上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.51-62

不等式学習の困難性についての研究

坂岡　昌子
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

高校生にとって不等式の学習は必ずしも容易ではないようである. 平成 17 年度に実施された教育課程実施状況調査（国立教育政策研究所, 2007）では,「不等式の性質と一次不等式」についてよくわかったと回答した高校生は 42.4%であり，半数の生徒が理解に不安があることがわかる. 伊藤 (2002) や服部 (2010, 2011) は, 2 次不等式の学習において, その解決の方法（関数的アプローチ・代数的アプローチ）に焦点を当て，学習者の困難性とそれを解消する方法を検討している．高等学校における不等式学習の困難性に関する先行研究では，問題を解決する際の方法についてのものが多い．

一方，中学校・高等学校での不等式は，解くこともあれば，証明することもある．さらに不等式は，大小関係を表したり，関数の変域を表したり，集合を表したりと，様々なところで現れる．そして，不等式がそもそも表現なのか，抽象的な概念なのかといったことも必ずしも明確でない．こうしたことを考えれば，不等式というものを捉えることは，そもそもそう容易なことではないように思える.

そこで本研究では，より基本的な問いに戻り，不等式とはいかなるものか，いかなる性格をもつのかといった問いに対する回答を見つけ，不等式の持つ性格を明らかにしたうえで，学習者の困難性を探る必要があると考えた．不等式の性格とは，不等式が何によって特徴づけられ，いかなる性質をもっているのかといった不等式の本性，不等式が何のために必要となるのかといった不等式の機能などを意味しており，本研究ではこれらを包括的に探る．不等式の性格に焦点を当て研究を進めることで，不等式学習の新たな困難性を明らかにし，不等式学習の困難性を生じさせている要因を明らかにできると考える．したがって，本研究の目的は，不等式とはいかなる性格をもつのかに焦点を当て，不等式学習の困難性を明らかにすることである.

なお，本研究は修士論文作成のために進められたものである．本稿はその要点をまとめたものである．詳細は，修士論文を参照されたい.

２．本研究の理論的枠組み

本研究は,「教授人間学理論」(以下，ATD) (Chevallard, 2006; Bosch & Gascón, 2006) に依拠する．ATD は「教授学的転置理論」から発展して構築されてきた数学教育学の理論である (cf. Bosch & Gascón, 2006). 本研究では，「教授学的転置 (didactic transposition)」という現象を分析する際に用いられる「基本認識論モデル (reference epistemological models)」とそれを記述する「プラクセオロジー (paraxeology)」の概念をとりわけ援用する. 教授学的転置は，様々な社会（正確には institution と呼ばれる）にはそれぞれ異なった数学が存在することを前提とし，数学が一つ

の社会から別の社会へ置き換わることにより，その性格が大きく変化することを示したものである．学校数学の場合には，「学問としての数学」「教えるべき数学」「教えられた数学」「学ばれた数学」が存在すると考え，その過程が図 1 の上部に示されている．これらの数学が，それぞれいかなるものでいかに作り上げられるのか，その仕組みを明らかにすることが主たる研究課題となる．そして，基本認識論モデルを始め，各々の数学を記述する道具がプラクセオロジーの概念である．プラクセオロジーは，不等式であれば不等式に関わる知識や技能がどのようなものか示したものである．そしてそれは，数学的な活動や行為の実践的な側面を記述した「実践部 (praxis)」とその背後にある「理論部 (logos)」からなる．より詳細には，前者は，課題の種類を示す「タスクタイプ (type of tasks)」と課題の解決方法を示す「テクニック (technique)」からなり，後者は，テクニックを生成し説明し正当化する「テクノロジー (technology)」とさらにテクノロジーを生成し説明し正当化する「セオリー (theory)」からなる．したがってプラクセオロジーは，理論的な知識のみならず実践的な営みをも含め，数学に関わる知をモデル化したものである．

３．研究方法

上述の研究目的を達成するために主な研究課題及び方法を次のように設定した．

まず，先行研究では不等式の解き方に関するテクニックを分析・考察しているものが多く，不等式自身に焦点を当てた研究がなされていない．そのため，不等式とはいかなる性格をもつのかを特定し，日本の学校数学での不等式の扱い方を分析することを通して基本認識論モデルを構築した．具体的には，①数学辞典，②数学史，③学校数学を分析することで，不等式とは何かを明らかにし，不等式のプラクセオロジーを特定した．これは，不等式は大小関係を表すだけでなく，範囲や集合を表したり，不等式を解くといったりする扱い方をするため，不等式の性格を整理するためのものである．

次に，わが国において，「教えるべき数学」として指導する不等式としていかなる内容が定められ，いかにして教科書で扱われているのかを明らかにした．構築した基本認識論モデルを視点に，「教えるべき数学」として学校数学における不等式の扱い方，すなわち，中学校・高等学校における不等式の扱い方を，教科書・教授資料を用いて明らかにした．

その後「学ばれた数学」として，その内容を学習者はいかに理解し捉えているのかを分析することで，不等式学習の困難性がより明確になる．そのために，構築した基本認識論モデルを視点に，「学ばれた数学」として不等式学習後の学生にインタビュー調査を行い，収集したデータを分析し，困難性について考察した．そして，学習者の実態や実際の困難

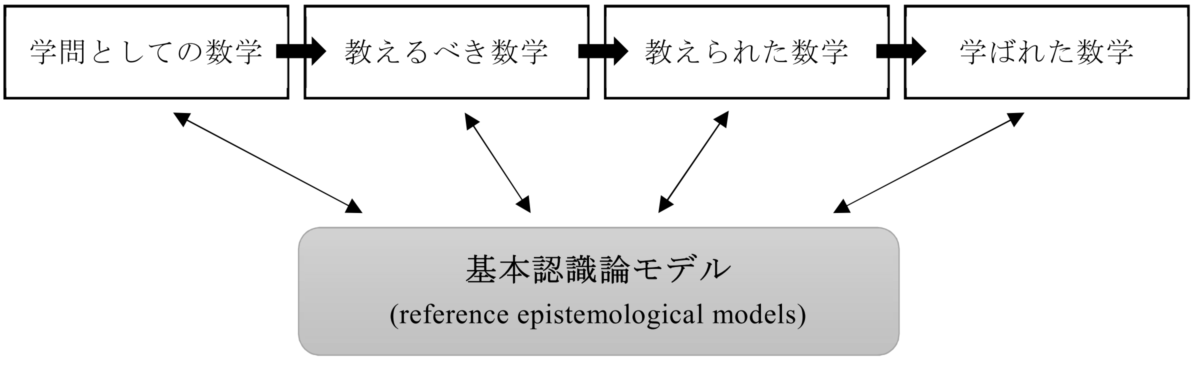

図 1　基本認識論モデル（図は Bosch & Gascón, 2006 を参考に作成）

性を明らかにした．最後に，教育への示唆と今後の課題について述べる．

４．基本認識論モデルの構築

本研究では，不等式についての基本認識論モデルを構築するにあたって，まず，不等式がいかなるものか考察してきた．その結果，不等式が「概念」と「表現」の二面性をもつとの考えに至った．ここで，不等式の「概念」とは「大小関係」であり，「表現」とは「不等号とともに数字や文字を用いて書かれた記号列もしくは式」のことである．実際，三角不等式などは，不等号の記号や代数式がまだ存在していないユークリッドの時代より存在していることから，ここでの不等式は用いた記号に依存しないある特定の大小関係を意味し，それが「不等式」と呼ばれている．ところが，私たちは大小関係をはじめ，範囲，集合といった数学的対象を，不等式を用いて表し，不等号を伴う式を「不等式」とも呼ぶのである．

この不等式の二面性の視点から不等式に関するプラクセオロジーを考えれば，不等式概念についてのタスクと不等式表現についてのタスクの存在を指摘できる．筆者は，ここから基本認識論モデルとしてのプラクセオロジーを記述してきた．

大小関係という不等式概念についてのタスクタイプは二つが考えられ，一つは「T_1: 条件不等式を解く」，もう一つは「T_2: 絶対不等式を証明する」である．それぞれを解決するテクニックは，式変形による代数的なものから，関数を用いるものまで多様だが，代数的なものに焦点を当てれば，条件不等式は不等式の同値変形により解集合を導くテクニックが用いられ，その背後には実数の大小関係の性質とりわけ必要十分条件となる性質がテクノロジーとして用いられる．この大小関係の性質は絶対不等式を証明する際の代数的な式変形の背後にもあるテクノロジーである．条件不等式を解く際との違いは，T_2 では同値変形である必要がないため，必要十分でない大小関係の性質（例えば推移律）をも用いることができる点である．

一方，不等式表現についてのタスクタイプは，三つが考えられた．それぞれ「T_3: 大小関係を不等式で表す」「T_4: 範囲を不等式で表す」「T_5: 集合を不等式で表す」である．一見同じように見えるが，各々で目的が異なる．また，これらのタスクは表記に関すること，すなわち記号の用い方といった慣習に関することであるため，理論部は存在しない．実際，$\{x \in \mathrm{R} \mid x < 3\}$ という集合を「$x < 3$」と略記する理由は，数学的なものではなく，この数学が扱われる社会における慣習的なものである．

以上がこれまでに構築してきた不等式に関する基本認識論モデルの概要であり，特定したタスクタイプ，テクニック，テクノロジー，セオリーをまとめると表 1 のようになる．詳細は，拙稿 (坂岡・宮川, 2016) を参照されたい．

表 1　基本認識論モデルとしての不等式のプラクセオロジー

	タスクタイプ	テクニック	テクノロジー	セオリー
大小関係	T_1: 不等式を解く	τ_1: 代数的アプローチ τ_2: 関数的アプローチ	θ_1: 大小関係の性質（必要十分のもの）	Θ: 実数の理論
	T_2: 不等式を証明する	τ_3: 大小比較 τ_4: 絶対不等式の変形	θ_2: 大小関係の性質	
表記	T_3: 大小関係を不等式で表す	τ_5: 表記テクニック		
	T_4: 範囲を不等式で表す			
	T_5: 集合を不等式で表す			

５．学校数学における不等式の扱い方

前節で示したように，不等式に関して 5 つのタスクタイプを特定した．これらのタスクタイプは中学校と高等学校の教科書における不等式の扱いを明確化するうえで一つの視点となる．この視点から，教科書をみていくこととする．

5.1 中等教育で扱われる不等式

中学校のある教科書では，3 章の一次方程式において不等式を説明しており，次のようなタスクがあった．「次の（1）～（4）のそれぞれについて左右の式を比べ，□にあてはまる等号や不等号を書き入れてみましょう．(2) 20－8 □ 7×2　（4）9－(－1) □ 9＋(－1)」（一松ほか，2016a，P.92）さらに，同じ教科書の教師用指導書を見ると，1 章の正の数・負の数で，数の大小を，不等号を用いて表すことの解説・留意点には「負の数の大小を，数直線を利用して説明する問題である.」（一松ほか，2016b，p.18）と記述されており，テクニックとして数直線を用いることが重視されている．そして，4 章の比例と反比例で変域について学習するが，その内容に関して教師用指導書には,「これまで不等号は数量の間の大小関係を表す記号として用いており，変域を表す意味で用いるのは初めてである．まず，変域を「0 以上 15 以下」のように言葉で表現し，それを不等号による表現，数直線による表現へとつなげていきたい.」(一松ほか，2016b，P.128）と記述されている．このように中学校では，表記に関するこの 2 種類のタスクタイプのみが扱われ，テクニックは基本的に「τ_5: 表記テクニック」であった．実数の大小関係もしくは順序を認識する必要はあるものの，大小関係の性質はテクノロジーとして用いられない．換言すれば,「不等式」の語は出てくるが，実数の大小関係の性質は扱われず，生徒にとって目新しいことは，範囲を不等式で記述するという表記に関するテクニックのみである．そのため，もしこの段階で生徒が範囲を不等式で表すことに困難性があったとすれば，それは大小関係やその性質についての認識ではなく，不等式で何を表しているのかという認識に関連しているといえるであろう．

一方，高等学校では，数学 I と数学 II において不等式について学習する．数学 I では「T_1: 不等式を解く」, 数学 II では「T_2: 不等式を証明する」のタスクタイプが扱われる．教科書では，様々な単元に渡り 5 つ全てのタスクタイプが見られた．例えば，数学 I の 1 次不等式や 2 次不等式の単元で扱われる T_1 は，数学 II の三角関数と指数関数・対数関数を学習するところでも見られた．また,「τ_1: 代数的アプローチ」のテクニックにより T_1 を解決する際には，基本的には，同値変形のテクニックを多用し,「θ_1: 大小関係の性質（必要十分のもの)」をテクノロジーとしていた．そして，これらによって得られた解, すなわち集合は，不等式によって表される．また，ある教科書では，数学 I の T_1 を解決する際（同値変形）に必要となるテクノロジーを「不等式の性質」（大島ほか, 2012, p.36)，数学 II で「T_2: 不等式を証明する」際に必要となるテクノロジーを「実数の大小関係に関する性質」(川中ほか, 2012, p.28）と，大小関係の性質に異なった名称が付されていた．学習者にはその違いを知る由もないだろうが，θ_1 と θ_2 の区別が表出しているともいえる．この T_1 と T_2 を代数的に解決する際のテクノロジーの違いは，教科書でもほとんど触れられておらず（「移項」などテクニックの説明はあるが), 学習者の困難性を生じさせかねない．例えば，次のような T_1 のタスクに対する式変形の誤りを指摘できない生徒が少なくないのではないだろうか．

「$2x - 7 > 0$ を移項により，$2x > 7$ とする．$2x > 7 > 6$ であるから $2x > 6$ となり，$x > 3$ が解である」(この事例は，濵中裕明氏（兵庫教育大学）にご教示いただいた.)

この式変形はT_1のタスクではなく，T_2のタスクであれば，しばしばみられるものであり（例えば，ε-δ 論法を用いた極限等の証明），誤りではない．実際，大小関係の推移律を用いて得られた $2x > 6$ は，$2x > 7$ を満たす x については，まったく正しい命題である．ところが，不等式を解く場合には同値変形が必要となり，$2x > 7$ と $2x > 6$ の両者は条件として同値ではないのである．これは，θ_1とθ_2の違いである．この違いが不等式学習の困難性の一要因となっているのではないだろうか．もしそうであれば，教科書において不等式を解く際に，式変形の根拠となるテクノロジーをより明確に扱う必要があるであろう．また，基本認識論モデルは，知識の構成をも表しており，プラクセオロジーのそれぞれの要素がいかに関連しているのか，していないのかを明確化する．例えば，条件不等式の解集合を略記して不等式で表すことが，慣習的なものであり，大小関係の性質とはほとんど関係がないことがわかる．すなわち，慣習的な表記テクニックには数学的な理論部の知識（大小関係の性質）がなくてもタスクを解決することができるのである．

5.2　不等式学習の困難性の考察

不等式に関する基本認識論モデルは，不等式学習の困難性の要因を探る手がかりとなる．

基本認識論モデルより，条件不等式を解く際 (T_1) に用いる必要十分な大小関係の性質の認識に関する困難性を指摘できる．T_1を解決する代数的なテクニックは，不等式の同値変形による．同値変形は，ある条件から必要十分な別の条件を導くものであり，このテクニックの背景には，「$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$」などの実数の大小関係の性質がテクノロジーとして用いられている．高等学校の生徒はこのテクノロジーをどの程度意識しているであろうか．教科書では，T_1を解決するテクニックは「移項」などの言葉で説明されているものの，テクノロジーについてはほとんど触れられていない（e.g. 大島ほか, 2012, p. 37）．さらに，実数の大小関係の性質は，「$A < B$ ならば $A + C < B + C, A - C < B - C$」などと不等式の性質として記述されることが多く（大島ほか, 2012, p. 36），必要十分となる性質を用いていることは教科書からはほとんどわからない(逆が成り立つことはほとんど明らかだが)．以上のことから，学習者は T_1 と T_2 で用いられるテクノロジーの違いをほとんど認識しておらず（T_2を代数的に解決する場合は必要十分の性質を用いる必要はない), 条件不等式を解く際に，必要十分でない性質を用いていても，その誤りの根拠を指摘できないといった困難性が生じると予見される．

また，表記に関するタスクタイプは 3 種類存在するが，学習者はこれらの違いを明確に捉えることができるであろうか．中学校の教科書では「次の□に不等号を書き入れて, 2 数の大小を表しなさい．-3 □ -7」（岡本ほか, 2013, p.18）や「変数 x のとる値が，3 以上 10 未満のとき，x の変域を，不等号を使って表しなさい.」(岡本ほか, 2013, p.100）のように，大小関係を不等式で表すのか，範囲を不等式で表すのかといった何を，不等号を用いて表すのか言葉の指示がある．しかし，高等学校の教科書では「次の不等式を解け. $5x - 8 \leqq 22$」（大島ほか，2012，p.37）のように，何を不等式で表しているのか明確でない．そして,「不等式のすべての解の集まりを，その不等式の解ということもある.」(大島ほか, 2012, p.37）と記載されており，不等式の解が集合を表していることも明確に記述されていない．したがって，学習者は，不等式の解が集合を表していることをどの程度理解できているのだろうか．さらに，中学校と高等学校の教科書の記述の仕方の違いを見ると，T_3，T_4，T_5のように，何を不等式で表しているのか区別できていないといった困難性が考えられる．

６．インタビュー調査の詳細と結果

上述のように，これまでの研究から不等式を操作する際のテクノロジーをはじめ，不等式で表されるものの区別の認識などに関する困難性が予見された．そこで，この不等式学習の困難性の実際とその要因，それにまつわる他の数学概念と関連した困難性を探るために，大学生に対するインタビュー調査を実施した．本節では，インタビュー調査の詳細をはじめ，その結果を示す．そして，次節で，大学生の調査問題の解決過程の分析と考察を行い，不等式学習の困難性の実際とその要因を明らかにする．

(1) 調査の対象と方法

筆者が所属する国立教員養成大学の数学を専攻している学部 3 年生と 4 年生の 7 ペア計 14 名に対し，平成 28 年 6 月に調査を実施した．大学生はみな，中学校教諭と高等学校教諭の一種免許状（数学）を取得予定の者である．大学生は，前節で言及した複数のタスクタイプに関連する不等式を全て学習済みであり，さらに，大学で微分積分学を学習したことによって，不等式をさらに柔軟に捉えることができると考えられる．したがって，大学生を調査対象とすることで「学ばれた数学」として不等式についての困難性の実際をより明確にすることができる．

調査は，思考が言語化・顕在化されることを期待し二人ペアに対するインタビュー形式とした．不等式の問題を 1 問ずつ被験者に与え，個人で解答する．おおよそできたら，互いに自らの解答と考えを紹介し話し合う．解けていない場合はペアでその問題にさらに取り組む．インタビューアは，話し合いが活発になるように適宜質問する．質問は主に発言や考えを明確にするためのものとした．不等式の問題は 4 問を用意し，全問同様の過程を繰り返した．1 ペアにつき約 90 分の時間を要した．

(2) 調査問題

調査問題は全部で 4 問用意した．それらの問題を図 2 から図 5 に示す．

【問題 1】
「不等式 $2x-7>0$ を解きなさい」という問題に，春子さんは次のように解答しました．

解）　$2x-7>0$
$2x>7$
$7>6$ より $2x>6$
$x>3$

《質問》この解答及び解き方は正しいですか．間違っていると考える場合は，間違っている箇所とその理由を述べてください．春子さんの解答が正しいと考える場合は，下の解答欄に「正しい」と書いてください．

図 2：問題 1

【問題 2】x を実数とすると，$|x| \geqq 3$ は，$x \leqq -3, 3 \leqq x$ を表しています．では，$|x| \geqq x$ は何を表していますか．

図 3：問題 2

【問題 3】x を実数とすると，$|x-1|<1$ ならば $|x| \leqq 2$ であることを示してください．

図 4：問題 3

【問題 4】a, b を実数とすると，$|a|-|b| \leqq |a-b|$ であることを示してください．

図 5：問題 4

問題 1 は条件不等式を解く際に用いるテクノロジーの認識に関するものである．ここでは，条件不等式を解く際に必要となるテクノロジーについて議論させ，不等式のプラクセオロジーの理論部をどの程度意識しているか，どのような理論部をもっているのかみる．

問題 2 は，不等式が表すものが見方によって変わりうることに関するものである．問題の 2 つの不等式は，範囲を表した不等式もしくは実数全体が解となる条件不等式と捉えることが可能であれば，全ての実数に対して成り立つ絶対不等式という捉え方も可能である．

この表しているものの違いをどのように捉えるのかみる．

問題 3 は，不等式からなる含意命題が真であることを示すものである．それぞれの不等式を集合と捉えそれぞれの不等式について包含関係を考える，もしくは大小関係という二通りの捉え方ができる．この二つの不等式をどのように認識し，また，その関係をどのように把握するのかをみる．

問題 4 は T_2: 絶対不等式の証明として三角不等式の変形を証明するものである．通常，a, b を正負の数で場合分けする方法，または，両辺の 2 乗$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$を計算し，$|ab| \geqq ab$ の絶対不等式を利用することで示すことができる．また，$|ab| \geqq ab$ は問題 2 で登場する．これらより，絶対不等式の証明を通して大小関係をいかに捉えているのかみる．

(3) 結果

問題 1 においては，7 ペア 14 名全員が $2x-7>0$ の解は $x>7/2$ であると指摘した．そのため，春子さんの解答及び解き方が「正しい」と答えたペアはいなかった．そして，被験者らは皆，自分たちが導いた解を正答とし，春子さんの解答である $x>3$ と比較することで，解の妥当性を議論した．$x>3$ を間違いとする理由は，春子さんが $2x>6$ として解いたことであると主張した．しかし，その理由をテクノロジーの大小関係の性質を用いて説明する学生はいなかった．最終的に 6 ペアは $x>3$ を“間違いとは言い切れない”と結論を出した．1 ペアは“間違い”と断言し $2x>6$ としたことが間違いと指摘したものの，その理由をテクノロジーの大小関係の性質を用いて説明することはなかった．

問題 2 は，$|x| \geqq x$ をある 2 点の関係として大小関係を表していると捉えていた学生が 4 名おり，全ての実数に対して成り立つ不等式である絶対不等式として捉えている学生が 5 名いた．その他に，範囲を表していると答える学生や，具体的に答えることができなかった学生が 5 名いた．また，議論の中で，不等式が表すものを範囲から大小関係へと変化したり絶対不等式としたり不等式を捉え直す学生がみられた．

問題 3 では，全ての被験者が二つの不等式は集合を表すと捉え，その包含関係を考えることより真偽を検討していた．$|x-1|<1$ と$|x| \leqq 2$をそれぞれ $0<x<2$ と$-2 \leqq x \leqq 2$に捉えた学生は 12 名いた．2 名は絶対値を外すことができなかったが，議論の中で前述の 12 名と同様に捉えた．しかし，集合の包含関係は把握しているものの，含意命題の真偽と適切に関連させることができず，「$|x-1|<1$ ならば$|x| \leqq 2$」は偽であると捉えた学生が 7 名いた．筆者らの予想に反し，不等式を大小関係と捉え条件不等式として変形した学生はいなかった．

問題 4 では，三角不等式の証明として捉えた学生はいなかった．この問題の解決には大きく二つの方法がみられた．一つ目は，a, b を正負の数で場合分けして不等式が成り立つことを確認する方法である．この方法を用いた学生は 8 名いた．二つ目は，両辺を 2 乗して大きい方から小さい方を引き，0 以上となることを示す方法で 5 名がその方法をとっていた．うち 2 名が，$|ab|$ と ab の大小関係を比較するところまで記述していたが，問題 2 を意識していないことがインタビューよりわかった．また，どちらの証明方法とも判断できない学生が 1 名いた．

7．データの分析と考察

本節では，基本認識論モデルとして構築した不等式のプラクセオロジーの視点より，調査問題の解決過程のデータの分析と考察を行い，大学生の持つ不等式に関する考え方や捉え方を示す．それにより，不等式を操作する際のテクノロジーをはじめ，不等式で表されるものの区別の認識など，その他の種々の困難性の実際とその要因を明らかにする．また，

分析するデータは，インタビュー調査時に被験者が記入した解答用紙とプロトコルを用いる．本稿では，不等式学習の困難性の要因が顕著に表出した問題 1 と問題 2 と不等式学習に付随する集合と論理に関する困難性が明らかとなった問題 3 を取り上げる．それ以外の問題に関するデータは，筆者の主張を裏付けるために適宜用いることとする．以下には，被験者数名の解答と考え方を示し，不等式の捉え方の考察を示す．この他の被験者の解答及び分析と考察については，筆者の修士論文を参照されたい．

(1) 問題 1

問題 1 において，「間違いとは言い切れない」と結論を出した代表的な学生 F の解答と考え方を示し，不等式の捉え方を考察する．

学生 F

学生 F は，図 6 のように学生 C と同様の間違い箇所を指摘していた．理由の冒頭に「まず“7 > 6 より”としたところでおかしい」と書き，続けて，$2x - 7 > 0$ の x に 3.2 を代入すると左辺が負の数となり，所与の不等式を満たさないため，$x > 3$ は正しくないと記述している．そして，最後の 2 行の「②から $x > 3.5$ を導き出し，もとの式で考えると」（②は $2x > 7$ を指す）は，$x > 3.5$ を満たす値は「もとの式」である $2x - 7 > 0$ をも満たすため，$x > 3.5$ が適切であると指摘していると解釈できる．

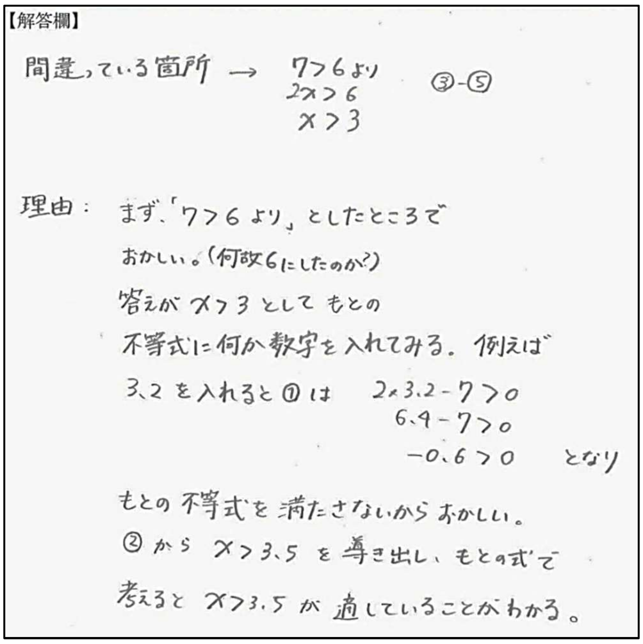

図 6　学生 F の解答

では，この解答から，学生 F の不等式を解く際の理論面のテクノロジーについて見ていく．学生 F は，テクニックである $7 > 6$ から $x > 3$ の 3 行を誤答箇所として指摘している．このテクニックが間違いであると判断する根拠は，与えられた不等式である $2x - 7 > 0$ に 3.2 を代入し，不等式が成り立たないことである．すなわち，答えから解が適しているか，解の妥当性を判断しており，$7 > 6$ がなぜ間違いであるのかその理由を述べてはいない．この代入は，条件不等式を変形することとは関係なく，答えと所与の条件不等式のみに着目しており，答えが条件不等式を満たすかに焦点が当たっている．したがって，学生 F は，条件不等式を同値変形というテクニックの背景となるテクノロジーには着目せず，最初と最後の条件の関係のみを議論しているのである．より詳細に述べれば，学生 F は「$x > 3$ ならば $2x - 7 > 0$」の真偽判断をしている．条件 $x > 3$ を満たす 3.2 が条件 $2x - 7 > 0$ を満たさないため，3.2 がこの命題の反例になり，この命題は偽だと判断しているのである．これは，「$2x - 7 > 0 \Leftrightarrow x > 3$」が偽であることも示しているとはいえるもののテクニックの背景となる大小関係に関わる必要十分となる性質は意識していないのである．条件不等式を解くことにおいては，同値変形をしなければならない．この同値変形のテクニックには，大小関係の性質の必要十分条件のものがテクノロジーとして用いられる必要がある．しかし，学生 F は，テクノロジーである大小関係の性質の必要十分条件のものを考えていない．

次に，学生 F は不等式をどのように捉えているのであろうか．学生 F は，ペアの話し合いの中で，「3.～という小数の域に入って来て，そっから 3.5 までは満たさない．けど，3.5 よ

りも大きかったら満たすので，この場合（$x>3$ の場合）だったら，満たすときもあるけど，満たさないときもある」（プロトコル No.40）と発言し，x を変数のように捉え，x が変化していく様子を説明した．そして，「大きい」や「そっから」という言葉を用い，3.2 など特定の値に注目している．こうしたことから，学生 F は，$x>3$ という不等式を，この条件を満たす数の集合をあらわしているのではなく，「x は 3 より大きい」と x と 3 の大小関係を表していると捉えていると考えられる．実際，$x>3$ の解が正しくないことを示す際も，正答の $x>3.5$ と春子さんの与えた不等式 $x>3$ を比べることはなく，3 より大きい特定の数を選び，その数のみを用いて春子さんの答えを検証している．学生 F は，x を何らかの値をとる変数として捉え，集合ではなく単体でその値をみているといえる．さらに，ペアの話し合いの中で，相方は $x>3$ や $x>3.5$ の不等式は集合を表すと捉え，何度も「範囲」という言葉を用いているが，学生 F が一度も用いていない．このことからも，学生 F は不等式を集合とは捉えていないことがわかる．

40　F　x が 3 より大きいってことは，3 を含まないんですけど，3.～という小数の域に入って来て，そっから，3.5 までは満たさない．けど，3.5 よりも大きかったら，満たすのでこの場合だったら満たすときもあるけど満たさないときもあるよね．っていう答えになってしまった．と思います．

以上のように，学生 F は，テクニックが不適切であることを答えから指摘している．学生 F は，$x>3.5$ を x は 3.5 より大きい数を表した不等式と捉えている．その結果，「$x>3$ について満たすときと満たさないときがある」（プロトコル No.40）と発言し「ちょっと違う，間違っているのかな」（プロトコル No.42）とまとめた．

不等式学習においての困難性は，不等式を解く際の大小関係の性質である必要十分条件のテクノロジーを学習者が認識していないことである．学習者は，テクニックを駆使し，不等式の解を求めている．しかし，なぜそのテクニックを用いることができるのか，そのテクニックを生成し説明し正当化する理論的なテクノロジーが存在することすら意識がないのかもしれない．その結果，不等式を解くことは同値変形をすることと同じことであるいう認識は持たなくなっている．そして，不等式の解が正しいかどうかである解の妥当性は，ある値を代入することで判断しなければ確認できないこととなる．これが，条件不等式の変形を学習する上での困難性となってくるのであろう．

(2) 問題 2

問題 2 において，$|x| \geqq x$ を条件不等式から全ての実数を表すと捉え直した学生 C の解答と考え方を示し，不等式の捉え方を考察する．

学生 C

学生 C は，$|x| \geqq 3$ について，x を正負の数で場合分けし，数直線に $x \geqq 3$ と $x \leqq -3$ を示した．

$|x| \geqq x$ についても，図 7 のように，x を正負の数で場合分けをし，「x が正のとき $x \geqq x$ $0 \geqq 0$，x が負のとき $x \leqq 0$」と解答欄に記述した．これは，$|x| \geqq x$ を条件不等式と捉え，x を場合分けすることで，不等式を解こうと

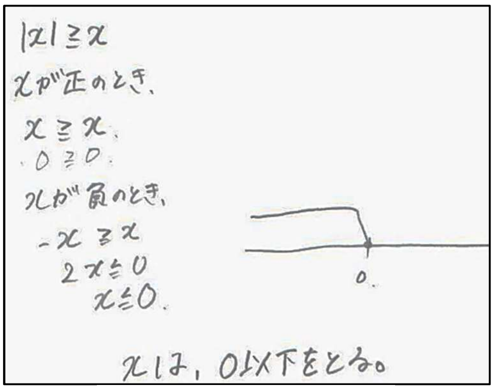

図 7　学生 C　解答

したのだろう．事実，ペアの議論の中で，$|x|$

$\geqq x$ が表すものを「解なしにしたら，答えないってことでしょ？」（プロトコル No.89）と発言していることから，条件不等式を解いた答えについて考えていることがわかる．

そして，学生 C は，$|x| \geqq x$ が表すものについて「だから，もう，0 以上．0 は 0 以上 0 以下．つまり 0 なのかな．」（プロトコル No.25）と発言した．これは，x が正のときは 0 以上，負のときは 0 以下として二つの不等式を連立させ，共通部分を考えると 0 が共通する値となり，答えになると判断していると考えられる．すなわち，場合分けした不等式を連立不等式として捉えたことにより，共通部分と答えたのである．しかし，この議論を繰り返す中で，学生 C は「もはやすべての値をとるんじゃないかと」（プロトコル No.52）とも発言した．これは，解について 0 以上と 0 以下の和集合を考えている．したがって，共通部分から和集合へと考え方が変わったといえる．

最終的には，1 と -1 をそれぞれ $|x| \geqq x$ に代入し，$1 \geqq 1$，$1 \geqq -1$ と書き表した．そして，$|x| \geqq x$ にイコールが有るためどのような実数を代入しても不等式として成り立つことをプロトコル No.75 のように説明し，$|x| \geqq x$ は全ての実数を表すと述べた．

75　C	イコールなかったらダメだけど $1 = 1$ になるし．全部なんじゃない？
77　C	つまり，すべての実数ですかね．

学生 C は，条件不等式として場合分けする方法から具体的な数を代入する方法へと捉え方を変えたことによって，不等式の表すものの見方も変化した．

(3) 問題 3

問題 3 において，命題は偽であると捉えた学生 CD ペアの解答と考え方を示し，不等式の捉え方を考察する．

学生 C は，$|x-1| < 1$ について，$x-1$ が正のときと負のときに場合分けし，$0 < x < 2$ を導いた．そして，$|x| \leqq 2$ についても同様に x が正のときと負のときに場合分けし，$-2 \leqq x \leqq 2$ を導き，$0<x<2$ を①，$-2 \leqq x \leqq 2$ を②とした．しかし，それぞれの場合分けに 0 と等しいときを入れていないことや，$x-1>0$ のとき $x<2$，$x-1<0$ のとき $x>0$ と記述されていたことから，$x<2$ と $x>0$ の共通範囲として $0<x<2$ を導いたと考えられる．

そして，「$|x-1| < 1$ ならば $|x| \leqq 2$ である」という問題文に対し，次のような発言をした．

15　C	これ（$|x-1|<1$）であるならばこれ（$|x| \leqq 2$）って言うのが，すごく納得いかないって．逆ならいいのかな～って思った．
16　D	あ～、そうだね．

そして，解答欄には，図 8 に示した図をかき，「-2 以上 2 以下の間に，0 より大きくて 2 より小さいのは，ここに含まれてるから，これは言える」（プロトコル No.49）と説明し，「$|x-1|<1$ ならば $|x| \leqq 2$ である」は成り立たないが，「$|x| \leqq 2$ ならば $|x-1| < 1$」は示すことができると主張した．したがって，「$|x| \leqq 2$ ならば $|x-1|<1$」を「$-2 \leqq x \leqq 2$ は $0<x<2$ を含んでいる」と解釈したことによって，命題は正しくないとしている．

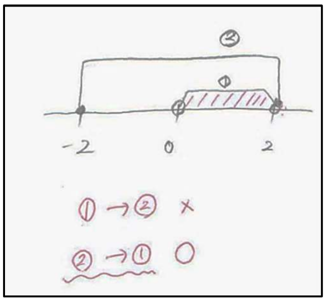

図 8　学生 C　解答

学生 D も，$|x-1| < 1$ について，$x-1$ を正のときと負のときに場合分けし，$0<x<2$ を導いていた．そして，$|x| \leqq 2$ についても同様に x が正のときと負のときに場合分けし，$-2 \leqq x \leqq 2$ を導いた．また，学生 D は，$-2 \leqq x \leqq 2$ を $x \leqq 2$ と $x \geqq -2$ の共通部分として捉えていたことが図 9 の解答欄に与えられた数直線の範囲を示す矢印からわかる．すなわち，$|x| \leqq 2$ について x を正負

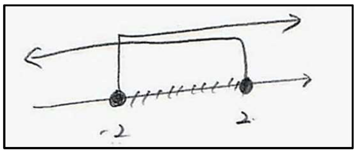

図 9　学生 D　解答 1

の数で場合分けしていることから，解の和集合で捉えるところを，$x \leqq 2$ と $x \geqq -2$ を連立不等式として捉え，共通範囲を求めた解法になっていた．$|x-1|<1$ についても同じ捉え方をして $0<x<2$ を導いたと考えられる．

そして，$0<x<2$ に含まれず，$-2 \leqq x \leqq 2$ に含まれる要素があるため，命題は成り立たないと図 10 を用いてプロトコル No.40 のように説明した．このような説明から，学生 D は，$0<x<2$ と $-2 \leqq x \leqq 2$ を集合を表した不等式として捉えていたと考えられる．

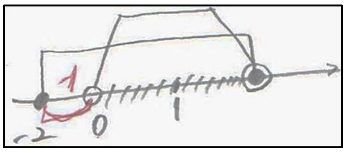

図 10　学生 D　解答 2

40　D　最初のやつ（$|x-1|<1$）にそれ（$-2 \leqq x \leqq 0$）が無いんだから，やっぱり -1 とかをここ（$|x-1|<1$）に入れるじゃん．-2 になって，1 だからダメだ．

これは，$0<x<2$ は -1 を含んでいないため,「$0<x<2$ は $-2 \leqq x \leqq 2$ を含んでいる」と捉えた命題は成り立たないことを説明したものである．

このように，学生 CD ペアは，二つの集合の包含関係を考え，命題の真偽を判断した．「$|x-1|<1$ ならば $|x| \leqq 2$」を「$0<x<2$ は $-2 \leqq x \leqq 2$ を含む」と捉えていたため，プロトコル No.40 のように命題が成り立たないことを -1 を例に挙げ説明したと考えられる．

学生 CD ペアの議論から，「A ならば B である」を「A は B の部分集合である」すなわち「A は B に含まれる」という捉え方に困難性があることがわかった．

また，絶対値を含む条件不等式を場合分けによって解決した際，場合分けした条件を用いずに共通部分を不等式の解としていた．本来であれば，場合分けした条件を考慮し，和集合として不等式の解を求めるべきである．このように不等式の解を共通部分で捉えるか和集合で捉えるかといった不等式の解の捉え方も困難性の要因であるといえよう．

８．おわりに

本稿では，これまでの研究から示唆された不等式学習の困難性について，基本認識論モデルとしての不等式のプラクセオロジーの視点より，不等式学習の困難性の実際とその要因を明らかにした．その結果，学習者はテクニックを駆使し，条件不等式を解いているが，その背後にあるテクノロジーとしての理論的な大小関係の性質を意識していないこと，不等式が表すものを捉えることの困難性が確認できた．そして，不等式学習の困難性において他の数学概念との関連も明らかになった．これらの点についてまとめ，本稿を終えたい．

大学生に対するインタビュー調査問題である $2x-7>0$ を解くことに推移律を用いて $x>3$ を解としたことに対し，ほとんどの学生は，$x>3.5$ と比較し解の妥当性を判断したり，ある値を $2x-7>0$ に代入し不等式を満たすかを確認したりする方法で不等式の解 $x>3$ が間違いであることを指摘していた．しかし，本来，不等式を解く背後にある大小関係の性質において必要十分のものをテクノロジーとして学習者が意識していれば，不等式を解いて答えを求めなくともテクニックの誤りを指摘できるはずである．解法の途中に $7>6$ という推移律を用いていること，同値変形になっていないことを指摘すれば，答えを比較しなくてよいのである．こうしたことが，被験者の活動に見られなかったことから，学習者には不等式の変形の背後に理論的に適切なテクノロジーがないと指摘できる．また，不等式で表されるものの区別の認識については，$|x| \geqq x$ を全ての実数に対して成り立つ不等式と捉えることが可能である．実際に実数全体を指していると答える学生がいた．一方，$|x| \geqq x$ を範囲を表した不等式と捉える学生や条件不等式として解を求めようとする学生もいた．また，条件不等式の解を大小関係を表した不等式と捉える学生もいた．これらの

ことから，不等式が表すものを判断することは容易ではないといえる．中には，不等式の意味を考えるのではなく，不等号（≦，≧）の表し方に疑問を抱く学生もいた．また，問題 3 の結果からは，集合の包含関係は把握しているものの，含意命題の真偽と適切に関連させることができない学生がおり，不等式を集合と捉えた場合に生じる，含意命題の真偽についての困難性がみられた．さらに，$|x-1|<1$ の絶対値を外すことができないという絶対値の処理に関する課題もみられ，不等式学習に付随した絶対値学習の困難性が関係していることがわかった．このような結論から，インタビュー調査結果のデータを分析・考察したことにより不等式学習の困難性の要因を明らかにすることができたと言えよう．

そして，本研究で得られた不等式学習における教育への示唆は次の 2 点である．一つは，不等式を解くことと不等式を証明することには，異なるテクノロジーを用いているという認識を学習者に明確に理解させるが重要性であるということ．もう一つは，不等式で表しているものを明確に学習者が認識することの必要性である．

今後の課題は，不等式の性格の一つである，不等式がいかに発生するのかといったその起源について検討することである．その検討は，基本認識論モデルを構築するにあたって非常に大事な要素であるため，不等式が学習においていかに発生するのか，すなわち，学習者がいかにその必要性を感じ自ら創り上げることができるのかといった起源を検証することである．

謝辞

本研究を進めるにあたり，濵中裕明氏（兵庫教育大学）に色々とご教示いただきました．ここに感謝の意を表します．

引用・参考文献

一松信ほか (2016a).『中学校　数学 1』. 学校図書.

一松信ほか (2016b).『中学校　数学 1　教師用指導書　実践編』. 学校図書.

伊藤伸也 (2002).「 2 次不等式表現の翻訳・処理に関する調査研究―解答困難な生徒の理解の様相―」.『筑波数学教育研究』, 第 21 号，pp. 73-80.

大島利雄ほか (2012).『数学 I』. 数研出版.

岡本和夫ほか (2013).『未来へひろがる数学 1』. 啓林館.

川中宣明ほか (2012).『数学 II』. 数研出版.

国立教育政策研究所 (2007). 平成 17 年度高等学校教育課程実施状況調査　教科・科目別分析と改善点（数学・数学 I）.
（http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h17_h/h17_h/05001031040004000.pdf）.

坂岡昌子・宮川健 (2016).「不等式の性格についての一考察～基本認識論モデルの探求～」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 22 巻，第 2 号，pp. 73-84.

日本数学会 (2007).『岩波数学辞典　第 4 版　日本数学会編集』. 岩波書店.

服部貴大 (2010).「2 次不等式の学習の困難点に関する研究: 2 次不等式に関する知識の観点から」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第 92 巻，第 7 号，pp. 12-20.

服部貴大 (2011).「2 次不等式における関数的アプローチの理解促進に関する研究」. 日本数学教育学会誌『数学教育』，第 93 巻，第 11 号，pp. 12-20.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, no. 58, pp. 51-65.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M. (ed.) *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona, Spain: FUNDEMI-IQS.