

数学的問題解決における「活用」に関する研究

—「活用」の「探究」に関する側面に着目して—

吉田 万里

上越教育大学大学院修士課程2年

1. はじめに

本研究は，数学的問題解決の授業における学習の過程で出現する「活用」の様相を明らかにしようとするものである。「活用」には「習得」に関する側面と、「探究」に関する側面があり、「活用」を行うことで数学科の目標に関連して広く展開を進めることができる。このことは，平成20年に公示された中学校学習指導要領解説（数学編）「数学的活動と学習指導要領改訂の基本的な考え方」で，習得したことを活用して探求することについて，「習得」，「活用」及び「探究」を相互に関連させる展開を志向していくというこれからの方向性として明示されている。

このことについて，伊達（2012）は，「授業を知識・技能の習得の場とだけに捉えることからの脱却を図り，自らの中に数学をつくっていく授業を行っていくことを目指す，これからの学校数学の在り方を示唆するものとして高く評価できる。」（p.14）とし，「習得」，「活用」及び「探究」を相互に関連させる展開に対し次のように述べている。

「習得，活用及び探求はこの順番に進むだけではない」と断ってはいるが，「習得したことを活用して探求する」という記述にみられるように，「習得→活用→探求」という順序のある活動が，今回の改訂の基本に

据えられている。筆者はさらに踏み込んで，これからの学校数学には，「探求の過程で現れる知識を活用して習得する（身に付ける）」，即ち「探求⇔活用⇔習得」の活動が必要であり，何よりも重視されなければならないと考えている。」（p.14）

このことから，習得したことを活用して探求することだけでなく，探究を行う上で必要となる知識を習得するために「活用」を行うことが，授業を知識・技能の習得の場とだけにしないためにも必要であると考え，本稿では「活用」の「探究」に関する側面に着目し，「活用」の様相を明らかにすることとした。児童・生徒が数学教育における問題を解決していくという数学的問題解決において生じる「探求」の過程で現れる未熟な知識（未だ既に習得された知識とはなっていない知識）はどのようなものがあり，またその未熟な知識のどのような「活用」が行われるのか，更にその「活用」によってどのような知識・技能が「習得」されるのかを考察していく。

この目的を達成するために，考察の方法として，高等学校第1学年を対象とした調査研究を用いて分析することとした。まず，数学的問題解決の授業とはどのようなものであるかを考察し，調査授業を考察に用いる妥当性を示す。次に，数学的問題解決における「活用」の「探究」に関する側面に

ついて焦点を当てていく。そして、調査研究から「探究」の活動で現れる「活用」の様相を浮き彫りにし、得られた新たな知識がどのようなものであるかを考察する。

2. 数学的問題解決の授業について

この節では、分析対象とする調査授業が研究目的に照らし妥当であるかを示すために数学的問題解決が行われている授業について考察する。

問題解決の活動を通じた授業の様相として、Polya. G.の4つの様相などが挙げられるが、問題解決の方略を取り入れるだけでは、具体的な問題に対する解決との差を明確にすることは難しい。教師から一方的に提示された問題も、問題を解決する必然性や理由が見えなければ、たとえ生徒にとって解決を阻む困難性が存在していても従属的な活動になるだろう。もしくは、解決することを放棄してしまう可能性さえ考えられる。受け身の学習でないことが求められることから、数学的問題解決が行われている授業では、学習者に主体性があることを前提として考えることとする。

その上で、R. Charles, F. Lester (1982)による問題分類、岩崎 (1992)による問題解決過程モデル、及び山本 (2015)の問い方についての思考メソッドの様相などから、扱う問題、問題を解決するための活動、活動による結果の3つの点に絞り、数学的問題解決が行われている授業が成立する条件をまとめることとした。以下で示すものは、3つの点において少なくとも必要であると考えられるものである。

【問題】

- ・ある特別の条件で解決が求められている。
- ・すぐには、解法が見つからないもの。

【活動】

- ・認識した問題を検討するための視点を絞る。

- ・問題解決の方略を分析する。
- ・問題解決の結果の妥当性を判断する。

【結果】

- ・新たな世界が切り開かれた。

本稿では、上記を数学的問題解決が行われている授業の成立条件として捉えることとする。

3. 数学的問題解決の授業における「活用」について

数学的問題解決における「活用」について、「活用」の「探究」の側面に着目していくことから、本稿における「探究」の定義を先に述べることとする。

(1)「探究」について

本稿における「探究」はDewey. Jの考えを基に定義することとした。

Dewey. J. (1938)はLogic: The Theory of Inquiryにおいて「探究 (Inquiry)」を次のように定義している。

「探究とは、不確定な状況を、確定した状況に、即ちもとの状況の諸要素を一つの統一された全体に変えてしまうほど、状況を構成している区別や関係が確定した状況に、コントロールされ、方向づけられた仕方で転化させることである。」(デューイ, 上山春平編, 魚津郁夫訳, 1980, pp.491-492)

上記における「探究」は、「活用」による思考力等の育成と「活用」による知識の変容(習得)を目的としているものである。このことから、Dewey. J. (1938)の定義では、主体性や活動による転換について重視されており、総合的な学習など特別な時間を軸としているわけではないということが読み取れる。また、不確定な状況であった知識は、活動により、確定された状態へと変容することから、不確定な状況によって生じた「探究」から「活用」という活動を通すことにより、確定した状況へと変

容した知識を「習得」する、と「探究」「活用」「習得」の関係を述べることができる。

上記における Dewey. J. (1938) の定義と前章で述べた数学的問題解決の成立条件などを踏まえ、本稿における「探究」の捉えを、「不確定な状況を確定した状況にコントロールされ方向づけられた仕方で転化させること」とした。

(2) 「活用」について

「探究」「活用」「習得」の関係からみたととき、これら3つは個別に成立するのではなく、お互いに関連しあうことから、「習得→活用→探究」や「探求→活用→習得」といった学習の流れが存在することとなる。

「習得→活用→探究」のとき、「活用」は、問題を解決するために必要な知識・技能を「習得」したものなどから問題に当てはめること、つまり問題に適用させられるかが求められる。

「探求→活用→習得」のとき、「活用」は、「習得」のために行われている。始まりが「探究」からであり、「活用」することでまだ身に付いていない知識（未熟な知識）を確定したものへと変え、新たな知識を身に付けることとなる。このことから、「探求→活用→習得」の活動において、問題に適用できるかということは求められていないといえる。

これらのことから、「活用」の「探究」に関する側面から見たとき、本稿における「探究」「活用」「習得」の関係は、「習得→活用→探究」ではなく、「探究→活用→習得」の活動であるといえる。

(3) 未熟な知識について

また、「探究→活用→習得」の活動において、「活用」は、まだ身に付いていない知識（未熟な知識）を使うことで新たな知識として身に付けるために行われることとなると述べ、身に付いていない知識を未熟な知識として称したが、身に付いていない知識

が全て未熟な知識となるわけではない。

まず、未熟な知識とは、「探究」→「活用」→「習得」の活動が行われるとき、知識を習得するために行われる「活用」において使われる知識である。

「習得」→「活用」→「探究」の「活用」の際に使われる知識との違いは何であるかとされたとき、一つ目の理由は、「習得」→「活用」→「探究」における「活用」では、問題を解決するために当て嵌まる知識を適用させることが求められるということである。「探究」から始まるときの「活用」において使われる知識は、既習の問題において解決された事実であり、習得した結果、問題に対して適用できることがわかることとなる。つまり、「探究」から始まる「活用」で扱う知識は、その時点では、まだ適用することができない知識であるといえる。

では、覚えていなかったり、理解できていなかったりするために知識を適用できない場合、未熟な知識となるのか。このとき、覚えていない知識、理解できていない知識というものは、習得できていない知識と捉えることができる。

しかし、未熟な知識は、現在取り組んでいる問題において適用できるか否かが不明であり、活用を通して、習得している事実の適用できる範囲を広げることとなる。つまり、未熟な知識として知識は常に獲得されて、活用の範囲を広げていくことによって未熟な知識がより良い未熟な知識に変容していくということである。

このことから、「習得」から始まる「活用」で用いる知識が単に覚えていなかったり、理解できていなかったりするものであっても、その知識は習得ができていなかったものであると捉え、未熟な知識と捉えることはしないものとする。

本稿では、「活用」の「探究」に関する側面として、この未熟な知識の変容から「活

用」の様相について分析することとする。

4. 調査研究から見られる「活用」

本章では、分析の対象とした授業の概要を述べ、データの分析をしていく。

(1) 調査授業の概要

調査は、2015年9月から10月にかけての4週間、群馬県立高等学校普通科第1学年の「場合の数」の単元において行った。教科書における応用問題に相当する問題を作成し、その問題を学習前に解くことで、「探究→活用→習得」となる授業を提案し、実践した。

本稿では、「同じものを含む順列」における学習を対象に分析を行う。

この学習における目的は、次の2点とされている。

- ・重複順列との違いについて理解する。
- ・色々な場合の数の求め方を応用して求めることができる。

この目標を踏まえ、学習前に提示する問題を以下のものとした。

赤玉が3個、青玉が2個、黄玉が1個、入っている袋から玉を取り出して並べていくとき、取り出し方向通りありますか？

提示した問題の解決後は、通常の授業と同様に学習を進めてもらった。

この学習において、数学的問題解決が行われているか判断するために、与えられる問題、活動、それらによって得られた結果からみると次のようなことがいえる。

【問題】

- ・これまでに習得した順列の考えをそのまま用いても解決できない

【活動】

- ・これまでの順列の総数の求め方による方略の分析
- ・組合せの考えを用いた方略の分析
- ・順列の総数を求める際に組合せの考えを用いる

【結果】

- ・順列の総数において組合せの考えを用いて求めた

上記のことについて、問題においては、学習前に教科書における応用問題に相当する問題を提示しているため、解決のための知識が未熟なことから、すぐには問題を解決できないということがいえる。

また、解決に至るにあたり、不確定な状況を確定した状況にコントロールされ方向づけられた仕方では転化させることから方略の分析、妥当性の判断が行われる。

さらに、教科書の応用問題に相当する問題を学習の始めに解くことで、新たに習得する知識の到達点を把握することとなる。これにより、提示した問題の解決後に示される問題において検討するための視点を絞ることができることにもなるといえる。

そして、順列の総数を求める際に組合せの考え方をを用いることがあるという新たな知識の習得することで、それまでの知識からの変容が起こり、新たな世界が切り開かれたと捉えることができる。

これらのことから、数学的問題解決が行われている学習であると判断し、分析を進めることとする。

(2) データの分析

本稿では、調査研究のプロトコルを基に「活用」される未熟な知識となるもの、「活用」している場面、「活用」によって身に付いたものの3つの視点から分析を行うこととする。

①「活用」される未熟な知識

まず、対象とする授業において「活用」される未熟な知識について述べる。

まず、この学習においては、同じものを含まれている場合の順列について新たに学ぶこととなる。このとき、学習における目的から、生徒は同じものを含む順列と重複順列との違いについて理解していないとい

える。

また、順列・組合せにおける生徒の既習の学習内容は次のことが挙げられる。

- ・ n 個から r 個とる順列
- ・ 円順列
- ・ n 個から r 個とる重複順列
- ・ n 個から r 個とる組合せ

上記に挙げたものについての知識は既習の内容であることから、習得している知識と捉えることとする。

さらに、問題を解決する上では、次の 2 つのことを考える必要性があるといえる。

- ・ 同じものを含む順列の総数を、すべて異なると考えた場合の順列との対応関係
- ・ 同じものを含む順列の総数を、組合せの考えを用いて求める方法

この 2 つは、まだ習得していない知識であり、この学習によって習得を期待する知識でもある。

これらのことから、この学習における未熟な知識は、「順列の総数の求め方」であるとした。

②「活用」している場面

「活用」の場面を見る上で、授業の過程を次のようにあらわすこととした。

表 1. 授業の過程

既習の知識	「並べる」ときは、順列の考えを用いることで総数を求めることができる
発問(1)	赤玉が 3 個、青玉が 2 個、黄玉が 1 個、入っている袋から玉を取り出して並べていくとき、取り出し方何通りありますか？
場面(1)	同じものを含む順列の総数の求め方の模索する場面
場面(2)	区別のつかないものがあるため、組合せの考え方を用いて解答しよう

	としている場面
発問(2)	${}_6C_3$ は何を表すの？
場面(3)	組み合わせの考え方による解法(${}_6C_3$)において、式で用いる値の意味について考える場面
場面(4)	並べたとき、6 個の場所から赤の 3 個の場所を選択しているから ${}_6C_3$ 通りになることを考える場面
得た知識	同じものを含む順列の総数を求めるときに組合せの考え方を用いる
知識の確認	教科書における練習問題等を解く

上記の授業の過程から、場面(1)～場面(4)における様子をどのような活用が行われていたかに着目し下記で述べる。

【場面(1)の様子】

場面(1)において、発問の「取り出して並べていくとき」という表現から、順列の考え方を用いると判断していると考えられる。このとき、生徒の中には、これまでの「並べていくとき」の知識から樹形図を活用して、答えを求めようとしているものがある(図 1)。

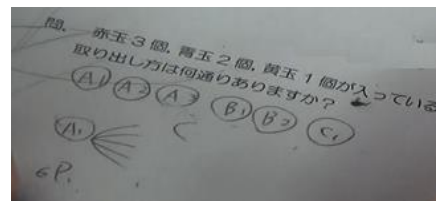


図 1. 樹形図を用いた解法

また、式を用いた解法では、6 の階乗を計算しており、区別がついていない順列を、区別がついている順列と同様に求めようとしていると推測できる。

しかし、解答の数が正答よりも多くなり、

正答へと導かれないことから、生徒は、区別がついていない順列は区別がついている順列と同様に求めることは出来ないという知識を得ることになる。

【場面 (2) の様子】

場面 (2) において、区別がついていない順列は区別がついている順列と同様に求めることは出来ないという知識から、組み合わせの考え方をを用いた活動が行われている。

ただし、このとき生徒の中には、組合せの考え方をを用いることだけ把握しており、取るものと取られるものの関係を理解していないと考えられるものもみられた (図 2)。しかし、組合せの考え方から、区別のつかないものの数の階乗で割ることが行われている。(図 3)。

これらのことから、順列の総数を求める場合であっても組合せの考えを用いるという知識を得たといえる。

図 2. 組合せの考えを用いた解法 1

図 3. 組合せの考えを用いた解法 2

【場面 (3) の様子】

生徒はこれまでの組み合わせの知識から、

6 個の並べ方として、 ${}_6C_3 \times {}_3C_2 (\times {}_1C_1)$ の解法で求められることを得ている。そして、解法の式が正しい生徒が多いことから、教師は解法における正しい式を全体に向けて示している。

しかし、教師の発問 (2) によって、 ${}_6C_3$ の何から何を取っているのかについての知識が未熟であることが捉えられる。

場面 (3) において、 ${}_6C_3$ の意味について説明を求める活動が行われている。

この活動の中で、次のような生徒の考えがみられた。

- ・ ${}_6C_3$ は赤玉を表す
- ・ ${}_6C_3$ は赤玉の出る確率
- ・ 3 色あるから最初に出した時に赤玉が出るのが ${}_6C_3$ 通り

これらの生徒の考えから、生徒の知識は、袋の中にある玉、6 個からそれぞれの色の個数を取り出すので組合せの公式を用いればよい、というものであったということが考えられる。

さらに、6 という値と、3 という値が ${}_6C_3$ という計算の中で何を意味しているかを把握していないことから、生徒は、問題文に存在する値を理解しないままに、既習の公式に当てはめることで、答えに近づけているということや、同じ式を用いることから用いる値についてもこれまでの学習と同様の意味で捉えていることが考えられる。

【場面 (4) の様子】

場面 (4) において、生徒は、袋の中にある玉、6 個からそれぞれの色の個数を取り出すので組合せの公式を用いればよいという知識から、何から何を取り出すのかの説明を行うという活動を通し、並べたときのそれぞれの色の場所を取り出しているため組合せの公式を用いるという知識に変化しているといえる。

生徒は、6 個の玉から 3 個の玉を取り出すことと、6 つの場所から 3 つの場所を選

扱すること違いについて把握していない。

これは、「C ってのは今までは、なんか何個中何個とかだったけど、なんで今回は場所になったの」という生徒の言葉からも推測することができる。

教師は何が ${}_6C_3$ 通りであるかを繰り返し問うことで、同じものが含まれる時の並べ方について、既習の組合せの考え方との違いを考えさせている。また、 ${}_6C_3$ が「並べたときの赤の入る場所」を求めるときに用いることについて、生徒の発言には次のものがみられた。

- ・「色を選んで取っているんじゃないくて」
- ・「6 個あってそのうち 3 個が入る場所」
- ・「6 個のうち、3 個しかないんだよね？赤が 3 だから」

これらの思考過程ののち、教科書の練習問題を改めて解くことで、新たに得た知識について、事実として習得するに至ったと考えられる。そして、生徒は同じものを含む順列において、並べるときの場所を選択するために組合せの考え方をを用いて求めることについての理解に至ったということがいえる。

③「活用」によって身に付いた知識

②の授業の様子からみられる「活用」によって、生徒は新たな知識として最終的に「区別のつかない順列の総数を求める際に組合せの考え方をを用いる」という知識を得たということが考えられる。

まず、提示した問題によって、区別のついた順列と同様の解法では解決できないことから、生徒には「順列の総数の求め方」に対して未熟な知識が生起したと考えられる。その後、上述した活動による知識の変容は、次の①から⑤の流れを取ると考えられる。また、知識の変容は、未熟な知識を <> 内に示した事項に活用することによって起こると考えられる。

①「同じものを含む順列の総数を順列の公式で求めることができる」

< 樹形図や式を用いての計算 >

②「区別できないものがあるので、組合せの考え方をを用いれば求めることができる」

< 式を用いての計算 >

③「袋の中にある玉、6 個からそれぞれの色の個数を取り出すので組合せの公式を用いればよい」

< 組合せの式に用いる値の説明 >

④「並べたときのそれぞれの色の場所を取り出しているため組合せの公式を用いる」
< 同じものを含む順列において組合せの考えを用いることの説明 >

⑤「同じものを含む順列の総数を並べたときの場所を選択することから組合せの考えを用いて求める」

上記の知識の変容から、次のような知識の広がりがあったと考えられる。

- ・順列を求める場合でも、組合せの考え方をを用いる。
- ・組合せの考え方において取り出されるものは具体物だけではない。
- ・同じものの数の階乗の積を分母において計算を行う。

また、習得した事実を、基礎的な問題に活用して解くことで、新たな知識の習得を確かなものにしたと考えられる。

5. まとめと課題

本稿では、高等学校第 1 学年の場合の数の学習を対象とし、場合の数の同じものを含む順列の総数を求める学習において、提示する問題、学習活動、活動による結果から数学的問題解決が行われている授業を提案し、その分析を行った。

学習前に、その学習の範囲における教科書の応用問題に相当する問題を提示することで、順列において組合せの考えを用いることへの探究が生起すると考えられる。

この学習において始めに発生する未熟な知識は、既習の内容から、「順列の総数の求め方」となる。この未熟な知識により、生徒は「同じものを含む順列の総数を順列の公式で求めることができる」と考えていると捉えられる。

未熟な知識を提示された問題を解くとき、解法において用いる値の説明を行うときなどに活用することで、順列において組合せの考えを用いることと、組合せの考えで用いる値の意味を中心とした知識の変容がみられた。

上記の、組合せの考えで用いる値の意味を中心とした知識の変容では、同じものを含む順列の総数において並べたときの場所を取るために組合せの考えを用いることを理解しないまま正しい解答に至る場面が存在した。しかし、解法の意味を理解するための「探究」が行われたため、組合せの考えで用いる値の意味の知識を習得するに至っている。このことから、知識を「習得」する上では、解法の意味を理解するための「探究」も欠かせないものであるといえる。

本稿の成果は概略、次のように言うことができる。「探究」から始まる学習を仕組み、問題の解決に至るための「探究」と解法の意味を理解するための「探究」の2つの活動を起こし、「活用」を通し未熟な知識をよりよいものへと変容させることにより冒頭に述べた「知識を活用して身に付ける」ことができることを明らかにしたことである。

今後の課題は、上に述べた2つの「探究」を生起する発問とそれにより変容していく知識の段階を考察することである。そして、「活用」の「探究」に関する側面を活性化する授業の研究を更に推進していきたい。

[引用・参考文献]

Charles. R, Lester. F. (1982). Teaching Problem Solving : What Why & How. Seymour.

Dewey. J. (1938). Logic: The Theory of Inquiry. Irvington publishers.

伊達文治. (2012). 「「わかるできる数学」から「考えつくる数学」への発展—開平方の歴史に学ぶ数学的活動を事例として—」. 上越数学教育研究. 第27号. 上越教育大学数学研究教室. pp.13-20.

デューイ. 上山春平編, 魚津郁夫訳. (1980). 「論理学—探究の理論」, 『世界の名著48』. 中央公論社. pp.488-506.

岩崎秀樹. (1992). 「問題解決過程の表記論的分析—算数から数学への展開」. 岩合一男先生退官記念出版会(編). 数学教育学の展開. 聖文社. pp.200-211.

能田伸彦. (1995). 「小学校算数実践指導全集 第11巻 問題解決の能力を育てる指導」. 日本教育図書センター.

大谷実. (2009). 「生徒が数学を学ぶ意義や数学のよさを実感できる活用型の教育を」. 教育科学/数学教育. No.615. 明治図書. pp.4-9.

新算数教育研究会編. (1997). 「問題解決の能力が育つ学習指導は、どうすれば成功するか」. 東洋館出版社

安井義貴. (2014). 「算数教育における数学史の活用に関する研究 —主体的な学びを育てる教師の働きかけに着目して—」. 上越教育大学学校教育研究科修士論文(未公刊).

吉田万里. (2015). 「数学教育における文章題の生成に関する一考察—黒表紙教科書の分析を通して—」. 上越数学教育研究. 第30号. 上越教育大学数学研究教室. pp.101-108.

吉田万里. (2016). 「数学的問題解決における「活用」に関する研究 —「活用」の「探究」に関する側面に着目して—」. 上越教育大学学校教育研究科修士論文.

和田日出夫. (1989). 「問題解決の思考と構造」. 東洋館出版社.