上越数学教育研究，第31号，上越教育大学数学教室，2016年，pp.37-46.

数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する研究

～微分係数の図形的意味の理解段階に着目して～

片寄　恵理奈
上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

高等学校数学Ⅱ「微分の考え」の学習内容(現在の微積分)は，「「極限」の概念に基礎をおいた数学」(中村，1980，p.196)である。これまで，数学Ⅱ「微分の考え」における瞬間の速さを学習していく過程で必要となる極限の考えを，生徒がどのような過程を経て理解していくかに着目して，瞬間の速さの理解段階を考察してきた。その結果，極限の考えを獲得するときに，瞬間の速さにおける時間幅を 0 と考えることができない状況があることなどが認められた。数学Ⅱ「微分の考え」において極限の考えが必要となる学習で次は，微分係数の図形的意味の学習である。

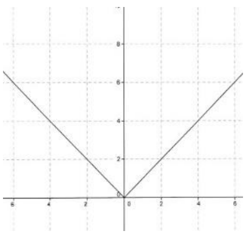


図 1：関数$y = |x|$のグラフ

教育系大学の数学を専攻とする大学生 7 名に微分学習に関するアンケートを行った。その中に，図 1 を示した上で，「この関数$y = |x|$の原点における接線はあるか。また，その理由は？」と問う設問がある。この設問に対して，7 名中 3 名が「原点における接線はある」と回答し，理由として「原点があるため」「原点で接線を取ることができる」「グラフ上に表すことができる」と回答している。これらの回答は，曲線と直線の共有点が 1 点だから接線がある，すなわち，円の接線と同様の扱いができる，と考え「原点における接線はある」と回答したと考えられる。そうであれば,「極限の考え」を必要とする接線の意味が理解できていない状況が既習者にも少なからずあることになる。

本稿の目的は数学Ⅱ「微分の考え」において扱う接線の学習で必要となる「極限の考え」を明らかにし，その「極限の考え」を必要とする微分係数の図形的意味の理解とその段階を考察することである。

第 2 節では，先行研究から数学Ⅱ「微分の考え」において必要となる極限の考え，特に瞬間の速さにおいて必要となる極限の考えについて述べる。第 3 節では，学習指導要領と教科書の記述から現在の微分学習において微分係数の図形的意味はどのように扱われているか明らかにし，教科書を参考にして微分係数の図形的意味の理解段階を構想する。第 4 節では，塚原(2002)が作成した数学史を取り入れた学習指導案を取り上げ，その授業における生徒の微分係数の図形的意味の理解の様相を述べる。第 5 節では，第 3 節で構想した微分係数の図形的意味の理解段階をもとに学習指導案を作成し，それを用いて行った調査授業の分析・考察を行う。第 6 節では，第 5 節で行

った調査授業の分析から微分係数の図形的意味の理解段階を考察する。第 7 節では，本稿のまとめと今後の課題を述べる。

2. 数学Ⅱ「微分の考え」における極限の考え

高等学校数学Ⅱ「微分の考え」における極限の考えの扱いについて，山口直也(2013)は次のように指摘している。

> 「数学Ⅱ「微分の考え」微分係数 $\lim_{h \to 0} f(x+h)-f(x)/h$ で初めて極限が導入されるが，教科書では微分係数の式に多項式を当てはめ，除算等の式整理をして h に 0 を代入し計算する，いわば代数的操作として極限を扱っている。一方，数学Ⅲ「極限」では∞という記号や連続性といった新しい概念が導入され概念的操作となるが，この操作の差が生徒の極限概念の獲得に支障をきたしているのではないかと考えた。」(山口直也，2013，p.189)

山口直也(2013)は，極限の扱いにおいて数学Ⅱ「微分の考え」では代数的操作，数学Ⅲ「極限」では概念的操作であり，その操作の差が生徒の極限概念の獲得に支障をきたすと指摘している。しかし、教科書には，数学Ⅱ「微分の考え」では代数的操作だけで極限を扱っているのではないものもみられる。

数学Ⅱ「微分の考え」までの学習に目を向けると，極限の考えの素地を育む指導を考えた実践のいくつか提案がいくつかなされている(例えば，沖山，2004；坂井，2015 など)。坂井(2015)は，生徒は極限が内在する学習内容を通して，一定の数値に収束するという極限の考えの素地を育むことが連続性に基づいた指導内容として重要であると述べている。しかし，数学Ⅱ「微分の考え」までの実際の学習では，瞬間の速さという日常に関する具体的な事象を用いて極限の考えを考えることはしてきていないようである。

そのため，数学Ⅱ「微分の考え」で扱われる極限の考えを生徒はどのような過程で理解していくか，を明らかにすることが必要となる。片寄(2015)では，微分学習の導入である瞬間の速さを学習する調査授業を実施し，それを基に調査結果を分析・考察し，生徒の瞬間の速さの理解段階を示した。

その結果，調査授業の分析と考察からは，生徒が，瞬間の速さの時間幅を 0 と考えるに至るまでには，6 段階あることが明らかになった。また，瞬間の速さの学習では，h が限りなく 0 に近づく($h \to 0$)という操作を具体的な事象をもとに生徒に考えさせていく。この瞬間の速さという事象は日常とつながりの深いものであり，実体験できる対象であるから，代数的操作ではなく概念的操作としての活動を生むと考えられる。

これらのことから，瞬間の速さの学習を通して，公式に代入して求める代数的操作としての極限の考えだけでなく，概念的操作として極限の考えを生徒に意識させることができると考えられた。これは，数学Ⅱ「微分の考え」までに学習される「限りなく近づく」という極限概念にはないものであり，数学Ⅱ「微分の考え」において必要となる「極限の考え」であると考えられた。

次の節では，微分係数の図形的意味の学習で必要となる「極限の考え」を，瞬間の速さの学習で必要とされる「極限の考え」との比較も行い，明らかにしていきたい。

3. 微分係数の図形的意味の学習について

3.1. 学習指導要領解説における記述

平成 21 年度の高等学校学習指導要領解説数学編理数編には，高等学校第 2 学年における数学Ⅱの微分積分の単元で極限の概念についてどう扱われるかが述べられている。「微分の考え」の[内容の取扱い]において，「極限については，直観的に理解させるよう扱うものとする」(p.34)と述べられて

いる。ここでは数学Ⅱにおける極限の概念についての明確な記述や具体的な指導等への言及はない。微分係数や接線の学習において極限を扱うものとしているが，極限について直接に学習するものではなく微分係数や導関数を導くために，極限について触れ導関数の応用として接線の傾きを学習するという扱いである。

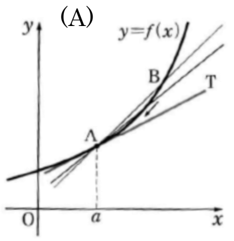
次に，微分係数の図形的意味の扱いは現行の教科書ではどのようになっているかをみていくことにする。

3.2. 教科書における記述

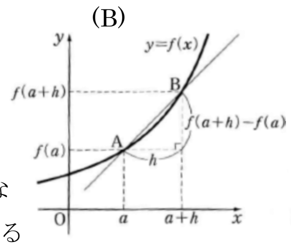
高等学校数学Ⅱ「微分の考え」の微分係数の図形的意味の指導についてみていく。

詳説数学Ⅱ(啓林館，2013)の教科書では，微分係数の図形的意味の学習は，接線の方程式の学習の前に行うという配列である。微分係数の意味を関数のグラフとの関係からみていく指導になっている。グラフでは平均変化率は 2 点を通る直線の傾きを表し，微分係数は接線の傾きを表すことを図とともに視覚的に理解させる学習を行うようにしている。学習の流れは，以下の図 2 に示した通りである。

関数$y=f(x)$のグラフ上に，2 点 A(a，$f(a)$)，B($a+h$，$f(a+h)$)をとると，$y=f(x)$の$x=a$から$x=a+h$までの平均変化率$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$は直線 AB の傾きを表している(A)。



ここで，hを 0 に限りなく近づけると，点 B はこの曲線上で点 A に限りなく近づき，$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ となる。このとき，直線 AB はある直線 AT に限りなく近づく。この直線 AT を点 A における曲線$y=f(x)$の接線といい，点 A をこの接線の接点という(B)。接線の傾きについて，次のことがいえる。



関数$y=f(x)$の$x=a$における微分係数$f'(a)$はこの関数のグラフ上の点(a，$f(a)$)における接線の傾きである。

図 2:教科書にみられる学習の流れ
(啓林館，2013，p.198)

3.3. 微分係数の図形的意味の理解段階

平成 21 年度の高等学校学習指導要領解説では，微分係数の学習と接線の学習で極限を扱い，導関数の応用として接線の傾きを学習するという扱いになっている。この扱いに対応して，教科書では，微分係数は接線の傾きを表すことを図とともに視覚的に理解させる工夫がなされている。現行の微分係数の図形的意味の学習における指導は，微分係数で極限を扱う際に，微分係数が接線の傾きを表すことを図とともに視覚的に理解させようとしているものと言える。

この現行の微分係数の図形的意味の学習における指導を勘案すると，生徒が微分係数の図形的意味を理解していくには次のような段階に整理できると考えられる。

まず，微分係数の$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$の中に平均変化率$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$があることを確認する。そして，平均変化率$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$がグラフにおいてどのように表されるか考える。次に微分係数の定義にあるhが 0 に近づいていく($h\to 0$)ことは，グラフ上でどのような意味を持つか考えていく。その際，グラフで表された平均変化率と関数$f(x)$の交点を点 A，点 B とし，点 A を点 B に近づける動作を行う(図 2 の(A))。この点 A を点 B に近づけるとき，直線 AB がどう変化するか考え，また，直線 AB に近づく直線があることに気付く段階がある(図 2 の(B))。最後に生徒は，近づく直線が微分係数を表していると考える段階に到達すると考えられる。この段階

に至るとき，生徒は図形的に接線の存在に気づくと考えられる。最終的に生徒の理解が直線 AB に「近づく直線」が微分係数であることに気付くことで,「近づく直線」が接線の傾きも表していると認めるのではないかと考えられる。この段階をまとめると以下の 8 段階になる。

表 1　教科書の展開にみられる微分係数の図形的意味の理解段階

第 1 段階	微分係数 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の中にある $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が何であるかを確認する段階
第 2 段階	第 1 段階で確認した平均変化率がグラフにおいてはどの図形で表されるのかを考える段階
第 3 段階	第 2 段階で考えた図形が図 1 の(A)にある直線 AB であることを確認する段階
第 4 段階	$h\to 0$すなわち，hを限りなく 0 に近づけるということは図 1 の(B)においてどのような図形的意味を持つのかを考える段階
第 5 段階	第 4 段階で考えた $h\to 0$ の図形的意味は，点 A を点 B に限りなく近づけることを確認する段階
第 6 段階	点 A を点 B に限りなく近づけるとき, 直線 AB はどのように変化するかを考える段階
第 7 段階	第6段階で直線ABの変化を考えていく中で, 直線 AB が近づく直線があることに気付く段階
第 8 段階	第 7 段階でその存在に気づいた「近づく直線」(接線) の傾きが，1 の微分係数の図形的意味であると認める段階

生徒はこのような段階を経て微分係数の図形的意味を理解していくと考えることができる。数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する円の接線や数学Ⅰ「2 次関数」で学習する放物線の接線は,「極限の考え」を必要としないが，数学Ⅱ「微分の考え」で扱われる曲線の接線は「極限の考え」を必要とするものである。この二つの接線の捉えの違いを，数学史をみていくことにより明確にしていきたい。

4.　数学史を用いた授業実践

4.1.　接線における極限の概念

塚原(2002)は,「ギリシャの初等幾何学では，幾何学的曲線として認知されていたのは，直線と円だけであった」と述べており，この図形の性質は数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する。このギリシャの初等幾何学から更に一般的な曲線の接線について求めるために考えられたのがデカルトの接線の求め方である。塚原(2002)はデカルトの接線の求め方を以下のように述べている。

「デカルトは，幾何学的な条件を，代数的な記号で表し, それを機械的に変形すれば，一般的な解法が得られるという，画期的な方法を発案した。いわゆる解析幾何学である。たとえば，放物線について接線の方程式を求める際には，放物線と直線とが一点を共有するという幾何学的な条件を，方程式の重解条件に置き換えて，機械的に処理する事ができる。これはまた，生徒にとってなじみ深い方法である。」(p.142)

デカルトの方法では，放物線でも円の接線を求める方法と同じく一点を共有することで機械的に処理できるとしている。次に，デカルトの方法を受けたフェルマが求めた接線について塚原(2002)は以下のように述べている。

「フェルマは，接線の傾きに着目し，無限小を用いたダイナミックな方法を考え付いた。すなわち，接線を曲線上で限りなく接近する 2 点 P，Q を通る直線として捉えることによって，結果的には接線の傾きを求

めようとしたのである。このことは，現代的には微分係数の考えに相当するものである。(中略)さらに，最初は異なる視点で考えられてきた瞬間速度と接線の傾きとが，運動的・局所的な視点，すなわち微分係数という新しい概念によって，統一的に捉えるようになる。」(p.143)

フェルマの方法は，デカルトとは異なり曲線上にある2点を限りなく近づけていくことで直線を捉えようとしたものである。

デカルトは円以外の曲線における機械的に接線を求める方法を確立したが，そこに極限の考えは用いられていなかった。デカルトの方法をさらに一般的な方法へと転換したのが，フェルマの方法である。ここで2点P，Qが限りなく近づいていくことで直線となる発想が生まれたのである。

塚原(2002)は上記に述べたデカルトやフェルマの考えを取り入れた学習指導案を作成している。次にその概要を述べる。

4.2. 塚原(2002)の学習指導案の概要

塚原(2002)は，微分係数や接線の授業における数学史を取り入れた学習指導案を作成している。塚原(2002)が作成した授業の流れは，以下の通りとなっている。(p.142)

① 接線の傾きと微分係数との関係の理解
② 接線法が作られていくときの視点の理解
③ 微分係数によって,瞬間速度を求める方法と,接線の傾きを求める方法とが統一されることの理解
④ 概念の形成過程における数学的な見方・考え方のよさの感得

①では円の接線について復習し，②において視点を数学史に向けている。ここではデカルトの捉え方を用いている。③において円の接線やデカルトの静的な捉え方とは異なるフェルマの動的な捉え方を述べ，④において現代の微分の基礎となるニュートンやライプニッツの定義の原型となることを示している(図2を参照)。 塚原(2002)はこの4つの段階を経て微分係数と接線の理解が深まると考えている。この4段階を表にすると，次のようになる。

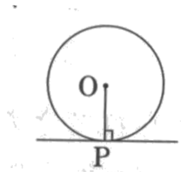
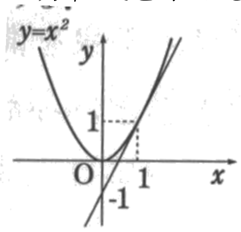
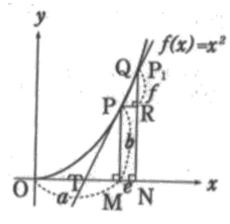
学習活動	数学史の活用の視点
①円と直線との関係に着目する。 	①ギリシャ初等幾何学 発想…1点を共有 方法…半径に垂直な直線を引く。→図形の性質を利用
②判別式を用いて接線の方程式を求める。 	②デカルト解析幾何学 発想…1点を共有 →重解条件の利用 方法…幾何学上の問題を代数的に解決(画期的方法)
③判別式が使えない→新しい考えが必要→平均変化率の極限値として,接線の傾きが求められる。 	③フェルマの接線法 発想…QをPに近づける→極限法の利用(運動的・局所的見た方) 方法…代数的操作 傾きを $\{f(a+e)-f(a)\}/e$ として $e\sim0$ とかんがえてよい→微分係数の考えの原型

図3:微分係数や接線の授業の流れ(塚原，2002，p.144)

4.3. 生徒の極限の考えの理解の様相

塚原(2002)は，数学史を用いた授業を実施した後，生徒に対して，3つの質問を行っている。質問に関しては記述式で回答する形式となっている。ここでは3つの質問の内,「数学的な見方・考え方に関して」についての質問と生徒の回答を述べる。微分

係数と導関数に関する質問と生徒の回答は以下の通りとなっている。

質問 C：授業で，数学的な見方・考え方のよさを感じましたか。

〇接線を求めるときの考えで大切な数学的視点は局所的と瞬間的。

〇公式の成り立ちの説明があったので，印象に残りやすい。公式を忘れても思い出しやすい。

〇どんな意味でその計算が成り立つのかが分かれば，他の問題にも応用できると思った。(p.189)

質問 C に対して生徒は公式の成り立ちや意味に意義を感じているが，微分係数の図形的意味の理解に意識が向けられているかは定かではない。

次の節では，これまで述べてきたことを基に，微分係数の図形的意味における極限の考えを生徒が理解していくにはどのような段階があるのかを明らかにしていき，考案した調査授業とその実際について述べる。

5. 調査授業の実践と分析

5.1. 調査授業の概要

調査授業の概要について述べる。

【調査研究の概要】

・単元：数学Ⅱ「微分・積分の考え」

・対象：福島県 S 高等学校　文系クラス
　第 2 学年 1 組　8 名
　第 2 学年 2 組　25 名

・実際の調査授業の日程等

9 月 14 日(月)：瞬間の速さの授業
　16 日(水)：微分係数と接線の授業
　17 日(木)：曲線の概形についての授業
　18 日(金)：定積分の授業

上記に示した通り，対象を高等学校第 2 学年として調査授業は単元「微分・積分の考え」で行った。調査授業は，考案した学習指導案を基に全 4 時間(2 クラス合計 8 時間)で実施した。

調査実践の目的を，「高等学校数学Ⅱ「微分・積分の考え」における極限が扱われる瞬間の速さ，微分係数と接線，面積の学習に着目し，生徒の極限に対する理解がどのように形成されていくかを明らかにすること」とした。調査授業の方法は，高等学校数学Ⅱの教科書を概観し，この単元の学習の流れについて考察することで，それぞれの学習での理解段階を構想する。次に瞬間の速さ，微分係数と接線，面積の学習における生徒の理解の変容が実際の授業で見られるか明らかにするために，教科書にみられる微分係数の図形的意味の理解段階をもとに学習指導案を作成する。授業者がその学習指導案をもとに授業を実施するというものである。

本稿では，9 月 16 日(水)に行った微分係数と接線の授業を取り上げ，以下に述べる。

5.2. 実践の授業の流れ

生徒が表 1 のような理解の変容を辿るのかみるために，微分係数の図形的意味の理解段階をもとに学習指導案を作成した。学習指導案の流れと実際の授業の展開は以下に示す。

微分係数と接線の授業の目的は，平均変化率の極限値が微分係数であり，微分係数が接線の傾きになることを図形的に捉えさせることである。そのため授業ではまず，平均変化率と微分係数の復習を行う。次に関数$f(x)=x^2$を用いて，瞬間の速さを図形的に考える活動を通して，平均変化率の極限値が微分係数として求められることを生徒に気付かせ，微分係数が接線の傾きになるだろうと考える生徒の理解の様相をみていく。

また事前のアンケートでは，関数$f(x)=x^2$の 2 秒後の瞬間の速さをグラフで表すとどこに表れるかという問いに対して，「(2，4) の点を通る」「(2，4) の点」で

あるという解答をする生徒が多く見られた。生徒の実態を踏まえて，実際の授業では関数$f(x)=x^2$のグラフを模型として作り，「2秒後の瞬間の速さがグラフ上にどのように表されるか」と問い，生徒に模型を用いて表してもらうことを含めることとした。以下が実際に行われた学習指導案の流れである。

1. 平均変化率と微分係数について，プリントを用いて復習を行う。
2. 関数$f(x)=x^2$の 1~2 秒後の平均変化率はグラフ上でどのように表されるか考える。
3. 関数$f(x)=x^2$の 2 秒後の瞬間の速さはグラフ上でどのように表されるか考える。
4. グラフ上で表された瞬間の速さ(接線)は微分係数とどのように関わるのか。

分析・考察については次のような方法で行った。調査授業の実践の様子を固定カメラ一台，移動用一台の計 2 台のビデオカメラで撮影し，授業実践におけるプロトコルデータを取る。授業後にアンケート調査を行い，その結果によってはインタビュー調査も行う。これらのデータを基に，生徒の微分係数の図形的意味の理解の様相について分析・考察していく。

5.3. 微分係数と接線の分析・考察

まず，生徒が微分係数の図形的意味を考える上で，どのような様相を示したのかということを場面ごとに述べる。それを踏まえて，生徒が微分係数の図形的意味を理解していく段階を考察する以下，授業実践データであるプロトコルを用いることにする。プロトコルにある表記として，s1，s2 などは生徒，T は授業者を表している。

①関数$f(x)=x^2$の 1~2 秒後の平均変化率をグラフ上で考える場面

平均変化率や微分係数の復習を終えた後，授業者が黒板に$f(x)=x^2$のグラフを書いて「このグラフでは(平均変化率が)どういう風な表れ方をするのか。」という発問を行った。生徒は平均変化率がグラフ上でどのような意味を持っているか次のように説明している。

T	(平均変化率の)分母って何？
s1	1 秒から 2 秒だから。
s2	時間？

授業者と生徒のやり取りから，生徒は平均変化率がyの増加量／xの増加量であると，捉え切れていない様子がみられた。

授業者は次にグラフ上に 1 秒後と 2 秒後のときをプロットし，「(分子の)3 というのは何だ？」と発問している。その発問に対する生徒の反応は以下の通りである。

s3	グラフの傾き。
T	何の傾き？
T	傾きでいいんだけど，傾きって言ったら何なの普通。
s3	2 点を通る直線。

この場面での授業者と生徒のやり取りから，生徒は平均変化率がグラフ上で 2 点を通る直線であると考えていることが分かる。

②関数$f(x)=x^2$の 2 秒後の瞬間の速さをグラフ上で考える場面

この場面では，次に，2~3 秒後の平均変化率を$f(x)=x^2$の教具を用いて考えさせている。授業者が「2~3 秒後の平均の速さはどうなるか。」と発問し，生徒は前に出てきて，yの値が 4~9 になるグラフ上の 2 点を通ると指示棒を用いて$f(x)=x^2$の教具に表した(図 4)。

図 4:平均変化率を示す生徒の様子(2 組)

しかし，次に 2 秒後の瞬間の速さを教具を用いて考えさせると，生徒の何人かはx軸に平行になるような直線($x=4$)を表した(図 5)。

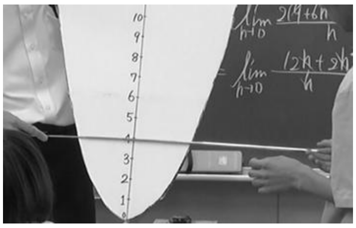


図 5:瞬間の速さを示す生徒の様子(2 組)

生徒たちの反応から，生徒は平均変化率と同じように 2 点を通る直線であると考え，その直線の傾きがx軸と平行になると考えているとみることができる。その後，授業者が平均変化率はyの増加量/xの増加量であると示しながら，「xの幅が狭まったら直線がどうなっていくか」と発問したところ，生徒は以下のように回答している。

T	(xの値) 2~3 がどんどん狭まっていったら直線はどう表せる？
s1	(縦に)立っていく。

生徒は平均変化率が 2 点を通る直線になると理解できているようであったが，瞬間の速さについて考えるとき, xの幅が狭まるのではなく増加すると考えてしまう生徒の様子が見られた。授業後の瞬間の速さをグラフ上に表すアンケートの設問で，生徒は「xの幅が小さくなるから, 一直線になると思った」と回答しており, xの幅を 0 と考え，y軸に平行な直線を示したと考えられる。

③グラフ上で表された瞬間の速さ(接線)について考える場面

この場面では，生徒が$x=2$のときに曲線と接するように直線が引けることを確認した後，授業者は「微分してxに 2 を代入したこれは何か。」という発問を生徒に行っている。この発問に対して，生徒は接線の傾きが微分係数であるということに気付いたようである。

次に，調査授業でみられた生徒の反応から，微分係数の図形的意味をどのような理解段階を示すか考察していく。

④調査授業の考察

平均変化率を図形的に考える場合，授業者とのやり取りでyの増加量/xの増加量であると捉えていない様子がみられた。しかし，次に授業者が黒板に書いたグラフ上に$x=1,2$のときをプロットすると，生徒は平均変化率がグラフ上で 2 点を通る直線であると答えた。その後，2~3 秒後の平均変化率を指示棒を用いて教具に 2 点を通る直線として表していることから，生徒は平均変化率がグラフ上の 2 点を通る直線であると考えていることが分かる。次の授業者の発問から，生徒は瞬間の速さの図形的意味を考えていった。何人かは指示棒をx軸に平行になるような直線($x=4$)として表しており，直線に傾きがないと考えている。このことから，生徒は 2 点を通る直線になるということは理解できていたが, xの幅が狭まるのではなく，xの幅が 0 と考え，y軸に平行な直線を示したと考えられた。一方，次の授業者の発問により, xの幅が狭まるのではなく増加すると考えてしまうという生徒の様子も見られた。

したがって，生徒は平均変化率の図形的意味は理解しているが,「極限の考え」を用いての微分係数の図形的意味の理解にまでは至っていないと考えられる。

次の第 6 節にて，調査授業でみられた生徒の理解の様相から微分係数の図形的意味の理解段階を考察していく。

6. 微分係数の図形的意味の理解段階

第 5 節で述べた分析・考察から，生徒の微分係数の図形的意味の理解段階は，表 1 の理解段階と異なる段階を示すことが分かった。最初の第 3 段階までは平均変化率の図形的意味を含むため，生徒の反応から表

1 の 3 段階まで理解段階がみられた。その後の極限の考えを用いる微分係数の図形的意味の理解では，生徒の平均変化率との理解の差がみられた。授業後のアンケートで生徒は 2 秒後の瞬間の速さの直線が縦や横と考えてしまう理由として「xの幅が小さくなるから，一直線になると思った」と答えている。これは，平均変化率は 2 点を通る直線，瞬間の速さは 1 点のみを通る直線と考え，瞬間の速さが接線の傾きだと意識できない様子がみられた。これらのことから，接線の傾きが微分係数の図形的意味であると考えるまでの段階は次のようになる。

表 2　調査授業を受けて考えられる微分係数の図形的意味の理解段階

第 1 段階	微分係数 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の中にある $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が何であるかを確認する段階
第 2 段階	第 1 段階で確認した平均変化率がグラフにおいてはどの図形で表されるのかを考える段階
第 3 段階	第 2 段階で考えた図形が図 1 の(A)にある直線 AB であることを確認する段階
第 4 段階	$h \to 0$すなわち，hを限りなく 0 に近づけるということは図 1 の(B)においてどのような図形的意味を持つのかを考える段階
第 5 段階	第 4 段階で考えた$h \to 0$の図形的意味を，意識できない段階
第 6 段階	第 5 段階で直線 AB の変化を考えていく中で, 直線 AB が 1 点を通る直線に近づいていき，hの幅が 0 になると考える段階
第 7 段階	第 6 段階で直線 AB が 1 点を通る直線に近づくと考え，$f'(a)$によって直線 AB の傾きが決定されることに気付く段階
第 8 段階	第 7 段階で気づいた(接線の)傾きが，1 の微分係数の図形的意味であると認める段階

第 1 段階から第 3 段階は①の場面での生徒の反応から，平均変化率の図形的意味は理解していることが明らかになった。第 4 段階においては, 生徒は②の場面でxの幅を狭めていくことを考えている。しかし，図 5 から実際に生徒が表したグラフはx軸に平行な直線であった。これにより，x軸の幅を意識して狭めることができない生徒の様子がみられた。また，xの幅を狭めることを意識している生徒の中には, xの幅がないと考えて曲線に接するような直線ではなく, y軸に平行な直線を考えている様子もみられた。このことから，x軸の幅を意識して狭めることができない段階があり, x軸の幅を意識して考える際に，x軸の幅を 0 と考え，曲線に接しないような直線を考える段階がみられた。

瞬間の速さの理解段階において,「極限の考え」を獲得するときに，瞬間の速さにおける時間幅を 0 と考えることができない実態があったが，微分係数の図形的意味の理解段階においては，xの幅がないと考え，接線としてy軸に平行な直線を考えるなど，x軸の幅を意識して狭めることができない生徒の実態が認められた。

7.　まとめと今後の課題

本稿では数学Ⅱ「微分の考え」において接線で必要となる極限の考えを明らかにし，極限の考えを用いた生徒の微分係数の図形

的意味に関する意味理解の理解段階を考察した。

第 2 節で述べた先行研究を踏まえて，第 3 節では学習指導要領と教科書の記述から微分係数の図形的意味について明らかにし，教科書を参考にして微分係数の図形的意味の理解段階を考察した。

第 4 節では，塚原(2002)が作成した数学史を取り入れた学習指導案を取り上げ，生徒の微分係数の図形的意味の理解の様相を述べた。その結果，数学Ⅱ「微分の方程式」の円の接線の捉え方と数学Ⅱ「微分の考え」の接線の捉え方で混同が起こっている実態を認めることができた。

第 5 節では，第 4 節で得られた示唆をもとに実施した調査授業の分析と考察を述べた。その結果，生徒は平均変化率の図形的意味は理解していると考えられるが，極限の考えを用いる微分係数の図形的意味までは理解まで至っていないと考察することができた。

第 6 節では，第 5 節を踏まえて微分係数の図形的意味の理解段階を考察した。その結果，生徒は瞬間の速さで必要となる極限の考えを用いることはできるが，曲線上を動く点の動的な動きを一方向のみで考えていることが明らかになった。また，接線の傾きを求めるときに必要となる「極限の考え」を用いることができない実態もみられた。これにより，数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する円の接線や数学Ⅰ「2 次関数」で学習する放物線の接線の捉え方と数学Ⅱ「微分の考え」で扱われる曲線の接線の捉え方との差を，理解しにくい生徒の状況が明らかになった。

今後の課題は，上に示した極限の考えの理解の困難さを克服させる指導について検討していくとともに，数学Ⅱ「微分・積分の考え」の指導改善を目指した研究を更に進めていくことである。

8. 引用・参考文献

Boyer,C.B.(1949). The History of the Calculus and its Conceptual Development.New York:Dover.

Edwards, Jr.C.H. (1937). The Historical Development of the Calculus, NewYork: Springer-verlag.

片寄恵理奈．(2015).「数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する一考察-瞬間の速さの理解段階に着目して-」．日本数学教育学会第 48 回秋期研究大会発表集録．pp．275-278.

片寄恵理奈．(2015).「高等学校数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する一考察」．上越数学教育研究第 30 号．pp.85-92.

文部科学省．(2009)．高等学校学習指導要領解説　数学編．実教出版.

中村幸四郎．(1980)．近世数学の歴史-微積分の形成をめぐって-．日本評論社.

大塚明彦．(2009).「平均の速さから瞬間の速さへ」. 教育科学/数学教育. 1 月号. pp.60-64.

沖山義光．(2004).「(4)数学(1)コース「円すいの体積はなぜ円柱の 3 分の 1 なのでしょう」」．お茶の水女子大学附属高等学校．研究紀要 Vol.48 pp.83 -84.

坂井武司．(2015).「小・中の連続性に基づいた極限の考えの素地指導～学習内容の本質に迫る教材開発～」. 学校数学研究会誌　学校数学研究　Vol.23　No.1．pp.5-11.

高橋陽一郎他．(2013).『詳説数学Ⅱ』．啓林館.

高橋陽一郎他．(2013).『諸説数学Ⅲ』．啓林館.

塚原久美子. (2002).「数学史をどう教えるか」. 東洋書店.

山口直也．(2013).「数学Ⅱ「微分の考え」における『極限を用いない微分法』を用いた指導の可能性の検討」．日本数学教育学会第 46 回秋期研究大会発表集録. pp.189-192.