

振動している棒を通る蛇腹付きストローの運動

高野 浩志*

上越教育大学 自然科学領域 情報分野

943-8512 新潟県上越市山屋敷町 1 番地

2023 年 9 月 26 日

概 要

モーターによって振動させた棒に蛇腹付きのストローを通すと、上昇し先端で戻ってきて下降し、棒にとりつけた円盤でふたたび上昇に転じ、これを繰り返す運動を見せる。本論文では、この運動の機構を考察し、理論的に求めた移動速度と実験で求めた移動速度の比較検討をおこなった。棒とストローは両端と少しへこんだ中央部分の 3 点で接触しているため、棒とストローのなす角は一定の値になる。ストローが棒に対して回転すると、角度の正負に対して一方向に運動するようになる。この移動速度は、ストローの各部分の長さとなットの回転数の関数として求められる。先端では、ストローが上昇するにつれ、棒がストローの内部に入り込む。この状況でも 3 点で接触しているため、棒とストローのなす角が小さくなっていく。角度と上昇速度が比例しているため、角度が 0 になった時点で上昇が止まり、その後角度の正負が反転することで下降が始まり、ストローは戻ってくることになる。反射板に到達すると、再び角度の正負が反転し上昇していく。また、3 本のストローに関して長さを変えながら、移動速度を測定する実験をおこなった。実験の結果、理論から求めた移動速度のほうが測定値より大きかった。その理由として、ストローの中央部分と棒との接触点で滑らないと仮定したが、実際には、滑りが生じているからだと考えられる。一方ストローの長さ l_4 の変化による理論値の増え方と、測定値の増え方が同じように見えるので、測定値と理論値との一致を相対誤差により求めた。1.0cm 以下では平均約 80 % の一致となり、すべての長さに関しては平均約 73 % の一致となった。ストローと棒の間の滑り、棒の振動の腹節や中央部分での変形の影響がなければ、一致はさらによくなると考えられる。これらの影響を考慮すると、実験値は運動の機構の考察や理論から求めた移動速度の妥当性を裏付けていると言える。

*e-mail:takano@juen.ac.jp

1 はじめに

佐藤慶次郎 [1] という芸術家が様々な動く作品を作っていた。それらの中に、振動している棒に発泡スチロールの球が通っていて、それが不思議と上下運動するものがある。これが41本並んでいる作品が、「岐阜ススキ群'99」[2]である。この作品に刺激をうけて振動する棒を自作し、それに発泡スチロールの球を通し、上下運動を再現してみた。動画をWebサイトに「振動している棒を通る発泡スチロール球の運動」[3]としてアップしている。再現はするもののうまくいく場合といかない場合があるので、なにか別のものでうまくいかないと考えていた。たまたま机の上にあったストローを「こんなうまくいかないよな」、と思いつつ通してみたところ、ゆっくり動いていることに気が付き大変驚いた。このストローは図1のように、蛇腹がついている曲がるストローである。(図1)



図 1: 蛇腹のところで曲がるストロー。

一方、蛇腹の部分がない普通のストローでおこなったところ、上下運動は起きなかった。

蛇腹の部分は他の部分と若干半径が小さいようであるので、この半径の違いが上下運動の原因かもしれないと考えた。そう考えたのは、実は発泡スチロール球の中の穴の構造が、単純なシリンダー状ではないことを知っていたからである。構造を図2(a)に強調して書いたが、中心が両端より小さい円であって、若干円錐状である。この構造は、2016年11月に開催された佐藤慶次郎の作品展で岐阜県美術館を訪れた際、美術館のスタッフから教えてもらったものである。

その後、発泡スチロール球の動きを再現するために、2mmの穴あき発泡スチロール球、2mmの棒を購入した。同じ半径だったので、発泡スチロール球の穴を大きくする必要があった。そこで、普段食事に使う箸（筆者は日本人なので）で、両方の穴から差し込んで穴を大きくした。するとうまく上下運動が再現できたのである。自作したものは、図2(a)の構造を意識して作ったものではなかった。しかし、たまたま使った箸で両方の穴を大きくすると、箸が先端が細く手元にいくほど太くなる形状なので、図2(b)のように、箸を下から差し込むと中心部分が小さくなって下の開口部は大きくなり、図2(c)のように、箸を上から差し込むと上の開口部は大きくなる。す

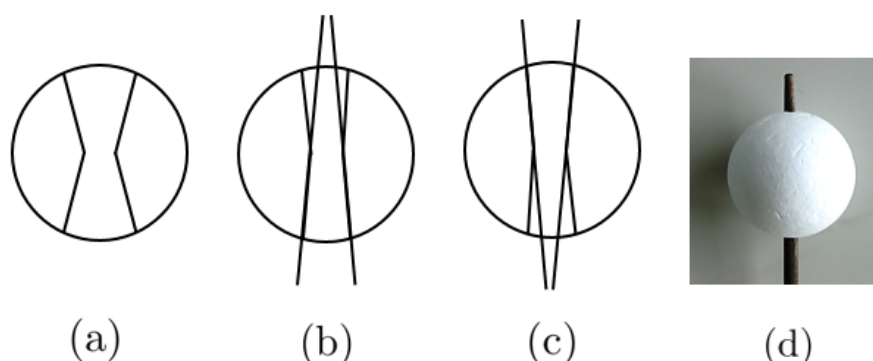


図 2: (a) 発泡スチロール球の内部構造の概念図。(b) 箸を下から差し込んだ様子。(c) 箸を上から差し込んだ様子。(d) 実際に箸を差し込んだ様子。

ると、内部は図 2(a) の構造になることに気が付き、この構造が上下運動に重要であることを再認識した。

さて、ストローの動きの詳細を調べるため、さまざまなストローを作成し運動させてみた。蛇腹から上部と下部までの距離を変えたストローに関しては、長さに応じて上下運動の速さが違うことを確認した。また、蛇腹から上部分を切り取り、両端開口部の半径が違うストローを作成した。この場合は、下部の半径が大きい開口部から蛇腹の半径の小さな開口部方向への運動しかしないことが分かった。さらに、底をくりぬいた紙コップを棒に通し、手で回しても同様な運動が起きることを確認した。

どうして、(1) 蛇腹の部分があるストローでは上下運動と棒の端での反転がおき、(2) 半径が違うストローの場合は、一方向の運動しかおきないのか、本論文の目的は、(1) の疑問に答えることである。(2) に関しては、別の論文 [4] で考察する。

第 2 章では、実演のセットアップを示し、長さの違う蛇腹があるストロー、中心の半径が小さいストローや、両端開口部の半径が違うストローの運動の様子を示す。第 3 章では、中心部分の半径が小さいストローの上下運動と、棒の端に到達して反転する運動の機構の考察をおこない、移動速度を理論的に求める。第 4 章では、実験により移動速度を求め、理論値との比較検討をおこなう。第 5 章はまとめである。

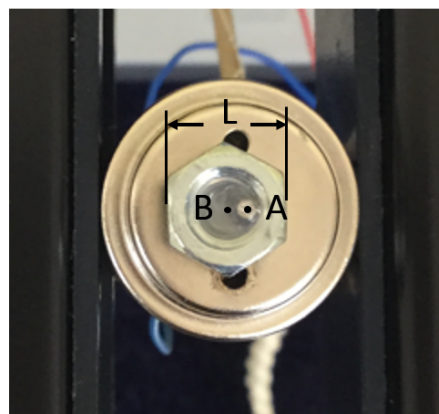
2 ストローの運動の実演

2.1 実演の準備

図 3(a) のように、モーター（マブチモーター RE-260RA）の軸にナットが取り付けられている。ナットの内径は 6mm であり、ナットの外側は 6 角形で、図 3(b) の L の長さは 10mm である。ナットの中心 B とモーターの軸 A はほぼ 1.5mm ほどずれている。



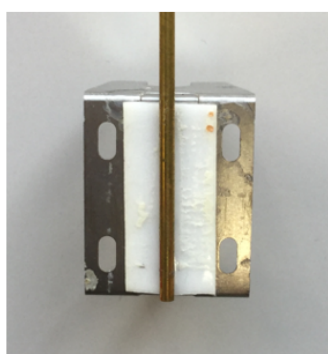
(a)



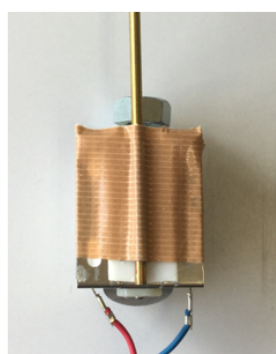
(b)

図 3: (a) モーターの側面図。線 A はモーターの軸の中心線で、線 B はナットの中心線。すこしずれていることがわかる。(b) 上から見た図。点 A はモーターの軸の中心を示し、点 B はナットの中心を示している。

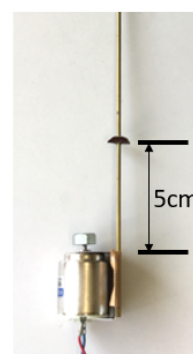
図 4(a) のように、モーターを固定する台の裏に両面テープをはりつけ、棒を取り付ける。さらに、図 4(b) のように、棒を固定するためにテープを貼り付ける。ナットの中心とモーターの回転軸が少しずれているために、ナットが回転するとモーターが公転運動し、モーターに取り付けられている棒も一緒に公転運動する。この公転運動がストローの自転運動を引き起こし、棒に沿った運動が出現するのである。図 4(c) のように、棒にはモーターの上部から 5cm のところに、直径がストローの直径より大きい紙で作った円盤がとりつけられていて、ストローはこの円盤より下に行かないようになっている。ストローがうまく反転してくれるように、円盤はすこしそらしている。棒は真鍮製で太さは 2mm であり、長さは 25cm である。



(a)



(b)



(c)

図 4: (a) モーター台の裏に両面テープをはりつけ、棒を取り付ける (b) 棒の上にテープを貼り付ける。(c) モーターの上部から 5cm のところに、紙で作った円盤をとりつける。

図 5(a) のように、モーターにポリウレタン製のクッション材を巻いていく。図 5(b) のように、直径 6cm くらい巻いて、実験用スタンドに固定する。クッション材を巻くことで、ナットの回転に合わせて棒も公転回線をするようになる。図 5(c) のように、このモーターには電源装置がつながっていて、0 V から 20 V までの電圧をかけることができる。しかし、モーターの使用電圧範囲が 1.5 V から 3V までなので、その範囲に限ることにする。

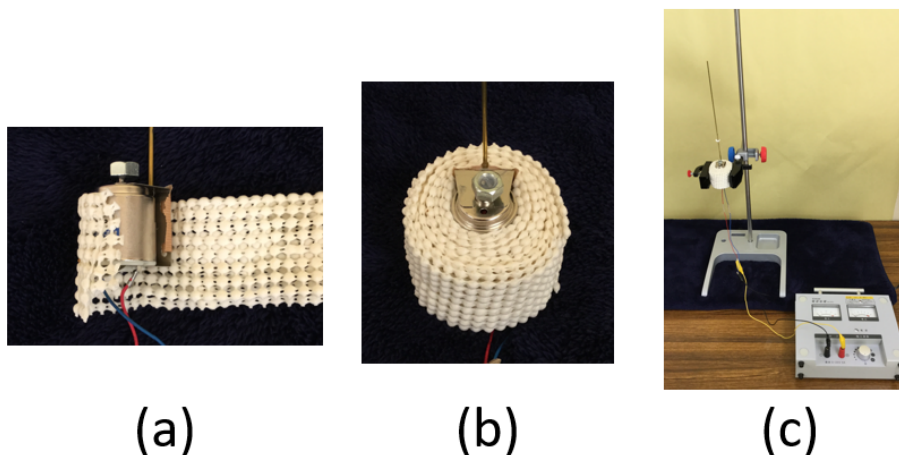


図 5: (a) モーターをポリウレタン製のクッション材で巻いていく。(b) 直径 6cm くらい巻く。(c) 実験用スタンドにセットし、電源装置に接続する。

2.2 さまざまなストローの運動

使ったストローは、図 1 のような蛇腹のところで曲がるストローである。内径は 6mm である。蛇腹の上下で適当な長さで切り、図 6(a) のようなものを作成した。

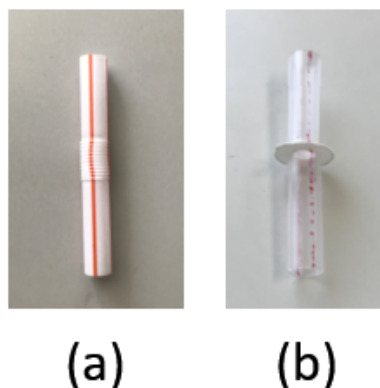


図 6: (a) ストローの全長は約 44mm であり、蛇腹の部分の長さは約 8mm である。(b) ストローの半径より小さな円の穴をあけた紙を用意し、その両側にストローをつけたもの。

ストローの全長は44mmであり、蛇腹の部分は長さ8mmである。このストローを棒にセットし、スイッチを入れ電圧を2.5Vにセットする。ストローが自転しはじめると同時に上昇していく。棒の先端に到達すると折り返し下降していく。下の円盤に触れると進行方向が反転し、ふたたび上昇していく。以後、この運動を繰り返す。運動の様子を図7に示した。動画のほうがわかりやすいので、Webサイトに「蛇腹ストローの上下運動：棒の先端は上」[5]としてアップしている。この運動は、棒を逆さまにしても横にしても同様にみられ、棒の先端で戻ってくる動きに少し驚かされる。横向きでの動画は「蛇腹ストローの水平方向の運動」[6]としてアップしている。逆さまでの動画は「蛇腹ストローの上下運動：棒の先端は下」[7]としてアップしている。

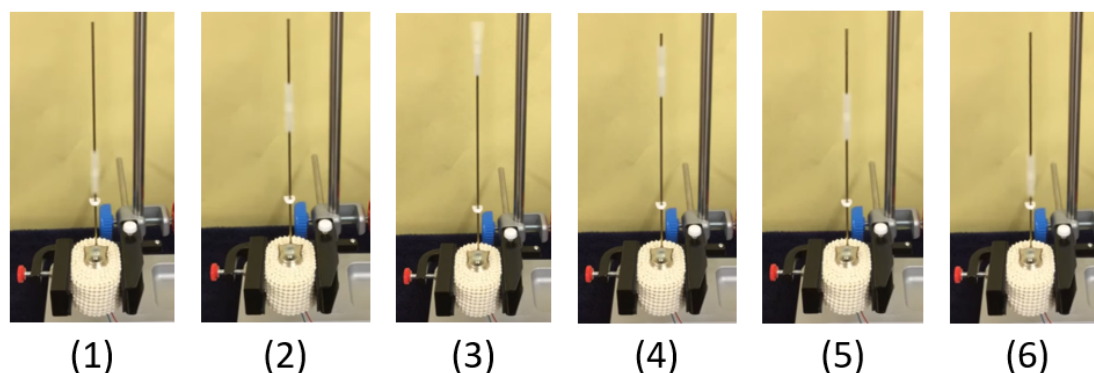


図 7: 蛇腹ストローの上下運動

なぜ、蛇腹があれば上下運動をするのであろうか。蛇腹の部分では、若干半径が小さくなっているんで、これが原因ではないかと考えた。そこで、図6(b)のように、ストローの半径より小さな円の穴をあけた紙を用意し、その両側にストローをつけたものを作成した。このストローでも同様な運動が確認できた。この動画を「中心部分の半径が小さいストローの運動」[8]としてアップしている。第3章では、このストローの運動に関して考察をする。

それでは、開口部の半径が違うストローならばどういう動きをするだろうか。蛇腹からすぐ上をカットしたストロー(図8(a))を用意し試したところ、開口部の半径が大きい円から開口部の半径が小さい円に向かう方向にのみ進むことが確認できた。この動画を「開口部の半径が違うストローの運動1」[9]としてアップしている。振動している棒には振動の節があるので(第4章で説明する)、そこでストローの上昇が止まっているのが動画で確認できる。手でつついて上昇させると、棒の先端に届き飛んで行ってしまう。また、ストローの半径より小さな円の穴をあけた紙を用意し、その片側だけにストローをつけたもの(図8(b))に関しても同様な動きを確認した。ただし、棒の振動の節のところで止まらない場合もあるし、棒の先端のところで停止する場合もある。この動画を「開口部の半径が違うストローの運動2」[10]としてアップしている。

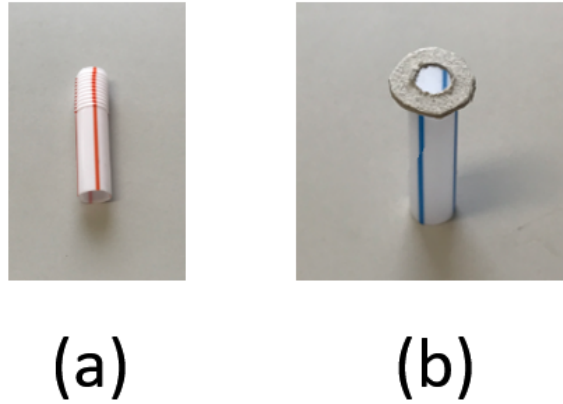


図 8: (a) 蛇腹のすぐ上をカットしたストロー。(b) ストローの半径より小さな円の穴をあけた紙を用意し、その片側だけにストローをつけたもの。

ストローの運動はかなり速く、手元にある市販のカメラだと、その詳細を追うことが難しい。そこで、ゆっくりとした動きでも再現できるものはないかと探したところ、紙コップに着目した。紙コップの底をくりぬくと、ちょうど半径が違うシリンダー状のものになる。それを木の棒（直径 12mm）に通し手で回してみた。棒を垂直にすると紙コップが滑りうまく上昇しないが、水平にしてみるとちょっとずつ進んでいるのが確認できた。そこで、半径が小さい部分にゴム（卓球のラバーを切り取った）を貼り付けて、棒との摩擦を大きくしたものを作成した。これを回してみると、水平でも垂直でも半径が小さい底の方向に進みことが確認できた。この動画を「紙コップ 1 個の運動」[11] としてアップしている。紙コップを二つ、底をあわせて結合すると、中心の半径が小さいストローに類似したものができるので、これも手で回してみた。上下運動を試みたが、回転数が足りないのでもうまく上昇しなかった。そこで水平方向に動かしてみたところ、手元から離れる方向や、手元に近づいてくる方向の動きを確認でき、さらに、先端でうまく戻ってくる動きも確認できた。この動画を「紙コップ 2 個の運動」[12] としてアップしている。

さまざまなストローやカップの運動を紹介したが、「はじめに」で述べたように、本論文では、中心の半径が小さいストローの運動のみを議論している。

3 中心の半径が小さいストローの運動

3.1 上下運動の解析

図 9(a) のように、ストローの中心の円の半径を $\bar{l}_1$ 、ストローの開口円の半径を $\bar{l}_2$ 、長さを $2\bar{l}_4$ 、棒の半径を $\bar{l}_3$ とする。図 9(b) のように、ストローの下部円周を C_2 、中心の内側の円周を C_1 、上部円周を C_3 とする。

モーターを反時計回りに回したとすると、ナットも反時計回りに回る。ナットの中心がモーターの中心からずれているので、ナットが反時計回りに回転したときに、モーターもそれにあわせて反時計回りに公転運動し、モーターにとりつけられた棒も反時計回りに公転運動する。すると、棒の公転運動にあわせストローは自転運動し、その回転は反時計回りである。もし、モーターを時計回りに回したとすると、同様にすべて時計回りの公転運動や自転運動をする。モーターの回転方向は上下運動には本質的な要因ではないので、以後、反時計回りに回転する状況を考える。

まず考えなければならないのは、棒とストローはどのように接触しているかである。高速に回転している状況で安定な接触の仕方としては、図9(b)のように、棒とそれぞれの円周 C_1, C_2, C_3 と3点で接触していると考えるのが自然である。

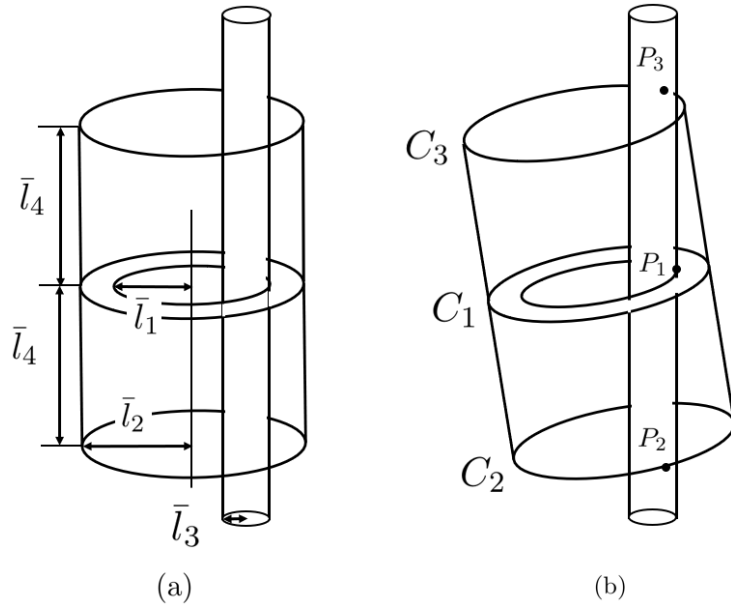


図 9: (a) ストローと棒の各部分の長さ。(b) 接点を P_1, P_2, P_3 とする。ストローの下部円周を C_2 、中心の内側の円周を C_1 、上部円周を C_3 とする

それぞれの接点を P_1, P_2, P_3 とする。図10(a)(b)(c)は、この状況をそれぞれ e_3, e_1, e_2 軸と平行な方向から見たものである。ストローの慣性主軸を $\bar{e}_i (i = 1, 2, 3)$ とすると、 $e_i (i = 1, 2, 3)$ は、 e_1 が常に接点 P_1 の方向に向くように、 $\bar{e}_3$ 軸に関して慣性主軸を回転させたものである。

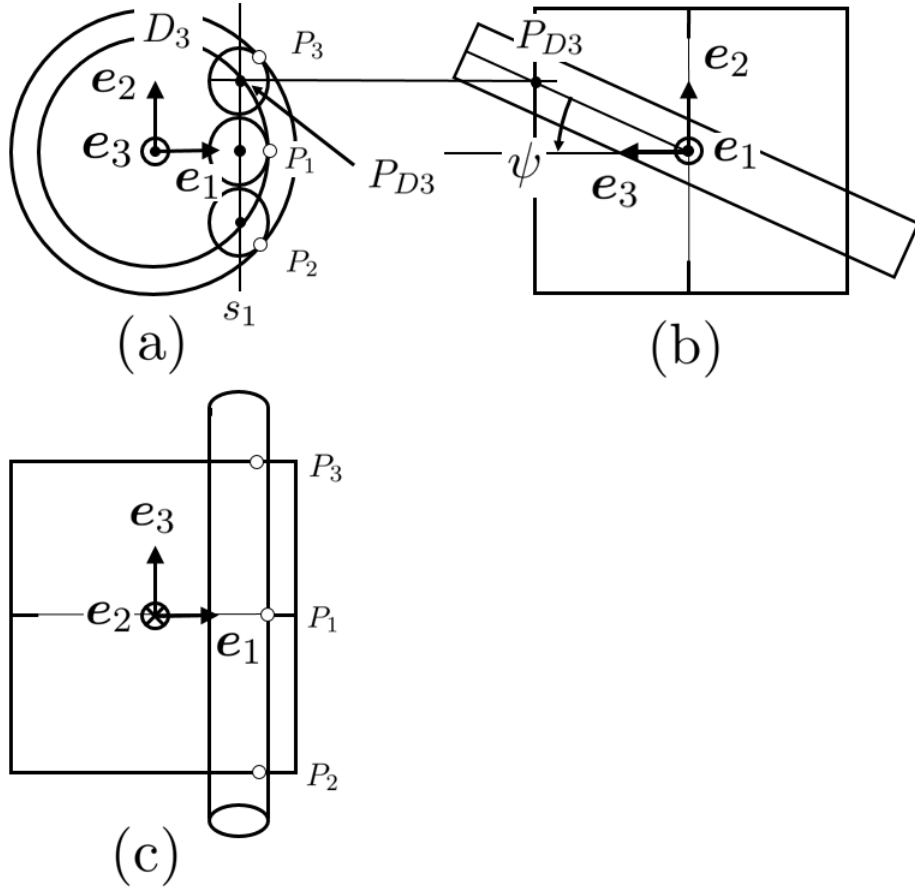


図 10: (a) e_3 軸と平行な方向から見た図。棒とストローが上部円周 C_3 を含む平面に射影されている。 C_3 を含む平面による棒の断面は楕円であるが、これを D_3 とし、その中点を P_{D3} としている。(b) e_1 軸と平行な方向から見た図。 e 系の原点と点 P_{D3} を通る直線、すなわち棒の中心線と、 e_3 軸方向との間の角度を ψ と定義し、この状況では負の値をとるものとする。(c) e_2 軸と平行な方向から見た図。

図 10(a) は、 e_3 軸と平行な方向から見た、棒とストローを上部円周 C_3 を含む平面に射影した図である。 C_3 を含む平面による棒の断面は楕円であるが、これを D_3 とし、その中点を P_{D3} としている。図 10(b) において、 e 系の原点と点 P_{D3} を通る直線、すなわち棒の中心線と e_3 軸方向との間の角度を ψ と定義し、この状況では ψ は負の値をとるものとする。

ストローと棒は 3 点で接触していることは動画からも支持される。運動の様子をデジタルカメラ (CASIO EX-ZR200) で 1000fps の動画として撮影し、1 フレームごとのスナップショットを集めたものが図 11 である。この図の (1)(5)(9)(12)(15) を見ると、ストローは棒に対して斜めになっていて、図 10 の (b) に対応しているのがわかる。

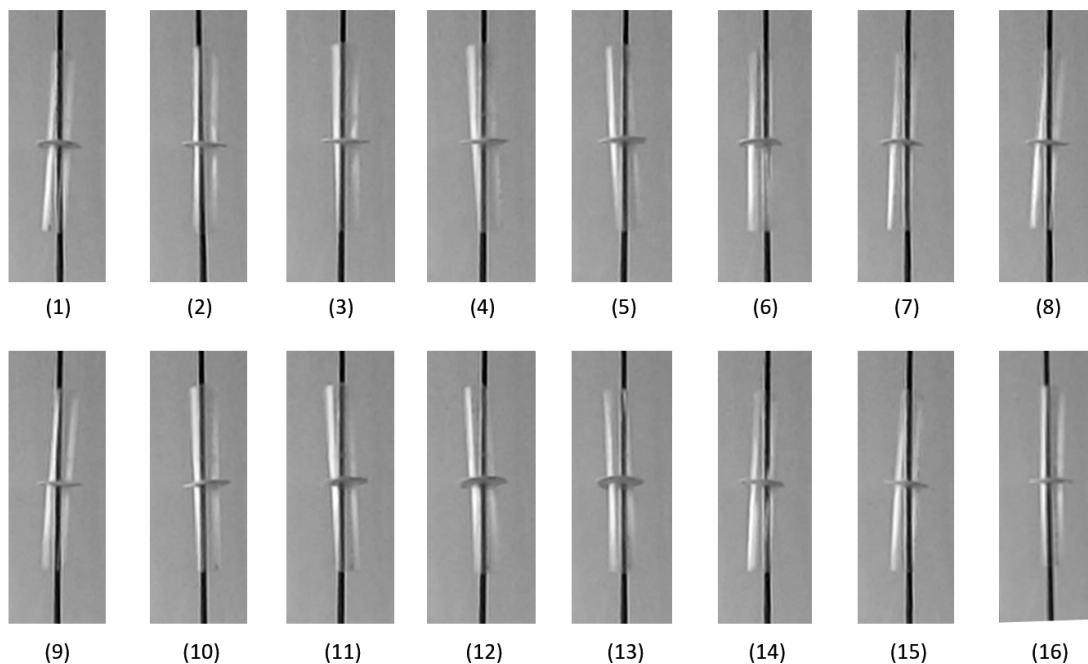


図 11: 運動の様子をデジタルカメラ（CASIO EX-ZR200）で 1000fps の動画として撮影し、1 フレームごとのスナップショットを集めたもの。

棒とストローのなす角度の値は近似的に求めることができる。図 10(a) において、棒の断面を半径 $\bar{l}_3$ の円と近似すると、図 12(a) となる。

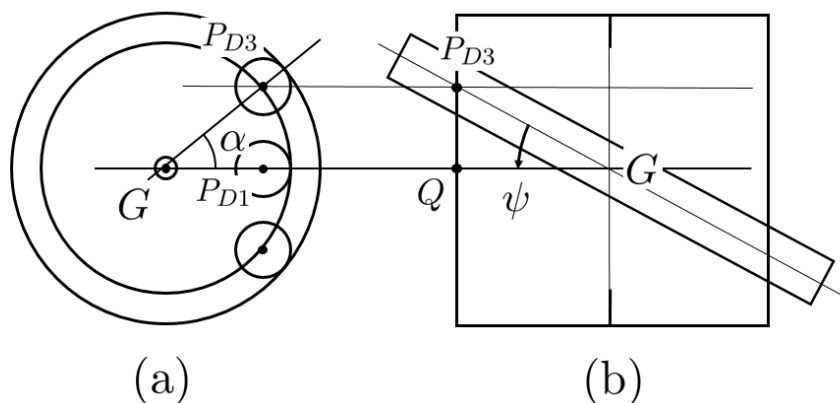


図 12: (a) 接点 P_1 で接する棒の断面の中心を P_{D1} とし、ストローの重心を G としている。直線 GP_{D3} と直線 GP_{D1} との間の角を $\alpha > 0$ とする。(b) e_1 軸と平行な方向から見た図。

図 12(a) において、接点 P_1 で接する棒の断面の中心を P_{D1} とし、ストローの重心を G としている。 GP_{D3} の直線と GP_{D1} の直線との間の角を $\alpha > 0$ とする。断面を円と近似することで、 GP_{D3} の長さは $\bar{l}_2 - \bar{l}_3$ であり、 GP_{D1} の長さは $\bar{l}_1 - \bar{l}_3$ である。したがって、

$$(\bar{l}_2 - \bar{l}_3) \cos \alpha = (\bar{l}_1 - \bar{l}_3), \quad (3.1)$$

が成立するので、

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{l}_1 - \bar{l}_3}{\bar{l}_2 - \bar{l}_3} \right)^2}, \quad (3.2)$$

となる。図 12(b) において、 GQ の長さは $\bar{l}_4$ であり、 QP_{D3} の長さは $(\bar{l}_2 - \bar{l}_3) \sin \alpha > 0$ なので、(3.2) を代入すると、 $\tan \psi$ は

$$\begin{aligned} \tan \psi &= -\frac{|QP_{D3}|}{|GQ|}, \\ &= -\frac{(\bar{l}_2 - \bar{l}_3) \sin \alpha}{\bar{l}_4}, \\ &= -\frac{\sqrt{(\bar{l}_2 - \bar{l}_3)^2 - (\bar{l}_1 - \bar{l}_3)^2}}{\bar{l}_4}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。ここで図の状況では $\psi < 0$ としているので、右辺に負の符号がついている。したがって、 ψ の近似値として、

$$\psi = \arctan \left(-\frac{1}{\bar{l}_4} \sqrt{(\bar{l}_2 - \bar{l}_3)^2 - (\bar{l}_1 - \bar{l}_3)^2} \right), \quad (3.4)$$

と求められる。

さて、これらの接点では、ストローは棒に対して滑っているのか、滑らないでいるのかどちらであろうか。ストローが棒に接しながら回転する運動を想像するのは慣れないと難しい。そこでまずストローと棒が平行で、 P_1 でのみ接触している場合を考える。そして、棒を固定させてストローを反時計回りに滑らないように回転すると P_1 がどう動き、それにともない、慣性主軸の $\bar{e}_i$ と e_i 系がどう回転していくかを見てみよう。

図 13(a) は e_3 軸に平行な方向から見た図である。最初慣性主軸 $\bar{e}$ 系と e 系を一致させておく。接点を P_1 とする。図 13(b) のように、ストローを反時計回りに回転すると、棒は固定しているので接点は移動し、 P'_1 になったとする。回転する前の接点 P_1 を、棒の面上の点としては P_{1r} 、 C_1 上の点としては P_{1c} としている。滑らないように回転しているのだから、2 点間の曲線距離 P'_1P_{1r} と P'_1P_{1c} は同じ長さである。 e_1 は常に接点の方に向いている軸と定義したので、図 13b の e_1 は、図 13a の e_1 からは反時計回りに回転している。この角度を例えば $\frac{\pi}{2}$ としよう。一方、 $\bar{e}_1$ は $\frac{\pi}{2}$ も回転していないが、反時計回りには回転している。その角度に差がでてくるのは、棒の半径が C_1 の半径と違うからである。図 14 はこの様子を斜め上から見た図である。

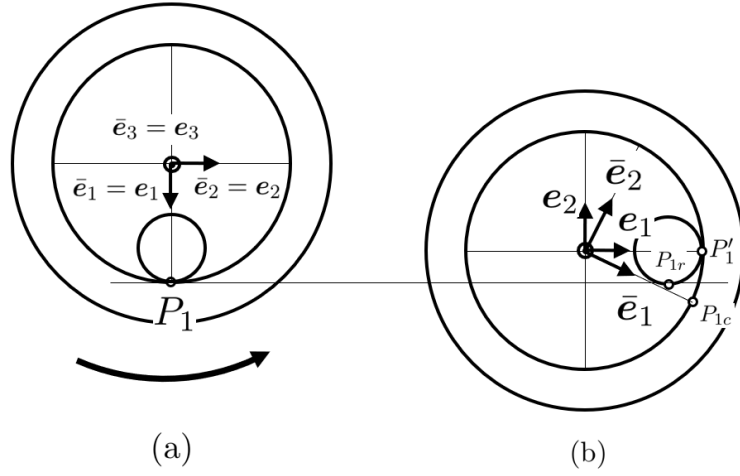


図 13: (a) e_3 軸に平行な方向から見た図である。最初慣性主軸 $\bar{e}$ 系と e 系を一致させておく。接点をこの図では真下に位置した P_1 とする。(b) 回転後の新しい接点を P'_1 、回転する前の接点 P_1 を、棒の面上の点としては P_{1r} 、 C_1 上の点としては P_{1c} としている。

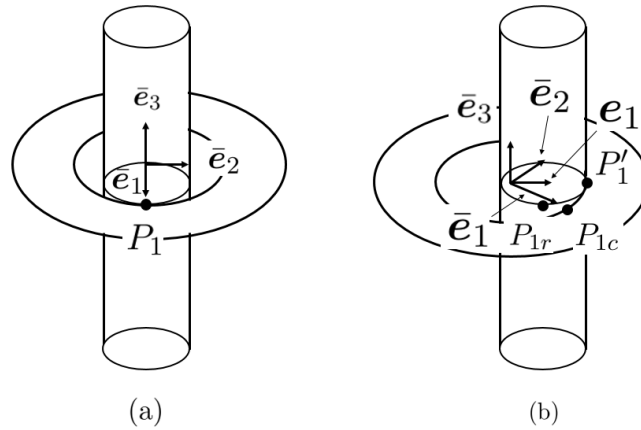


図 14: (a)(b) は、図 13(a)(b) をそれぞれ斜め上から見た図

次に、ストローが棒に対して傾いて 3 点で接触しながら運動する場合を考えよう。3 点で接触しているので、ある角度 ψ で傾いていて、この角度は回転している間一定値を保っている。図 15(a)(b)(c) のように、ストローが反時計回り回転して、接点 $P_{(i=1,2,3)}$ が $P'_{(i=1,2,3)}$, $P''_{(i=1,2,3)}$ と変化した場合を考える。図 15 中の (a) と (b) の間にある線と、(b) と (c) の間にある線は同じ高さを示しているので、 $\psi < 0$ でストローが反時計回りに回転していると、上昇していることがわかる。

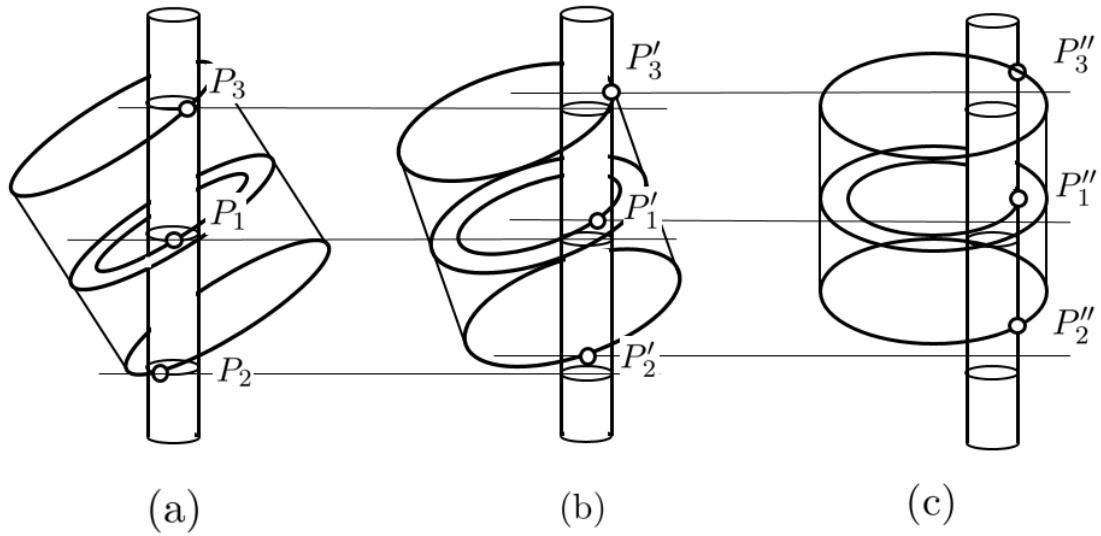


図 15: (a)(b)(c) は、ストローが反時計回り回転して、接点 P_i が P'_i, P''_i と変化した様子。(a) と (b) の間にある線と、(b) と (c) の間にある線は同じ高さを示しているの、ストローが反時計回りに回転していると、上昇していることがわかる。角度は $\psi < 0$ である。

それぞれの接点がどれだけ移動するかを求めることで、滑っているか滑らないかを考えていこう。図 16(a)(b) は e_3 軸と平行な方向から見た図であるので、棒の断面は楕円となっている。ストローを固定させて、棒が動いているように描いている。図 16(a) において、図 15 の $P_i, P'_i, P''_i (i = 1, 2)$ を C_1 平面に射影したものが、 $\bar{P}_i, \bar{P}'_i, \bar{P}''_i (i = 1, 2)$ である。図 16(b) において、 e 系の原点 G と点 $\bar{P}_1$ を結ぶ線分と原点 G と点 $\bar{P}'_1$ を結ぶ線分とのなす角を γ とすると、原点 G と点 $\bar{P}_2$ を結ぶ線分と原点 G と点 $\bar{P}''_2$ を結ぶ線分とのなす角も γ である。なぜなら、3 角形 $G\bar{P}_2\bar{P}_1$ と 3 角形 $G\bar{P}''_2\bar{P}'_1$ は合同だからである。すると、円弧 $\bar{P}_1\bar{P}'_1$ の長さは $\bar{l}_1\gamma$ であり円弧 $\bar{P}_2\bar{P}''_2$ の長さは $\bar{l}_2\gamma$ である。実際接点が移動した距離は、 e_3 軸方向の高さを含めないといけない。これは両方の円弧で等しく x とする。実際移動した距離はそれぞれ $P_1P'_1 = \sqrt{(\bar{l}_1\gamma)^2 + x^2}$ 、 $P_2P'_2 = \sqrt{(\bar{l}_2\gamma)^2 + x^2}$ となり、 $\bar{l}_1 \neq \bar{l}_2$ なので、距離に差がでてくる。したがって、もし P_1 が滑らなければ、 P_2, P_3 が滑っていることになり、 P_2, P_3 が滑らなければ、 P_1 が滑っていることになる。その他の場合もあるかもしれない。どの場合が起こっているか判断することは、ストローのような小さな物体では確認することは難しいので、今後の課題である。

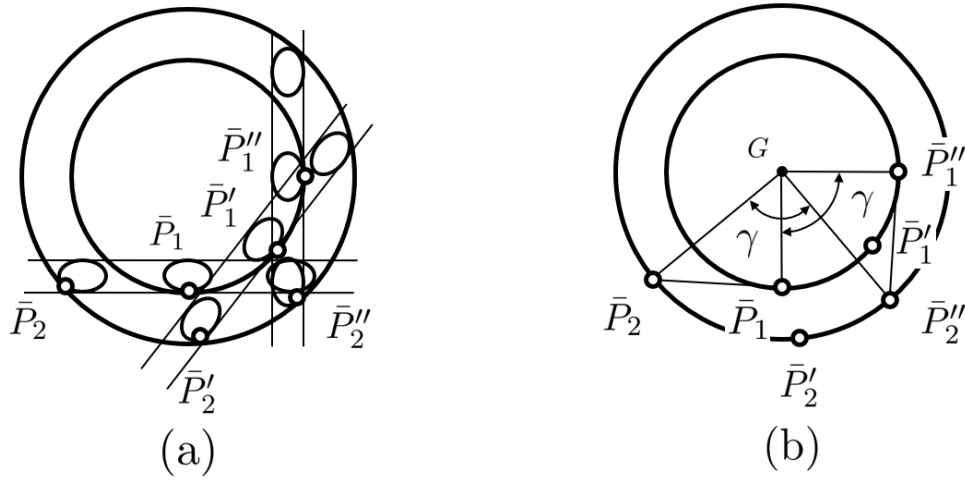


図 16: ストローの e_3 軸と平行な方向から見た図。ストローを固定して、棒が動いているように描いている。(a) C_1 平面にそれぞれの点を射影したのが $\bar{P}_1, \bar{P}'_1, \bar{P}''_1$ と $\bar{P}_2, \bar{P}'_2, \bar{P}''_2$ である。(b) e 系の原点 G と点 $\bar{P}_1$ を結ぶ線分と原点 G と点 $\bar{P}''_1$ を結ぶ線分とのなす角を γ とする。

どの接点で滑っているかはわからないが、3 点で接触しているから、棒に対してストローは角度が ψ で固定されて回転している。角度が ψ で固定されていることが重要である。そして、 $\psi < 0$ ならば反時計回りのストローは上昇し、 $\psi > 0$ ならば下降するのである。下降しているストローが一番下の円盤に触れると、その瞬間にストローの棒に対する傾きが変わり、 $\psi < 0$ となって再び上昇に転じるのである。

さて、棒を通るワッシャーの運動で似たような運動がある。このワッシャーの運動は、筆者の論文 [13] で解析したが、回転しながらフラフープのようにその場にとどまる運動と、回転しながら一方向に動く運動の 2 種類がある。ジターリングやチャターリングとよばれるおもちゃ [14] の小さなリングの動きは、棒を通るワッシャーの一方向に動く運動に対応していることをこの論文で示した。フラフープのような運動において、ワッシャーと棒の接触点は 1 点であるが、一方向に動く運動においては接触点は 2 点ある。2 点で接触しているため、棒とワッシャーとの角度が一定となり、回転すると一方向に動くのである。ワッシャーが棒と 2 点接触するために一方向に運動することと、ストローが 3 点で接触しているため角度が一定となり一方向に動くこととは、よく似た状況であるといえる。

3.2 ストローの上下運動の速度と長さの関係

第 2.2 章で紙コップの運動を紹介したが、紙コップの中心にゴムを貼り滑らないように工夫したらうまく動いたことから、以下の議論では接点 P_1 では滑らず、接点 P_2, P_3 では滑っていると仮定しよう。

ストローの上下運動の速度は、棒とストローとの角度 ψ に関係している。図 17(a) は、ストローが棒の周りを回転し、接点 P が上昇しながら 1 回転して P' となった状況を示した。1 回転

した時の上昇距離は、図 17(a) における P と P' 間の距離であり、これを $z_0 > 0$ としている。図 17(b) は図 17(a) を展開したもので、棒の半径は $\bar{l}_3$ なので、 z_0 は次式で与えられる。

$$z_0 = -2\pi\bar{l}_3 \tan \psi > 0. \quad (3.5)$$

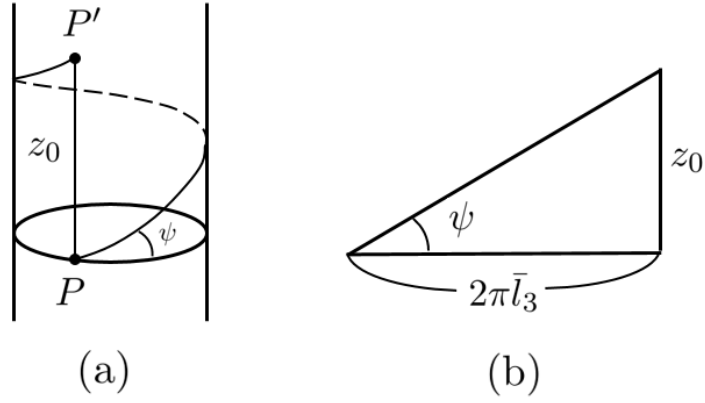


図 17: (a) ストローが棒の周りを 1 回転すると、接点 P も上昇しながら 1 回転して P' となる。1 回転した時の上昇距離を z_0 としている。(b)(a) の展開図

接点が 1 秒間に棒のまわりを何回転するかが求まれば速度がわかる。動画の観察から、棒の公転と接点の回転が同期しているのがわかるので、回転数 n を求めることができる。図 18 は回転の同期の概念図である。

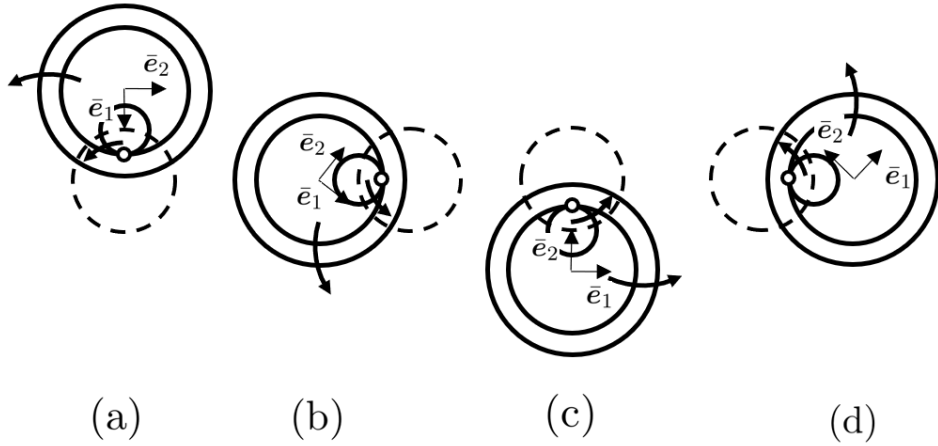


図 18: 点線は棒の公転軌道で反時計回りにまわっている。白丸は接点であり、 $\bar{e}_{1,2}$ はストローの慣性主軸である。(a)(b) は図 13(a)(b) に対応している。(c)(d) はそれぞれ接点が π 、 $\frac{3}{2}\pi$ 回転している。

ストローは棒に対して ψ ほど傾いているが、この概念図では簡単のため傾きの影響は省いている。点線は棒の公転軌道で反時計回りにまわっている。白丸は接点であり、 $\bar{e}_{1,2}$ はストローの

慣性主軸である。図 18(a)(b) はそれぞれ図 13(a)(b) に対応している、図 18(a) から (d) にかけて棒は 1 回転公転していて、それと同時に接点は 1 回転していることがわかる。したがって、棒の 1 秒間の公転回数すなわちナットの回転数 n が接点の 1 秒間の回転数に等しい。図 18(d) が示しているように、棒の半径とストローの半径が異なるため、接点が 1 回転してもストローは 1 回転も自転（慣性主軸の回転）していないことがわかる。ストローは棒の公転と同時に 1 回転しているように見えるが、自転としては 1 回転していない。

ストローの上昇速度 v_s は、ナットの回転数 n と (3.3) を使って

$$v_s = nz_0 = -2\pi n \bar{l}_3 \tan \psi = 2\pi n \frac{\bar{l}_3}{\bar{l}_4} \sqrt{(\bar{l}_2 - \bar{l}_3)^2 - (\bar{l}_1 - \bar{l}_3)^2}, \quad (3.6)$$

と求められる。

3.3 棒の先端での反転運動の解析

次に、なぜ先端で戻ってくるかを考えてみよう。図 19 のようにストローは棒の先端に到着するとすぐ下降するのではなく、棒の先端がストローの中まで入りこみ、あるところ (図 19(5)) で下降しはじめる。

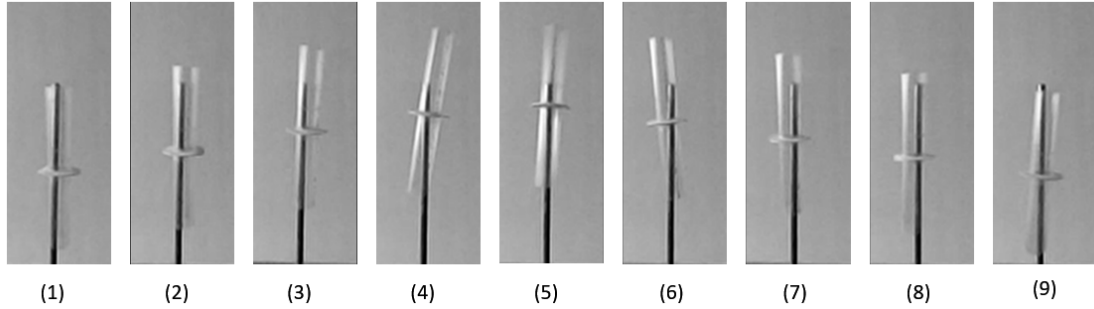


図 19: ストローの先端付近での運動の様子。

図 20 は、棒の先端が上部開口部にきた状況である。図 20(a) は上から見た図で、図 20(b) はストローの真横から見た図である。

角度 ψ と棒の先端の位置との関係を示したい。角度 ψ は棒の中心を通る直線と、 e_3 方向と平行な直線とのなす角なので、棒の中心を通る直線を図示しよう。

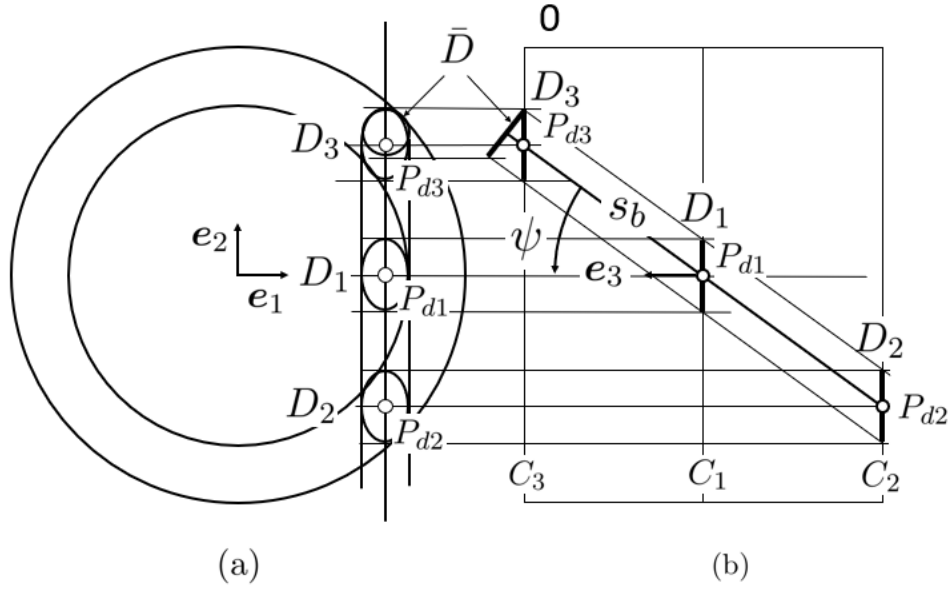


図 20: ストロー内部の棒の様子。(a) D_1, D_2, D_3 は接点 P_1, P_2, P_3 における、 e_1, e_2 平面による棒の断面であり、楕円である。これら楕円 D_1, D_2, D_3 の中心点を P_{d1}, P_{d2}, P_{d3} とする。また、棒の先端断面を $\bar{D}$ としている。(b) 円周 C_1, C_2, C_3 (図 9(b)) は縦の線で表示されている。 $P_{di}, (i = 1, 2, 3)$ を通る直線は棒の中心を通る線となり、これを s_b とした。この直線と e_3 方向と平行な直線とのなす角が ψ である。

図 20(a) において、 D_1, D_2, D_3 は、接点 P_1, P_2, P_3 における e_1, e_2 平面による棒の断面であり、その形は楕円である。これら楕円 D_1, D_2, D_3 の中心点を P_{d1}, P_{d2}, P_{d3} とする。図 20(b) において、円周 C_1, C_2, C_3 (図 9(b)) は縦の線で表示されている。図 20(a) における棒の中心点 P_{di} から図 20(b) に伸びる直線とストローの円周 C_i (縦の線) との交点が、図 20(b) における中心点 P_{di} の場所である。したがって、図 20(b) における $P_{di}, (i = 1, 2, 3)$ を通る直線は棒の中心を通る線となり、これを s_b とした。この直線と e_3 方向と平行な直線とのなす角が ψ である。

その後上昇をつづけるので、接点 P_3 はストローの内部に移動する。図 21(a)(b)(c) に、この状況を示した。

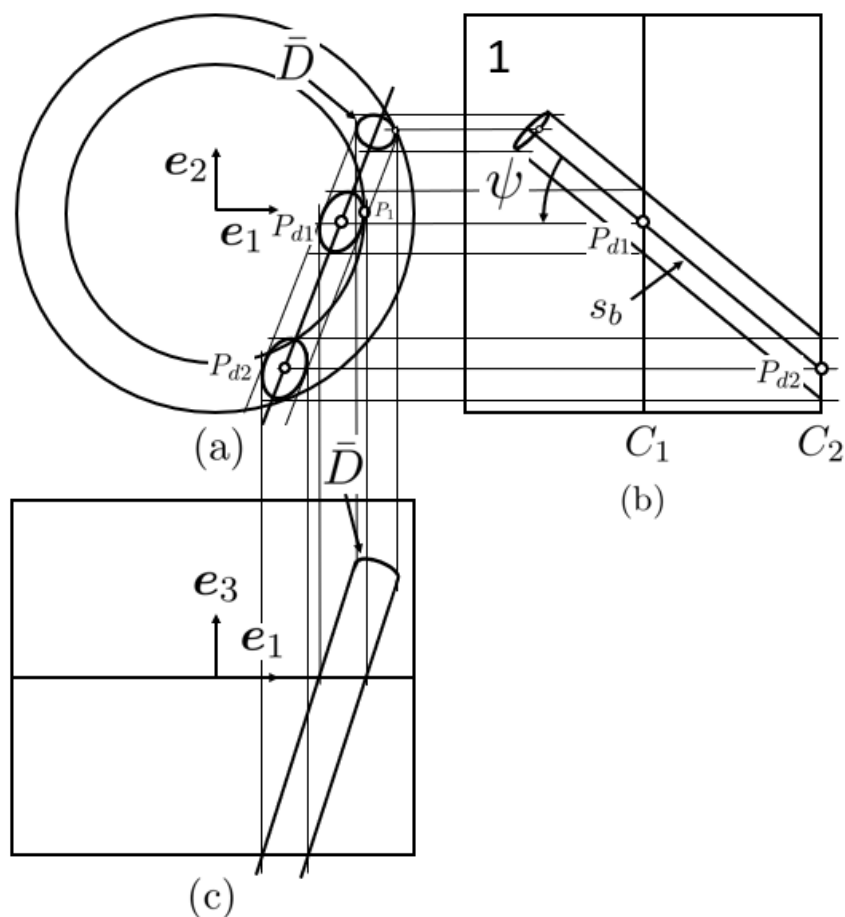


図 21: ストロー内部の棒の様子 1。図 20 と同じ記号を使っている。

図 21(a) における P_{d1}, P_{d2} から図 21(b) に伸びる直線と C_1, C_2 との交点の場所に、それぞれ図 21(b) における P_{d1}, P_{d2} がある。したがって、 P_{d1}, P_{d2} を通る直線が棒の中心を通る直線 s_b であり、この直線と e_3 方向と平行な直線とのなす角が ψ となる。

棒の先端がだんだん下がってきた様子を図 22 から図 27 まで描いている。

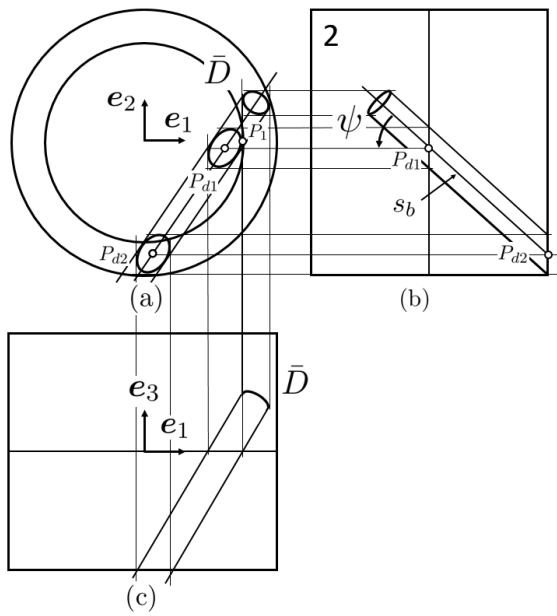


図 22: ストロー内部の棒の様子 2

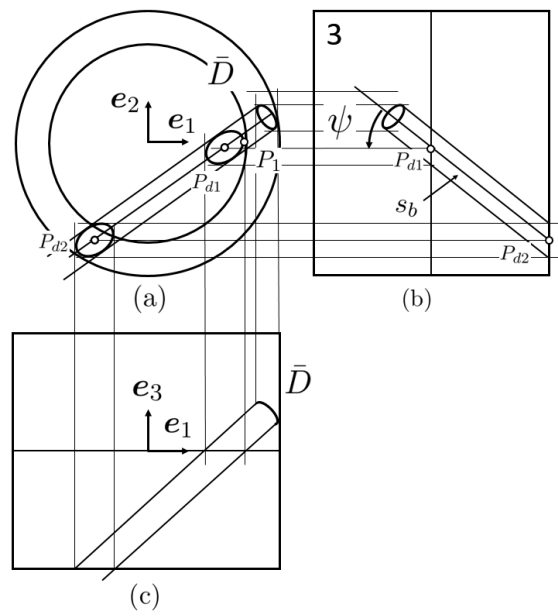


図 23: ストロー内部の棒の様子 3

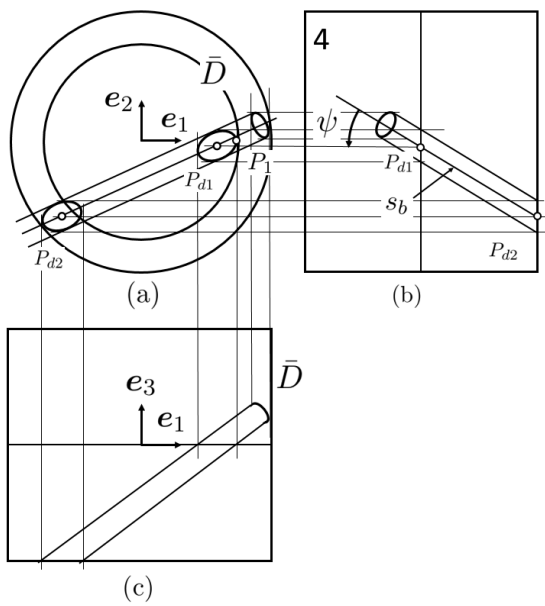


図 24: ストロー内部の棒の様子 4

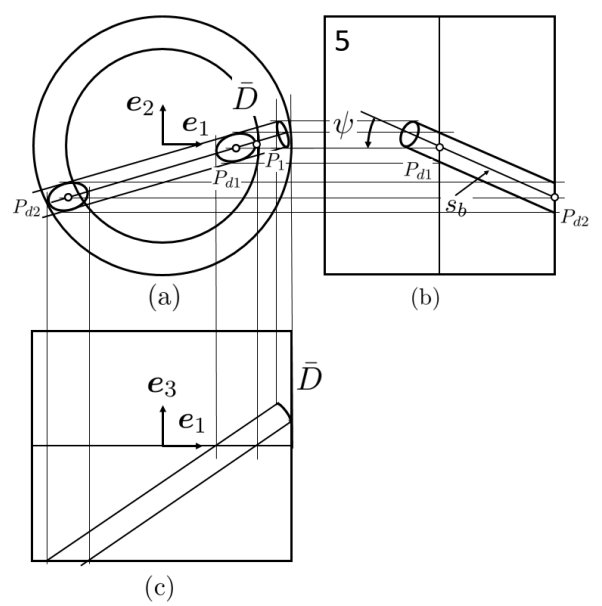


図 25: ストロー内部の棒の様子 5

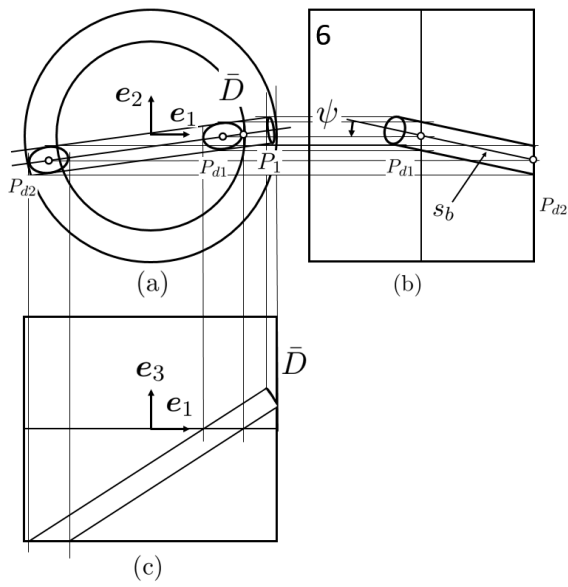


図 26: ストロー内部の棒の様子 6

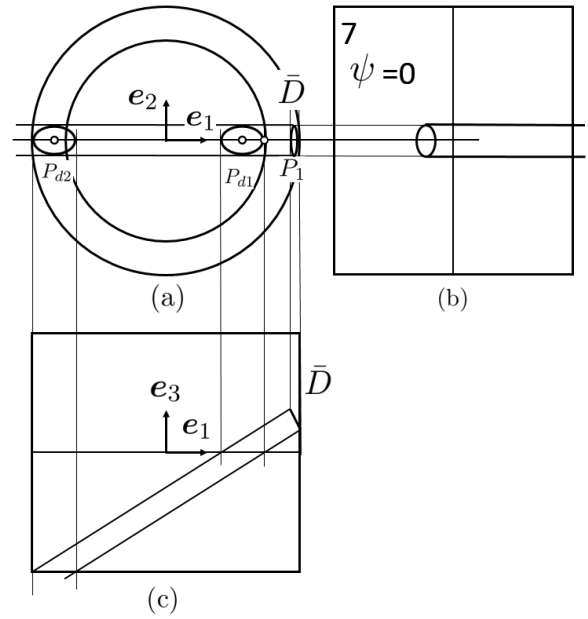


図 27: ストロー内部の棒の様子 7

棒の中心を通る線 s_b に関して、図 20(b) から図 27(b) までのものを集めて描いたのが図 28 である。この図から ψ の遷移が読み取れる。図 28 の中の番号は図 20(b) から図 27(b) までのキャプションの中の番号に対応している。図 20 の ψ (番号の 0 に対応) から始まり、図 21 (番号の 1 に対応)、22 (番号の 2 に対応) では若干角度が増えている。その後減少に転じ、それにあわせ速度が減少していく。図 27 (番号の 7 に対応) で $\psi = 0$ となる。ここで上昇が止まり、その後は $\psi > 0$ なので、下降に転じるのである。

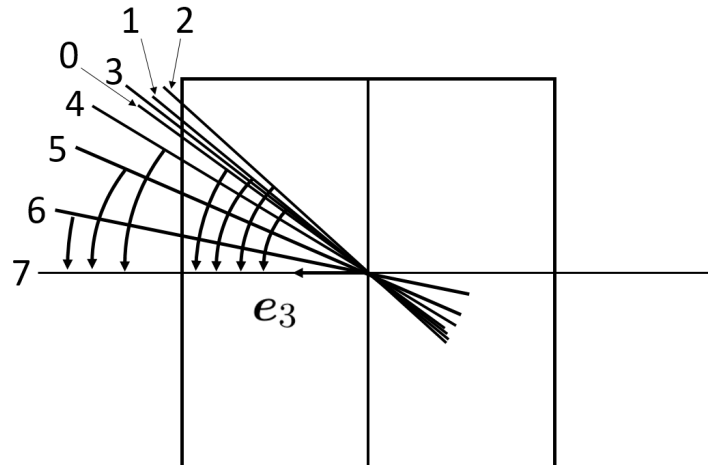


図 28: 棒の中心を通る線 s_b を集めて描いたもの。 ψ の変化が読み取れる。番号は図 20 から図 27 の説明文にある番号に対応している。

結局、ストローが上昇するにつれ、棒がストローの中に入り込んでいき、それに伴い、棒とス

ストローのなす角 ψ が 0 に近づいていって上昇速度も減っていく。そのうち 0 となった時点で上昇がとまり、 ψ の値の正負が逆転し下降し始める。以上が棒の先端でストローが戻ってくる機構である。

4 運動速度の理論値と実験値との比較

上下運動の速度は、(3.6) より、ストローの半径 $\bar{l}_1$ 、 $\bar{l}_2$ と棒の半径 $\bar{l}_3$ を固定すると、ストローの長さ $\bar{l}_4$ とナットの回転数 n の関数となる。したがって、長さ $\bar{l}_i (i = 1 \sim 4)$ を測定し、回転数 n をストローの運動の動画から求め、(3.6) に代入することで、速度の理論値を得ることができる。この理論値と動画から得られた速度の実験値を比較してみよう。今までストローの上下運動に注目していたが、上下運動の速度には重力の影響があるかもしれないので、棒を水平方向にし左右に移動する速度を測定した。

図 3(b) で示したストローは、紙に 2 つのストローを結合させたものである。紙に小さい半径の穴をカッターナイフであけたものなので正確な円ではない。また、紙の穴の中心軸とストローの縁の円の中心軸が一致しているか、さらに、ストローが紙に垂直に結合されているかが不正確である。本来ならば正確な資料を作成し実験すべきなのだが、まずは手元にある材料を使って実験してみよう。そこで別のストローを探したところ、図 29 のように、すでに先端がすこし丸くなって半径が小さくなっているストローを見つけた。このストローを 2 本用意し、それぞれ丸くなっている部分を合わせ、これらを添え木ではさみ直線状になるようにして接着剤で結合させたものを作成した。このストローにおける $\bar{l}_1$ 、 $\bar{l}_2$ と棒の半径 $\bar{l}_3$ の測定値はそれぞれ、 $\bar{l}_1 = 2.5\text{mm}$ 、 $\bar{l}_2 = 3.0\text{mm}$ 、 $\bar{l}_3 = 1.0\text{mm}$ である。

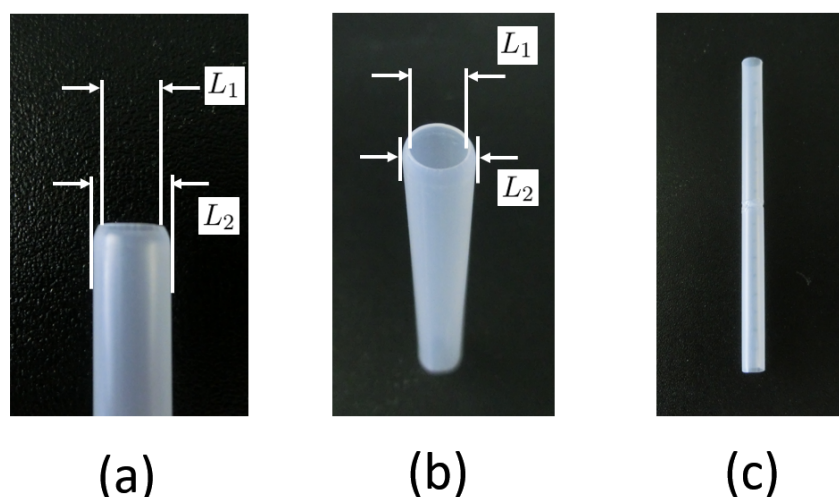


図 29: 先端が少し丸くなって直径が小さくなっているストロー。(a) 横から見た図。外径は $L_2 = 2\bar{l}_2 = 6.0\text{mm}$ 、内径は $L_1 = 2\bar{l}_1 = 5.0\text{mm}$ 。(b) 斜め上から見た図。(c) 2 つ結合させたストロー。

ストローの長さ $\bar{l}_4$ を 4.5cm から 1cm まで、およそ 0.5cm 間隔で変え、その他、およそ 0.8cm、

0.6cm、0.4cm と変えながら実験をおこなった。5cm 以上のストローではうまく左右の運動をおこなわなかったため、4.5cm 以下のものを使うことにした。ストローをはさみで切ることで $\bar{l}_4$ の長さを変えたので、正確な長さはノギスで測定した。ストローの右半分の長さと左半分の長さが若干違う値なので、その平均値を $\bar{l}_4$ とした。

モーターに取り付けられた棒は、振動すると節と腹ができる。棒の腹と節の概略図を図 30 に示した。節の部分では速度が遅くなり止まる場合もあるので、節は速度に影響を及ぼすと考えられる。正確な実験をするためには、節ができないように棒を公転回転させる機構をもった実験装置を使うべきであるが、まずは実演に使ったモーターと棒で実験をおこなった。 $\bar{l}_4 = 4.5\text{cm}$ のストローでも測定できるために、約 38cm の長さの棒を使用した。図 30 中の c の節の部分からの影響を少なくするために、a から 2、3cm あたりをストローの左端が通過する速度を測定することにした。左方向への移動速度、右方向への移動速度をそれぞれ 3 回測定し、さらに、ストローの左右を入れ替え 3 回ずつ測定した。合計 12 回の測定値の平均値を移動速度とし、平均値からのずれから誤差を求めた。

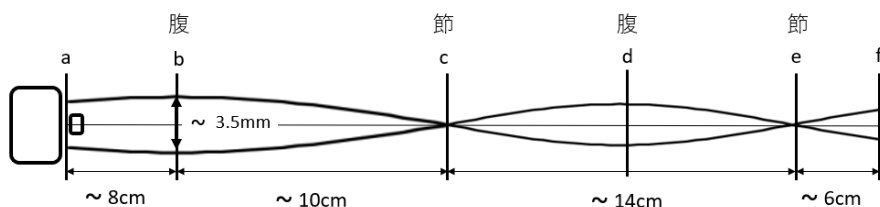


図 30: 振動する棒の節と腹の概念図。ab 間は約 8cm、bc 間は約 10cm、ce 間は約 14cm、ef 間は約 6cm。腹での振幅の幅は約 3.5mm である。

図 31 のように棒に平行に定規を設置し、運動の様子をデジタルカメラ（CASIO EX-ZR200）で 1000fps の動画として撮影した。そして、この動画を動画編集ソフト（DaVinci Resolve）で取り込み解析を行った。



図 31: 棒に平行に定規を設置し、上方からデジタルカメラで動画を撮影した。

図 32(a) のように基準線 A に接しているフレーム番号と、図 32(b) のように基準線 A から 1cm の距離にある基準線 B に接しているフレーム番号を読み取り、その差より移動速度を求めた。さ

らに、回転数 n も動画から求めることができる。この回転数と $\bar{l}_4$ の測定値を使って移動速度の理論値を求めた。



図 32: 棒に平行に定規を設置し、基準線 A、B に接したストローの静止画。(a) 左方向に移動するストローで、基準線 A に接したフレーム。(b) 左方向に移動するストローで、基準線 B に接したフレーム。

実験に使用した 3 本のストローに関して、 $\bar{l}_4$ の値、(3.6) を使った速度の理論値 v_{th} 、実験値 v_{exp} および誤差のグラフをそれぞれ図 33、34、35 に示した。

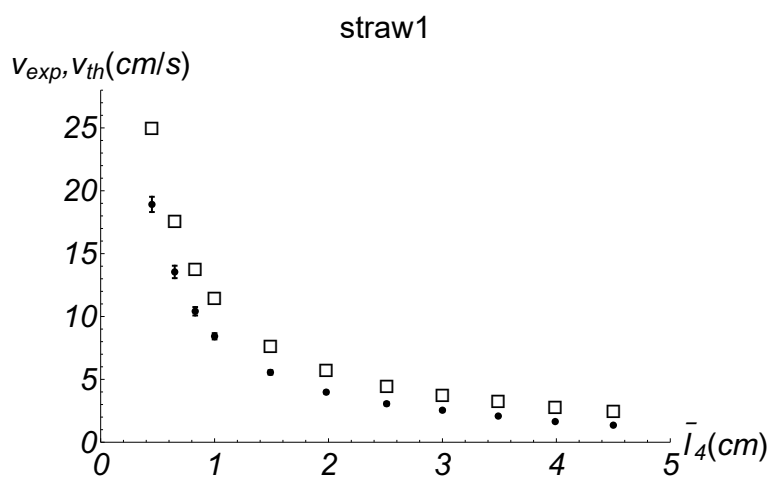


図 33: ストロー 1、 $\bar{l}_4$ (cm) と速度の理論値 v_{th} (cm/s)、実験値 v_{exp} (cm/s) と誤差の関係。□は理論値、●は値を示している。誤差をエラーバーとして書いているが、長さ $\bar{l}_4$ が長い場合は印の大きさに含まれている。

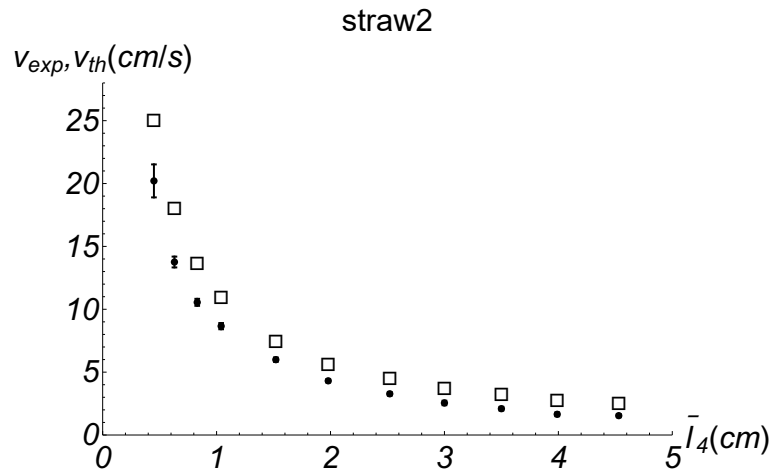


図 34: ストロー 2。記号等はストロー 1 と同じ

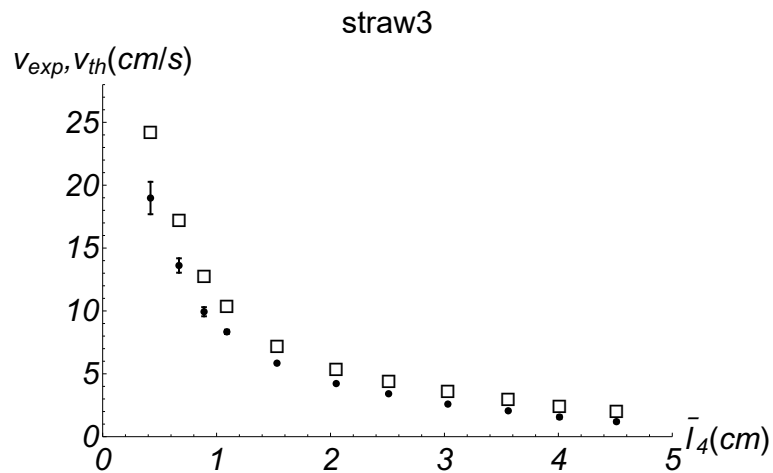


図 35: ストロー 3。記号等はストロー 1 と同じ

3 本とも理論値は測定値より大きく、増え方は同様な振る舞いをしていることがわかる。測定値より理論値のほうが大きい理由としては、ストローの中央部分と棒が接している部分は滑らないと仮定したが、実際には滑りが生じているからだと考えられる。節 2.2 の後半で、紙コップ 2 個を手で動かした場合を示したが、その際紙コップの中央部分にゴムを巻かない場合、中央部分と棒に滑りが生じうまく進まなかった。ストローの場合も同様なことが起こっていると推測する。一方、3 本ともストローの長さ $\bar{l}_4$ の変化による理論値の増え方と測定値の増え方が同様な傾向を示している。そこで、それぞれのストローに関して、相対誤差 $\delta = 1 - v_{exp}/v_{th}$ と長さ $\bar{l}_4$ のグラフを図 36 に示した。

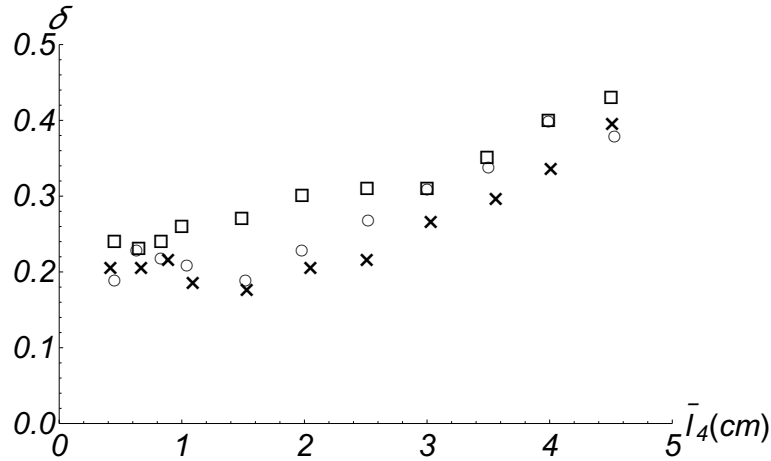


図 36: $\bar{l}_4(\text{cm})$ と相対誤差 δ の関係。□はストロー 1、○はストロー 2、×はストロー 3 に関する実験値である。

滑る場合、 v_{exp} が v_{th} に比べてどのように小さくなるかを求めるために、棒上の接点 P （ストロー上の接点ではないことに注意）の軌跡を考えよう。もしつるつるの場合、図 17 において、 P' は一周まわって P にもどり、 $z_0 = 0$ である。つるつるではない場合、 P の軌跡は滑ったところで $\tan \psi$ の傾きより小さい直線または曲線となり、例えば図 37 のようになると考えられる。すると、移動距離 z'_0 が z_0 より小さく $z'_0 = \rho z_0$ ($\rho < 1$) となるので、実験速度 v_{exp} は

$$v_{exp} = nz'_0 = \rho n z_0 = \rho v_{th} \quad (4.1)$$

となって、相対誤差は $\delta = 1 - \rho$ となる。 ρ が長さ $\bar{l}_4$ の関数ではなく一定の場合 δ も一定値になる。

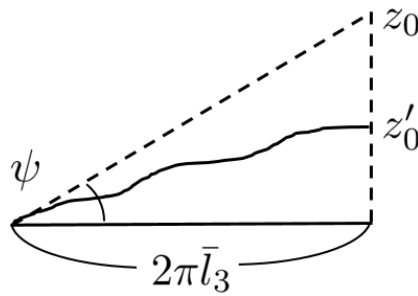


図 37: ところどころ滑った場合の棒上の接点 P の軌跡

実験値をみると、3 本のストローとも長さ $\bar{l}_4$ が 4.5cm から 1.5cm まで小さくなるにつれ相対誤差は小さくなっていて、理論値との一致がよくなっていく。一方で 1.0cm 以下ではストロー 1、2、3 に関してそれぞれ、0.24、0.21、0.21 という値（相対誤差の平均）のまわりを揺らいでいて、約 80 % の一致を示している。すべての長さに関して平均をとると、ストロー 1、2、3 に関してそれぞれ、0.30、0.27、0.25 となり、さらにこれらの平均が 0.27 より、約 73 % の一致を示している。

長さが 1.5cm 以上で大きくなるにつれ相対誤差が大きく理論値との一致が悪くなっている原因としては、節からの影響とストローの曲がり変形の 2 つが考えられる。長さが長くなるにつれ、

ストローの右端が図 30 中の c の節に近くなりその影響を受けていると考えられる。また、2 本のストローを中央部分で接着剤で接合しているが、両端の部分に棒からの力が加わると、この接着剤が伸びて曲がる可能性がある。図 38 はストローが中央で曲がり 2 本にわかれ、新たに内側の円周 C'_1 ができ、棒と P'_1 で接している状況を示している。円周 C_1 に垂直な軸と、棒の中心線とのなす角が ψ であった。図 39 は曲がり角度が最大 α_{max} で $\psi = 0$ の状況を示している。曲がりの角度が最大の時に $\psi = 0$ となり、曲がりの角度が 0 の時は (3.4) で求められた ψ_{th} となるので、曲がりの角度が少しでもあるとそれに対応した角度 ψ は ψ_{th} より小さい角度となる。それゆえ、ストローが曲がると理論値より小さい速度で移動することになる。図 39(c) からわかるように、長いほうが $\psi = 0$ になるまでの曲がり角度は小さくてすむので、同じ曲がり角度だと長いほうが ψ は小さい。したがって、長いほうが速度は遅くなると考えられる。

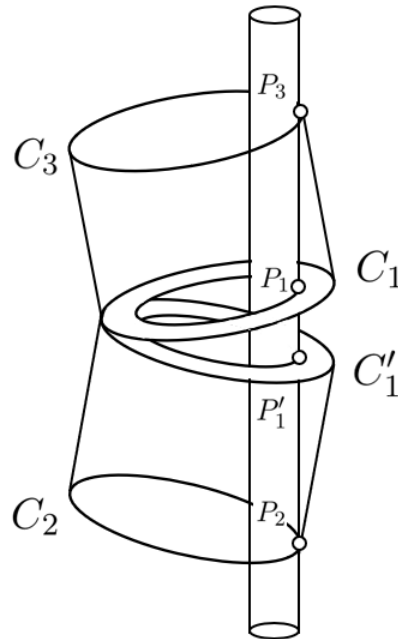


図 38: ストローが中央で曲がり 2 本にわかれ、新たに内側の円周 C'_1 ができ、棒と P'_1 で接している状況

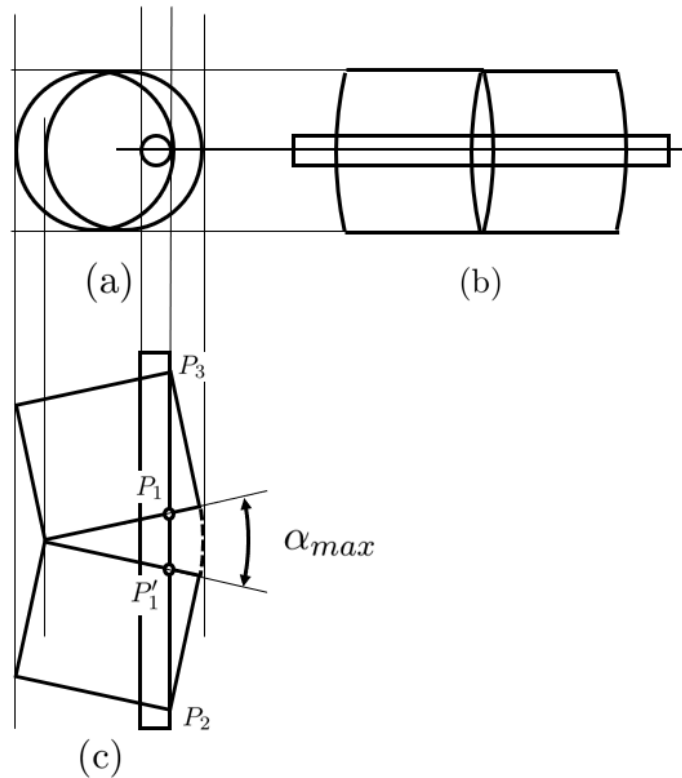


図 39: 曲がり角度が最大 α_{max} で $\psi = 0$ の状況

理論値と実験値の一致をよくするためには、すでに述べたように腹と節ができないような実験装置を構築する必要がある。また、資料もストローを2つ結合して作成するのではなく、棒との間で滑りにくい材質を用い、一体となって変形をせず、長さが正確に測れるものを作成する必要がある。これらの実験装置と資料で実験をすることは今後の課題である。

課題は残っているが、理論値は実験値に約73%で一致していて、滑ること、腹節の存在と曲がる変形からの影響がなければ理論値と実験値の一致はさらによくなると考えられる。したがって、実験値はストローの運動に関する考察および理論的に導き出した式(3.6)の正当性を支持していると考えられる。

5 まとめ

モーターによって振動させた棒に、蛇腹付きのストローを通すと、上下運動が生じる。一方蛇腹がないストローの場合、上下運動は見られない。そこで、この運動の原因は、ストローの中心の半径が両端の半径より小さい形状をしているためであろうと考え、そのような形状のストローを作成し動かしてみた。すると同様な動きが確認できたので、中心の半径が両端の半径より小さいストローに関してどうして上下運動が生じるか、その機構を考察した。

棒とストローは両端と中心の3点で接触して、中心の接触点では滑らず両端の接触点では滑っていると仮定すると、棒とストローのなす角 ψ は一定の値になる。そのためストローが棒に対し

て回転すると、一方向に運動するようになる。また、先端ではストローが上昇するにつれ、棒がストローの内部に入り込む。この状況でも3点で接触しているため、棒とストローのなす角 ψ が小さくなっていき0となる。角度 ψ と上昇速度が比例しているため ψ が0になった時点で上昇が止まり、その後 ψ の正負が反転することで下降が始まり、ストローは戻ってくることになる。下部の反射板にストローが接触することで、 ψ の正負が逆転し再び上昇に転じる。その後同じ動きを繰り返す。以上がストローの上下運動の機構である。

また、3本のストローに関して長さを変えながら、移動速度を測定する実験をおこなった。実験の結果、理論から求めた移動速度のほうが測定値より大きかった。その理由として、ストローの中央部分と棒との接触点で滑らないと仮定したが、実際には、滑りが生じているからだと考えられる。一方ストローの長さ $\bar{l}_4$ の変化による理論値の増え方と、測定値の増え方が同じように見えるので、測定値と理論値との一致を相対誤差により求めた。1.0cm以下では平均約80%の一致となり、すべての長さに関しては平均約73%の一致となった。ストローと棒の間の滑り、棒の振動の腹と節や中央部分での変形の影響がなければ、一致はさらによくなると考えられる。これらの影響を考慮すると、実験値は運動の機構の考察や理論から求めた移動速度の妥当性を裏付けていると言える。

棒の振動による腹と節からの影響を無くすには、腹と節ができないような実験装置を構築する必要がある。また、資料はストローを2つ結合して作成するのではなく、棒との間で滑りにくい材質を使用し一体となって変形をしないものを作成する必要がある。これらの実験装置と資料で実験値を求め、理論値と比較検討することが今後の課題である。

謝辞

筆者は、佐藤慶次郎の作品が新潟県立自然科学館にあることを教えてくれた中野博章氏（新潟大学）およびバンドー神戸青少年科学館にあることを教えてくれた青木健一氏に感謝します。また、岐阜ススキ群'99の発泡スチロールの内部構造を教えていただいた岐阜県美術館のスタッフの方に感謝します。最後に、佐藤慶次郎に関する資料を送っていただいた石川喜一氏（佐藤慶次郎の作品の著作権継承者）に感謝します。

参考文献

- [1] 佐藤慶次郎：作曲家でありキネティックアート作家（1927–2009）. 彼の作品は岐阜県美術館に所蔵されている。YouTubeでも見られる。<https://www.youtube.com/watch?v=g2005Vp6qDg>
- [2] 「岐阜ススキ群'99」
<https://www.ntticc.or.jp/ja/archive/works/gifu-susuki-clump-99-susuki-pampas-grass/>
<https://satoh-keijiro.jpn.org/gifu-susuki99/>
- [3] 「振動している棒を通る発泡スチロール球の運動」<https://youtu.be/P52kCnPnn5w>
- [4] H.Takano: 「開口部の半径が違うストローの運動」準備中

- [5] 「蛇腹ストローの上下運動：棒の先端は上」 <https://youtu.be/kZ4-EjJ-G9I>
- [6] 「蛇腹ストローの水平方向の運動」 <https://youtube.com/shorts/T2MREf3Re6M?feature=share>
- [7] 「蛇腹ストローの上下運動：棒の先端は下」 <https://youtube.com/shorts/LdhBp0E-hNI?feature=share>
- [8] 「中心部分の半径が小さいストローの運動」 <https://youtu.be/FN1HaecUY7I>
- [9] 「開口部の半径が違うストローの運動 1」 <https://youtu.be/V3JZPwuFig8>
- [10] 「開口部の半径が違うストローの運動 2」 <https://youtu.be/Uh5BtW14dXg>
- [11] 「紙コップ 1 個の運動」 <https://youtu.be/RjnxDmwZedY>
- [12] 「紙コップ 2 個の運動」 <https://youtu.be/StdNC-o0B7E>
- [13] Analyzing the Motion of a Washer on a Rod(2023), Regular and Chaotic Dynamics Vol.28(No.2) 227-250 <https://www.juen.ac.jp/lab/takano/chatterring/WasheronRod.pdf>
- [14] JCRA/ジャパン チャッターリング アソシエーション <http://jaringa.web.fc2.com/index.html>