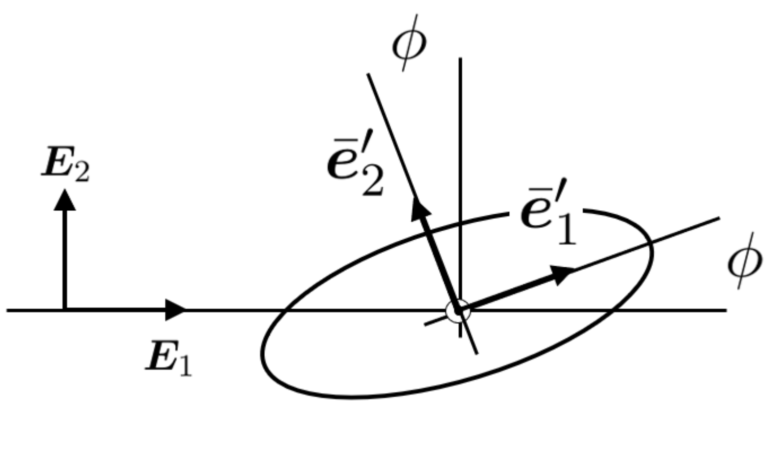

図 7: $\boldsymbol{E}_3$ 軸方向、上から見た図。反時計回りに ϕ 回転させている。

回転後の $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ を $\bar{\boldsymbol{e}}'_i$ とすると、次式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{e}}'_1 \\ \bar{\boldsymbol{e}}'_2 \\ \bar{\boldsymbol{e}}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{E}_3 \end{pmatrix} \tag{16}$$

この式を次のように表す。

$$\bar{\boldsymbol{e}}'_i = (R_{3\phi})_{ij}\boldsymbol{E}_j \tag{17}$$

$$R_{3\phi} \equiv \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

次に図 8 のように、$\bar{\boldsymbol{e}}'_2$ に関し時計回りに θ 回転する。$\bar{\boldsymbol{e}}''_2.\bar{\boldsymbol{e}}''_3.\bar{\boldsymbol{e}}'_3\boldsymbol{E}_2.$

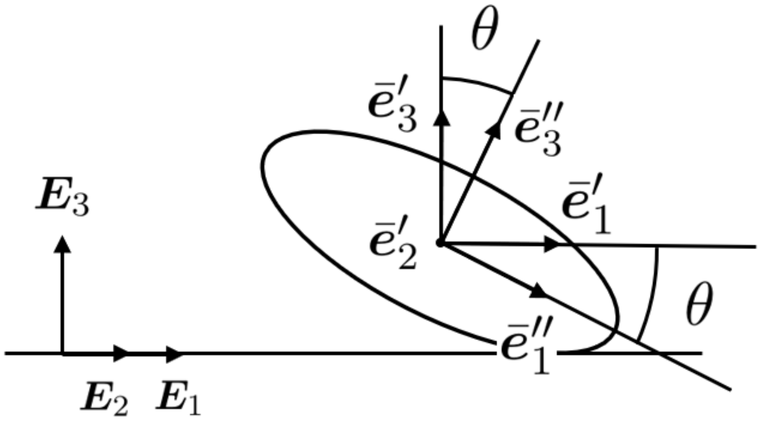

図 8: $\bar{\boldsymbol{e}}'_2$ に関し時計回りに θ 回転する。

回転した後の $\bar{\boldsymbol{e}}'_i$ を $\bar{\boldsymbol{e}}''_i$ とすると、次式が満たされる。

$$\bar{\boldsymbol{e}}'_i = (R_{2\theta})_{ij}\bar{\boldsymbol{e}}''_j \tag{19}$$

$$R_{2\theta} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{20}$$

最後に、図 9 のように $\bar{\boldsymbol{e}}''_1$ に関し時計回りに ψ 回転する。

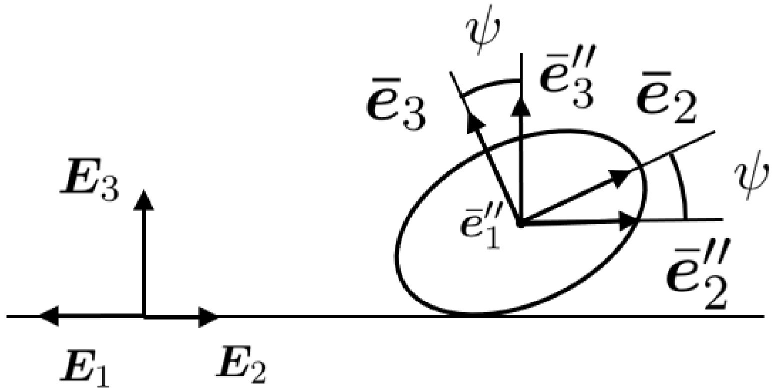

図 9: $\bar{e}_1''$ に関し時計回りに ψ 回転する。

回転した後の $\bar{e}_i''$ はラトルバックの形状主軸 $\bar{e}_i$ に一致するので、次式が満たされる。

$$\bar{e}_i = (R_{1\psi})_{ij}\bar{e}_j'' \tag{21}$$

$$R_{1\psi} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{22}$$

対称軸 $\bar{e}_i$ と実験系 E_i との関係は、式 (17)(19)(21) より

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &= (R_{123})_{ij}E_j, \\ R_{123} &\equiv R_{1\psi}R_{2\delta}^t R_{3\phi} \end{aligned} \tag{23}$$

となり、慣性主軸 e と実験系 E_i との関係は、式 (7) より

$$e_i = (R_{eE})_{ij}E_j, \tag{24}$$

$$(R_{eE})_{ij} \equiv (R_{3\delta}^{-1}R_{123})_{ij}, \tag{25}$$

となる。

座標系の違いによるベクトルの成分間の関係式を求めておこう。式（11）で示したように、座標系の変換と成分の変換は同じ式に従う。

あるベクトル A が、座標系 e_i、$\bar{e}_i$ と座標系 E_i に関して次式のように成分をもっているとする。

$$A = a_i e_i = \bar{a}_i\bar{e}_i = A_i E_i.$$

式（11）（23）((24）より、

$$\begin{aligned} a_i &= (R_{3\delta}^{-1})_{ij}\bar{a}_j, \\ \bar{a}_i &= (R_{123})_{ij}A_j, \\ a_i &= (R_{eE})_{ij}A_j, \end{aligned} \tag{26}$$

である。

5 角速度と角運動量

一般に剛体の慣性主軸 $\boldsymbol{e}_i$ と実験系の座標軸 $\boldsymbol{E}_i$ との関係式 (24) が与えられると、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を得ることができる。まず、慣性主軸 $\boldsymbol{e}_i$ や対称軸 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ は剛体に固定されているので、回転による剛体のふるまいを表す角速度は、主軸の時間的変化で定義される。すなわち、次式が主軸の時間微分と角速度の関係である。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_i &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i\\ \frac{d}{dt}\bar{\boldsymbol{e}}_i &= \boldsymbol{\omega}\times\bar{\boldsymbol{e}}_i\end{aligned} \tag{27}$$

一方、次式が成立する。

$$\frac{d}{dt}\bar{\boldsymbol{e}}_i = \frac{d}{dt}((R_{123})_{ik}\boldsymbol{E}_k) = \left(\frac{d}{dt}(R_{123})_{ik}\right)\boldsymbol{E}_k + (R_{123})_{ik}\frac{d}{dt}\boldsymbol{E}_k = \left(\frac{d}{dt}(R_{123})_{ik}\right)\boldsymbol{E}_k, \tag{28}$$

ここで、$\boldsymbol{E}_k$ は実験系なので、$\frac{d}{dt}\boldsymbol{E}_k = 0$ を使っている。角速度の $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 系の成分を $\bar{\omega}_i$ とすると、式（27）より

$$\frac{d}{dt}\bar{\boldsymbol{e}}_i = \bar{\omega}_k\bar{\boldsymbol{e}}_k\times\bar{\boldsymbol{e}}_i = \bar{\omega}_k\epsilon_{kij}\bar{\boldsymbol{e}}_j = \epsilon_{ijk}\bar{\omega}_k\bar{\boldsymbol{e}}_j \tag{29}$$

となる。また、式（28）に式（23）から求めた $\boldsymbol{E}_k = (R_{123}^{-1})_{kj}\bar{\boldsymbol{e}}_j$ を代入して

$$\frac{d}{dt}\bar{\boldsymbol{e}}_i = \left(\frac{d}{dt}(R_{123})_{ik}\right)(R_{123}^{-1})_{kj}\bar{\boldsymbol{e}}_j \tag{30}$$

となる。式（29）と式（30）を比較すると次式を得る。

$$\epsilon_{ijk}\bar{\omega}_k = \left(\frac{d}{dt}(R_{123})_{ik}\right)(R_{123}^{-1})_{kj}. \tag{31}$$

例えば、$i=1, j=2$ とすると、$k=3$ のみとなり、

$$\bar{\omega}_3 = \left(\frac{d}{dt}(R_{123})_{1k}\right)(R_{123}^{-1})_{k3}, \tag{32}$$

というように求められる。右辺は

$$\frac{d}{dt}(R_{123})R_{123}^{-1} = \left(\frac{d}{dt}R_{1\phi}\right)R_{1\phi}^{-1} + R_{1\phi}\left(\frac{d}{dt}R_{2\theta}\right)R_{2\theta}^{-1}R_{1\phi}^{-1} + R_{1\phi}R_{2\theta}\left(\frac{d}{dt}R_{3\psi}\right)R_{3\psi}^{-1}R_{2\theta}^{-1}R_{1\phi}^{-1}, \tag{33}$$

となって少々面倒だが、この計算をおこなうと角速度の成分 $\bar{\omega}_i$ が次式として得られる。

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 &= \frac{d}{dt}\psi - \sin\theta\frac{d}{dt}\phi\\ \bar{\omega}_2 &= \frac{d}{dt}\phi\cos\theta\sin\psi + \frac{d}{dt}\theta\cos\psi,\\ \bar{\omega}_3 &= \frac{d}{dt}\phi\cos\theta\cos\psi - \frac{d}{dt}\theta\sin\psi.\end{aligned}$$

主慣性モーメントに関する角速度の成分を ω_i とすると、式（7）より次式として求められる。

$$\omega_i = (R_{3\delta}^{-1})_{ij}\bar{\omega}_j. \tag{34}$$

ラトルバックの角運動量を $\boldsymbol{L}$ とし、慣性主軸 $\boldsymbol{e}_i$ に関する角運動量の成分を L_i' とすると $\boldsymbol{L} = L_i'\boldsymbol{e}_i$ である。ここで、L_i' を $m_1\bar{c}^2$ で割った量を L_i とすると、

$$\boldsymbol{L} = L_i'\boldsymbol{e}_i = m_1\bar{c}^2 L_i\boldsymbol{e}_i, \tag{35}$$

である。一方、慣性主軸 $\boldsymbol{e}_i$ に関しての角運動量の成分 L_i' は、角速度の成分 ω_i と主慣性モーメント $\bar{J}_i$ によって $L_i' = \bar{J}_i\omega_i$ と表されるので、

$$\boldsymbol{L} = \bar{J}_i\omega_i\boldsymbol{e}_i = m_1\bar{c}^2 J_i\omega_i\boldsymbol{e}_i, \tag{36}$$

となる。ここで式（15）を使った。式（35）と（36）より

$$L_i = J_i\omega_i, \tag{37}$$

となる。

6　接点の位置ベクトル

接点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_p$ の $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ 系での成分を角度 θ, ψ で表そう。まず、図 10 のように簡単な例として、$\phi = 0, \psi = 0$ で、$\bar{e}_1$ 軸に関してのみ θ 回転した場合を考える。

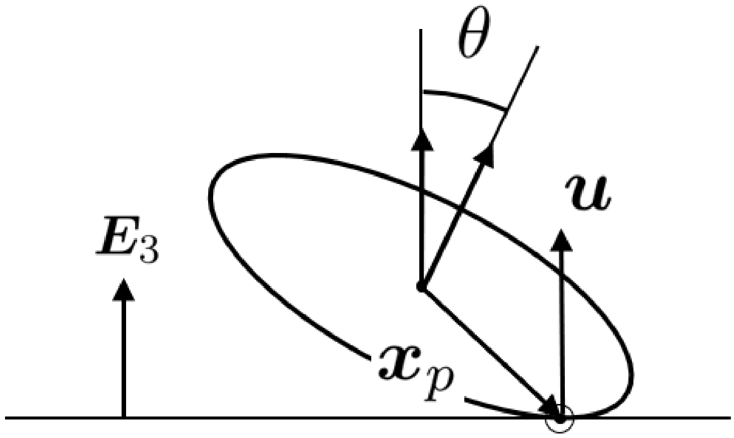

図 10: 接点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_p$ とし、接点における底面に垂直方向を $\boldsymbol{u}$ とする。

この場合は $\boldsymbol{x}_p = \bar{c}(\bar{x}_{p1}, \bar{x}_{p2} = 0, \bar{x}_{p3})_{\bar{e}}$ である。底面は楕円なので、

$$f(\bar{x}_{p1}, \bar{x}_{p2}, \bar{x}_{p3}) = \left(\frac{\bar{x}_{p1}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\bar{x}_{p2}}{b}\right)^2 + (\bar{x}_{p3})^2 - 1, \tag{38}$$

$$= \left(\frac{\bar{x}_{p1}}{a}\right)^2 + (\bar{x}_{p3})^2 - 1 = 0, \tag{39}$$

を満たす。$\boldsymbol{x}_p$ の接点の位置で底面に垂直方向を $\boldsymbol{u}$ とすると、このベクトルは以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= (\frac{df}{d\bar{x}_{p1}}, 0, \frac{df}{d\bar{x}_{p3}})_{\bar{\boldsymbol{e}}}, \\ &= 2(\frac{\bar{x}_{p1}}{a^2}, 0, \bar{x}_{p3})_{\bar{\boldsymbol{e}}}. \end{aligned} \tag{40}$$

一般に、曲面 $f(x,y,z)=0$ において、点 P の位置ベクトルを、$\boldsymbol{P}=(x,y,z)$、点 P から少しずれた曲面上の点 P+ΔP の位置ベクトルを $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{\Delta P}=(x,y,z)+(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ とする。点 P と点 P+ΔP は曲面上にあるので、次式を満たす。

$$f(x,y,z) = 0, \tag{41}$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = 0. \tag{42}$$

式（42）を展開し、式（41）を引くと、

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) = \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{df}{dy}\Delta y + \frac{df}{dz}\Delta z = 0, \tag{43}$$

となる。ベクトル $\boldsymbol{\Delta P}=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ は、曲面に接しているベクトルなので、式（43）より、ベクトル $(\frac{df}{dx},\frac{df}{dy},\frac{df}{dz})$ は、曲面に垂直なベクトルであることがわかる。

式（40）に関して、$\boldsymbol{E}$ 系の成分に変換すると、式（23）と $\phi=\psi=0$ を使って、

$$\boldsymbol{u} = 2\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\bar{x}_{p1}}{a^2} \\ 0 \\ \bar{x}_{p3}\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\cos\theta\frac{\bar{x}_{p1}}{a^2}+\sin\theta\bar{x}_{p3} \\ 0 \\ -\sin\theta\frac{\bar{x}_{p1}}{a^2}+\cos\theta\bar{x}_{p3}\end{pmatrix}_{\boldsymbol{E}}, \tag{44}$$

となる。$\boldsymbol{u}$ は、接点における底面に垂直なベクトルなので、床面に関しても垂直である。したがって $\boldsymbol{E}$ 系でみると、$\boldsymbol{u}=(0,0,*)_{\boldsymbol{E}}$ (*は何らかの値を持つ成分）でなければならない。この条件より

$$\cos\theta\frac{\bar{x}_{p1}}{a^2}+\sin\theta\bar{x}_{p3}=0 \tag{45}$$

を得る。従って、

$$\bar{x}_{p1} = -a^2\tan\theta\bar{x}_{p3}, \tag{46}$$

であり、これを式（39）に代入して次式を得る。

$$\bar{x}_{p3} = -\frac{1}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+1}} \tag{47}$$

ここで、ラトルバックの運動はひっくり返らないとして $\bar{x}_{p3}<0$ であることより、負の符号を採用している。式（46）に代入すると、$\bar{x}_{p1}$ が求められる。以上の事を $\phi\neq 0,\psi\neq 0$ の場合に拡張する。

式（44）に対応して次式を得る。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= 2\begin{pmatrix} R_{11}\frac{\bar{x}_{p1}}{a^2}+R_{12}\frac{\bar{x}_{p2}}{b^2}+R_{13}\bar{x}_{p3} \\ R_{21}\frac{\bar{x}_{p1}}{a^2}+R_{22}\frac{\bar{x}_{p2}}{b^2}+R_{23}\bar{x}_{p3} \\ -\sin\theta\frac{\bar{x}_{p1}}{a^2}+\cos\theta\sin\psi\frac{\bar{x}_{p2}}{b^2}+\cos\theta\cos\psi\bar{x}_{p3} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{E}}, \qquad (48)\\
R_{11} &= \cos\phi\cos\theta,\\
R_{12} &= \cos\psi\sin\theta\sin\psi-\sin\phi\cos\psi,\\
R_{13} &= \cos\psi\sin\theta\cos\psi+\sin\phi\sin\psi,\\
R_{21} &= \sin\phi\cos\theta,\\
R_{22} &= \sin\phi\sin\theta\sin\psi+\cos\phi\cos\psi,\\
R_{23} &= \sin\phi\sin\theta\cos\psi-\cos\phi\sin\psi.
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{u}$ の第 1 成分=0 と第 2 成分=0 より、次の条件式を得る。

$$
\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\bar{x}_{p1}}{a^2} \\ \frac{\bar{x}_{p2}}{b^2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} R_{13}\bar{x}_{p3} \\ R_{23}\bar{x}_{p3} \end{pmatrix}. \qquad (49)
$$

この式から $\frac{\bar{x}_{p1}}{a^2}, \frac{\bar{x}_{p2}}{b^2}$ を $\bar{x}_{p3}$ で表すと、

$$
\begin{aligned}
\frac{\bar{x}_{p1}}{a^2} &= -\frac{\sin\theta}{\cos\theta\cos\psi}\bar{x}_{p3},\\
\frac{\bar{x}_{p2}}{b^2} &= \tan\psi\bar{x}_{p3},
\end{aligned}
$$

となり、ϕ によらないことがわかる。式（38）を使って $\bar{x}_{p3}$ を求め、結局次式を得る。

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_{p1} &= \frac{a^2\tan\theta}{\cos^2\psi+a^2\tan^2\theta+b^2\sin^2\psi},\\
\bar{x}_{p2} &= \frac{b^2\sin\psi}{\cos^2\psi+a^2\tan^2\theta+b^2\sin^2\psi},\\
\bar{x}_{p3} &= -\frac{\cos\psi}{\cos^2\psi+a^2\tan^2\theta+b^2\sin^2\psi}.
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{e}$ 系の成分を求めるためには、式（26）で変換すればよく、次式を得る。

$$
x_{pi} = (R_{3\delta}^{-1})_{ij}\bar{x}_{pj}. \qquad (50)
$$

7　滑らない条件式

一般に 2 つの剛体が接して滑らずに運動している場合、どういう条件式が得られるか、まず簡単な例で考えてみよう。

2 次元の運動で、半径 1cm の円板が平面を等角速度 ω(rad/s) で転がっている状況を考える。図 11 のように、平面に固定された座標系を $\boldsymbol{E}_{i=1,2}$、原点を O とし円板に固定された座標系（慣性主軸や形状の主軸）を $\boldsymbol{e}_{i=1,2}$、原点（重心）を G とする。位置ベクトル OG を $\boldsymbol{x}_g$、接点を P と

して重心からの位置ベクトル GP を $\boldsymbol{x}_p$、原点 O からの位置ベクトル OP を $\boldsymbol{y}_p$ とする。$t=0$ 秒の時に図の (a) の配置で、$\frac{1}{3}$ 秒間隔で、(b)(c)(d) の配置に移動したとする。

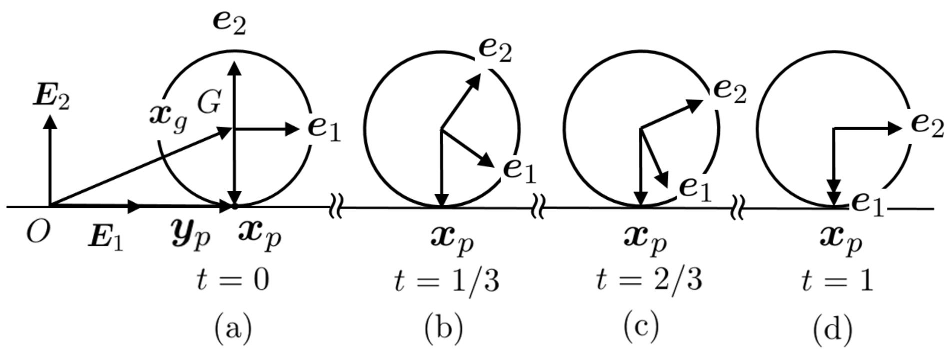

図 11: 平面に固定された座標系を $\boldsymbol{E}_{i=1,2}$、原点を O とし円板に固定された座標系（慣性主軸や形状の主軸）を $\boldsymbol{e}_{i=1,2}$、原点（重心）を G とする。位置ベクトル OG を $\boldsymbol{x}_g$、接点を P として重心からの位置ベクトル GP を $\boldsymbol{x}_p$、原点 O からの位置ベクトル OP を $\boldsymbol{y}_p$ とする。$t=0$ 秒の時に図の (a) の配置で、$\frac{1}{3}$ 秒間隔で、(b)(c)(d) の配置に移動したとする。

ここで角速度の値を具体的に $\omega=\pi/2(\mathrm{rad/s})$ とおいている。したがって、$\boldsymbol{E}_i$ と $\boldsymbol{e}_i$ の関係は次式で表せる。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1(t) \\ \boldsymbol{e}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

すなわち

$$\boldsymbol{e}_i(t) = (R_\omega)_{ij} E_j \tag{52}$$

$$R_\omega = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}, \tag{53}$$

と書ける。$P_B(0), P_B(1/3), P_B(2/3), P_B(1), P_A(0), P_A(1/3), P_A(2/3), P_A(1)$ 接点 P が円板内でどのように移動したかがわかるように点 P_A で表し、t 秒の時の点を $P_A(t)$ で表している。同様に、接点 P が平面上でどのように移動したかがわかるように、$P_B(t)$ で表している。

点 $P_A(t)$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の平面内で図 12 のように移動している。

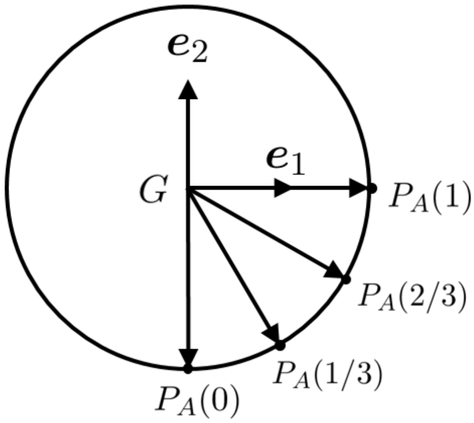

図 12: $P_A(t)$ の移動の様子。

位置ベクトル $GP_A(t)$ が $\boldsymbol{x}_p(t) = x_{pi}(t)\boldsymbol{e}_i(t)$ であるので、この例だと

$$x_{p1}(t) = \sin \omega t, \quad x_{p2}(t) = -\cos \omega t, \tag{54}$$

であることがわかる。点 $P_B(t)$ は $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ の平面内で図 13 のように、$\boldsymbol{E}_1$ 方向のみに移動している。

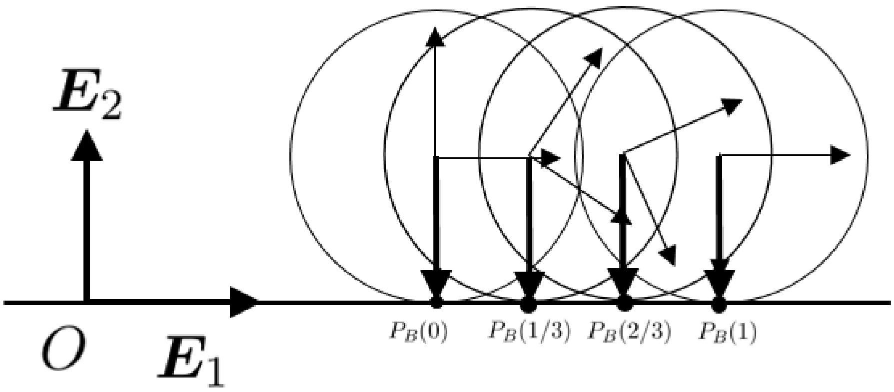

図 13: $P_B(t)$ の移動の様子。

位置ベクトル $OP_B(t)$ が $\boldsymbol{y}_p(t) = Y_i(t)\boldsymbol{E}$ である。滑らずに回転しているので、

$$Y_1(t) = Y_1(0) + \omega t, \quad Y_2(t) = 0, \tag{55}$$

であることがわかる。

点 $P_A(t)$ の移動速度を $\boldsymbol{v}_A(t)$ とすると、それは円板と同じように動いている観測者（この観測者にとっては $\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_i = 0$ である）にとって、接点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_p(t)$ の移動速度に等しい。すなわち、

$$\boldsymbol{v}_A(t) = \left(\frac{d}{dt}x_{pi}(t)\right)\boldsymbol{e}_i(t), \tag{56}$$

である。ここで、$\boldsymbol{v}_A = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_p$ ではないことに注意しよう。図 11 よりわかるが、$\boldsymbol{x}_p$ は常に $-\boldsymbol{E}_2$ 方向に向いているから $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_p = 0$ である。

点 P_B の移動速度 $\boldsymbol{v}_B(t)$ は $\boldsymbol{y}_p(t) = Y_i(t)\boldsymbol{E}_i$ の変化で表される。$\frac{d}{dt}\boldsymbol{E}_i = 0$ なので、

$$\boldsymbol{v}_B(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{y}_p(t) = \left(\frac{d}{dt}Y_i(t)\right)\boldsymbol{E}_i, \tag{57}$$

である。

t で接しているとすると、$P_A(t) = P_B(t)$ で同じ点 P を示しているから、滑らないということは、$\boldsymbol{v}_A(t) = \boldsymbol{v}_B(t)$ であることを意味している。したがって、式 (56)(57) より

$$\left(\frac{d}{dt}x_{pi}(t)\right)\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{d}{dt}Y_i(t)\right)\boldsymbol{E}_i, \tag{58}$$

となり、これが滑らない条件式となる。式（58）の右辺を $\boldsymbol{e}_i$ 系の成分で表すと、式（52）より

$$\left(\frac{d}{dt}Y_i(t)\right)\boldsymbol{E}_i = \left(\frac{d}{dt}Y_i(t)\right)(R_\omega^{-1})_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{59}$$

なので、式（58）の左辺と比較して

$$\left(\frac{d}{dt}x_{pi}(t)\right) = \left(\frac{d}{dt}Y_k(t)\right)(R_\omega^{-1})_{ki}, \tag{60}$$

が滑らない時に成分間で成立する式である。この例で実際に成り立っているか確認しよう。式（54）より、式（60）の左辺は

$$\left(\frac{d}{dt}x_{p1}(t), \frac{d}{dt}x_{p2}(t)\right) = (\omega\cos\omega t, \omega\sin\omega t), \tag{61}$$

である。また式（55）より、式（60）の右辺は

$$(\omega, 0)\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} = (\omega\cos\omega t, \omega\sin\omega t), \tag{62}$$

となり、一致していることがわかる。

一般の運動の場合、すなわち 3 次元の運動で、剛体Ａと剛体Ｂが滑らずに接触して運動している場合、（ただし、剛体Ａは床など観測者に対しては動かない物体とする）を考えよう。式（56）や（57）はこのような場合にも成立するので、これらから求めた滑らない条件式（58）は一般の場合にも成立することになる。

さて、重心の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_g$ は、

$$\boldsymbol{x}_g = \boldsymbol{y}_p - \boldsymbol{x}_p \tag{63}$$

であるから、滑らない条件式（58）より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_g &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{y}_p - \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_p \\ &= \left(\frac{d}{dt}Y_i(t)\right)\boldsymbol{E}_i - \left(\frac{d}{dt}x_{pi}(t)\right)\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}_p \\ &= \boldsymbol{x}_p\times\boldsymbol{\omega},\end{aligned} \tag{64}$$

となる。ここで、一般にベクトル $\boldsymbol{A} = a_i \boldsymbol{e}_i$ の微分は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{A} = \left(\frac{d}{dt}a_i\right)\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}, \tag{65}$$

を使った。式（64）の意味は、滑らなければ重心の速度は接点 P を回転の中心として、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で動いているということを意味している。シミュレーションでは、この式（64）を重心の座標を求めるために使うことにする。

8　ラトルバックの基本運動方程式

ここでは、ラトルバックの運動方程式を求める。基本的には、回転の運動と重心の運動の 2 つである。

接触点 P に働いている力を $\boldsymbol{F}$ とする。滑らない場合なので、この力は垂直抗力 $R\boldsymbol{E}_3$ と、床面に平行な静止摩擦力 $\boldsymbol{S}$ との合力、

$$\boldsymbol{F} = R\boldsymbol{E}_3 + \boldsymbol{S} \tag{66}$$

である。接触点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_p$ （慣性主軸の原点を始点）とすると、トルク $\boldsymbol{N}$ は

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{x}_p \times \boldsymbol{F} \tag{67}$$

である。また、この力 $\boldsymbol{F}$ と重力によって、重心の運動が決まる。したがって、角運動量 $\boldsymbol{L}$ と重心が従う運動方程式は、ラトルバックの全質量を $m_1 + m_2 = m_1(1+\rho_m)$ とすると、

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x}_p \times \boldsymbol{F} \tag{68}$$

$$m_1(1+\rho_m)\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_g = \boldsymbol{F} - m_1(1+\rho_m)\bar{g}\boldsymbol{E}_3 \tag{69}$$

である。ここで、$\boldsymbol{v}_g$ は重心の速度ベクトル、$\bar{g} = 981cm/s^2$ は重力加速度である。t は実時間を表していて単位は秒である。

滑らない条件式（64）より、重心の速度ベクトルは $\boldsymbol{v}_g = \boldsymbol{x}_p \times \boldsymbol{\omega}$ で与えられる。$\boldsymbol{v}_g = \bar{c}v_{gi}\boldsymbol{e}_i$ とすると、

$$v_{gi} = \epsilon_{ijk}x_{pj}\omega_k, \tag{70}$$

である。式（69）の $\boldsymbol{F}$ を、式（68）に代入して、次式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = m_1(1+\rho_m)\boldsymbol{x_p} \times \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_g + \bar{g}\boldsymbol{E}_3\right) \tag{71}$$

したがって、滑らない場合の運動方程式は、上式（71）だけである。

垂直抗力の大きさ R を求めることができる。式（69）と $\boldsymbol{E}_3$ との内積をとると、式（66）より、静止摩擦力は $\boldsymbol{E}_3$ に垂直なので

$$R = m_1(1+\rho_m)\left(\boldsymbol{E}_3 \cdot \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_g + \bar{g}\right), \tag{72}$$

となる。静止摩擦力 $\boldsymbol{S}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{F} - \boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{E}_3) \\ &= m_1(1+\rho_m)\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_g - \boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{E}_3\cdot\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_g)\right) \qquad (73)\end{aligned}$$

となる。重心の速度ベクトル $\boldsymbol{v}_g = \bar{c}v_{gi}\boldsymbol{e}_i$ を時間で微分したベクトルを $\boldsymbol{a}_g = \bar{c}a_{gi}\boldsymbol{e}_i$ とすると、

$$\boldsymbol{a}_g = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_g = \bar{c}\left(\frac{d}{dt}v_{gi}\right)\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_g, \qquad (74)$$

となる。成分で表すと

$$a_{gi} = \frac{d}{dt}v_{gi} + \epsilon_{ijk}\omega_j v_{gk} \qquad (75)$$

である。

角運動量 $\boldsymbol{L}$ は式（37）より

$$\boldsymbol{L} = m_1\bar{c}^2(L_1, L_2, L_3) = m_1\bar{c}^2(J_1\omega_1, J_2\omega_2, J_3\omega_3)_{\boldsymbol{e}} \qquad (76)$$

である。時間で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} &= m_1\bar{c}^2\left(\frac{d}{dt}L_i\right)\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L}, \\ &= m_1\bar{c}^2\left(\frac{d}{dt}L_i + \epsilon_{ijk}\omega_j L_k\right)\boldsymbol{e}_i, \\ &= m_1\bar{c}^2\left(J_i\frac{d}{dt}\omega_i + \epsilon_{ijk}J_k\omega_j\omega_k\right)\boldsymbol{e}_i, \qquad (77)\end{aligned}$$

であるから、成分で表すと

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} \\ &= m_1\bar{c}^2\left(J_1\frac{d\omega_1}{dt} - (J_2-J_3)\omega_2\omega_3, J_2\frac{d\omega_2}{dt} - (J_3-J_1)\omega_3\omega_1, J_3\frac{d\omega_3}{dt} - (J_1-J_2)\omega_1\omega_2\right)_{\boldsymbol{e}} \qquad (78)\end{aligned}$$

となる。

式（71）の右辺のトルクは

$$\boldsymbol{N} = m_1\bar{c}^2(1+\rho_m)\frac{\boldsymbol{x}_p}{\bar{c}}\times\left(\frac{\boldsymbol{a}_g}{\bar{c}} + g\boldsymbol{E}_3\right) \qquad (79)$$

となる。ここで、$g = \frac{\bar{g}}{\bar{c}}$ である。$\boldsymbol{E}_3$ の $\boldsymbol{e}_i$ 系での成分を E_{3i}、すなわち $\boldsymbol{E}_3 = E_{3i}\boldsymbol{e}_i$ とすると、式（24）より

$$\boldsymbol{E}_3 = (R_{eE}^{\top})_{3i}\boldsymbol{e}_i, \qquad (80)$$

なので、

$$E_{3i} = (R_{eE}^{\top})_{3i}, \qquad (81)$$

である。

式（78）と（79）より角運動量に関する運動方程式を成分であらわすと

$$\begin{aligned} J_1\frac{d\omega_1}{dt}-(J_2-J_3)\omega_2\omega_3 &= (1+\rho_m)(x_{p2}a_{g3}-x_{p3}a_{g2}+gE_{31}), \\ J_2\frac{d\omega_2}{dt}-(J_3-J_1)\omega_3\omega_1 &= (1+\rho_m)(x_{p3}a_{g1}-x_{p1}a_{g3}+gE_{32}), \\ J_3\frac{d\omega_3}{dt}-(J_1-J_2)\omega_1\omega_2 &= (1+\rho_m)(x_{p1}a_{g2}-x_{p2}a_{g1}+gE_{33}), \end{aligned} \tag{82}$$

となる。この微分方程式を数値計算することで、ϕ,θ,ψ の時間的な振る舞いがわかる。重心の微分方程式は滑らない条件式で与えられていて、

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_g=\boldsymbol{x}_p\times\boldsymbol{\omega}, \tag{83}$$

である。この式の右辺は ϕ,θ,ψ とその時間微分の関数なので、ϕ,θ,ψ の時間依存性がわかれば、この微分方程式を数値計算することで、重心の時間的な振る舞いがわかる。

9 Mathmaticaでのプログラム

```
Manipulate[
 Module[{},
  (*a: 楕円体の 1 軸の長さ (cm)
b: 楕円体の 2 軸の長さ (cm)
c: 楕円体の 3 軸の長さで 1 cm としている。*)

  gravity = 981; (*重力加速度*)
  rho = 0.8; (*本体の密度 g/cm^3 *)

  (* l1: 中心からおもりの場所までの長さ、l2: おもりの半径、棒の角度
   alpha (radian、) alphadeg （゜） *)

  l2 = 0.5;
  d = 0.2; (* おもりの厚さ*)
  alpha = alphadeg/180 Pi;

  rho2 = 8;(* おもりの密度、銅をイメージ*)
  mratio = 3 rho2 d l2^2/(2 rho a b);(* ρm = m1/m2 *)
  tmax = 60; (* シミュレーション時間の最大値　秒*)

  phid0 = phidrot 2 Pi;(* 3 軸に関する回転速度の初期値(rad/s)*)
  theta0 = 0.01/180 Pi;(* 1 軸に関する回転角度の初期値*)
  psi0 = 0.01/180 Pi;(* 2 軸に関する回転角度の初期値*)
```

phi0 = 0.0;(∗ 3 軸に関する回転角度の初期値∗)

(∗ 慣性モーメントを求める。∗)
(∗ 楕円体の慣性モーメント∗)
I1 = (b^2 + 1)/5;
I2 = (a^2 + 1)/5;
I3 = (a^2 + b^2)/5;

(∗ おもりが乗っているため、慣性乗積が現れる∗)
ma = I1 + mratio (l1^2 Sin[alpha]^2 + l2^2/4);
md = I2 + mratio (l1^2 Cos[alpha]^2 + l2^2/4);
mc = mratio l1^2 Cos[alpha] Sin[alpha];

(∗ 対角化するための角度 δ ∗)
delta = ArcTan[2 mc/(−ma + md)]/2;

(∗ ラトルバック（楕円体＋おもり）の慣性モーメント∗)
J1 = ma Cos[delta]^2 − 2 mc Cos[delta] Sin[delta] + md Sin[delta]^2;
J2 = ma Sin[delta]^2 + 2 mc Cos[delta] Sin[delta] + md Cos[delta]^2;
J3 = I3 + mratio/2 l2^2 + mratio l1^2;

(∗ 接点の位置ベクトル　xpbar $\boldsymbol{x}_p$ はebar 系 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ での成分∗)
zbar[t_] := −1/
  Sqrt[Cos[psi[t]]^2 + a^2 Tan[theta[t]]^2 + b^2 Tan[psi[t]]^2];
xbar[t_] := −a^2 Tan[theta[t]] Cos[psi[t]] zbar[t];
ybar[t_] := b^2 Tan[psi[t]] zbar[t];
xpbar[t_] := {xbar[t], ybar[t], zbar[t]};

(∗ 初期条件を求めるため∗)
xbar0 = −a^2 Tan[theta0] Cos[psi0] zbar0;
ybar0 = b^2 Tan[psi0] zbar0;
zbar0 = −1/Sqrt[Cos[psi0]^2 + a^2 Tan[theta0]^2 + b^2 Tan[psi0]^2];
xpbar0 = {xbar0, ybar0, zbar0};

(∗ $\boldsymbol{x}_p$ の $\boldsymbol{e}_i$ 系での成分を求める。 $x_{pi} = (R_{3\delta}^{-1})_{ij}\bar{x}_{pj}$ ∗)
R3deltainv = {{Cos[delta], −Sin[delta], 0}, {Sin[delta], Cos[delta],
    0}, {0, 0, 1}};
xp[t_] := R3deltainv.xpbar[t];

(∗ 座標間の関係と変換行列　詳細は解説を参照してください; ∗)

$R_{1\psi}$
R1psi[t_] := {{1, 0, 0}, {0, Cos[psi[t]], Sin[psi[t]]}, {0, −Sin[psi[t]], Cos[psi[t]]}};
$R_{2\theta}$
R2the[t_] := {{Cos[theta[t]], 0, Sin[theta[t]]}, {0, 1, 0}, {−Sin[theta[t]], 0, Cos[theta[t]]}};
$R_{2\theta}^{-1}$
R2theinv[t_] := Transpose[R2the[t]];
$R_{3\phi}$
R3phi[t_] := {{Cos[phi[t]], Sin[phi[t]], 0}, {−Sin[phi[t]], Cos[phi[t]], 0}, {0, 0, 1}};
R_{123}
R123[t_] := R1psi[t].R2theinv[t].R3phi[t];
R_{123}^{-1}
R123inv[t_] := Transpose[R123[t]];
$R' = R_{3\delta} R_{123}$
Rdash[t_] := R3deltainv.R123[t];

(∗ 初期値を求めるための行列∗)
R1psi0 := {{1, 0, 0}, {0, Cos[psi0], Sin[psi0]}, {0, −Sin[psi0], Cos[psi0]}};
R2the0 := {{Cos[theta0], 0, Sin[theta0]}, {0, 1, 0}, {−Sin[theta0], 0, Cos[theta0]}};
R2theinv0 := Transpose[R2the0];
R3phi0 := {{Cos[phi0], Sin[phi0], 0}, {−Sin[phi0], Cos[phi0],0}, {0, 0, 1}};
R1230 := R1psi0.R2theinv0.R3phi0;
R123inv0 := Transpose[R1230];
Rdash0 := R3deltainv.R1230;

(∗ 角速度omega=$\boldsymbol{\omega}$ omegabar=$\bar{\boldsymbol{\omega}}$ ∗)
omegabar[t_] := {psi'[t] − phi'[t] Sin[theta[t]],
    theta'[t] Cos[psi[t]] + phi'[t] Cos[theta[t]]Sin[psi[t]],
    −theta'[t] Sin[psi[t]] + phi'[t] Cos[theta[t]] Cos[psi[t]]};
omega[t_] := R3deltainv.omegabar[t];

(∗ 重心の速度vg=$\boldsymbol{v}_g$ 重心の時間微分（加速度）ap=$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_g$ ∗)
vg[t_] := Cross[xp[t], omega[t]];
ap[t_] := vg'[t] + Cross[omega[t], vg[t]];

(∗ 角運動量Lp=$\boldsymbol{L}$ とその時間微分　Lpdot =$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}$∗)
Lp[t_] := {I1 omega[t][[1]], I2 omega[t][[2]], I3 omega[t][[3]]};
Lpdot[t_] := Lp'[t] + Cross[omega[t], Lp[t]];

(∗ E_3 ∗)
E3[t_] := Transpose[Rdash[t]][[3]];

```
(* トルクNp =N *)
Np[t_] := Cross[xp[t], (ap[t] + gravity E3[t])];

(* 回転に関する運動方程式　d/dt L − N = 0 *)
gp[t_] := Lpdot[t] − Np[t];

(* 滑らない条件、重心の運動方程式 d/dt x_g = x_p × ω*)
g6[t_] := Xg1'[t] − vg[t][[1]];
g7[t_] := Xg2'[t] − vg[t][[2]];
g8[t_] := Xg3'[t] − vg[t][[3]];
Xg[t_] := {Xg1[t], Xg2[t], Xg3[t]};

(* 運動方程式を解かせる*)
xpbarE0 = R123inv0.xpbar0;
Xg0 = −xpbarE0;(* 重心の初期値用*)
deqn = {gp[t][[1]] == 0, gp[t][[2]] == 0, gp[t][[3]] == 0,
        g6[t] == 0, g7[t] == 0, g8[t] == 0};
hensu = {phi, theta, psi, Xg1, Xg2, Xg3};
ini = {phi[0] == 0, phi'[0] == phid0, theta[0] == theta0,
      theta'[0] == 0, psi[0] == psi0, psi'[0] == 0, Xg1[0] == Xg0[[1]],
      Xg2[0] == Xg0[[2]], Xg3[0] == Xg0[[3]]};
sd = NDSolve[{deqn, ini}, hensu, {t, 0, tmax},
              Method −> {"EquationSimplification" −> "Residual"}];

(* 3 可視化 D *)
(* 床*)
myplane = {LightGreen,
  Polygon[{{−10, −10, 0}, {−10, 10, 0}, {10, 10, 0}, {10, −10, 0}}]};

( * 接点を描画するため*)
xpbarE[t_] := R123inv[t].xpbar[t];
myxpbarE[t_] := {PointSize[0.02], Point[Xg[t] + xpbarE[t]]};

(* 楕円体の描画のため*)
Inmon = {{a^2, 0, 0}, {0, b^2, 0}, {0, 0, 1}};
sigma[t_] := R123inv[t].Inmon.R123[t];
myelipsoid[t_] = Ellipsoid[{Xg1[t], Xg2[t], Xg3[t]}, sigma[t]];

(* おもりを書かせるため*)
```

```
Xw[t_] := R123inv[t].{l1 Cos[alpha], −l1 Sin[alpha], 0};
Xwup[t_] := R123inv[t].{l1 Cos[alpha], −l1 Sin[alpha], d/2};
Xwdown[t_] := R123inv[t].{l1 Cos[alpha], −l1 Sin[alpha], −d/2};
mybo[t_] := {Black, Cylinder[{Xg[t] − Xw[t], Xg[t] + Xw[t]}, 0.05]};
myweight1[t_] := {Blue, Cylinder[{Xg[t] + Xwdown[t], Xg[t] + Xwup[t]}, l2]};
myweight2[t_] := {Blue, Cylinder[{Xg[t] − Xwdown[t], Xg[t] − Xwup[t]}, l2]};
Grid[
 {{Plot[Evaluate[ { phi'[t]/(2 Pi)} /. sd], {t, 0, tmax},
    PlotStyle −> {Black, Thickness[0.0005]}, Frame −> True,
    FrameLabel −> {"時間（秒）", "回転速度（回転数秒）/"}, ImageSize −> {300, 200}],
   Graphics3D[{{{Opacity[0.5], myelipsoid[0]}, mybo[0],
       myweight1[0], myweight2[0], myxpbarE[0]} /. sd, myplane},
    Boxed −> False,
    PlotRange −> {{−10, 10}, {−10, 10}, {−5, 5}},
    ImageSize −> {200, 200}]}}]
],

Style["楕円体", 12, Bold], {{a, 5, "長軸␣(cm)"}, 5, 15,
 Appearance −> "Labeled", ImageSize −> Tiny}, {{b, 2, "短軸␣(cm)"},
 1.1, 5, Appearance −> "Labeled", ImageSize −> Tiny},
Delimiter,

Style["おもりの棒", 12, Bold], {{alphadeg, 30, "角度␣度 ()"}, 0, 90, 1,
 Appearance −> "Labeled", ImageSize −> Tiny}, {{l1, 4, "長さ␣(cm)"}, 1,
  20, 1, Appearance −> "Labeled", ImageSize −> Tiny},
  Delimiter,

Style["回転速度（回転数秒）の初期値/", 12, Bold],
{{phidrot, 0.5, "回転速度"}, 0.1, 2, 0.1, Appearance −> "Open",
 ImageSize −> Tiny}, Delimiter,
TrackedSymbols :> {a, b, alphadeg, l1, phidrot}]

(∗ アニメーションがスムーズに見られないので、Manipulate を別々にした∗)

Manipulate[
Graphics3D[{{{Opacity[0.5], myelipsoid[r]}, mybo[r], myweight1[r],
    myweight2[r], myxpbarE[r]} /. sd, myplane},
 Boxed −> False,
 PlotRange −> {{−12, 12}, {−12, 12}, {−5, 5}},
 ImageSize −> {500, 500}], {{r, 0, "時間（秒）"}, 0, tmax, 0.01,
```

AnimationRate -> 0.5, Appearance -> "Open"},
SaveDefinitions -> True]

参考文献

[1] 高野研究室 Web サイト、https://www.juen.ac.jp/lab/takano/indexjp.html