上越数学教育研究，第31号，上越教育大学数学教室，2016年，pp.47-62.

現実性のある場面における子どもの小数の乗法及び除法の知識形成の過程を捉えるための理論的枠組みについて

―複数のsituationから出発するmodelの漸進的な自己発達とformal knowledgeの洗練―

藤川　亮一
上越教育大学大学院修士課程２年

1. はじめに

小数の乗法及び除法は，子どもにとって理解が困難であると言われている(国立政策研究所，2015)。例えば，小数倍になると累加の考えを用いることができず，子どもが数量を感覚的にとらえにくい。また，小数の等分除の 1m の値段を求めるといった問題場面においても，子どもが日常使っているような，自然数で分けるという具体的な操作に関連づけることが難しい。そのため，実際の授業場面においては，子どもの活動を促す一方で，数直線や言葉の式などを用いながら立式の仕方を教え込む場面がある。この課題に対し，数直線を有効に用いて小数の乗法及び除法を割合で意味付けるなど，様々な研究(e.g.，中村，1996; 白石，2006)がなされているが，未だ解決には至っていない現状がある。

高橋裕樹(2003)は，小数の乗法及び除法における指導場面への有益な示唆を得るために，現実的数学教育(Realistic Mathematics Education, 略称 RME)理論を基にした，Gravemeijer et al.(2000)の理論的枠組みに基づき，子どもの小数の乗法及び除法における知識の形成過程を明らかにしている。他方で，理論的枠組みに関して，授業場面で複数ある問題場面や，文脈に応じてフォーマルな知識を繰り返し用いる中でフォーマルな知識を更に洗練させていく過程を考慮する必要がある。すなわち，理論的枠組みを精緻化し更なる発展を目指すために，複数の問題場面から出発してモデルを自己発達させる様相やフォーマルな知識の洗練を明らかにする必要がある。

本稿の目的は，現実性のある場面における子どもの小数の乗法及び除法の知識形成の過程を捉えるための理論的枠組みを，複数の問場場面から出発するモデルの自己発達という視点からと，フォーマルな知識を洗練させていくという視点から構築することである。

本稿では，第一に，小数の乗法及び除法に関する先行研究を概観することにより，子どもが自らの知識を基に小数の乗法及び除法の知識を形成していくために必要な要件を探る。第二に，現実的な場面から出発して数学化に至る立場を取る現実的数学教育（Realistic Mathematic Education 略称 RME）理論の提唱者であるFreudenthal，Hの思想などを基に，本研究における「現実性」の定義を明確にする。第三に，RME理論に視座を置き，心的構成物であるモデルの自己発達について考察する。第四に，RME理論に基づくVan den Heuvel-Panhuizen（2003）の理論的枠組みを精緻化し発展させることで，新たな理論的枠組みを構築する。第五に，

高橋裕樹(2003)における子どもの活動を，構築した理論的枠組みを用いて再解釈することで，その妥当性を検討する。

2. 小数の乗法及び除法における先行研究の考察

2.1. 小数の乗法における意味の拡張

松原(1985)は，小数をかけるということの意味について，「「整数倍」の場合は，補助的に累加を「かける」ことの意味として指導できたのであるが，「小数倍」では累加は通用しない。これまでに学習してきた「倍」の意味を，あらためて拡張して見直させるというのが，この指導の眼目である。」(松原，1982，p22)と述べている。また，中村(1996)は，「乗数が小数になると「同数累加」の意味は適用できない。例えば，3×2.4は「3を2.4個たす」とは言えない。そこで，乗数が小数の場合の意味を新たに考える必要がでてくる。」と述べている。そして，中村(1996)は,このように考えていく活動が「拡張の考え」を育てていくことになるとし，この「拡張の考え」を育てるという立場から，乗法の意味づけを「基準量×割合」とする立場を取っている。この立場は，A×Bについて，Aを基準量(単位)，BはAを単位とした測定数とすることである。この立場は，乗法の意味に関して，乗数が整数のときは同数累加で導入し，乗数が小数になったときに割合に拡張するということである。すなわち，小数の乗法の意味づけを行う際には，「同数累加」から「基準量×割合」へと意味の拡張を図ることが重要であると言える。

2.2. 小数の除法における意味の拡張

板垣(2002)は，整数の除法は「分ける」という統一したイメージを抱くことができるが，連続量(小数･分数)のわりざんは「分ける」というイメージで通すわけにはいかないとし，そのことを以下の例を用いて示している。例えば，「2ℓが400円のしょうゆ，1ℓの値段は…」と言えば，400円を2等分した値段，400円÷2の立式は容易であるが，「0.8ℓが160円のしょうゆ，1ℓの値段は…」となると，整数のときの等分という意味では通用しなくなってしまう。この例を踏まえて板垣(2002)は，これまでの「分ける」というイメージから正真正銘「1あたりを求める」または「いくつ分を求める」という意味に拡張させる必要があることを提案している。

白石(2006)は，小数の除法には意味の拡張が必要であり，その意味の拡張を子どもたちに導入する際には，その思考を助ける道具として数直線が有効であるとしている。そして，白石(2006)は小数の除法の学習において，数直線を導入する場面や数直線の形式，操作方法等を指導に加味した授業構成を提案している。その中で白石(2006)は，除法の「意味の拡張」とは「1」へのアプローチを，これまでの「累加，累減」の方法から「倍関係」を使った方法に拡張することであるとしている。この考えは，中村(1996)と同様に「基準量×割合」に着目し，割合で考えたことを「1」と全体の間を乗除法による「倍」を媒体に関係づけていくことであると捉えることができる。すなわち，小数の除法の意味づけを考えていく際には，「1」と全体の間を既習の乗除法によって関連づけ，「1あたりを求める」という意味に拡張させる必要があると言える。

2.3. 小数の乗法及び除法の意味づけ

中村(1996)は，小数の乗法を割合で意味づけることの問題点として，小数の乗法で子どもが意味の拡張を意識しないことを挙げている。中村(1996)は，その原因を，次の問題場面における一般的な指導を考えていくことで探っている。

1mが180円のリボン，2.4mの値段は何円ですか。

上記の問題において，立式の根拠は，(1mの値段)×(長さ)=(求める値段)という「言葉の式」である。そのため，子どもは，問題文の数値を「言葉の式」に当てはめて「180×2.4」と立式する。さらには，その前段として，子どもに整数の場合について考えさせることで，小数の場合でも考え易くなるように問題の系列が組まれていることが多い。このような指導によって，子どもは乗数が小数の場合でも不都合を感じることなく，整数と同様に乗法で表せる。中村(1996)は，上記の子どもの思考過程により，子どもが意味の拡張の必要性を意識しない原因は「言葉の式」による立式指導にあると考え，子どもに「言葉の式」に頼らない立式を促すために，数直線を立式の根拠とすることを提案している。

小数の除法における意味の拡張を図るため,麻柄(1995)は次のような実践を行った。麻柄(1995)は，実践の中で「分ける」から「1あたりを求める」への意味の拡張を図り，子どもたちの持っている「端があるから割れない」という考えを取り除いていった。

子どもたちは，「÷4」を4つに「分ける」と考えている。そこで，子どもは，はかりの上で羊羹を4つに切るが，それだけでは重さが変わらない。その中のひとつ分だけを取り出して重さを量ったとき，初めて1つ分の重さが出る。ゆえに，麻柄(1995)は，はじめの「4つに切った」だけでは「わりざん」ではなく「分けざん」であるとした。さらに，麻柄(1995)は，4つに分けるのではなく，1つ分だけ切って重さを量っても同じになることから，すべてを切り分けなくてもいいことを実験した。この実験から麻柄(1995)は，子どもに「1」に対する意識が生まれ，それまで彼らに定着していた「分ける」という意味から子どもたちの視点を「1」に向けることができたことを挙げている。そして麻柄(1995)は，この見方が可能になると，「1」を取り出した残りが，端のある数値で子どもたちにとって等分できないものであっても，「1」を取り出すことが意識されれば，「分けられない」から「割れない」という問題点を乗り越えていけることを示している。

上記の提言に対して白石(2006)は，こういった活動を通して「1」への意識が高まり，わりざんが「1を求める」ことであることが理解されるだけでは不十分であり，小数の除法を解決していくためには，この段階の子どもたちが未習である「1あたりを求める」という見方を身に付けることの重要性を示している。そして，白石(2006)は，「1あたりを求める」ことの背景にある「比例的な見方」を可能にするものについて考えていくことの必要性を指摘している。

日野(2004)は，比例的推論に関して，「一方がm倍になれば他方もm倍になるといったように，伴って変わる2量の間の比例関係を前提として未知の量を求めたり，比較したりすることおよびそれに準じる考え方」とし，小数の乗法及び除法の意味の拡張に必要とされる「比例的な見方」「1あたりを求める」には，数直線とのかかわりを考えていく必要があることを示している。

2.4. 数直線への「比例的な見方」の操作

これまでに，乗法・除法の意味の拡張を図るための「比例的な見方」を子どもに捉えさせるために，「数直線」を用いた研究が多くなされている。白井(1997)は，乗法や除法の演算決定の方法の中では，数直線が最も有効であるという立場にたち，その4つの有用性として，1. 数が小数・分数に拡張されても，数量の関係がとらえやすい，2. 数直線に表すことによって，答えや結

果の見通しがもてる，3. 比例的関係をもとにすれば，演算決定が正しくできる，4. 立式の根拠を正しく説明したり，検証したりできる，ことを示している。その一方，白井(1997)は，演算決定ができるためには次に示す5つの段階，1. 数を数直線上の点に表すまでの段階，2. 異種2量の数直線に移行する段階，3. 数量の対応をつかむ段階，4. 比例的な関係を基に演算を決定する段階，5. 活用する段階，を踏む必要があり,そのための系統的な指導が必要であることを指摘している。

中村(1996)は，小数の乗法において次の問題場面を扱い，数直線に比例関係を表すことで小数倍への意味の拡張を図った。

3mの重さが36gの針金があります。この針金7.5mの重さは何gですか。

中村(1996)は，上記の問題における子どもの思考過程を以下のように示している。子どもはまず7.5mは3mの何倍かを調べる。式は，7.5÷3=2.5となる。この意味は，「3mを1とみたとき，2.5にあたる大きさは7.5mになる」である。そして，長さが2.5倍になっているから，それに伴って重さも2.5倍になる。中村(1996)は,子どもが数直線への「比例的な見方」を行うことによって，7.5mの重さは36×2.5で求められることを示している。

白石(2006)は，次の問題において，数直線への倍関係を表す「矢印」の記入の過程を示すことで，比例的な見方を両方面から可能にできることを示した。

2.4mで120gの鉄の棒があります。この鉄の棒1mの重さは何gですか。

白石(2006)は，数値間の倍関係を矢印にすることで，何に対してその数値が何倍の関係になっているかという流れや方向性を示すことを可能にした。白石(2006)は，数直線への記入の過程として，以下の操作手順を示している。まず1mと2.4mの倍関係を乗法の考えをもとに求め(①の矢印)，そこから，長さが2.4倍になったら重さも2.4倍になるという見方をして，□と120の関係に気付く(②の矢印)。その後，子どもは，2.4mと1mの関係の÷2.4を除法の考えをもとに求め(③の矢印)，そこから長さが÷2.4になったら重さも÷2.4になるという見方をして，120と□の関係も÷2.4になることに気付く(④の矢印)。

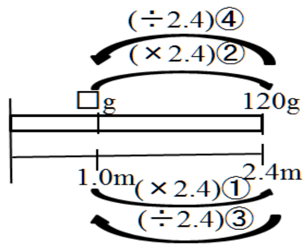


図1 白石(2006)が示した図

白石(2006)は，子どもがこれらの操作の過程を通して，「1」へのアプローチを，これまでの「累加，累減」の方法から「倍関係」を使った方法に拡張できることを示している。すなわち,数直線への「比例的な見方」の操作を行うことで，子どもは小数の乗法及び除法の意味を，累加や累減などの加減法から乗除法による捉えへと拡張することができる。それは「1あたりを単位とした見方」への変化を促し，中村(1996)が示したように,「1」と全体の間の関係を「倍」によって捉えられるようになることを意味する。

一方，教師は子どもの小数の乗法及び除法の意味の拡張を図る際には，子どもが自身の日常生活や，これまでの学習活動で身に付けた既習の知識などの，彼らの素朴な考えを大事にする必要があるだろう。その理由は，子ども自身の経験から形成された知識と，学習場面で教授された知識とが乖離する現象が起こるためである。そこで，子どもの素朴な考えに焦点を当て，それを自己発達させていこうとする研究を概観す

る。

2.5 子どもの素朴な考えに基づいた研究

子ども自身が自らの知識や素朴な考えを土台として，数学的な知識を形式化していく過程を明らかにした研究を示す。

高橋裕樹(2003)は，RME 理論を分析の視点とし，小数の乗法及び除法の問題場面を通して，子どもが自らの数学的知識を生かしながら，小数の乗法及び除法のモデルを発展させていく過程を明らかにした。具体的には，子どものもつ心的構成物である model の発達と形成過程を仮定し，その仮定をもとに単元と授業を構想，実施し，子どもの学習過程を解釈，考察した。その結果，高橋裕樹(2003)は，子どもは活動の過程で，解決のための単位を様々に設定することによる場に応じた活動のモデルを，様々な単位を 1 とみなすことによる場に応じた活動のモデルへと発展させることを明らかにしている。

富田(2010)は，子どもが割合単元の問題を解決していく中で，自らの数学的知識を生かしながら，新たな知識を形成し形式化していく過程を明らかにしている。その結果として富田(2010)は，比の三用法の活用に際しては，子どもたちが解決のための単位を様々に設定する活動を豊かにすることが重要であり，彼らが場に応じた単位を柔軟にとり，それを形式化していくことの重要性を示している。

金川(2010)は，関数指導改善の示唆を得るために，子どもが現実事象を意識し，自らの知識を用いて取り組めるような問題を解決していく際の，知識の形成過程を明らかにしている。その結果として金川(2010)は，調査問題を重ねるごとに形成過程が単純化することを示している。具体的には，初期の問題においては，子どもは絵図によるモデルとことばの式によるモデルの間で発達と逆行を何度も繰り返したが，問題を重ねるにつれて，ことばの式によるモデルを形成する様子が見られたことを金川(2010)は明らかにしている。

これらの研究では，子どもの日常的な現実性を軸にし，彼らが自身の生活体験などから形成してきた知識を基にして，いかにして新たな知識を形成しているかということに焦点を当てている。

3. 子どもの活動を軸とした視点

3.1. RME理論について

子どもの現実性という文脈からカリキュラムや教材を始める一派がある。オランダの Freudenthal の流れを組むチームであり，氏が提唱する理論は現実的数学教育(Realistic Mathematic Education 略称 RME)と呼ばれ，人間の活動としての数学，と言う数学教育観に根底を置いている(高橋等，2003)。子どもが現実世界における数学的な活動の中で数学的経験をし，知識を形成することを Freudenthal 派は目指しており，その理念の鍵は活動と現実場面，数学化の 3 つである(高橋等，2003)。

本研究では，RME 理論の 3 つの理念において，とりわけ，現実場面に焦点を当てる。その理由として，子どもの素朴な考えや自身の生活体験から形成した知識を引き出すためには，子どもが親しみを感じたり，強烈に引きつけられたりする場面が大切であるためである。筆者自身の経験でも，授業で日常的な現実場面の事象に関連付けた問題に取り組んだ際には，思わず自身の経験を想起することがしばしばあった。ここで言う現実場面とは，子どもにとって親しみのある状況であり，多くの場合，日常的な現実性をもつものである(高橋裕樹，2003)。ただ，先行研究では，算数・数学の授業場面において，子どもが現実性を捉える様相を的確に示していないだろう。

ゆえに，子どもの知識や素朴な考えを引き出すために，算数・数学授業における子どもの現実性を明らかにする必要がある。そこで，先行研究における現実性に対する考えを探ることで，本研究における現実性の定義を明確にする。

3.2. 本研究における現実性の定義づけ

Freudenthal(1991)は，数学と現実性に関して,「数学は現実性にはじまり現実性を持ち続ける」と述べ，児童・生徒が活動することが数学の現実性を作り出していくことを示している。とりわけ，Freudenthal(1991)は，数学の現実性の特徴として，問題を探す活動，問題を解決する活動，そして組織する活動を強調しており，数学学習のプロセスとして，レベルが上がることが活動の中心的な特徴であることを示している。

熊谷(2000)は Freudenthal(1991)の考えに対して，「あるレベルでの操作的な出来事が次のレベルでの扱う対象となることを強調している。そこには，何らかの扱うことのできる数学的対象が生じている。そこには操作と操作される対象を考えている。」と述べている。熊谷(2000)は，子どもたちが粘土のかたまりと串をもち 30g のだんごを粘土で作る活動を例に挙げ，小学校の授業場面にみられる数学的なリアリティについて言及している。なお，熊谷(2000)におけるリアリティは，現実性と同義であると捉えてよいであろう。

以下では，熊谷(2000)の数学的リアリティとはどのようなものなのか，それを捉えるために，本論に示されている子どもの活動と，その解釈を示す。子どもは，30g の粘土のだんごを作る時に，粘土を少しくっつけたり，削ったりといったような活動を繰り返す。ほんの少し削ることで，秤の針が動くこと，すなわち，ほんの少し重さが変化することを知っているためである。また，子どもはたくさんのものが集まれば，重さが重くなることを経験的に知っている。さらに，だんごが 2 個になると，重さは 1 個のときの 2 倍に，3 個になると重さは 3 倍になることを経験的に知っている。そこには素朴な比例のアイディアがあり，それを発展させるためにだんごが 2 個になれば 30×2=60，3 個になれば 30×3=90 ということを見直す必要がある。その見直しによって，だんごが 40 個になったとしても，1200g になると考えることができるようになる。

熊谷(2000)は，子どもは上記の活動を経験することで，素朴な比例のアイディアを意識的に扱えるようになり，経験的にもっている比例の考えを，測定することができるとは限らない範囲へ広く適用することができるようになることを示している。このことは，上記の過程で数学的なリアリティをつくる上では，問題を解決するときの比例関係をつくり出している部分に焦点をあてることの重要性を示すだろう。さらに，熊谷(2000)は，問題が解決できること，または問題が見つけられ，定式化できることが数学的なリアリティをつくり出している，という立場を取っている。すなわち，授業場面で数学的なリアリティをつくる上では，子どもが活動をする中で何らかの操作を経験し，ある数学的な対象をつくり出すような過程を繰り返す中で，既有の知識が数学的な知識へと発展することが重要であるだろう。

一方，子どもが場面に対して現実性を捉えるためには，子どもにとって日常的な現実性がある文脈が有効だろう。Freudenthal(1991)は，子ども一人一人の現実性を生かし，ある特定の共同体においてつくられる共通の感覚を基盤に据えた学習の展開の重要性を提言している。その中で Freudenthal(1991)は，「現実性は，歴史的

に，文化的に，環境的に，個別的に，そして主観的に決定される。」と述べている。すなわち，現実性とは学習者によって変わるものであり，子ども一人一人の現実性に即した場面をつくることで，子どもが現実性を捉えられることを示唆している。

以上より，数学的な現実性と日常的な現実性の両面から，算数授業における現実性を定義づける必要があると考える。端的に示すと，日常的な現実性に関しては，子どもが自身の経験と照らし合わせることが出来るような親しみのある場面という視点である。一方，数学的な現実性に関しては，子どもが自身の経験と問題場面を照らし合わせ，類似性を把握しつつ対象を操作する活動を行うことで，数学的な対象を自らつくり出していくという視点である。

上記を踏まえて，本研究では現実性を「子どもが，自分の経験や知識と環境(問題場面)とを照らし合わせてその類似性を把握したり，その過程で自ら数学的な対象をつくりだしたり，環境に内包される知識構造を把握したり，環境に対して親しみを感じたりする状況」と定め，子どもが現実世界と算数・数学の世界をつなげるために必要不可欠なものであると位置づける。

3.3.現実性のある場面

現実性のある場面を構成するために，本研究における現実性の定義に基づき，子どもにとって日常的な現実性をもつ文脈に焦点を当てる。そのような視点で教科書を概観すると，日常生活を強く反映した文章題を中心とした教材が登場するのは尋常小学算術(以後，緑表紙教科書)にみることができる。実際に緑表紙教科書を概観した結果，以下の2点が明らかになった。1点目は，緑表紙教科書は全体的に，日常性に基づいた情景図や場面図が多く用いられており，構造図や概念図が少ない点である。すなわち，子どもは緑表紙教科書を用いた学習によって，現実性を捉えつつ問題の解決に取り組めることを示唆するだろう。2点目は，文章表現に関して，登場人物の行動に関する描写が多いなど，問題の解決に必要としない情報が多く含まれている点である。例えば，お買い物や遠足の場面での子どもの行動など，子どもの日常性に即した内容が挙げられる。そのことは，子どもが自身の経験と問題場面を照らし合わせるこができ，親しみを感じることにつながるだろう。

緑表紙教科書の今日的意義を明らかにした研究として山澤(2009)が挙げられる。山澤(2009)は，現行の教科書の文章題と，緑表紙教科書の文章題を今日的にしたものとの双方の児童の解決過程を解釈することにより，緑表紙教科書型文章題の今日的な意義を明らかにしている。研究成果として，山澤(2009)は以下の2点を示している。1つ目，緑表紙教科書型文章題には，日常生活により近い場面設定が多いため，子どもは複数の解答を得ることが出来る点である。2つ目は，緑表紙教科書型文章題は，現実場面に活用することができる算数的内容を含んでおり，子どもの興味・関心を引きだし，子どもの思考を深める問題である，ということである。すなわち，緑表紙教科書の文章題は，場面と日常生活との関連性という点で，現実性のある問題場面への示唆を与えるものだろう。そのため，問題場面の構成に当たっては，緑表紙教科書の文章題を参考とする。

4.子どもの数学的な知識の形成過程を捉えるための理論的枠組みについて

4.1.Gravemeijer et al.(2000)のmodelの自己発達

Gravemeijer et al.(2000)は，図2に示すように，インフォーマルな知識がフォーマルな数学的知識へと向かうための起点である

べきだとする，モデルの自己発達という RMEの鍵となる理論を提示した。RMEにおけるモデルとは，子ども自身がもつ心的構成物のことであり，問題を解決する際にフォーマルな知識に向かって発達するものである。図2において，situations(問題場面)は現実世界であり，算数の授業では，現実性をもつ問題に相当する。model-ofはsituationsのもとで，心的にモデル化されたものであり，未熟なモデルである。このモデルが数学的形成に向かうことにより，model-forとなり，最後に，標準的に記述された形式的知識であるformal knowledgeに至る。

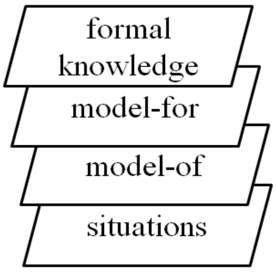


図2 Gravemeijer et al.（2000）の図式

また，その知識の発達の過程を図3に示すように4つのレベルで表現している。situations level(状況的水準)とは，ある特定の知識と方略が，主として学校外の状況の文脈で用いられる水準である。referential level(参照的水準)とは，形式的，一般的な解決には至っていないが，モデルと方略が，主に学校数学の中での提示される問題場面などに対して用いられる水準である。この水準の一般化が目指されることで，数学的な関係に焦点を当てるgeneral level(一般的水準)へと発展する。そしてgeneral levelを土台として形式化させることで，formal level(形式的水準)へと発達していく。

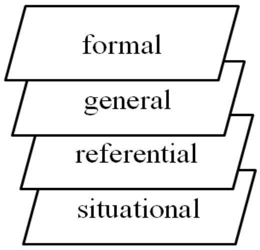


図3Gravemeijer et al.（2000）の知識発達のレベル

4.2.Van den Heuvel-Panhuizen(2003)のmodelの自己発達

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，Gravemeijer et al.(2000)のモデルの自己発達をさらに発展させ，model-ofからmodel-forへの移行の段階に，さらに小さなmodel-ofからmodel-forへの漸進的な発達があることを図4のように示している。さらに言及すると，model-ofからmodel-forへの移行への段階は，「model-ofがmodel-forへと局所的かつ連続的に翻る」姿で表される（富田，2010）。すなわち，子どもの理解が発達する過程におおいて，一つの活動におけるmodel-forが次の活動におけるmodel-ofへとなり，model-ofからmodel-forへの移行が次々に繰り返されていくということである。Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，「model-ofからmodel-forへの移行とは，モデル自体の機能の変化でもあると同時に，子どものモデルの見方の変容である。何をmodel-ofやmodel-forと見なすかはその都度子どもが向き合う文脈，領域，機能に依存する」と述べている。すなわち，教師は子どもの活動を軸とした学習過程の中で，子どもが何をmodel-ofやmodel-forと見なしているかを的確に見極める必要がある。

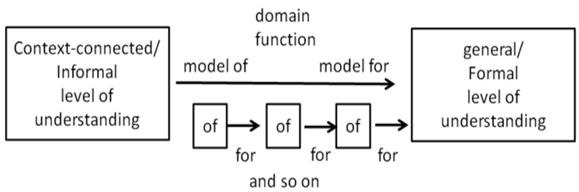


図4 Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の図式

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，百分率の教授-学習過程におけるmodel-ofからmodel-forへの移行の段階として大きく以下の3つを示している。

1. 劇場ホールの着席状況を捉えるmodel-ofが，その後駐車場の満席率など他の文脈を捉えるmodel-forの活動に移行する。

2. 劇場ホールの満席率を表す着色が，占有メーターに発達する。百分率を捉えるモデルにおける問題文の状況，文脈への依存度は低くなる。

3. これまでの活動を通して帯図に表してきた関係を，概算，計算，そして思考の道具として用いるようになる。

上記で示すように，子どもがsituationに取り組む過程で表出された心的構成物であるmodelは，複数のsituationで繰り返し用いられことによって，徐々により洗練されたものになっていく。そしてモデルが漸進的な発達を経た後に，より一般化，形式化されたformal knowledgeへと至るのである。

4.3. Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の理論的枠組みの再構築

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）では，複数のsituationで子どもがmodelを自己発達させることで，割合単元におけるformal knowledgeの形成が目指された。具体的に示すと，子どもがインフォーマルな知識の形成を文脈に応じて繰り返すことで，それを洗練させていく姿が見られる。すなわち，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の実践では複数のsituationが存在し，それらに子どもが取り組む中で, formal knowledgeを洗練させていく様相が見られる。実際の我が国の算数・数学教育実践においても，一つのformal knowledgeに対し，複数のsituationから，formal knowledgeを洗練させるための活動を何回か繰り返したり，formal knowledgeを更に数学的に洗練させるような単元間の系統があったりする。

ただ, Van den Heuvel-Panhuizen（2003）が提示した図式は，それらを反映し可視化することに至っていないだろう。その理由は，複数あるsituationが集約され一つのsituationとして表れていることと，一つのformal knowledgeへの到達が目指されていることが図式から把握できるためである。

そこで筆者は，図5に示すように，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の図式に多様なsituationから出発するmodelの自己発達やformal knowledgeの洗練を明示化させることで，理論的枠組みを修正し精緻化を行った。

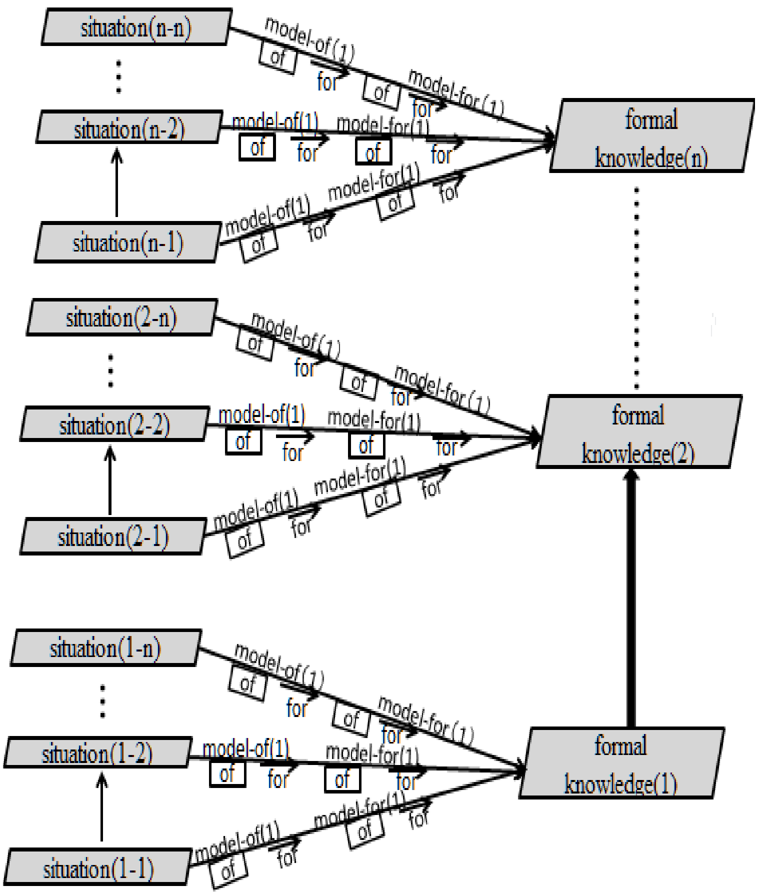


図5 再構築した理論的枠組み

図5において，situation(1-1)はformal knowledge(1)に対しての最初のsituationである。model-of(1)は，situation(1-1)に基づいた

最初のモデルであり，そこからは，formal knowledge(1) に向かって Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の図式と同様に model-of と model-for が繰り返される。situation(1-2)は，formal knowledge(1)に対しての第2のsituationである。situation(1-2)から formal knowledge(1)に至るまでの過程は，situation(1-1)の場合と同様である。すなわち formal knowledge(1)に対して，situation(1-1), situation(1-2), …，situation(1-n) と複数の situation を設定するのである。formal knowledge(2)は，formal knowledge(1)に対して更に洗練されたformal knowledgeである。この洗練は例えば，後述する formal knowledge(1)としての1あたりを単位とした見方からformal knowledge(2)としての割合（倍）を求めることへの洗練である。このように，formal knowledge(1) から formal knowledge(N)まで次々とformal knowledgeが洗練されていくのである。

5. 新たな理論的枠組みの妥当性の検討

5.1. situation における子どもの学習過程

新たに構築した理論的枠組みの妥当性の検討を行うために，高橋裕樹(2003)における子どもの活動を再解釈する。

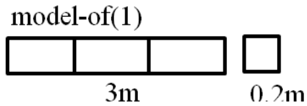
その際の視点は以下の 2 点である。1 点目は，それぞれの situation において漸進的に発達する model-of と model-for の様相を捉えることである。子どもの素朴な考えに基づいた図や数直線の model が発達していく様子を緻密に検討する。2 つ目は，子どもが複数の situation に臨む過程で洗練させる formal knowledge を捉える点である。多様な situation で formal knowledge がどのように用いられ，関連づけられ，そして洗練されていくのか，その過程を精緻に捉えていく。なお，子どもの活動の再解釈に加えて，想定する model の発達を示す場合がある。それは筆者が考える一つの過程であり，子どもの実際の model の発達とは異なる可能性もある。

situation(1-1)

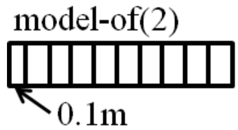
1m80 円のリボンを 3.2m 買ました。代金はいくらになりますか。

子どもが 0.1 を単位とした既有の整数の乗法や包含除及び等分除の model を発達させることで，1 を解決のための単位とする formal knowledge(1)(80×3.2=265(円)の形成が目指される。

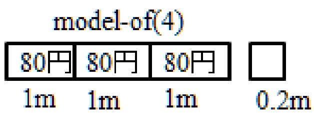
実際の子どもの活動として，純小数部分 0.2m の値段を求める解決が活動の焦点となり，0.1m を解決のための単位とする姿が見られた。子どもは，まず問題文の状況を表した図である model-of(1)を表す。



そして，整数の乗法の model-for(1)より 80×3 を立式し，3m の代金 240 円を求める。その後，子どもは 0.2m の代金を求める活動へと移行する。まず 0.1m に着目し，包含除の考えに基づいた model-of(2)を表し，



その model を基に整数の等分除の model-for(2)より，0.1m の代金 8 円を 80÷10 より求める。model-of(3) では，model-of(1)より 3.2m の代金が 3m の代金と 0.2m の代金の合計であることを確認する。最後に，整数の乗法の model-for(3)より，8×2 を立式し 0.2m の代金 16 円を求める。最終的に，代金 240 円と 0.2m の代金 16円を合計し，3.2m の代金 256 円を求める。その後，子どもは教師との係り合いにより，テープ図を操作することで，80 円を 1 と見なす model-of(4)を表す。



その model を基に，1 を単位とした割合の考えに基づく model-for(4)を形成することで，formal knowledge(1)である

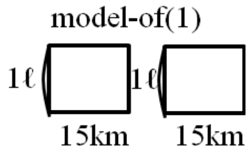
80×3.2 を表す。

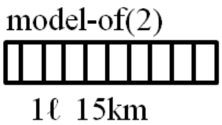
situation(1-2)

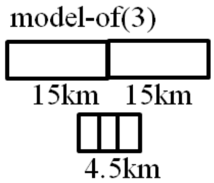
1ℓのガソリンで 15km 走るバイクがあります。2.3ℓのガソリンでは，何 km 走ることができますか。

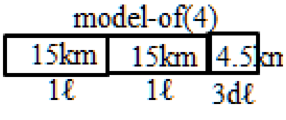
1 を解決のための単位とする formal knowledge(1)(15×2.3=34.5(km))が目指される。situation(1-1)と同じく，子どもは既有の整数の乗法，包含除及び等分除の model を用いることで，0.1 を解決のための単位とする解決を行った。その後，テープ図をつなげる活動によって，小数をひとかたまりとして見るなど，formal knowledge(1)を洗練させる姿が見られた。

子どもは，文脈を表す model-of(1)を表出し，その model を基に，整数の乗法の model-for(1)を用いて 15×2 を立式することで 2ℓに走る距離 30km を求める。次に，0.1ℓが 1dℓに単位換算することに気付くと，1dℓあたりの距離を求める活動へと移行する。まず包含除の考えに基づいた model-of(2)を表し，整数の等分除の model-for(2)より 15÷10 を立式し，1dℓあたりの距離 1.5km を求める。model-of(3)は，3dℓの距離に注目した図である。乗法の model-for(3)より 1.5×3 を立式し，3dℓに走る距離 4.5km を求める。最後に，2ℓの距離 30km と 3dℓの距離 4.5km を足し合わせることにより 2.3ℓの距離 34.5km を求める。その後，子どもはテープを用いた活動へと移行する。子どもは，テープ図を操作することで，15km を 1 と見なす model-of(4)を表す。その model を基に，1 を単位とした割合の考えに基づく model-for(4)を形成することで，formal knowledge(1)である 15×2.3 を表す。







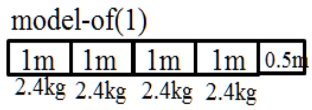


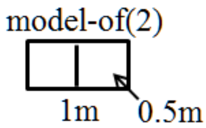
situation(1-3)

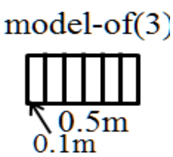
1m の重さが 2.4kg の針金があります。この針金 4.5m の重さは何 kg でしょうか。

1 を解決のための単位とする formal knowledge(1)(2.4×4.5=10.8(kg))の形成が目指される。子どもは，テープ図を用いる中で，0.5 や 0.1 を解決のための単位にするなど，解決のための単位を様々設定した。その後，徐々に数直線とテープ図を関連付けた活動へと移行し，比例的な見方を行うことで formal knowledge(1)を洗練していった。

実際の活動として，子どもはまず，文脈を示す model-of(1)を表し，それを基に乗法の model-for(1)より 2.4×4 を立式し 4m の重さ 9.6kg を求める。次に，子どもは 0.5m あたりの重さを求める活動へと移行する。包含除の考えに基づいた model-of(2)を表し,等分除の model-for(2)より 2.4÷2 を立式し 0.5m あたりの重さ 1.2kg を求める。その後, 4m の重さ 9.6kg と 0.5m の重さ 1.2kg を足し合わせることで 4.5m の重さ 10.8kg を求める。解決後，子どもは 0.5 を単位とする解決を確かめるために, 0.1 を単位とする解決に取り組む。子どもは 0.1m の重さに着目した model-of(3)を表し，等分除の model-for(3)より 1.2÷5 を立式し 0.1m の重さ 0.24kg を求める。次に，0.24×45 より，4.5m の重さ 10.8kg を求める。

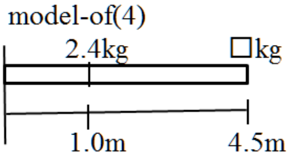


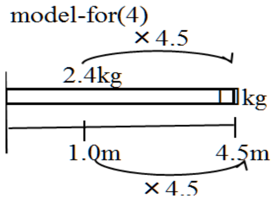




situation への取り組みが終盤となった頃，友達との係り合いの中で，1 を解決のため

の単位とする解決が見られた。初めに，子どもは手や動作を用いながら数直線とテープ図を対応させた図を model-of(4)として表す。子どもは倍関係に着目すると，比例的な見方をした model-for(4)を表し，それを基に formal knowledge(1)である 2.4×4.5 を立式し 10.8kg を求める。





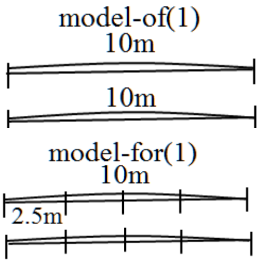
situation(1-1)～situation(1-3)では，子どもは 0.1 を解決のための単位とするために，既有の整数の乗法，包含除及び等分除の model を用いた解決を行っている。0.1 を解決のための単位とした解決は，比例的な操作を子どもが数直線を用いて行うことによって，1 を単位とした見方である formal knowledge(1)へと発展する。

situation(2-1)

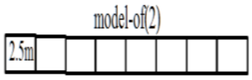
1 人に 2.5m リボンを渡したいと思います。20m のリボンから，何人分のリボンを用意できますか。

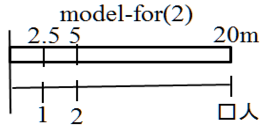
割合（倍）を求めることである formal knowledge(2)(20÷2.5=8(人))の形成が目指される。子どもは，包含除の考えに基づいた model により，単位と全体量の関係(いくつ分)を捉え，取り除いていく操作を行うことで解決に至った。

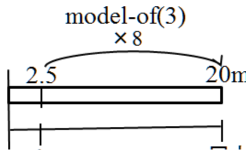
子どもは，まず文脈を記述する model-of(1)を表出し，2.5cm ずつ区切っていく包含除の考えに基づいた model-for(1) を形成することで，答えである 8 人を求めた。その後，子どもは教師との係り合いにより，テープ図をつなぎ合わせ，20cm を示した model-of(2)を表す。そのテープ図と数直線との対応を示し，model-for(2)を形成したところで子どもの活動は停滞した。

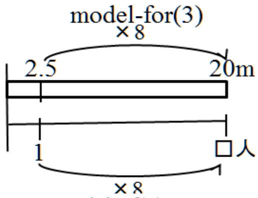


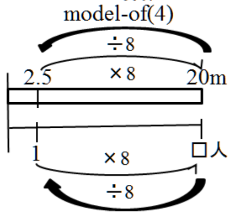
以下では，数直線とテープ図を用いた子どもの活動の想定を示す。子どもは，まず 2.5 と 20 の倍関係を示す矢印を記入した model-of(3)を表す。そして，比例的な見方に基づき，1 と□の倍関係を示す矢印を記入する model-for(3)を表すことで，2.5×8=20 を立式し，8(人)を求める。そこから除法的な考えに基づき，矢印が記入された model-of(4)が表され，小数の包含除の model-for(4)を表すことで，formal knowledge(2)である 20÷2.5 を立式に 8 人を求める。











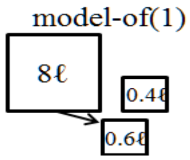
situation(2-2)

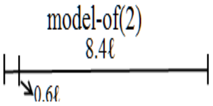
8.4ℓ の灯油があります。1 台のストーブに 0.6ℓ ずつ入れると，何台のストーブに灯油を入れることができますか。

formal knowledge(2)(8.4÷0.6=14(台))の形成を目指す。子どもは，situation(1-1)における活動に基づき，整数の乗法と包含除の model を用いて解決に取り組み，小数の包含除の model を形成した。また，数直線に比例的な操作を行う中で 0.6 を 1 とみるなど，formal knowledge(1)を洗練させる姿を見せた。

子どもは，まず文脈を表す model-of(1)を図として表し，包含除の model-for(1)より 8.4-0.6 を立式するが，その後の活動は止まってしまう。その後，一つを 0.6 ずつ区切っていく model-of(2)を表し，その model

を基に 14 台を求めた。次に，situation(1-1)の活動を想起し乗法の model-for(2) より 0.6 × 14=8.4 を立式する。ここでは，0.6 を 1 とみて解決を行うなど，formal knowledge(1)を用いた解決が見られた。





子どもの活動の終盤，授業では除数と被除数を共に 10 倍しても商の大きさは変わらないことが子どもたちから発表され，その子どもたちの発表を基に，(小数)÷(小数)の筆算の仕方を考える展開となった。

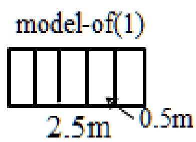
situation(2-1)～situation(2-2)では，子どもは，解決のための基準の大きさをいくつか集めて全体量へ近づけていく操作を行ったり，取り除いていく操作を行ったりするなど，整数の乗法と包含除の model による解決を行った。その後，数直線やテープ図で比例的な操作を行うことで，小数の包含除の model を形成する。その model は，乗法の逆として意味づけされることで発展し，formal knowledge(1) から formal knowledge(2)へと洗練させていった。

situation(3-1)

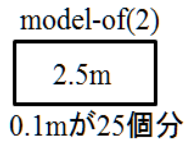
2.5m で 200 円のリボンがあります。そのリボンを 3m 買いたいと思います。3m 買うと代金はいくらになりますか。

1 あたりの量を求めることである formal knowledge(3)(200÷2.5=80(円))の形成が目指された。0.5m や 0.1 を解決のための単位とするなど，整数の乗法と包含除の model に基づいた解決を行った。

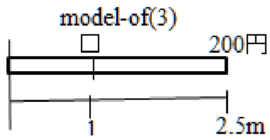
子どもは，包含除の考えに基づいた model-of(1)より，2.5m には 0.5m が 5 つ含まれることを確認する。そして，等分除の model-for(1)より 200÷5 を立式し，0.5m の値段 40 円を求め，それを

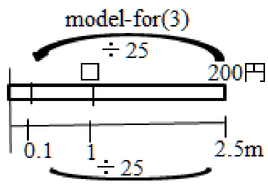


2.5m の値段に加えることで，3m の値段 240 円を求める。その後，0.1m あたりの値段を求める活動へと移行する。包含除の考えに基づいた model-of(2)を表し，0.1m が 25 個分で 2.5m になることを確認する。その後，整数の等分除の model-for(2)より 200÷25 を立式し 0.1m の代金 8 円を求め，8×30 より 3m の代金 240 円を求める。



子どもは解決後，友達との係り合いにより 1m あたりの代金を求める活動へと移行する。子どもは，これまでの経験を基に，数量関係を記入した model-of(3)を表す。そこから，数直線に比例関係の矢印を記入する model-for(3)を形成する。その model を基に，0.1 を解決のための単位とした解決 200÷25=8，8×10 が，0.1m あたりの 10 倍を求める(200÷25×10)として発展し，200÷2.5 を表す formal knowledge(3)へと至るのである。



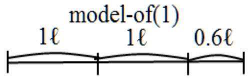


situation(3-2)

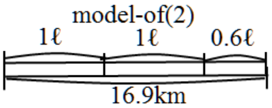
2.6ℓ のガソリンで，16.9km 走る車があります。1ℓ では何 km 走るでしょう。

formal knowledge(3)(16.9÷2.6=6.5(km))の形成が目指される。子どもは 1 を単位とした解決に意味づけを行うために，0.1 を単位とした解決と 1 を単位とした解決との比較を行った。

子どもは，まず文脈を記述する model-of(1)を表し，等分除の model-for(1)より,16.9÷26 を立式することで，0.1ℓあたりの値段 0.65km を求める。その後，授業



の展開は，0.1ℓ を解決の単位とした計算 16.9÷26=0.65km と，1ℓ あたりで走る距離を直接求めた計算 16.9÷2.6=6.5 が発表され，これら 2 つの式の意味と商の意味についての話し合いとなる。子どもは，友達との係り合いの中で 1ℓあたりに走る距離に着目した model-of(2)を表すことで小数の等分除の model-for(2)を形成し，16.9÷2.6 を立式する formal knowledge(3)へと至るのである。その後，教師との係り合いの中で，1ℓあたりの距離を単位とした解決と 0.1ℓの距離を単位とした解決を比較した上で，1ℓを単位とした解決に意味づけを行った。また，0.1 を解決の単位とした計算より，簡潔性や能率性などの点から，1ℓで走る距離を単位とした解決の方が用いやすいと判断している。



situation(4-1)

(右記の表から)よしこさんのつるの長さをもとにした時，あきらくんとみちこさんのつるの長さは何倍になりますか。

名前	長さ(m)
よしこ	2.4
あきら	3.6
みちこ	1.8

比の三用法を柔軟に用いることができる formal knowledge(4)(3.6÷2.4=1.5(倍), 1.8÷2.4=0.75(倍))の形成が目指される。子どもの活動として，3.6÷2.4=1.5 の確かめとして 2.4×1.5=3.6 を行うなど．formal knowledge(1)と formal knowledge(2)を関連させ，それぞれを洗練させていく姿が見られた。

子どもは，まず状況を記述する model を表し，formal knowledge(2)に基づき 3.6÷2.4, 1.8÷2.4 を立式し，それぞれの答え 1.5 倍と 0.75 倍を求める。その後，検算として，formal knowledge(1)に基づき，2.4×1.5=3.6，2.4×0.75 を立式し，それぞれの答え 3.6 と 1.8 を求める。

situation(4-2)

あきらさんは，63 枚のカードを持っています。これは，まるこさんのカードの枚数をもとにすると，1.8 倍にあたります。まるこさんは，何枚のカードを持っているでしょう。

比の三用法を柔軟に用いることができる formal knowledge(4)(63÷1.8=35)の形成が目指される。子どもの活動として，63÷1.8=35 の確かめとして 35×1.8=63 を行うなど，formal knowledge(3) と formal knowledge(1)を柔軟に用いる姿が見られた。

子どもは，個人解決に臨む前の見通しの段階で,「あきらさんのカードは，まるこさんのカードをもとにして，だいたい，1.8 倍にあたります。」と発言するなど，formal knowledge(1)に基づいた考えをしている。その後，個人解決において，formal knowledge(3)に基づき 63÷1.8 を立式し 35 を求める。その後，友達との係り合いにより，formal knowledge(1)に基づき 35×1.8 を立式し 63 を求める。

5.2. 子どもの学習過程の考察

5.1 における子どもの学習過程に基づき，子どもの思考過程について考察を行う。とりわけ，複数の問題場面から出発する model の漸進的な発達と formal knowledge の洗練に焦点を当てて提示する。

situation(1-1)～(1-3)において，子どもは既有の整数の乗法，包含除及び等分除の model を用いるために，小数を整数部分と純小数部分に分けて捉えた。その後，テープ図と数直線の中で比例的な操作を行うことで，1 あたりを単位とする見方である formal knowledge(1)を形成していった。

situation(2-1)～(2-2)において，子どもはまず既有の乗法や包含除の model を用いて答えを求めた。その後，数直線やテープ図の中で比例的な操作を行うことで，小数の

包含除の model を形成し，それが乗法の逆として意味づけされることで，割合を求めることである formal knowledge(2)を形成した。すなわち， formal knowledge(1)が洗練されることで formal knowledge(2)へと洗練されることを示す。

situation(3-1)～(3-2)において子どもは，0.5 や 0.1 を解決のための単位とするために，整数の乗法と包含除の model を用いた解決を行った。また, 1 を単位とした解決に意味づけを行うために, 0.1 を単位とした解決と 1 を単位とした解決との比較を行うなどして，1 あたり量を求めることである formal knowledge(3)を形成していった。

situation(4-1)～(4-2)において子どもは，これまでの situation で形成した formal knowledge を用いることで，問題を解決することができた。このことは，場に応じて解決の単位を様々に捉え，様々な単位を 1 とみなすことによって，小数の乗法と包含除，等分除の model が，互いの situation においても用いられるようになり，比の三用法が柔軟に活用できる formal knowledge(4)の形成に至ったと言えよう。

5.3. 再構築した理論的枠組みの妥当性について

子どもの学習過程の考察より，再構築した理論的枠組みの妥当性を得たと考える。その理由は，以下の 2 点によるものである。

第一に，複数の situation において，子どもが既有の model を用いて解決に取り組み，それを自己発達させることで formal knowledge を形成していった点である。さらには，解決に困難が生じた際には，前に表した model に立ち返ることで解決の糸口を掴み，形成しようとしている model を修正し，そして発展させる子どもの姿が見られた。すなわち，複数の situation において子どもが表出する model が漸進的に発達する過程を捉えることが出来たと言えよう。

第二に，子どもが situation で形成した formal knowledge を，文脈の異なる situation で繰り返し用いたり，formal knowledge 相互の意味を比較したりすることによって, formal knowledge を更に洗練させる姿が見られた点である。一方，model の発達と同様に，解決に困難が生じた際には既有の formal knowledge へと立ち返る子どもの姿があった。その中で，子どもは新たに形成しようとする formal knowledge の意味を見出したりしていた。すなわち，子どもは複数の situation に臨む過程で，既有の formal knowledge を次々と洗練させ，新たな formal knowledge を形成していったと言えよう。

6. おわりに

本稿では，現実性のある場面における，子どもの小数の乗法及び除法の知識形成の程を捉えるための理論的枠組みを構築した。そして，高橋裕樹(2003)の子どもの活動を再解釈することによって，再構築した理論的枠組みの妥当性を得ることができた。

今後の課題として，本稿で定義した「現実性」を基に現実性のある場面を設定し，それを基に調査研究を構想する。そこでの子どもの活動を，再構築した理論的枠組みを基に解釈することで，彼らの小数の乗法及び除法における知識の形成過程を精緻に捉えることになる。

引用・参考文献

Freudenthal,(1991).RevistingMathematics Education:China Mathematics education library.9 Lecture. Kluwer Academic Publc.

Gravemeijer, et al(1997).Mediating between concrete and abstract.In T.Numes & P.Bryant(eds.), and Teaching Mathematics: An International Perspective(pp. 315-345).

UK:Psychology press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M.（2003) The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory. *Educational Studies in Mathematics* , *54,* 9-35.

麻柄啓一.(1995).子どものつまずきと授業づくり:わかる算数をめざして.岩波書店.

池田敏和.（2015).モデルに焦点を当てた数学的活動に関する研究の世界的傾向とそれらの関連性.日本数学教育学会誌,95(5),2-11.

板垣賢治.(2002).連続量（小数・分数）の乗除.日本数学教育学会誌,84(8),38-44.

上ノ山達郎.(2000).「算数教育における文章題指導のあり方に関する研究」.上越数学教育研究. 25. 39-50.

柄園高士.(1983).関数の考えを用いた乗法の指導(5 年 小数のかけざん):数直線を使った指導を通して. 日本数学教育学会誌, *65*(6), 34-38.

国立教育政策研究所.(2015).平成26年度全国学力・学習状況調査：調査結果のポイント.小学校算数.文部科学省.(http://www.nier.go.jp/08chousakekka/01chousakekka_point.pdf).

白井一之.(1997).乗法・除法の演算決定にはたらく数直線の指導. 日本数学教育学会誌, 79(6), 51-56.

白石信子.（2006).小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究：数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して.上越数学教育研究21, 69-80.

高橋久誠(2000).小数の乗法の授業構成に関する考察-比例の考えをもとにして-.上越数学教育研究, 15, 85-94.

高橋裕樹.(2003).小数の乗法と除法とにおける子どもの知識の構成過程について-子どもが比の三用法を活用していくまで-上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

高橋等.(2003).「子どもの算数・数学的活動を大事にする，湧き出させる」. 上越数学教育研究.18.31-48.

田端輝彦.(2001).小数倍の導入についての一考察－小数倍に表すよさに焦点をあてて－.日本数学教育学会誌, 83(12).

富田一志.(2010).割合単元において子どもが知識として形成する固執 model の発達と役割. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

富田一志.(2010).「割合単元において子どもが知識として形成する固執 model の発達と役割」. *上越数学教育研究. 25.* 39-50.

熊谷光一.(2000).「授業にみられる数学的なリアリティと数学的対象」.上越数学教育研究. 25. 39-50.

中村享史.（1996).小数の乗法の割合による意味づけ.日本数学教育学会誌,78(10),7-13.

藤川亮一・高橋等.(2015).現実性のある場面から発達する子どもの知識の形成過程について.日本数学教育学会第48回秋期研究大会発表集録,483-486.

松原元一.(1982).算数「子どもの考え方・教師の導き方」.国士社.

文部省.(1920).尋常小学算術書第五学年児童用.国定教科書共同販売所.

文部省.(1935).尋常小学算術第一学年～第六学年. 新興出版株式会社新興出版社啓林館.

文部省.(2007).復刻版尋常小学算術教師用解説書.新興出版株式会社新興出版社啓林館.

山本英一.(1988).小数の乗法の指導について. 日本数学教育学会誌, 70(12), 2-7.