上越数学教育研究，第28号，上越教育大学数学教室，2013年，pp.1-12.

比の学習における小学生による説明と式の利用

布川　和彦
学校教育学系

１．はじめに

乗法構造は重要な学習内容であるにも関わらず、学習者の理解が十分ではないという状況は近年においてもあまり改善されてきていないように見受けられる (例えば Brown *et al*. 2010; Ledesma, 2011)。こうした傾向は、わが国においても同様であり、例えば、平成 24 年実施の全国学力・学習状況調査数学Ｂ問題１(1)は現実場面で比を利用する問題であるが、正答率は 63.7％である。誤答で多かったのは比を利用せず、与えられた数値の概数から推定したと思われる解答であり、複雑な場面で比を利用できない様子がうかがえる。さらに数学Ａ問題３(1)の 6：8＝x：12 が成り立つときの x を求める問題でも、正答率は 64.3％に止まっている。特に 13.1％あった x＝16 とする誤答は x が 12 より大きいことに違和感を覚えないことを意味し、比が何を表現するのかが理解されていない可能性が示唆される。また x＝10 という誤答も報告されており、中学校 3 年生の時点で加法方略が残っていることもうかがえる。ただし、平成 21 年度実施の調査では 15 : 9＝5 : □の正答率は 89.1%であり、簡単な整数倍の関係が見えれば答えることができる。6:8＝x:12 でも、6:8 を 3:4 に直せれば、正答できた可能性が高い。逆に言えば、そうした比に関わる操作を柔軟に行えないという問題点も推察される。

Ruiz & Lupiáñez (2009)は比に関わる多様な問題に対する 6 年生の解答を分析し、表の形で提示すると正答率は高いが、相似や連続量の問題では、比の対応する要素の組み合わせを誤り、正答率が下がるとしている。また、2 倍や半分には慣れていても、3 倍には適切に反応できないという傾向も報告している。

子どもたちの比などの問題解決を促す手立てとして、乗法構造に関わるスキーマを指導することが試みられてきている。Jitendra ら (2011)は、７年生にこうしたスキーマを指導した結果、比や割合、単位量あたりに関わる問題の正答率が伸びたことを示している。ただし、１ヶ月後の把持テストや確率などの関連領域への転移については有意な差が見られなかったとしている。Dole (2000)は垂直方向の数直線を指導しているが、その数直線の左右に配置した「？」を含む４つの数をそのまま２組の分数と見ることで方程式を立てるという使い方をしている。これらは、乗法構造に関わる問題に現れる数を適切に配置するための図式を提供し、それにより問題の解決を促す試みと言えよう。

これとは異なり、個々の学習者が割合や比を理解していく学習過程に焦点を当てた研究も見られる。Nunokawa (in press)は、５年生が二重数直線を用いながら割合の学習をする過程を分析し、二重数直線が問題場面に含まれる多様な乗法的関係を探求する道具として使われる可能性を指摘している。また日野 (1997)は比および比例の単元を通して一人の６年生の学習過程を詳細に分析しているが、

その中で比の表現 $a:b$ に対する意味づけが、最後に出てきた答えを書くために用いる表面的なものから、分数、特に約分が参照物として関連づけられ、一定の意味を獲得したものへと移行する様子を明らかにしている。

ところで、授業中の説明は自分の考えを他者に説得する試みであると同時に、自己への説得でもあるとすれば、学習者のその時点での推論の質を反映するものと考えることができよう。そこで本稿では、小学校６年生の比の授業をとりあげ、上述の先行研究のように１名の児童を追う代わりに、授業の中で児童たちが説明を行う場面に焦点を当て、その説明のもつ特徴から彼らの乗法構造に関わる推論の特徴を抽出することを試みる。

２．授業の概要

授業は全６回で第５時が 45 分､それ以外は 60 分であった。この学校が使用している教科書では５年生に 8 ページの比例の単元が設定されており、それは学習済みであった。また６年生の速さの学習は終えていたが、拡大図と縮図、比例と反比例は未習であった。

2.1 第１時

乳酸菌飲料を原液が 55mL に対して水を 220mL で作るとき､原液が 150mL のときの水の量を求める課題に取り組んだ。考え方を出してもらったところ次のような考えが発表された：220÷55＝4, 150×4＝600。この考え方でなぜ 220÷55 をしたのかを教師が尋ねると、原液が 1mL のときに使う水の量を求めるという考え、水が原液の何倍かを求めているという考えが出された。教師がわり算の意味を確認し、分数、かけ算の逆の他に何があったか尋ねると、１人分、１あたり、平均、単位量あたりといった発言があった。教師が、わり算の１あたりを求める意味を 1mL に対して使う水の量の考えに関連付け、一方を１と見たときの他方の大きさを求める意味を水が原液の何倍かの考えに関連付けた。

教師は比を導入し、子どもたちの意見を採り入れながら「何かに対して何かの量を求めるときの割合」と説明し、「１：４」と表したものを比というと説明した。

後半ではめんつゆ 120mL に対し水 1000mL で混ぜるときに､水 400mL とするとめんつゆは何 mL 必要かを求めた｡全体での確認では、1000÷400＝2.5, 120÷2.5=48 という考え方がまず出された。1000÷400 の意味を考え、それをもとに？×2.5＝120 より 120÷2.5＝48 が言えることを確認した。

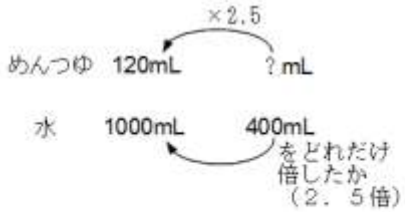

図１

2.2 第２時

最初にめんつゆの他の考えの検討を行った。児童 M1 が 120÷1000=0.12 を板書すると、教師がその意味をクラスに問うた。全体の確認で口々に発言している中では、めんつゆが水の何倍かと水がめんつゆの何倍かの両方が言われていた。児童 R が水を１としていると指摘し、めんつゆが水の何倍かを考えていることが確認された。その上で、0.12×400=48 でめんつゆの量が求まることを確認した。

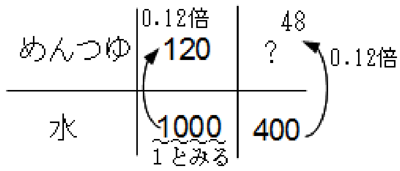

図２

教師は「？さて、こうやっていろいろな方法がでてくるこの書き方､もしかしたら･･･｡」と板書し、まだ何かあるのではないかと問いかけた。子どもたちは他のやり方がないかを考えた｡ある児童が 400÷1000=0.4 を板書し、それをもとにクラスで考えた。式の意味を問われた児童 S1 が「水をもとにしためんつゆの量」と答えた。教師が表に矢印をかかせる

と、正しく 1000 から 400 に向かう矢印を書いた。教師がそこに 0.4 倍と書き加え、それをもとにめんつゆの量が 120×0.4=48 で求まることを確認した。R が「たまたまなった」としながら、表を斜めにかけ、400×120=48000、48000÷1000=48 として求まることを発表した。この考えについて、K1 は５年生の比例の学習で表を斜めにかけると同じになったから、これで求まると述べた [1)]。乳酸菌飲料の場合でも成り立つことを確かめた後、教師がなぜ斜めにかけると同じ数になるのかと問い、その理由について３名の児童が発表し、それらを受けて教師がまとめて授業を終えた。

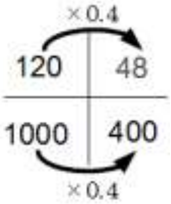

図３

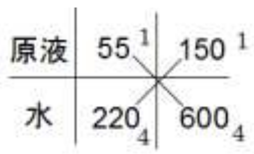

図４

2.3 第３時

めんつゆの問題で、表を使わないやり方として、児童 M2 が 120:1000=x:400, 120×400=48000, 48000÷1000=48 を板書した。教師が説明を求めると、外側をかけた数と内側をかけた数が同じになることだけを説明した。教師がなぜこれが等しくなるのかを尋ねると、斜めにかけたものが等しいことと同じであるとの意見が出て、教師がそれを説明した。その後、等しい比を求める問題をいくつか解いた。1:4=20:x を解くが、教師は外項と内項の積が等しいことが使えることに言及したため、児童はその考え方で解いていた。その後、1:4=x:160、2:3=x:9、4:5=100:x、12:x=3:5、x:20=5:4 の x を求める問題を解いた。

めんつゆの問題に関わる児童からの考えとして教師は次のことを紹介した：120 や 1000 だと大きすぎるので、10 で割って 12 と 100 にする。児童から 40 で割って 3、25 にして計算すれば簡単になるとの意見も出た。教師はこれを比で表し、120:1000 は 12:100, 3:25 と等しくなることを確認した。教師はさらに 120÷10:1000÷10, 12÷4:100÷4 という式もそれぞれの比の右横に書き加えた。最後に教科書の練習(3:1 と等しい比を選ぶ、6:9 と同じ比を３つ書く)を考えた。後者では 2:3、4:6、30:45、12:18、24:36、18:27、12:18、60:90、600:900、6000:9000、600000:900000 が出された。割ってもかけても変わらないことが分数に似ている点を気づかせて、授業を終えた。

2.4 第４時

教科書にある米と水の割合の問題から始まった。米 300mL、水 360mL を 300:360 と表したときに、360 をもとにする量とし、300÷360 で「水をもとにして米は水の何倍か」を求められることを、児童とのやりとりを通して確認した。その後、300:360 が 5:6 に直せるので、何倍かを求める式も 5÷6＝5/6 となり、これを比の値と呼ぶことを説明した。次に第１時で扱った乳酸菌飲料の場面について比の値を考え、55:220 より 55÷220=55/220=1/4、あるいは比を簡単にして 1÷4＝1/4 となることを確認した。教師は、1/4 が水をもとにしたとき原液は水の何倍かを表していることを説明し板書した。原液 150mL と水 600mL のときの比の値も考え、150÷600＝1/4 となることを確認した。また２つは同じ濃さなので比の値も同じだから 1/4 とする考えも紹介された。この考えを受けて、比の値が等しいとき 55:220＝150:600 と表すことが説明された。また、これまでの学習をもとに比の項を等しい数で割ってよいことを確認し、教師は「55÷55：220÷55」と板書した。

教科書の練習に取り組み、60:72 と 300:360 はともに比の値が 5/6 なので 60:72=300:360 であること、「60:72＝60×5：72×5＝300:360」になっていることを確認した。同様に、300:360 と 100:120 はともに比の値が 5/6 なので 300:360＝100:120 であること、「300÷3：360÷3＝100:120」になっていることを確認した。次の練習では縦横の比が 1:2 の長方形で

縦が 12cm のときの横の長さを考えた。指名された児童は、1:12=2:x と板書した。教師が 1:2=12:x と直させ、児童は 12×2=24 と続けた。最後に児童 M2 がやった外項の積と内項の積が等しいとする考えを紹介し、教師は「1×x=2×12, x=24」と板書した。

2.5 第５時

この時間は、「比の値が等しいこと」と「倍の考えで比を作ること」との関係を考えた。まず、原液 1mL に対して水 4mL で作るときに、水 2L を用意したら原液は何 mL 必要かを教師が全体に問うた。児童らはすぐに 500mL と答えた。この時点で黒板には図６の「1mL に対して 4mL」、「500mL　2000mL」が板書されていた。理由を説明するよう問うと児童 T は、図６の 2000mL の前の「4」と上の「500」、および「×」のような線と矢印を書き、2000 を 4 で割って 500、 1 に 500 をかけて 500mL になると説明した。児童 S2 は比の値が 1/4 であることから 2000×1/4＝500 という式を書いた。しかしその後 S2 が「2000 は 4 のどれだけ倍かを求めた」と述べたことを受け、教師が図６の 4mL を 500 倍したら 2000mL になるから 1mL も 500 倍することかと確認すると、S2 はそうだと答えた。教師は図６の左右の縦方向の矢印とそれらの脇の「500 倍」を書き加えながら、S2 のその考えを全体に説明した。さらに教師は 2000mL の横に 2000÷4＝500 の式を書き、4 をもとにしたときに 2000 は 500 倍であることを確認した。

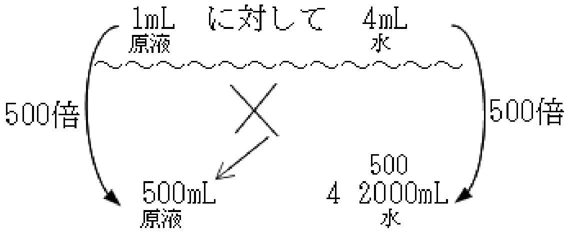

図６

教師は倍の考えで同じ比を作るときに比の値がいつも等しくなるかを考えることを意図して、原液 1mL に対して水 4mL のときと、原液 500mL に対して水 2000mL のときで比の値が等しくなるかを問うた。子どもたちは「同じ」と口々に言っているが、教師がどうして同じとわかるか問うと、「同じでないとおかしい」「味一緒だから」「当たり前だ」「同じじゃない理由は？」「見てわかる」などと発話していた。教師が比の値を計算するよう求めても「計算しなくても同じだ」と答えていた。児童 K2 が「同じ数をかけているから」と答え、図６の縦矢印の横にある２つの「500 倍」を指したのを受け、教師は「$\frac{1}{4}=\frac{1\times500}{4\times500}$」と書き、さらに分子の上に「500mL」、分母の下に「2000mL」と書いた。そして、同じものをかけているから比の値は計算しなくても確かに同じになることを説明した。教師はさらに先ほどの式に続けて「$=\frac{1\times20000}{4\times20000}$」と書き、20000 倍で原液と水を用意しても比の値は同じになることを説明した。教師は、先回は「比の値が等しいとき比が等しいこと」をやったが、今日は「倍の考えで等しい比を作ると比の値が常に等しくなること」をやったとしてまとめ、「比の値が等しい＝同じ倍の関係にある比」と板書し授業を終えた。

2.6 第６時

比を使った問題として、影の長さから木の高さを求める教科書の問題を考えた。まず２つの直角三角形(図７)の辺の比が等しくなることを、教科書の図を測定して確認した。比は三角形のシステム内の比(Lamon, 2007)であり、それぞれの比を簡単にすることで 2:3 となった。ここで教師は斜辺についても成り立つのかを問いかけた。測定した子どもたちに長さを報告してもらいエイ：アイ＝7.2 : 10.9 となった。これが 2:3 になっているのかを尋ねると、K3 がまず 10 倍して 72:109 とした。別の児童が簡単にして、72 : 109＝36 : 54.5

＝18 : 27.25 となった。ここで止まったので、教師が 2:3 を今の値に近づけることを考えてはどうかと提案し、それぞれ 9 倍することで 2:3＝18:27 となることを見いだし、斜辺もほぼ 2:3 であることを確認した。

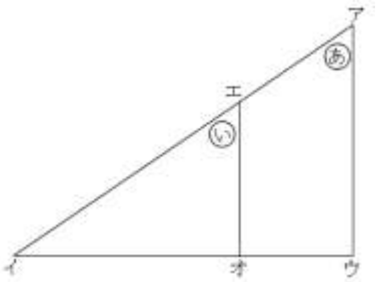

図７

次に、2m の棒の影が 3m のとき影が 12m の木の高さを求める問題に取り組んだ。教科書にある 2:3＝x:12 の式と図を教師が黒板に写した。教科書では比の式に 4 倍の関係を示す矢印がかかれていることから、授業でも 4 倍の関係をもとに 8m と求めた。最後に、影が同じ比でできることが前提にあることを教師が説明した。教科書の練習(かげが 15m のとき)を各自で考えた。前の問題の影響もあり、2m を 5 倍するという考えで求める児童が多く、発表した児童も倍の考えを発表した。

72cm のリボンを 5:4 に分ける問題を考え、教師が教科書の図を板書した(図８)。5 の方の長さをどのように求めるかを尋ねられ指名された児童 K3 は、×5/9 をすると答えた。児童 K4 は 5:9=x:72 と答えた。教師は全体が 72cm とわかっているので 9 を使うことを補足した。これをどう解くか問われた H は、8 倍の関係を用いる求め方を発表した。最後に 500mL を 2:3 に分ける問題を各自で考えた。全体での確認では 2:5＝x:500 から 2 を 100 倍にする考え、500×2/5 とする考え、500÷5＝100，100×2＝200 とする考えが発表された。

図８

３．比の授業における説明

3.1 第 1 時の説明場面

授業開始後約 22 分に、水が原液の何倍かを求めているという考えが出された後で、児童 M2 が補足の説明を行う場面があった。M2 は「同じ数をかければどっちにしろ同じになるということ」「55 に 4 をかければ、220 に、同じ数をかければ」と発言した。教師が「日本語になっていない。何に何をかければどうなるって言わないと」と説明を促し、黒板の前に出た M2 は「水にも原液にも同じ数をかければ、何だっけ」といい、他の児童が「同じになるってこと」と問うと M2 も「同じになるっていうこと」とうなずいた。次に発言した児童 M3 は「÷は答えの方にいくと×になるから、式をまたぐと」「確かめ算してるみたいなこと、220÷55＝4 って出たから 4×55＝220 っていう確かめ算みたいなこと」と述べた。なお、M2 は少し後で原液 150mL のときの水の量を求める場面では自分から発言し、「あれが 55×4 になっているから、同じ」「原液 55mL かける 4 倍だから 150mL もかける 4 すれば、答えが出る」と説明した。

ここでは、220÷55＝4 という式と水が原液の 4 倍であるという考えを関連づけることが問題になっていた。しかし「水にも原液にも同じ数をかければ」という発話に見られるように、M2 の説明には異なるタイプの比例的推論が混入し、説明がわかりにくくなっている。さらに 55×4＝220 であることを繰り返すだけで、この式を 220÷55＝4 と関連付けることがないので、今の問題に対する説明として一層わかりにくくなっている。次の M3 は「式をまたぐ」として式変形的な発話をし、また 55×4 ではなく 4×55 と述べている。しかし、220＝4×55 ではなく 4×55＝220 と表現しており、逆演算で被除数が求まるかの確かめ算として捉えている。

第 1 時の最後にめんつゆの問題における 1000÷400 の意味を全体で確認した際、児童

S2 は 400 をどれだけ倍したかであり、2.5 倍だということがわかると述べ、その後、求めるべきめんつゆの量について次の説明をした(この時点で図 1 上側の矢印は板書されていない) :「？を求めるには、120、[20 秒ほど考えて]だから、1000 割る、え、120、えその、そもそも、? は 120 の、あその 120 を、違う、? は、120 をあ違うなえなんて言えばいい、120、じゃなくてなんて言えば」。ここで他の児童の助けを受け、次のように続けた :「？を 2.5 倍したら 120 になるわけだから、? に 2.5 を、かければ、え、かけ、あ、いいんだかけていいんだ、かけたら答えが出る」。

ここでの S2 の説明は、水がめんつゆの 2.5 倍になっていることはわかっていながら、そのことと問題のめんつゆの量を求めることを関連づけることに困難を示している。その中で、友だちから？に 2.5 をかけると言ってもらうことで、？×2.5＝120 となることは確認できたものの、？の値を求める方法については述べておらず、説明としては曖昧なものに終わっている。つまり、数量間の関係を式で表現すること、およびそこから式変形に相当する考え方をして新たな情報を導く方法を明確化することに難しさがあると考えられる。

なお S2 の説明後と第２時冒頭で教師がこの考えを板書でまとめるが、その際にはやはり逆の演算で？が求められるとして、？×2.5＝120、120÷2.5＝48 となり、？＝120÷2.5 としては表現されなかった。

3.2 第２時の説明場面

授業開始後約 38 分に児童 R が発表した斜めにかけるという考え方に対して、K1 が比例の表のきまりとの関連性を指摘した。教師がなぜ斜めにかけると同じ数になるのかと問いながら、1 つ式が足りなかったとして、表の？を子どもの声に応じて x に変えてから、400×120=48000 と 48000÷1000=48 の間に 1000×x＝48000 と書いた。教師は他の場合でも成り立つか確かめるとして、乳酸菌飲料のときの表を板書し、皆で確認をした。教師がなぜ同じになるのか問うと、K3 は図 4 のように、乳酸菌飲料の表の中に 4 と 1 を 4:1 に対応させて書き、「両方４ : １だから、同じで同じになる」と説明した。S3 は水の 220 と 600 を４で割ると原液の 55 と 150 になると指摘した。M3 は「同じ数になっちゃう理由は、すでに求めているものが同じだし、4 で割ると、[表中の 4 つの数を指しながら]全てここの出る数が、同じ数になるから、同じ数と同じ数でかければ同じ答えが出る」「これ[600] 4 で割ると 150 だから、これも 4 で割って 150 になっといて、こっち[220]は 4 で割ると 55 だから、55 と 55 と 150 と 150 だから、斜めでかければ同じ数字が出てるわけで、同じ風にかけているから、斜めと斜めでかければ同じ数字をかけているわけだから同じ答えになる」と説明した。この後、K3 は簡単な場合として 2, 8, 1, 4 の表を提案し、乳酸菌飲料の表と同じだと主張した。

K3 の説明では２組の原液と水(55 と 220, 150 と 600)がいずれも 4:1 であることが、斜めにかけた２つの積が等しいことに関わっていることが示唆され、S3 の説明では 220 や 150 を４で割った状態を考える必要のあることが示唆されている。さらに M3 は 55 や 150 が同じようにかけられていることが、斜めにかけた積が等しくなる理由であるとも述べている。つまり、55、150 という同じ因数が乗ぜられていること、またそこに同じ比であることが関わっていることに言及しており、説明に必要なアイデアは児童から出されている。しかし、これらを統合して、斜めにかけた積と明確に結びつけるには至っておらず、そのために簡明な説明にはなっていない。

M3 の説明の後半で、教師は表中の 600 を 150×4、220 を 55×4 と書き直したものを付加し、M3 の説明後には斜めにかけるといずれも 55×150×4 になり、積が等しくなること

を説明した。このように、児童が持っていたアイデアを明確に表現するためには、600 や 220 を 150×4、55×4 と式で表現することが有効であった。逆にそうした表現を用いることができなかったために、児童たちの説明は明確さを欠いたものとなった。なお教師の説明後に、同じことを説明しようとしたと K3 が言っていたことから、K3 が説明したかったことも同様の内容だったと考えられる。

3.3 第 4 時の説明場面 2)

縦横が 1:2 の長方形の問題に関わり、教師は児童 R がすぐに 24 と答えたことを紹介し、どうやって求めたのかを尋ねた。R は 12 を 2 倍したと答えたが、どうして 2 倍したのかについて問われると、わからないと答えた。児童 M3 は R の考えがだいたいわかると言うが理由は説明しなかった。次の児童 S4 は「縦の長さと横の長さの比が 1:2 になるようにするから、縦の長さが 12 になったら、12 倍したことになるから、横の長さも 12、12 に 2 をかける」と説明した。教師は 1:2=12:x の式を指しながら、1:2 では 1 が 2 倍になっているので、12 も 2 倍になると説明した。また図 9 のような表になおし、今の考えがこれまで表でやっていたことと同じであると補足した。

たて	1	12
よこ	2	x

図 9

R は縦横が 1:2 より横は縦の 2 倍の長さであることを感覚的に捉えて 12 を 2 倍し、M3 も同様にして了解していたものと考えられる。そのため、それ以上の理由を説明しにくかった。S4 の方は 1:2＝12:x という比の表現から出発し、教科書にあるような第 1 項が 12 倍なので、第 2 項も 12 倍するという考え方に基づいた説明を行っている。そのため 12 を 2 倍にしたことの説明ではなく、2 を 12 倍することの説明になっており、結果として R の考えの説明にはなっていない。教師は図 9 の表を提示することで比例的推論を明確にし、縦の 1 を 2 倍したものが横の 2 であるので、12 も 2 倍をすると横の長さが求められることを確認した。これを比の表現の上で直接考えるならば、1:2 の 2 を 1×2 とみなすことになる。第 4 時では教師が比の項を式の形で書くことを行っていたので、今の場合も、児童が 1:2 を 1:1×2 と捉えることができれば、比の表現のままで R の考えを説明しやすかったことが推測される。なお比の値を使って考えた場合には、1/2＝12/x を考えることになり、この形から式変形することが求められる 3)。

3.4 第 5 時における説明場面

授業開始後 15 分過ぎに、水 2000mL に対する原液の量がなぜ 500mL になるかを説明するよう指名された児童 T は、図 6 のように黒板の 2000mL の前に 4、上に 500 と書き、上の行と下の行の間に×、その×から 500mL に向かう矢印を書いた。説明するよう言われると「2000 を 4 で割って 500 になるでしょ、それで[1mL を指してから]まあ[2000mL の上の 500 を指して]500 をかけて、[500mL を指して]500 かな」と述べた。他の児童からなぜかけたのかという声があがった。教師が(2000mL の上に書いた)500 が何かを尋ねると、T は「これでいくんだよ」と答えた。

S2 の説明の後で、T が黒板に書いた「×」が問題になった。どうしてクロスにしてかけたのかと発話した児童の声を受けて、教師は T にどうしてクロスにしてかけたのかを尋ねた。T は「例えば、そこで出るでしょ、例えば、原液が、めんどくさいからいいや間違ってたら恥ずかしいし」として説明を中断した。S2 が T に「1×2000 と 4×？が等しくなるからバッテン[クロス]書いたの？」と尋ねると、T は「S2 ちゃん頭がよすぎてわからない」と頭を抱えてしまった。教師が表の時の斜めにかけるという考えを使ったのかと尋ねると、T は「違うと思う」と答えた。T はその場で

は説明をしなかったが、斜め後ろの友達に「あとで聞いてくれる？」と言っており、自分なりの考えを持っていた様子も見受けられた。さらに、T は授業後に黒板で教師に、2000mL が 4mL の 500 倍であることがわかれば、他方は 1mL なのでかける必要ないが、1 以外のときならかけるからかけた、といった説明をしていた。

こうした T の発言を総合すると、T の説明は教師が図 6 を用いて行った説明と同じものであるが、4 や 500 の意味が明らかにされていない。また 4 や 500 を 2000 の左と上に書いたのは、説明時の指し方から見て、筆算で 2000÷4＝500 を計算したものを表している。ここで T が見出した 2000 を 4 で割って 500 になるという関係を、2000＝4×500 と捉え、また「[1 に]500 をかけて 500」という考えを 500＝1×500 と表現することができれば、500 倍の関係と比が 1:4 に保たれることの関連が見やすくなったと考えられる。なお「1 以外のときならかけるからかけた」と述べており、一般性のある表現に対する意識は見られた。

T の次に指名された S2 は、「[板書の 1 行目を指して]これが 1:4 になって、[4mL と 2000mL を順に指して]これを何倍したかって求めれば、[1mL と 500mL を順に指して]こっちにかけたら、比の値が同じわけだから、でるから」として笑顔になった。その後、黒板に「１：４＝さいしょーけ」とまで書き、「1:4 が最小限の比だから、[図 6 上行を指して]この比の値が 4 分の 1 だから、[下行を指して]この比の値も 4 分の 1 にならなきゃいけない、というわけ。」この説明で教師やクラスが納得した様子を見せないと、「A/B」と書き、それを消してから「$\frac{原液}{水}=\frac{1}{4}=\frac{?}{2000}=\frac{1}{4}\div 2000$」と書いた。1/4÷2000 の分母の 4 と 2000 を約分したような斜線を書き、4 を 1 に、2000 を 500 にして、最後に「＝500」と加えた。教師が「$\frac{原液}{水}$」とは何かと問うと、その前に「１：４＝」と加えた（教師から等号を矢印に変えるよう言われて等号の下に矢印も加えた）。「1:4 の比の値が 4 分の 1 なわけだから」「[4mL, 2000mL の順に指し]これを倍にしたやつだから、[?/2000 を指し]これをそのまま、比の値が同じにならなくちゃいけないから、2000 分の？で、[1/4 を指して]これが最小限の比だから、これを[?/2000 を指し]こいつにかけたら、あ、こいつに割ったら、あ違う」「2000 分の？だから、[1/4÷2000 の 1/4 を指し]最小限の比を 2000 で割ったら出てくる 2000 分の１で割ったら出てくる」「ああ違う」と言いながら 1/4÷2000＝500 を消し、2000×1/4＝500 と書き直した。2000 の上には約分した 500、4 の下には約分した 1 が書かれていた。書き直した部分を指し「2000 は 4 のどれだけ倍かっていうのを求めて、[×1/4 の 1/4 を指し]これは比の値、だから、原液の比だから、それを[約分した 500 を指し]、なんか倍にした数を、どれだけ倍にしたか求めたら、[1/4 を指し]こっちにかけたら、比の値が等しくなるから、500」。その後、前述のように、S2 は「2000 は 4 のどれだけ倍かを求めた」と述べ、教師もそれを受けて 4mL を 500 倍したら 2000mL になるから 1mL も 500 倍するとしてまとめた。S2 もそれを自分も言ったはずだと主張した。

ここでの S2 の説明では、第一に、２つのアイデアが混在している。一方では、教師がまとめたように、T と同様、4mL を 500 倍すると 2000mL になるので、1mL も 500 倍するというアイデアがある。しかし同時に、比の値に着目し、1mL と 4mL の比の値が、？mL と 2000mL の比の値に等しくなるというアイデアも含まれている。説明全体で比の値と 500 倍の話が整理されないままに混じっていることで、説明がわかりにくくなっている。

第二に、1/4÷2000＝500 や 2000×1/4＝500 の部分は、計算の根拠が明確でなく、あらか

じめわかっている 500mL という数値に合わせているように見える。発言の中に「2000 分の１で割ったら出てくる」という正しい操作が現れたり、また最後には 2000×1/4 という正しい操作に修正された。しかし、前者については板書されていたのは 2000 で割ることであり、後者についての説明では 500 倍の話が多く、原液が水の 1/4 倍であることには触れていない。つまり、正しい操作についてもその理由が明確には説明されなかった。

S2 が意識できていた比の値が等しいというアイデアが生きるには、２つの可能性があったと考えられる。一つは 1/4＝x/2000 という S2 が立てた式から、x を求めるための式変形ができることである。これができれば、式変形を根拠に 2000×1/4 を正当化できたと考えられる。もう一つは、S2 がこだわっていた 500 倍の考えと組み合わせ、1/4＝x/(4×500) と表現することで、x が 1×500 であると見通しやすくすることである。つまりこうした式の利用が、S2 の説明を整理して、わかりやすくする可能性を持っていたと言えよう

第５時の最後に、倍の考えで同じ比を作ることと比の値が等しいことの関係を考える場面では、教師が比の値を計算するよう求めても子どもたちは「計算しなくても同じだ」と答えていた。児童 R は「同じ数をかけている」と発言した。児童 S1 は同じになる理由を尋ねられた際に、計算した方がはやいとして、比の値を求めることを述べた。児童 K1 は「両方同じ数をかけているから」と答え、教師が黒板で説明するよう求めると、図６の左側と右側の縦矢印の横にある 500 倍を指し、「ここ[1mL]とここ[4mL]に 500、500、[かけているので]同じ」と説明した。

児童らは比の２つの項に同じ数をかけたから比の値が同じになることには気づいているものの、それらを明確に関連づけることができていない。これを結びつけるには、教師がこの後で行ったように、500 や 2000 を 1×500, 4×500 と表現することが有効である。その上で S1 がしたように比の値を計算すれば、２つの項に同じ数をかけたことが約分を可能とし、結果として比の値を変えないことを明確にすることにつながる。

3.6 第 6 時の説明場面

授業開始後約 34 分に 72cm のリボンを 5:4 になるように分ける問題を考えた際に、5 の方の長さをどのように求めるかを尋ねられ指名された児童 K3 は、「×5/9」「72×5/9」と述べた。教師が 5/9 は何か尋ねると、K3 は「全体分の５」「姉の分」「姉の割合」と答えた。

5/9 が全体をもとにしたときの姉の長さの割合であることは明確にされているが、比の考え方との関連には触れられていない。第４時で学習した比の値が等しいときに比が等しいという考えを生かし、また第５時で児童 S2 が用いた表現を用いるならば、5:9＝x:72 から 5/9＝x/72 と考えることができる。ここで式変形が可能であるとすれば、x＝72×5/9 あるいは x＝5/9×72 と等しいことがわかり、K3 の考え方を比の学習の文脈で捉えることができる。あるいは比の値を求めるわり算を用いて x÷72＝5/9 とすれば、逆演算として x＝5/9×72 を理解しやすくなる。

なお、9=5+4 と表現することは、9 が全体を表すこと、また所与の条件と全体との関係を式として表現することになると考えられる。

４．比に関する説明と式

前節で考察してきた説明場面にはつぎのような共通した特徴が見られた：比に関わる考え方を説明しようとした際に、その中に含まれる数量関係を表現するために式が十分に利用できず、結果として数量関係の表現が曖昧なものとなり、説明がわかりにくくなってしまった。児童たちの説明を見ると、彼らは適切なアイデアを持っており、問題を解くこともできている。さらに、第２時の児童 K1 の

考え方や第５時の児童 S2 の説明では、中学校の比例式の学習内容に相当する考え方も現れており、むしろ豊かなアイデアを含むものも見られる。しかし、その説明は曖昧であったり、あるいはアイデアが十分に整理されずに提示されたりしていた。そして、それらの曖昧さや未整理の状態は、数をその構造を示す数式で表すことや、ある式が別の式と同値であることを利用するならば、解消可能であった。実際、いくつかの場面では、児童の説明の後に教師が説明をまとめ直す際、こうした数式を補ったり、「？」「x」を補い式の間の関係が見えやすくする修正を行ったりしていた。

第１時では 220÷55＝4 と 220=4×55 が同値な式であることが意識されないことで、説明が曖昧になったり、自分の捉えた数量間の関係を？×2.5＝120 と表現することができないために、その関係を元にわからない量を求める方法を明確化することができなかったりした。第２時では、表を斜めにかけた積が等しい理由について､それらが 150 や 55 という因数の積に関わること、またそれらがいずれも 4 で割ることで出てくる数であることは捉えられていたが、それを 150×4、55×4、さらに積を 55×150×4 等と表現できないことにより、説明として明確さを欠いていた。

第４時では、1:2 を 1: (1×2)と捉えると説明がしやすくなったであろう場面で、そうした見方がされないために、2 倍にした理由を説明ができなかったり､あるいは 12 を 2 倍にした理由ではなく 2 を 12 倍にした理由を説明するということが起こっていた。

第５時でも 2000=4×500､500＝1×500 とは見ないために説明が曖昧になったり、説明中に２つのアイデアが混在したりした。また式変形ができないため､妥当な式で表現しても、わからない量を求める方法を明確化することができなかった。第６時では、式変形ができないために、割合による考え方と比による考え方の関連を吟味することが制限されていた。

このように、説明に必要なアイデアは持っているようでありながら、それを明確に表現する手段を持たないために、わかりやすい説明を行うことが難しくなっていたと考えられる。児童の説明がわかりにくく、他の児童がわかったという感じが持てていないような場合に、教師は、55×4 といった式を補うこともあったが、表形式で表した上で比例的推論を用いて説明を明確化したり、その妥当性を確認する場合もあった。

表形式で表し、例えば原液が 500 倍なので水も 500 倍にすると考えることは、原液：水の比で第１項を×500 にしたので第２項も×500 にするのと同じである。このとき、そうする理由は「濃さ」「味」という場面に現れる性質に依拠しており、直接把握(direct apprehension)される性質から２量についての判断が生まれる(Singer *et al.*, 1997, p. 131)状態と言える。教科書では「比の値が等しいとき、２つの比は等しい」としているが、仮にこれを定義としてみなすならば、第１項を *a* 倍したら第２項も *a* 倍することは、第５時後半で教師がやったように、比の値をもとに正当化されるべきであるし、比の中のわからない項を求めるには、第５時前半で児童 S2 がやったように、比の値に基づく等式から求める方が直接的である。つまり、比に含まれる２量についての判断が性質についての判断「を引き起こす」(Singer *et al.*, 1997)状態へと移行すべきと考えられる [4)]。さらに、教科書や教師も利用していた 60:72＝60×5 : 72×5 といった項を式の形で書く表現は、項に数をかけたり割ったりしても比の値が変わらないことを示唆するものであり、上の移行を促す可能性を持つと考えられる。

ただし、こうした表現が移行につながるためには、数式に関わり少なくとも２つのことが必要となる。第一は、数式に対する構造的捉え方(Sfard, 1991)である。55×4 を答えを求

める操作としてのみ捉えるに留まらず、220という数の構造を表す表現としても捉えられることが必要となる。それにより、220＝55×4 といった右辺に式がくる等式も受け入れやすくなる。第二に、ある程度の式の変形ができることが求められる。220÷55＝4 と 4×55＝220 を確かめ算として関連づけることも大事であるが、前者を変形した結果、220＝4×55 となると関連づけることは、数量関係を？×2.5＝120 と表現できれば、そこから？＝120÷2.5 とすることで、わからない量を求める手続きを明確化することにつながると期待されよう。

こうした扱いは実際には、５～６年生の学習で経験されてきている。構造的捉え方については、６年生の文字と式の学習でも触れるが、５年生で数を素数の積で表す学習でも触れている。また分数の乗除の学習では、分子や分母が式で表された分数が現れている。変形については、６年生の文字と式で学習をしている。これらの学習での式についての経験が比の学習において利用されることが、数量関係に関わる説明を明確なものとすると考えられる。

文字式の構造的捉え方を促すために数式の構造的捉え方を利用することは、中学校の立場から提唱されている(例えば、横田, 1995)が、数量関係を表現するという点からも、数式の構造的捉え方を促すことは重要と言える。また、板垣(1998)が、変形した前後の式を同じものとみなせないことが、文字式の説明における操作的捉え方と構造的捉え方の間の移行を妨げると指摘している (p. 52)ことをふまえるならば、簡単な場合にそうした経験をしておくことが、文字を含むより複雑な数量関係についての説明や推論を行うための素地になることも期待される。

こうした式についての知識を利用することは小学生には難しいようにも思われるが、授業中の児童の様子には、利用を示唆する様子も観察された。第２時で M1 が 120÷1000=0.12 を板書した際に、実は次行に 0.12と書いていた。教師からそこまでで止めるよう言われ、次は書いていないが、400×0.12ではなく 0.12×400 と書こうとしており、？÷400＝0.12 を経由して考えた可能性がある。つまり第１時の最後に教師が？×2.5＝120 と120÷2.5＝4.8 を関係づけたことが、影響しているとも考えられ、「？＝」という形ではないが、式変形を通してわからない量を求める方法を考案したことになる。

第３時や第４時の練習問題を解く際には、1:4=20:x から x=20÷1×4, x=5 としたり、1:2=12:x から 2×12＝24, 1×x＝24÷1, x=24としたりする児童もいたが、児童 M2 が第６時に 2:3=x:15 から 2×15＝3×x とし、さらにx=2×15÷3, x=10 と 2×15 を残したまま計算を進めるなど、式を適切に変形する児童も見られた。

こうした児童の変容を促すために、教師が式の役割を意識して板書をすることも大切となる。220 を 55×4 と表現したり、60:72＝60×5 : 72×5 などの式を意図的に利用することに加え、第３時で児童 Er が M2 の書いた 1000×x=48000 の式を補うために次行に「=48000÷1000」と続けた際、教師が「x＝48000÷1000」と、「文字と式」単元で学習したような形に修正したことや、第４時最後に児童 M2 の考えを紹介する際に「1×x=2×12, x=24」と板書したこともその例と考えられる。

５．おわりに

本稿で見られた説明の特徴は、６年生が数量関係に関わる基本的なアイデアは持っているものの、その関係を簡潔に表現したり、そこから新たな情報を引き出したりする、式という手段の利用が不十分なこと、そのために関係やその操作を十分に意識化したり制御できないことを示唆する。高学年の学習を通して、式が単に答えを求める手続きとしてだけ

でなく、思考の道具として利用されるようになるための指導を考えていく必要があると言えよう。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 24300267 (代表:金沢大学・大谷実)の助成を受けて行われた。授業の参観をお許し下さった上越教育大学附属小学校の磯野正人先生とクラスの皆さんにお礼申し上げます。

註および引用文献

1) 表を斜めにかける考え方は、複数の児童で見られていた。
2) 第３時は児童による短い発言は見られたが、特に説明は見られなかった。
3) この考え方を直接は学習していないが、第５時の説明で児童 S2 は利用していた。
4) これは比に関して、場面のパターンを記述することから、そのパターン自身が対象となる移行(布川, 2013)に当たるであろう。

Brown, M., Küchemann, D., & Hodgen, J. (2010). The struggle to achieve multiplicative reasoning 11-14. In M. Joubert & P. Andrews (Eds.), *Proceeding of 7th British Congress of Mathematics Education (BCME7)*, 49-56. University of Manchester.

Dole, S. (2000). Promoting percent as a proportion in 8th-grade mathematics. *School Science and Mathematics*, *100* (7), 380-389.

日野圭子. (1997). 一人の児童を通してみた数学的表記の内化の過程の分析：比例的推論との関わりにおいて(I). 日本数学教育学会誌, *79* (2), 2-10.

板垣政樹. (1998). 中学生の文字を用いた説明についての研究：文字式の二面性の理解を視点として. 上越数学教育研究, *13*, 43-52.

Jitendra, A. K., Star, J. R., Rodriguez, M., Lindell, M., & Someki, F. (2011). Improving students' proportional thinking using schema-based instruction. *Learning and Instruction*, *21*, 731-745.

Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F.K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Ledesma, E. F. R. (2011). Primary and secondary teachers' knowledge, interpretation, and approaches to students errors about ratio and proportion topics. *Creative Education*, *2* (3), 264-269.

布川和彦. (2013). 「数学：パターンの科学」の捉え方と学校数学の関係の検討. 上越教育大学研究紀要, *32*, 169-180.

Nunokawa, K. (in press). Multi-relation strategy in students' use of a representation for proportional reasoning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*.

Ruiz, E. F. & Lupiáñez, J. L. (2009). Detecting psychological obstacles to teaching and learning the topics of ratio and proportion in sixth grade primary pupils. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *17* (1), 397-424.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects on different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (1), 1-36.

Singer, J. A., Kohn, A. S., & Resnick, L. B. (1997). Knowing about proportions in different context. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics* (pp. 115-132).

横田　誠. (1995). 文字式の二元性 (duality) に関する考察. 上越数学教育研究, *10*, 133-142.