上　越　数　学　教　育　研　究

Joetsu Journal of Mathematics Education

第　32　号

目　　次

昭和 40 年代の中学校教科書に見られる
　方程式と関数とを関連づける記述について . . . . 布川　和彦 . . . 1

幾何や代数の区別のない数学の始原のところ
　― 掛け算九九の指計算の方法と仕組みを探る ― . . . . 伊達　文治 . . . 11

高等学校数学 II「微分・積分の考え」における
　「微分すること」・「積分すること」の意味理解に関する研究 . . . . 片寄恵理奈 . . . 19

現実性のある場面における
　子どもの小数の乗法及び除法の知識形成過程について . . . . 藤川　亮一 . . . 33

中学校数学において生徒の不安を生じさせる要因 . . . . 児玉　誉也 . . . 43

不等式学習の困難性についての研究 . . . . 坂岡　昌子 . . . 51

算数授業における子どもの数学的モデル化に関する研究
　― 子どもの思考過程に見られる推論と価値観に着目して ― . . . . 佐々木英男 . . . 63

教育内容としての数学的方法に関する研究
　― 高等学校数学科における「中心概念」に着目して ― . . . . 秋山　拓也 . . . 75

中学校数学授業におけるメタディスコースに関する研究
　― B. Güçler による理論枠組みの精緻化を通して ― . . . . 浦野　　正 . . . 85

中学校関数領域における教科横断型授業のデザイン
　― 「世界人口総和問題」を題材にした SRP ― . . . . 葛岡　賢二 . . . 95

《翻訳》教授学的転置の 25 年 . . . . マリアンナ・ボスク
ジュゼップ・ガスコン . . . 105

2017

上越教育大学数学教室

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.1-10

昭和40年代の中学校教科書に見られる方程式と関数とを関連づける記述について

布川　和彦
上越教育大学

1．はじめに

文字式や方程式の学習と関数の学習とを関連づける試みは代数に対する関数的アプローチ (a functional approach to algebra)として、例えば Kieran ら (1996) により提唱されてきた。Kieran ら (1996)によれば、「関数的アプローチでは、文字が変数として見られるだけでなく、関数的関係を表現するために用いられる表象が操作的、プロセス志向的な仕方で提示される」(p. 258)とされる。また文字式を用いた問題解決では、通常、未知数を伴う方程式を作ることが行われるが、関数的アプローチの場合には「問題中に与えられたものの間のより一般的な関数的関係を作り出したり、入力ー出力の文字の名称を変数と見なすといったことが行われる」(p. 258)。例えば、雑誌販売のバイトで週の基本給が 20 ドルで 1 契約につき 4 ドル加算されるとき、50 ドル以上を得るには何件の契約が必要かを考える場合、通常の方程式の学習であれば、$20+4x=50$ と方程式を立て、これを解いて答えを求めるであろう。関数的アプローチでは、まずは 20＋4×(契約数)＝(収入)という一般的な関係を作り出すことを促しており、またその際に、(契約数)や(収入)といった名称は変数と見なされることになる。

Kieran ら (1996)の用いたコンピュータ・プログラムでは、上のような関係を子どもたちが計算手続きとして記述すると、入力の数を入れるごとに対応する値を出力してくれるだけでなく、表の形やグラフの形でも表示できるようになっている。ただし彼らは、子どもたちがコンピュータ上で計算手続きを記述する前に、「いくつかの演算を手で実行」し、「いくつかの数を試してみることで問題文の感じをつかもうとする」(p. 259)ことを重視している。上の契約の問題であれば、5 件の契約がとれたときの収入や 10 件の契約がとれたときの収入を計算してみることが考えられる。さらに初期の段階では、代入する数値を変えながら逐次近似的に目標となる数値に近づけて答えを求める方法も許されている。場面中の数量間の関係をいったんは関数的関係として捉えようとすることを通して問題場面を把握することを試み、その後に、 1 つの量が特定の値になる場合をその関係をもとに考えるという解決の流れが見られる。

関数的アプローチを採用した研究はその後も見られ、例えば Farmaki (2004)は関数的アプローチを採用し、13 歳児を対象とした方程式と関数の単元を統合したコースを開発している。そこでは多様な問題場面をグラフ、表、式と結びつけるとともに、これらの表象を方程式の考えと結びつけたとしている。ただし解決の初期段階では、問題のグラフ的表現に注意が向けられ、x は未知の量というよりも変数として見られるようにしている。例えば $2x+4$ と表される量と $3x$ と表される量が等しくなる場面、つまり方程式 $2x+4=3x$ で表される場面についての問題でも、最初は $y=2x+4$

と $y=3x$ のグラフや表といった、それぞれの量の変化を表す表象が用いられている。解決を行う生徒へのインタビューをもとに、関数的アプローチでは場面が参照領域となり文字に意味が与えられたり、また関数的アプローチが場面を参照しながら問題を解決する方法を与えうることを示している。

さらに Schliemann ら (2013) は、このアプローチも利用しながら小学校３～５年生に方程式を指導することを試みている。この研究でも、「扱っている場面に関わる量や行為にシンボルが関連付けられる」(p. 162)ことが重視されている。

わが国の現行の教科書では、中学校２年の１次関数単元の中で、２元１次方程式のグラフ、および連立方程式と１次関数との関係が扱われる。これに関わり榎本 (2015)は教科書の２元１次方程式のグラフに関する内容を分析し、２元１次方程式を関数を表す式と見るにあたっては、x に数値を代入して y の値を求める活動と、式を $y=ax+b$ の形に変形して１次関数のグラフの特徴である傾きや切片を読みとる活動があること、前者が式の操作的捉え方に対応するのに対し、後者は式の構造的捉え方に対応することを指摘している。

また榎本 (2013)は、関数的アプローチという視点から文字式の理解をとらえる枠組みの構築を試みており、式変形に基づき方程式を解く代数的アプローチに対して、関数的アプローチを次のように規定している (p. 28)：「代数的アプローチによって立式された方程式・不等式に対応する一般的な関数関係を見出し、関数表現である表・グラフを利用して解を求める方法」。また関数的アプローチを行う際には、方程式・不等式の中の「文字を未知数から変数へ見方を変えなければいけない」こと、および「方程式・不等式が表している数量関係を相等（大小）関係から関数関係へ見直す必要もある」ことを指摘している (p. 31)。さらに榎本(2013)は式の形により生徒の文字の理解が影響を受け、$ax+by=c$ という形では未知数ととらえながら、$y=ax+b$ という形では変数ととらえる生徒の例をあげている。

一方、Mizoguchi (2015)や山脇ら(2013)は、現行の教科書の内容を越えて、方程式と関数のグラフとの連携を図っている。彼らは「関数のグラフを問題解決の手段の１つとして捉えることを提案し」(山脇ほか, 2013, p. 186)、「生徒がグラフを方程式を立てるための効果的なツールとして利用できるようになること」(Mizoguchi, 2015, p. 625)を期待して、具体的な教科書の作成およびそれを用いた授業の実践を行っている。その中では中学校３年生に対しては $y=ax^2$ のグラフだけでなく一般の２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフも指導し、２次方程式との連携を図りやすくしている。また中学校２年生を対象とした連立２元１次方程式を１次関数のグラフを用いて考える活動においては、「グラフを y 軸方向に平行移動することで、問題場面の現象を傾きの異なる２つのグラフの和として表現すること」(山脇ほか, 2013, p. 188)なども取り扱われている。そこには、そうしたグラフの操作も指導することで、問題場面をグラフで表現したり、解の見当をつける可能性を高めようとの試みを見ることができる。

ところでわが国の教科書でも、過去のものを見てみると、方程式と関数との関連づけが現行よりも緊密と思われる記述を見出すことができる。もちろんそこでの扱い方は上述の今日的動きと必ずしも一致するわけではないが、しかしそうした過去の状況についても検討を加えておくことは、今日的な動きをよりよく理解し、またより効果的に展開していく上でも意義のあることと考えられる。そこで本稿では、現行の中学校教科書よりもさらに多様な方程式と関数との関連づけが見出される昭和 40 年代半ばの２つの時期の教科書に焦点を当て、そこで見出される関連づけのあり方とその特徴を検討することを試みる。具体

的には、現代化の最初の時期にあたる昭和 46 年検定の教科書と、そこへの移行期にあたる昭和 43 年改訂検定の教科書をとりあげる。

以下では記述を簡潔にするために教科書会社をイニシャルで表す：啓林館→Kr，東京書籍→T，大阪書籍→O，大日本図書→D，教育出版→Ky，学校図書→G。その後に検定年度を付して教科書を特定する。例えば Kr43 は啓林館の昭和 43 年版の教科書を，T46 は東京書籍の昭和 46 年版の教科書を表す。

２．方程式を変数を用いて導入している例

現代化の時期の教科書である昭和 46 年版では、いくつかの教科書において方程式を変数を用いて定義している。

O46 は１年「方程式」単元で変数を定義した後、「変数をふくんだ等式を、方程式という」として、方程式を変数を用いて定義している。またこの定義の直後にある、さいころを投げて出た目の数に６を加えたら３倍になったことを関係式で表すという例題では、「出る目の数を x とすると、変数 x の変域は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$」という記述がある。ここでは文字を変数と呼ぶだけでなく、変域という変数にそった語り方がなされている。方程式の解法を学習する部分でも次のような語り方がされている：「方程式の解の集合を求めるとき、x の変域の値について、いちいち代入して調べるのは、手数がかかって実際的でない」。さらに「方程式の利用」において解の吟味に関わり次のような説明がある：「実際の問題では、選んだ変数 x のとる値に制限がついている場合がある」。

２年でも同様の傾向が見られ、「連立方程式」単元では「２種類の変数 x, y を含む方程式を、x と y についての二元方程式という」との定義を行っている。さらに連立方程式について加減法や代入法を説明する際にも、「１つの変数を消去することを考えればよい」、「いっぽうの方程式を１つの変数について解き」といったように、文字を変数とする語り方がされている。この時期には連立３元１次方程式も扱われるが、これも「３種類の変数」を含む方程式として定義される。ただし３年「二次方程式」単元では、文字を変数とする語り方は見られない。

D46 も１年「方程式・不等式」単元の最初に変数を定義し、その上で方程式を次のように定義している:「変数 x, y などを使って表した条件が、$4x=20$, $3y+5=14$ などのように、等式になっているとき、この等式を方程式という」。また解についても「一つの変域内にあって」方程式を満たす変数の値のことだとしており、例えば方程式 $2x+1=6$ を x の変域が $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ の場合と、$\{1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3\}$ の場合とでそれぞれ解くように求める問いなども設定されている。

D46 の２年では、「一次関数」単元の前に「方程式・不等式」単元が、後に「二元一次方程式」単元が設定されている。ただし前者においては１元１次不等式の解法が中心であり、１次方程式については、$4(x-2)=3(x+1)$ や $(3x+4)/2-(x-1)/3=7$ といった形のものが扱われる。「二元一次方程式」単元では「変数を二つふくむ一次の等式を二元一次方程式という」と説明するとともに、x, y の変域が正の整数の集合である場合や、変域が有理数の集合の場合などを話題にしている。また連立２元１次方程式の解法を考える際にも、まず２元１次方程式の解の集合のグラフをつくり、２直線の交点の座標を用いて解くことを扱った後、「連立二元一次方程式は、式の変形によって、一元一次方程式を導いて解くこともできる」として、代入法と加減法の学習に進んでいる。

Kr46 の１年「文字を使った式」単元では、具体的な場面から $x/4-x/5=1/2$ という等式を作り、この等式に「あてはまる数 x」を考えた後、「このような x についての等式を、x についての方程式」というとして方程式を定

義している。ただしその少し前の箇所で「等式 $2x+3=7$ や、不等式 $x+6>8$ は、変数 x の値についての条件を示したものとみることができる」としており、等式が変数に関わるものとして語られている。

Kr46 の２年「連立方程式」の最初で２元１次方程式を導入する場面においては、具体的な場面から立てた $x+y=10$ という式(1)について「x, y はいずれも変数と考えられ、この等式(1)は、それらの値についての条件を表したものとみることができる」と説明しており、方程式中の文字を変数として語っている。またこの方程式の正の整数の範囲での解を考える際には、「x, y の変域が正の整数の範囲であるとき」としており、変域という変数と関連した用語を用いた語り方となっている。

ただし方程式を変数を用いて定義することは、この時期の全ての教科書で行われていたわけではない。G46 は方程式が導入されるのが変数を学習する前ということもあり、方程式を「x の値によって成立したり、不成立になったりする等式を、文字 x についての方程式といい」と定義している[1]。同様に、Ky46 と T46 でも変数の学習が方程式の導入の後になることから、「含まれる文字の値によって成り立つことも、成り立たないこともある等式」(Ky46)、「式の中の文字に特別な値を代入したときにかぎって成り立つ等式」(T46)と方程式を定義しており、変数などへの言及はない。これらの教科書では２年で２元１次方程式を学習する際にも、文字が変数であるという語り方はされないが、変域について言及される場面は見られる。例えば、G46 の２年「連立方程式」単元では「特にことわりのないかぎり、x, y の変域は、すべて有理数の集合とする」という記述が見られ、Ky46 の２年「連立方程式」単元には「x, y の変域が $\{1, 2, 3, 4\}$ であるとき、方程式 $x+3y=10$ の解について調べよう」という記述が見られる。また Ky46 では「連立方程式」単元の中で、$x+y=7$ を正の整数の範囲で求めた解の組 $\{(1, 6), (2, 5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ をグラフに表すことも行っている。

なお、昭和 43 年版の教科書では、それが依拠する指導要領において「未知数」が第２学年で指導すべき用語に含まれていることもあり、方程式を「未知数を含む等式」(Kr43)として定義したり、「式の中の文字に特別な値を代入したときにかぎって成り立つ等式」として方程式を定義した上で、方程式中の「まだわかっていない数（または、それを表す文字）を未知数という」と補足したり(T43, D43, O43, Ky43, G43)しており、変数と関わらせた語り方にはなっていない。

３．グラフを用いた方程式の解法

第１節でも述べたように、現行の中学校の教科書でも、連立２元１次方程式をグラフを用いて解くことは扱われている。本稿で考察している時期の教科書では、２次方程式や１元１次方程式をグラフで考える例が見られる。

(1) ２次方程式のグラフによる解法

昭和 43 年の教科書では、２次関数の学習の中で、２次方程式をグラフを用いて解くことが扱われている。

例えば T43 の３年必修・選択用では、「２次関数」単元の第３節が「２次関数と２次方程式」という内容になっている。なお２次方程式はこの前の章で学習をしている。節の冒頭では２次関数 $y=ax^2+c$ のグラフと２次方程式の関係を取り上げる。高さ 45 m のところからボールを落としたときに、x 秒後の高さがおよそ $y=45-5x^2$ で表されることを取り上げ、高さが 25 m になるのは何秒後かを考えている。これを式の変形により解くとともに、２次関数としてのグラフを示し、解いて得られた $x=2$ がグラフで $y=25$ に対応する x の値であることを確認している。

次に $y=ax^2+bx+c$ のグラフと２次方程式の関係に進み、$y=x^2-2x-1$ についていくつかの y

の値に対応する x の値を調べた後、２次関数 $y=ax^2+bx+c$ で $y=k$ としたときの x の値はこの２次関数のグラフと直線 $y=k$ との交点の x 座標で、それは２次方程式 $ax^2+bx+c=k$ の解であること、特に $y=0$ のときの x の値は２次関数のグラフと x 軸との交点の x 座標で、２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解であることをまとめている。

さらに「２次方程式のグラフによる解き方」として、「$y=x^2$ のグラフを用いる方法」を取り上げている。例として $x^2-2x-3=0$ の解を $y=x^2$ のグラフと $y=2x+3$ のグラフの交点から求めている。またグラフによる解法では整数解でない場合には「近似値しか求められない」ことを注意している。なお必修・選択用は、現行では高校の数学 I で取り上げられる、$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の交点の個数が２次方程式の解の個数になるという内容も取り上げている。

以上のような扱い方は必修・選択用に限ったことではなく、T43 の３年必修用においても見られる。必修用においては $y=ax^2+c$ のグラフしか扱わないために、上の $y=ax^2+bx+c$ のグラフと２次方程式の関係は取り上げられないが、$y=ax^2+c$ のグラフと２次方程式との関係、および放物線 $y=x^2$ と直線の交点を用いた解法は取り上げられている。これはこの時期の教科書が依拠する指導要領において、第３学年で $y=ax^2$ と $y=ax^2+c$ のグラフを用いた２次方程式の解法を指導するよう書かれていることに対応している。また必修用では、放物線 $y=x^2$ と直線の交点の個数と、２次方程式の解の個数の関係が説明されている。

Ky43, G43 の３年必修・選択用では、導入で具体的な場面を想定せずに関数や方程式の式だけを提示している点を除けば、T43 のそれとほぼ同様の内容を取り上げている。Kr43 の３年必修・選択用では「方程式の根とグラフ」は２ページ半ほどの扱いであるが、１ページは１次方程式が扱われ、２次方程式については１ページ半ほどで扱われている。そして $y=x^2$ と $y=ax+b$ のグラフの交点を用いた解法だけが説明される。O43 の３年必修・選択用も１ページ扱いで、$y=x^2$ と $y=ax+b$ のグラフの交点を用いた解法だけが取り上げられている。D43 もやはり１ページの記述であるが、$y=ax^2$ と $y=k$ のグラフの交点を用いた解法と、$y=ax^2+bx+c$ と x 軸との交点を用いた解法が取り上げられている。同社の同じ指導要領による初期の検定教科書(D36)では、「二次関数の応用」の節の最初に５ページにわたり「二次方程式のグラフによる解法」の記述があり、T43 と同様の内容が扱われている。一部の教科書では系統学習の時期に、２次方程式のグラフによる解法の扱いを軽くする動きがあったと推測される。

２次方程式と２次関数を関連づけることは現代化の指導要領では記載がなくなり、教科書でも基本的には見られなくなる。例えば T46 では２次関数について学習する３年「関数とグラフ」単元において「２元１次不等式の表す範囲」という節は見られるが、方程式との関わりについては触れられていない。Kr46 では３年「関数」単元に「方程式・不等式とグラフ」という節が設けられ、「関数のグラフと、方程式や不等式の解との関係について考え」ているが、１次の範囲に限られており、２次関数と２次方程式との関係は取り上げられていない。これに対し Ky46 には３年「関数」単元の中に「２次関数と２次方程式」の記述が、１ページ程度ではあるが見られる。そこでは方程式 $(1/2)x^2-8=0$ を、$y=x^2$ のグラフと $y=16$ のグラフの交点を用いて解いている。そして「$y=x^2$ のグラフをかいておけば、定木のへりで直線を表すことによって、いろいろな２次方程式を解くのに共通に使えるから便利である」と、Ky43 と同様の説明を行っている。

なお２次方程式自体の解法ではないが、平方根を学習する際に $y=x^2$ や $y=\sqrt{x}$ のグラ

フを利用することが、この時期の一部の教科書で見られる。例えば、G43 の３年必修選択用では、最初の単元が「平方根」であり、したがって２次関数については未習であるにも関わらず、単元冒頭で $y=x^2$ のグラフをかかせている。続く平方根の学習では、$y=x^2$ のグラフをもとに平方すると 9 になる数を考えさせている。さらに $y=x^2$ のグラフから $\sqrt{5}$ や $\sqrt{2}$ などの近似値も求めさせている。同様の扱いは３年必修用にもみられる。

また T46 の３年「平方根」単元では、やはり２次関数の学習の前ではあるが $y=x^2$ のグラフをかかせ、平方して 9 になる数がいくつあるかを確認する場面や、$\sqrt{5}$ と $\sqrt{7}$ の大小を比較する場面でグラフを用いて確認を行っている。

(2) １元１次方程式のグラフによる解法

この時期の教科書には、２元１次方程式だけでなく、１元１次方程式についてもグラフによる解法に触れているものが見られる。例えば、Kr43 では２年「量の変化とグラフ」単元で「一次関数のグラフと一次方程式の根」について学習しているが、そこではまず、$y=ax+b$ のグラフと $ax+b=0$ の解との関係を取り上げ、$ax+b=0$ の解が $y=ax+b$ のグラフと x 軸との交点の x 座標に等しいことをまとめている。その後に連立２元１次方程式の解が２つの直線の交点の座標に等しいことの学習に進んでいる。なお Kr46 では２年「一次関数」で１元１次方程式には言及されなくなるものの、３年「関数」単元の「方程式・不等式とグラフ」の中で、$y=2x-3$ のグラフで $y=5$ となる x の値を求めると、これが方程式 $2x-3=5$ の解になることを取り上げている。

Ky43 の２年「座標とグラフ」単元では、「一次関数と一次方程式」の最初に「グラフを使って方程式を解くことを考えよう」として「一次方程式 $ax+b=c$ の根は、直線 $y=ax+b$ と、直線 $y=c$ との交点の x 座標に等しい」ことを扱い、それから $ax+by=c$ のグラフに進んでいる。G43 の２年「１次関数」単元でも、「１次関数の応用」の最初に「１次関数と１次方程式」を扱い、「１次方程式 $2x-4=0$ の根」を「１次式を x の関数とみて、$y=2x-4$ と置」いて考えた後、「１次方程式 $ax+b=0$ は、１次関数 $y=ax+b$ で、y の値が 0 になった場合であるといえる」とまとめている。

D43 は２年「式の値の変化とグラフ」の単元で連立２元１次方程式のグラフによる解き方を学習した後に、両辺に x が現れる１元１次方程式 $ax+b=cx+d$ を取り上げ、これを $y=ax+b$, $y=cx+d$ の連立方程式としてグラフを用いて解くことを扱っている。その後で「一次方程式 $ax+b=0$ をグラフを使って解くには、$y=ax+b$ のグラフをかき、それと x 軸との交点の x 座標を読めばよい」とまとめだけ示して、問いを解かせている。最後に「グラフを使って解いた結果は、一般に、根の近似値である」との注意を載せている。

両辺に x がある１次方程式をグラフを用いて解くことは、現代化の時期の教科書にも一部見られる。O46 では２年「一次関数」で連立２元１次方程式の解をグラフを用いて求めることを学習した後、$(1/2)x-2=3-(1/3)x$ をグラフを用いて解くことを取り上げている。両辺に対して $y=(1/2)x-2$ と $y=3-(1/3)x$ のグラフを考え、その交点の x 座標として解を求めている。Ky46 も２年「１次関数」の最後で「グラフを使って、連立方程式を解く方法」を考えた後、「グラフを使って、１元１次方程式を解く方法を考えよう」として、$3x-32=-2x+8$ をグラフを使って解いている。そして $y=3x-32$ と $y=-2x+8$ のグラフの「交点の x 座標を読めばよい」とまとめている。

この両辺に x が現れる方程式については Kieran ら (1996)が算数のような逆算による解法が直接適用できないために、生徒にとって困難が見られたと報告しており、関数的アプローチの有用性が感じられやすい方程式とも考えられる。そうした方程式を２つの１次関

数のグラフの交点を用いて解く方法が、この時期には取り上げられていたことになる。

(3) ２元１次方程式の取り扱い

２元１次方程式を１次関数と関連づけて考えることは現行の教科書でも行われている。ただ２元１次方程式と１次関数のグラフとの関連を扱うにあたり、関数的アプローチの観点から見て、現行の教科書とは多少異なる取り上げ方をしている事例が見られるので、それについても検討しておく。

第一に方程式をグラフを用いて考える際、方程式中の文字を変数とみなすことを明確に断る例が見られる。G43 の３年必修選択用の「連立方程式」単元では、冒頭に「方程式とグラフ」として、「等式 $y=x-2$ に適する(x, y)を座標とする点はすべて直線 $y=x-2$ のグラフの上にあり、また、逆に直線 $y=x-2$ のグラフの上にある点の座標(x, y)は、すべて等式 $y=x-2$ に適する」ことを確認している。そして、次のことを明確に断っている：「等式 $y=x-2$ は、x, y を未知数とみれば方程式となり、x, y を変数とみれば、y は x の１次関数となる」。また「このように、x, y についての等式は、方程式とみることも、関数関係とみることもできる」とも説明している。

D43 でも２年「式の値の変化とグラフ」の単元で式(3) $2x+y=5$ と(4) $y=-2x+5$ について次のように断っている：「二元方程式(3)は、x, y を変数とみるとき、式(4)で表される一次関数と同じ関係を表すとみてよい」。これらの語り方を見ると、榎本 (2013)が必要性を指摘する「文字を未知数から変数へ見方を変えなければいけない」ことが、この時期の一部の教科書では明示的に行われていたと見ることができる。

第二に方程式を用いて考える際に、単にグラフを用いて解を見出すことを取り上げるだけでなく、具体的な場面を用いるとともに、方程式を立てる前に、場面に含まれる量の間の関数関係をグラフなどを用いて把握する活動を取り入れたものがいくつか見られる。

D43 の２年「式の値の変化とグラフ」単元では、「一次関数と一次方程式」という節があり、２元１次方程式のグラフが取り上げられる。その説明をする直前に、A 君は 9 時 8 分前に出発した 0.5 km/分で走る自動車に乗っており、B さんは 9 時に出発した 0.9 km/分で走る自動車に乗っているという場面を取り上げている。そしてまず 9 時から x 分後に出発点から y km の地点にいるとして、２台の自動車について x, y の関係を式で表すとともに、それらのグラフを提示している。さらにグラフの交点の座標を読むと B さんが A 君にいつどこで追いつくかを知ることができることをまとめた後、今の場面で出てきた $y=0.5x+4$ が「x, y についての二元方程式と見ることができる」として、方程式のグラフを説明する。さらに「一次方程式のグラフによる解法」に進み、連立２元１次方程式をグラフを用いて解くことを学習している。連立方程式の解法では追いつく場面の式をそのまま利用してはいないが、全体の流れとしては２台の自動車の動きという場面のようすを式やグラフで表現した後に、その関係が方程式としても見ることができると説明し、方程式とグラフの関係を導入しようとしていると考えられる。

D46 では第２節でも触れたように、２年「一次関数」単元の後に「二元一次方程式」単元が置かれ、そこで初めて２元１次方程式が導入される。その際まず 20 円の鉛筆 x 本と 10 円の鉛筆 y 本を買って 120 円払ったという場面が用いられる。この場面について立てた方程式の解を座標とする点をプロットしたグラフを提示し、これを２元１次方程式のグラフということを説明する。さらに $20x+10y=120$ などについて、y は x の関数と見ることもできることを確認している。ここでも、２種類の鉛筆を買うという場面のようすを式とグラフで表現している。

その後、連立２元１次方程式の解法を学ぶ

際にも、15 円切手と 50 円切手をあわせて 20 枚買い、50 円切手の方が 6 枚多かったという場面を用い、そのようすを式とグラフで表している。さらにそのグラフをもとに２つの方程式の両方の解になる x, y の組を求めさせ、そこから連立２元１次方程式の解を説明している。そしていくつかの連立方程式をグラフを用いて解く問いを考えた後になって、代入法、加減法を学習するという流れになっている。ここでは、場面中の数量間の関係をグラフで概観し、また連立方程式の解のイメージをグラフの交点という形で見せることが、式変形による解法よりも先に行われている。

一次関数の学習後に連立方程式を学習するという扱い方、また連立方程式の解法でも最初にグラフを利用したものを取り上げ、その後に代入法や加減法を学習するという扱い方は、次の指導要領に依拠する D55 においても踏襲されている。

４．昭和 40 年代の教科書の記述と今日的な関数的アプローチ

前節まで見てきたように、昭和 43 年版および 46 年版の中学校教科書においては、現行の中学校教科書には見られないような、方程式と関数とを関連づける記述が見られた。すなわち、変数を用いた方程式の定義、方程式に関わる記述での変域への明示的な言及、２次方程式のグラフによる解法、１元１次方程式のグラフによる解法、方程式中の文字を変数と見ることの明示的な宣言、そして方程式で表現する場面のようすをグラフにより把握することが見られた。

こうした特徴の中のいくつかは第１節で述べた今日的な代数への関数的アプローチに見られる特徴にも類似している。ここではそうした両者の類似点と相違点について検討してみる。

(1) 変数や関数的関係への視点の移行

関数的アプローチの視点から方程式を扱っていくことに関わり、榎本 (2013)は方程式中の「文字を未知数から変数へ見方を変えなければ」ならず、また方程式が「表している数量関係を相等（大小）関係から関数関係へ見直す必要もある」ことを指摘していた。これに関わっては第２節で触れたように、昭和 46 年版の教科書のいくつかでは方程式を変数を用いて定義しており、こうした見方の変更がそもそも不要な語り方になっている場合が見られた。

また昭和 43 年版のいくつかの教科書では、３(3)で触れたように、方程式中の文字を変数と見なすことを明示的に断っており、変数へと見方を変更することを明確に宣言するような語り方になっていた。以上より、昭和 40 年代の教科書においては、方程式中の文字を変数と捉えるような語り方がいくつも見られ、関数的アプローチのこうした側面についてはわが国の教科書においてすでに取り入れた事例があったと言うことができよう。

(2) 多様な表象の利用

「いくつかの表象を用いることは、代数的問題解決に対する関数的アプローチの不可欠な(integral)部分」(Kieran et al., 1996, p. 260)とされる。３(1), (2)で触れたように昭和 40 年代の教科書では現行よりも多くの種類の方程式についてグラフを用いた解法を扱っており、この意味で方程式の学習の文脈において式に加えてグラフという表象を併用することが、現行の教科書よりも多く見られたと言えよう。また３(3)で触れた D46 の場合には、２元１次方程式の導入時に式、表、グラフが用いられており、いっそう上述の関数的アプローチに近い記述になっている。ただしグラフに加えて表を用いた例は多くないことから、この点については Kieran ら(1996)の提案する学習活動ほどには多様な表象が利用されていなかったことになる。

(3) 方程式を立てる前の関数的関係の把握

関数的アプローチに基づく Kieran ら (1996)

の学習活動では、「いくつかの数を試してみることで問題文の感じをつかもうとする」(p. 259)ことが重視されており、「問題中に与えられたものの間のより一般的な関数的関係を作り出」すこと(p. 258)が行われていた。つまり、すぐに方程式を立てるというよりも、まずは場面中の数量間の関数的関係を捉えたり数量が変化したときのようすを観察することで、場面を把握することが行われ、その把握が十分なされた後に、数量がある特定の数値になる場合や、２つの数量が一致する場合として方程式が立てられるものと考えられる。

本稿で検討してきた教科書では、グラフを用いた方程式の解法は多く取り上げられていたものの、Kieran ら (1996)が重視するような場面中の関数的関係の把握や、Mizoguchi (2015)や山脇ら(2013)が提案する「関数のグラフを問題解決の手段の１つとして捉える」という側面は明確ではないように見える。

確かに、３(3)で取り上げた教科書の事例のように、連立方程式の導入の部分でグラフを用いて場面の全体像を確認したり、さらにはそうしたグラフの交点に注意を向けることで場面の全体像から連立方程式の解のイメージを持たせる語り方をするものも存在した。特に前項でも触れた D46 では、方程式の導入で表とグラフを組み合わせた扱いも見られた。

しかしすぐに立式が行われ、Kieran ら (1996)のように、いくつかの数を試して問題文の感じをつかもうとすることが、一連の活動中に明確に位置づけられているかは不明確であった。D46 でも立式後に、その式を満たす解を表で提示するに過ぎない。Nunokawa (2000)は場面を把握するための問題解決方略という視点からいくつかの方略の意義を再検討し、試行錯誤を行うこと、およびその結果を表に整理することも、単に解を逐次近似的に求める解法としてだけでなく、問題場面中の数量関係を把握するための手立てとして有効であることを指摘している。現行の教科書で２元１次方程式を関数を表す式と見る際に x に数値を代入して y の値を求めるが、榎本 (2015)はこの活動を、関数的関係を「操作的、プロセス志向的な仕方で」(Kieran *et al.*, 1996, p. 258)扱うことに対応するとした。こうした活動が問題や関数的関係の感じをつかむこととして位置づけられるよう留意することは、昭和 40 年代の教科書の扱いと今日的な関数的アプローチの差異を埋める可能性を持つものと考えられる。

５．おわりに

本稿では昭和 40 年代の中学校教科書に見られる、方程式と関数との関連づけについての記述を検討してきた。その結果、現行の中学校教科書には見られないタイプの記述が見られ、それらが関数的アプローチに近い性質を持つことを確認してきた。同時に、当時の扱い方と今日的な関数的アプローチとの間の差異も認められ、そうした点を検討することが当時の扱いを関数的アプローチにより近づけるための視点となりうると考えられた。

こうした検討に関わり１つの残された課題は、方程式と関数の関連づけに不等式も組み入れ、方程式、不等式、関数を変数の観点から統一的にとらえる枠組みを構成することである。本稿では方程式中の文字を変数としてみなす扱い方が当時に行われていたことを見てきたが、変数とみなす事例は不等式においてはさらに多く見られる。実際、T46 では方程式については変数と関わらせることが明示的には見られないが、２元１次不等式については３年で「２つの変数をふくむ不等式」として定義している。また同様に、G46 の３年「方程式・不等式」単元では「不等式 $2x>x+3$ は、１つの変数 x について次数が１次であるから、これを１元１次不等式という」との記述がある。このように不等式の方が変数の考えとより結びつきやすいとすれば、変数の視点から、不等式も含む統一的な枠組みを構成

する可能性はあると考えられる。

謝辞：資料の収集にあたって本学図書館並びに公益財団法人教科書研究センター附属教科書図書館にお世話になりました。本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)(課題番号：16K00954）の助成を受けている。

註および引用・参考文献

1) 同じ指導要領に基づく G52 では扱い方が異なる。１年「文字と式」単元の中に「方程式・不等式の解」という箇所があり、冒頭の問いに現れる x を用いて変数と変域が導入され、次に「x の変域を $\{0, 1, 2, 3\}$ として、等式 $2x+3=7$ が成り立つ x の値」を求める例題を提示する。そして、この例題をもとに「$2x+3=7$ のように、x の値によって成り立ったり、成り立たなかったりする等式」として方程式を定義している。ここでは方程式中の x は変数として語られているように見える。x に数を代入して解を見つける例題や問いでは、「x の変域」を指定して解かせている。さらに１次方程式の解法のまとめで「１次方程式は移項して整理すると $ax=b$ $(a\neq0)$ と」なり、「$ax=b$ は、$2x=6$ や $-3x=5$ のような式をまとめて表しているから、x が変数であるのに対して、a, b は決まった数となる」と補足している。このように G52 では方程式中の x を変数として語る傾向が明らかであり、同じ会社であっても検定の年度により語り方に違いがあることがうかがえる。

榎本哲士. (2013). 学校数学における文字式の理解を捉える枠組みの構築：関数的アプローチを視点として. 数学教育学論究(臨時増刊), *95*, 25-32.

榎本哲士. (2015). 中学校数学科における二元一次方程式の関数的見方に関する理論的分析：数学的概念の二面性を視点として. 教材学研究, *26*, 49-56.

Farmaki, V. (2004). From functions to equations: Introduction of algebraic thinking to 13 year-old students. In M. J. Høines& A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 393-400). Bergen, Norway.

Kieran, C., Boileau, A., & Garancon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 257-194). Springer.

Mizoguchi, T. (2015). Functions and equations: Developing an integrated curriculum with the required mathematical activities. In C. Vistro-Yu (Ed.), *Proceedings of the 7th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (pp. 625-637). Philippine Council of Mathematics Teacher Educators.

Nunokawa, K. (2000). Heuristic Strategies and Probing Problem Situations. In Jose Carrillo & Luis C. Contreras (Eds.), *Problem-solving in the beginning of the 21st century: An international overview from multiple perspectives and educational levels* (pp. 81-117). Huelva, Spain: Hergue.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Goodrow, A., Caddle, M. C., & Porter, M. (2013). Equations in elementary school. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 161-168). Kiel, Germany.

山脇雅也, 山本靖, 溝口達也. (2013). 中学校数学科における関数と方程式の統合カリキュラムの開発研究：第２学年及び第３学年の授業研究を基に. 数学教育学研究, *19* (2), 185-201.

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.11-18

幾何や代数の区別のない数学の始原のところ

－掛け算九九の指計算の方法と仕組みを探る－

伊 達 文 治
上 越 教 育 大 学

１．はじめに

《算数は，記号代数の理論や理論の関数概念の侵入と対決すべき性格を負わされているもの，と考える。西欧数学の歴史にたとえれば，初等数学教科が志向するのは，ギリシャ以前の，いわば，幾何や代数の区別のない数学の始原のところである。どこかを拓くことによって，今日の算数が児童の将来にとって，魂のふるさとになる部分を担えることになると考えたい。》（板垣，1986b，p.9）

これは,板垣先生の論考の中の言葉である。

今日の学校数学は，子供の将来にとって，魂のふるさとになる部分を担っているであろうか。幾何や代数の区別のない数学の始原のところを大切にしていると言えるであろうか。

本稿は，幾何や代数の区別のない数学の始原のところを，掛け算九九の指計算の方法と仕組みから，探ろうとするものである。この探究は，ほんの僅かな一例に過ぎないかもしれない。しかし，数学や数学のアイデアには全て始原がある。これから数学や数学のアイデアの始原を探っていく取り組みへと発展させていく出発点にできればと考えている。

本題に入る前に，数学史における代数の展開について概略を確認しておきたい。次の 2 節･3 節は，伊達(2008)からの抜粋を一部修正・加筆の上で記載することにする。

２．数学（主には代数）の展開段階

中村(1980)によると，ネッセルマン(Nesselmann ,1811-1881)は，『ギリシャの代数学』(Nesselmann,1842)（pp.301-302）において,「代数的演算や方程式の形式的表現に関連して，我々は歴史的にいって本質的に異なる 3 つの展開段階に区別することができる」と述べている。3 つの段階は次のものである。

第 1 段階　「言語代数」　；　記号が全く無く，計算の全過程が言語で詳しく述べられているもの。

第 2 段階　「省略代数」　；　第 1 段階と同じく言語的であるが，繰り返し用いられる概念や演算については，言語で表現する代わりに，決まった省略記号が用いられる。

第 3 段階　「記号代数」　；　全ての式や演算が，完全に展開した記号的言語によって表現される。

数の計算とその規則は，きわめて古くから知られていたものであり，全く実用上の目的から出発したものであり，どの文化圏でも見られるものである。日常生活のための知恵や建築・測量のための「数の知識の領域」を超えて，数そのものの理論を組織的に追求しようとする段階に至って，はじめて数論という一つの数学が形成されていく。

数学は論証的構造をもつ言語であるという捉え方があるが，近世以前において数学は，

幾何学はもちろん代数的なものまで殆ど，この言語をもって綴られていたと言える。ユークリッド『原論』第Ⅴ巻「比例論」や第Ⅹ巻「無理量論」等にも，代数的記号法というものが全く欠如し，代数方程式という考えが全く存在していない。ギリシャ人は記号なしの言語数学を，言語を誤り無く使いこなす言語論理と文法をもって構成していった。これらは，もちろん上の第 1 段階「言語代数」に属するが，アラビアやペルシャの代数学，さらには近世になってのイタリアの古い数学者達のものもこれに属する(中村,1980,pp.14-15)。

記号法の始原は，ディオファントス(Diophantus)(3 世紀頃)の数論の中で未知数の最初の記号化が成されていることに見出される。この写本はルネッサンス期に再発見され，16･17 世紀の代数学形成の原動力となった。ディオファントスは上の第 2 段階「省略代数」に属し，また 17 世紀半ば頃までの代数学者たちのものもこれに属する。

近代代数学の始原はヴィエタの論著であり，少し後のデカルトによって完成される。これが第 3 段階「記号代数」である。

３．代数表現の展開

今日の学校数学の基盤をなしている代数表現の確立に至るまでには，古代バビロニアからみると，4 千年もの年月を要している。代数は,数の代わりに文字を使って計算したり，定理法則を研究したりするところに本領がある数学であるが，一般的な数を文字で表して現在のように文字式を自由に操作し始めたのは 16 世紀のヴィエタである。代数はそこ当たりから始まると言える。図 1. のように，そこに至るまでには，ネッセルマンが明らかにしたように,「言語代数」の時代と「省略代数」の時代を経なければならなかった。記号代数学に至る長い道程は全てこの「前代数」段階に当たる。この段階での展開の系列は，大きく２つに分けられる。「計算法」の展開と「記数法」の展開である。「計算法」はさらに２つ，インドを中心に展開しアラビアを経由しヨーロッパに伝播した「筆算」，ヨーロッパのアバックス，中国・日本の算木・算盤・そろばんなどによる「道具的計算」に分けられる。「記数法」も大きく２つ，「命数的記数法」と「位取り記数法」とに分けられる。それらは他と関わりを持ちながらそれぞれ展開していった。

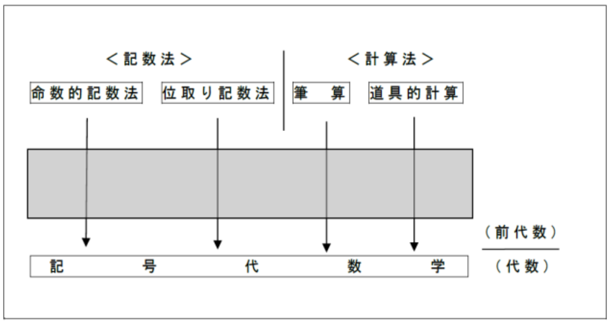


図 1：代数学の展開

（図 1.の系列の展開を表す矢印を包括する長方形は，矢印の示す各々の展開が他と関わりを持ちながらのものであることを示している。）

その長い道のりの後，ヴィエタ・デカルトの「記号代数学」が誕生した。これが，ネッセルマンの第 3 段階「記号代数」であり，真の「代数」段階であると言える。その後，この記号や式の力によって，数学や科学が急速な発展を遂げることになる。

では，なぜ,「記号代数」に至るまでにこれほどの長く困難な道のりが必要であったのか。1 つには，未知数を文字に置き換えることに比べ，既知数を文字に置き換えることには相当な困難さがあったと考えられる。先に見てきたように，古代バビロニア・ディオファントス・アラビアで扱われた 2 次方程式には，未知数は文字で置き換えられることはあっても，既知数（定数項や係数）が文字に置き換えられることはなかった。そのため，そこで

扱われる2次方程式は個々別々のものになっていて，そのときの計算法で可能な型に限られたものになっていた。それに対し，「記号代数」段階のヴィエタ・デカルトの扱う2次方程式は，既知数（定数項や係数）も文字に置き換えられ，そこでは一般的な代数方程式としての自覚が認められる。ヴィエタが既知数も文字に置き換えることができた理由は，その直前の時の状況を見なければならない。ヴィエタは3次方程式も扱っているが，3次方程式を完全に解くという問題は,既に16世紀のイタリアの代数学者の主要な課題になっていた。また，中世にインド・アラビア数字の西欧への渡来があったが，15世紀には0,1,2から9に至る殆ど現在に近いものが既に使われ，16世紀には完全に現在のものと同じ数字と,それによる10進位取り記数法が既に使われていた。この方程式研究の進歩と最終段階の記数法の定着,そしてディオファントス『算術』に接すること等によって，先に述べた既知数も文字に置き換えることの困難さを乗り越えることができたと考えられる。

４．掛け算九九の指計算の方法とその説明

掛け算九九の指計算の起源は明らかではないが，2節・3節で述べたような，記号はもちろん言語でも述べられてはいない。口伝えに伝承されてきたものであろう。それは余りに巧妙な方法であり，偶然に経験的に発見されたとは言い難い感は拭えないのである。

何か，幾何や代数の区別のない数学の始原のところのものが，隠されているような気がしてならない。

掛け算九九の指計算の方法は，各誌で紹介されている。筆者の手元にあるものを全て発行年順に，ここに引用することにする。

4-1. 片野善一郎(1964)

片野（1964)『問題形式による数学史』に紹介されているものを，次に引用する。（ここで参考にされている元の文献は明記されていない。）

《フランスやロシアの農民の間でごく最近まで行われたおもしろい掛け算があります。

たとえば，6×8 の計算をするのに，まず左手の指を $6-5=1$ 本折り，右手の指を $8-5=3$ 本折ります。すると折った両手の指の数の和 $1+3=4$ が答の10の位の数字,おらずに残った指の数の積 $4\times2=8$ が答の1の位の数字になります。この方法を使えば $5\times5=25$ 以上の九九を知らなくてもすむから怠け者には大変つごうがよいわけです。

（問）　この指計算の原理を説明しなさい。

（注）　2数を $5+a$，$5+b$ で表してみると折った指の数の和は $a+b$，折らずに残った指の数の積は $(5-a)(5-b)$ となります。

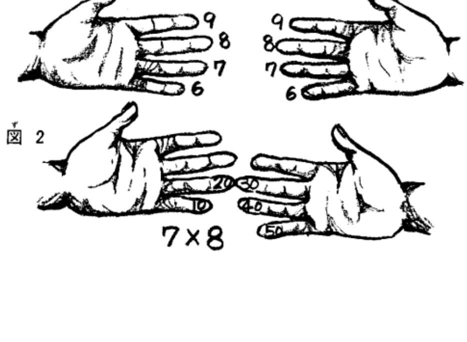
$$10(a+b)+(5-a)(5-b)=(5+a)(5+b)$$

ですから，この指計算は正しいことがわかります。》(p.125)

4-2. アービング・アドラーら (1970)

アービング・アドラー，ルース・アドラー(1970)『数いまとむかし』に紹介されているものを，次に引用する。（ここで参考にされている元の文献は明記されていない。）

《指をつかって，かけ算をする方法もあります。ヨーロッパの農民は，よくこのやり方でかけ算をしました。しかし，これは6から10までの数にしかつかえません。図1にしめしてあるように，指が数をあらわします。



7と8をかけるには，図2のように7の指と8の指をくっつけます。さて，答えは二つの部分にわけてだします。まず，くっつけている指と，その指より下にある指の本数をたして，それを10倍します。このばあいは,図2に示したように,50になります。次にのこりの指の本数を左右それぞれかぞえ,この左右の数をかけます。この場合は，3×2で6ですね。そこで，この二つの数を足すと50＋6で56になり，これが7×8の答えです。6から10までの数でほかに何かためしてごらんなさい。》(p.41)

4-3. イー・ヤー・デップマン(1985)

イー・ヤー・デップマン(1985)『算数の文化史』に紹介されているものを，次に引用する。(ここでは,「数学の諸文献では，指計算がモルダヴィア人や南ルーマニアの民族のあいだでは大変広く使われていて，あたかも古代ローマ人から伝わったかのようにしばしば指摘されている。」(p.16) と述べられているだけであり，その諸文献については明記されていない。そして，その文献に掛け算九九の指計算のことがどの程度述べられているかについても不明である。)

《指計算は，共通の言語をもたないいろいろな民族の代表者が顔をあわせる市場では必要であった。そこで，実際の必要から，話さなくても理解できる共通の指計算が創造され，しかもこの計算方法は，小学校で生徒たちに教え込まれたのである。ローマのキケロー（紀元前1世紀）は，ローマでの学校教育の程度の低さをののしっている。ローマの学校では,掛け算の表(九九の表)は5までしか暗唱させず，それ以上は指による計算でおぎなっていたのである。こうした方法が可能であることは，つぎの等式から明らかである。

$$10[(a-5)+(b-5)]+(10-a)(10-b)=ab$$

この等式は，5より大きく10より小さいaとbの数を掛け合わすには，aとbに与えた1桁の数が5をこえたぶんだけ，両手の指を伸ばせばよいという，実用的な法則にあてはまっているのである。伸ばした指の数の合計は,それの10倍をあらわしていて,この数に，残っている曲げられた指に相当する数(10－a)と(10－b)の積をくわえればよい（双方の括弧内の数は5より小さい)。

［例］　7×8　を求めよ。

一方の手に2本の指（つまり 7－5＝2)，他方の手に3本の指（つまり 8－5＝3）をのばす。曲げられている指は，一方の手に2本，他方の手に3本残っている。そうすると，伸ばされた指の数の合計である5は2桁の数（つまり50）をあらわし，また，曲げられた指の双方の積2×3＝6は1桁の数となっている。つまり，

$$7\times8=(5\times10)+6=56$$

となるわけである。》(p.16)

4-4. 小川雄三(2010)

小川（2010)「指で「掛け算九九」」に紹介されているものを，次に引用する。(ここで参考にされている元の文献は明記されていない。)

《今回も掛け算九九の話をしましょう。

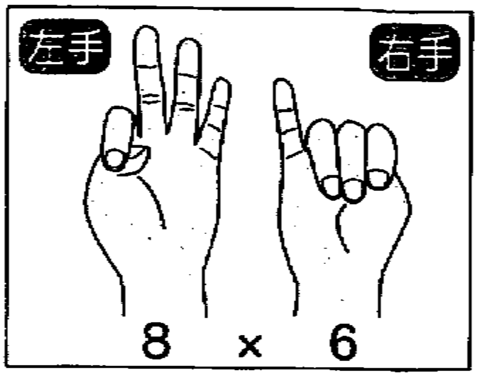
誰もがお世話になったリズムよい「九九」は，日本の算数教育を支える財産です。そのおかげで日本人は小学2年生の1年間で九九を暗唱できるようになります。でもともすると「8×6･･･？」と，迷うこともあります。小学校の太郎さんも，そんな大失敗をお父さんに話しています。

（太郎）お父さん，今日のテストで大失敗をしてしまった。8×6が頭の中から急に消えて出てこないんだよ。

（お父さん）お父さんもあったなあ。そんな時のために,「指九九」を教えてあげよう。太郎が困った「8×6」で考えるよ。

① 両手の手をパーの形に開き，まず左手で 8 を指で折る。8 は 5 を三つ超えるので，小指と薬指と中指の 3 本が立つね。

② 次に右手で 6 を指で折る。6 は 5 を一つ超えるので，小指の 1 本だけが立つね。



③ 立っている指を加えた数が十の位。

　3＋1＝4　→　40

④ 折れている指を掛け合わせた数が一の位。

　2×4＝8

⑤ 最後にこれらの二つの数を加える。

　40＋8＝48

8×6＝48 で正しい積が出るだろう。

（太郎）すご～い！　僕は 7 の段が少し苦手だから，7×7 をやってみよう。

右手・立っている指 2 本　折れている指 3 本，左手・立っている指 2 本　折れている指 3 本

　2＋2＝4　→　40　　3×3＝9

ほんとだ。49 とちゃんと答えが出る。

　隣で聞いていた中学生の花子さんが，ちょっと首をかしげています。

（花子）ちょっと待って。7×6 は「指九九」ではうまくいかないと思うわ。7×6＝42 なのに，立っている指が右手 2 本と左手 1 本で，30 にしかならないわ。

（お父さん）さすが中学生。できない例（反例）を考えるなんて，目の付け所がいいね。でも，折れている指も考えてごらん。

　右手・折れている指 3 本，左手・折れている指 4 本

　3×4＝12　だから 30＋12＝42 で正しいわけだ。

（花子）そうか，繰り上がるんだね。

（お父さん）花子は中学生だから，「指九九」で正しく積が出るわけを考えてごらん。

（花子）よ～し，文字式で考えてみよう。数を一般化して a ×b として考えるね。

① 十位の数は立っている指の数の和

$\{(a-5)+(b-5)\}\times 10$

② 位置の位の数は折っている指の数の積

$(10-a)\times(10-b)$

③ 二つの数（式）を加える

$\{(a-5)+(b-5)\}\times 10+(10-a)\times(10-b)$

$=10(a+b-10)+100-10(a+b)+ab$

$=ab$

「指九九の式」＝a×b　になるわ。

（お父さん）その通り。

×　　　×

　「指九九」は昔のフランスの農民の間で用いられていた計算法ということです。九九を全部覚えなくとも，1 の段から 5 の段までを暗唱していれば，九九全部の積を求めることができるわけです。》（11 面）

5．掛け算九九の指計算の背景とその仕組み

　掛け算九九の指計算の起源は明らかではないが，背景をある程度は次のように考えることができる。イー・ヤー・デップマン（1985）によると，この指計算は古代ローマから伝えられたものであり，日常の必要から生まれたものである。指計算は，共通の言語を持たない民族同士が顔を合わせる市場では必要であった。そこで，実際の取引などの必要から，話さなくても理解できる共通の指計算が生み出された。この計算方法は，小学校で生徒たちに教え込まれた。ローマの学校では，掛け算の表（九九の表）は 5 までしか暗唱させず，それ以上は指による計算で補っていた（p. 16）。

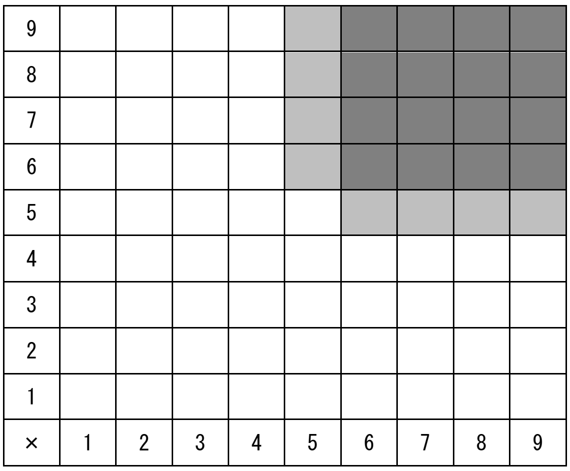
こうした掛け算九九の指計算の方法には，前の4節に紹介したように次の3種類がある。

① 5より大きく10より小さいaとbの数を掛け合わすのに，両手でそれぞれ $a-5$ 本の指と $b-5$ 本の指を折り曲げて計算する方法。（前節の4-1がこれに当たる。）

② 5より大きく10より小さいaとbの数を掛け合わすのに，両手でそれぞれ $a-5$ 本の指と $b-5$ 本の指を伸ばして計算する方法。（前節の4-3と4-4がこれに当たる。）

③ 5より大きく10より小さいaとbの数を掛け合わすのに，両手の各指に6～10の数を対応させ，a，bの数に対応する指をくっつけて計算する方法。（前節の4-2がこれに当たる。）

掛け算 $a\times b$ において，掛け算九九の指計算の適用範囲は，上に記述したように，$5<a<10$，$5<b<10$ であり，図示すると下図の網掛けの色の濃い部分になる。前の4節の4-4で検討した繰り上がりを考慮するならば，上の3種類の方法の③以外の①と②においては，例えば 5×7 のような計算も適用範囲に入り，$5\leqq a<10$，$5\leqq b<10$ となり，適用範囲は図示すると下図の網掛けの色の薄い部分にまで広がる。したがって，4の段までの九九と五五を暗唱することができれば，この指計算によって，九九の答えは全て得られることになる。



こうした掛け算九九の指計算の方法が正しいことの説明には，前の4節に紹介したように，次の文字式による2種類の説明がある。

① 5より大きく10より小さいaとbの数を掛け合わすとき，次のようになる。
$$10[(a-5)+(b-5)]+(10-a)(10-b)=ab$$

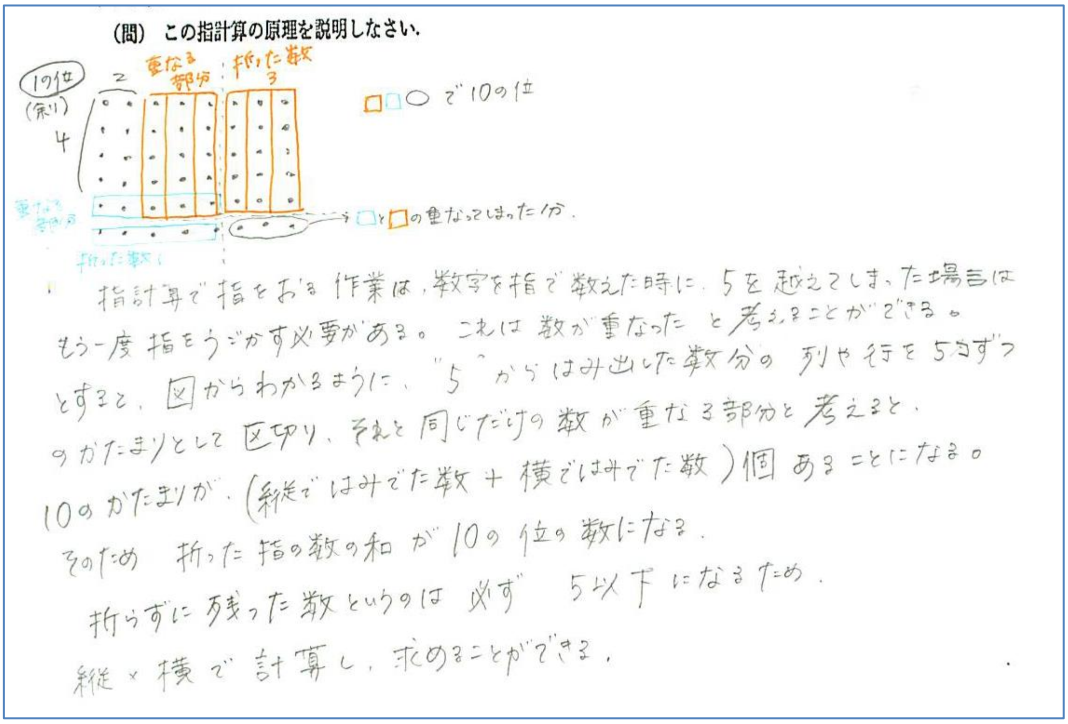
② 5より大きく10より小さい $5+a$ と $5+b$ の数を掛け合わすとき，次のようになる。
$$10(a+b)+(5-a)(5-b)=(5+a)(5+b)$$

このように，私たち現代の人は，文字式を使用した代数的な説明により，掛け算九九の指計算の方法が正しいことを説明できる。文字式の存在しない頃の古代の人には，このような文字式を使用した代数的な説明などはもちろんできなかったであろう。「こうしたら正しい答えが出る」というように帰納的に考え，経験的にこのことを確認して，この方法が正しいことを説明したのではないだろうか。

この方法が正しいことは帰納的・経験的に説明できたかもしれないが，では，なぜこのような方法を生み出すことができたのかは，依然，闇の中である。次の節では，その闇に僅かながらでも光を当てることを試みたい。

6．掛け算九九の指計算にみる数学の始原

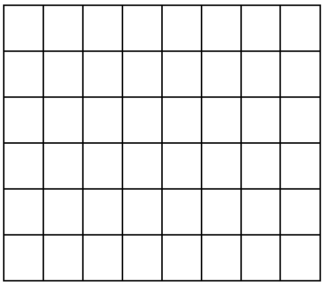
本学において，後期の主には学部2年生を対象にした選択科目「数学的経験と学習過程」の授業の5コマを担当している。その授業で，殆ど毎回，簡単なレポートを課している。そのレポートの1つに，4-1の片野(1964)の(問)「この指計算の原理を説明しなさい。」というものがある。提出されたレポートは，殆ど全部と言ってよい，前の5節に示した2種類の方法の内の①，文字式による説明である。この授業は8年に及ぶが，唯一，3年前，当時学部2年生のSさんから，文字式に依らない指計算の原理の説明が提出された。次のようなものである。


(問)　この指計算の原理を説明しなさい.

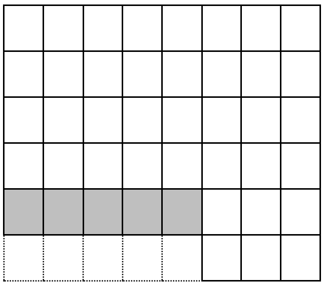
指計算で指をおる作業は，数字を指で数えた時に，5を越えてしまった場合は
もう一度指をうごかす必要がある。これは数が重なったと考えることができる。
とすると，図からわかるように，"5"からはみ出した数分の列や行を5こずつ
のかたまりとして区切り，それと同じだけの数が重なる部分と考えると，
10のかたまりが，(縦ではみでた数＋横ではみでた数)個あることになる。
そのため　折った指の数の和が10の位の数になる.
折らずに残った数というのは必ず　5以下になるため.
縦×横で計算し，求めることができる.

この説明には,文字式は使われていない。掛け算九九の指計算（前節の方法①）が生み出される前の数学的なアイデアのイメージを表す図で説明されている。この図による説明を,次にもう少し詳しくしてみよう。

6×8　の計算を考えてみよう。

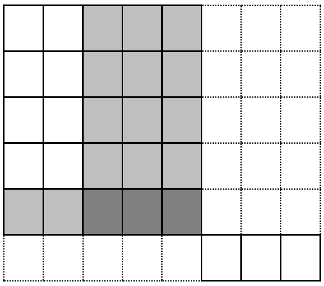


求める答えの数は，右図の縦(左手)6，横（右手）8　のマス目の数である。

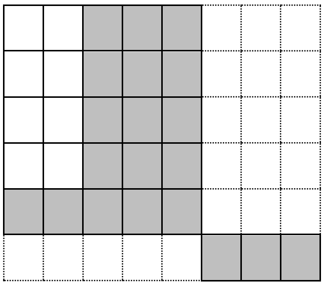


まず，左手の指を　6－5＝1 本を折ると右図のようになり，指 1 本分が重なってマス目　10 個分を数えたことになる。

次に，右手の指を 8－5＝3 本を折ると右上図のようになり，指 3 本分が重なってマス目 30 個分を数えたことになる。



ただし，網掛けの色の濃い部分は，左手の折った指　1 本と右手の折った指 3 本が重なったところであり，そのマス目 3 個分を重複して数えていることになる。

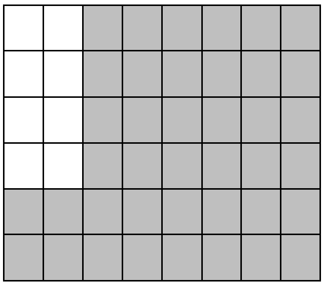


そこで，重複して数えたマス目 3 個分を右図の右下のまだ数えていないマス目 3 個分の所に移す。

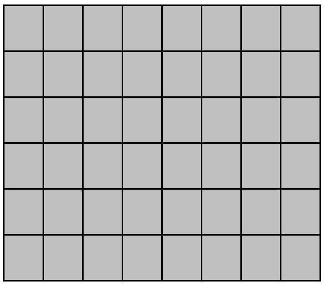
ここまでで，結局，折った指の数の合計の 1＋3＝4 本分のマス目 40 個分をもれなく重複なく数えたことになる。

あと，まだ数えていないところは，次頁の左上の図の網掛けのない白い部分である。ここは折っていない指，左手は 5－1＝4 本，右手は 5－3＝2 本のところであり，ここの

部分の積を4×2＝8 と求めれば，白い部分マス目 8 個分を数えたことになる。



先に求めたマス目 40 個分にこのマス目 8 個分を加えて得られるマス目 40＋8＝48 個分（右図）は，最初の縦（左手）6，横（右手）8 のマス目の数をもれなく重複なく数え上げたものである。



すなわち,このような数え上げによって，6×8 の答え 48 を得たのである。

このＳさんの説明は，文字式はもちろんのこと，言語にも依らない，ごくごく素朴な掛け算のイメージ（数学的なアイデアの素と言ってもよいようなもの）による簡潔・簡明な説明である。代数と幾何の区別のない数学の始原のところが，そこにあるように思える。もしかすると，掛け算九九の指計算を生み出した古代の人には，自分の両の手のひらに「5×5」が，そして自分の折った指の重なりには，5 と 5 の重なりの「10」がみえていたのかもしれない。

７．おわりに

本稿は，幾何や代数の区別のない数学の始原のところを，掛け算九九の指計算の方法と仕組みから，探ろうとしてきた。

「はじめに」に述べたことの繰り返しになるが，この探究は，ほんの僅かな一例に過ぎないかもしれない。しかし，数学や数学のアイデアには全て始原がある。これから数学や数学のアイデアの始原を探っていく取り組みへと発展させていく出発点にしたいと考えている。

引用・参考文献

アービング･アドラー,ルース･アドラー 著／植野香雪 訳／石橋教子 画(1970),『数いまとむかし』，福音館書店.

イー・ヤー・デップマン 著／藤川誠 訳(1985),『算数の文化史』,現代工学社.

ファン・デル・ヴェルデン（B.L.van der Waerden）著／加藤文元 他 訳(2006),『ファン・デル・ヴェルデン　古代文明の数学』，日本評論社.

フェリックス・クライン（Felix Klein）著／遠山啓 監訳(1959),『高い立場からみた初等数学』，商工出版社.

板垣芳雄(1986a),「藤澤の『算術条目及教授法』を読む（Ⅰ）－理論流儀の普通教育上における弊害－」,日本数学教育学会誌『算数教育』,第 68 巻,第 6 号，pp. 2-8.

板垣芳雄(1986b),「藤澤の『算術条目及教授法』を読む（Ⅱ）－日本算術と現在－」,日本数学教育学会誌『算数教育』，第 68 巻，第 8 号，pp. 2-9.

伊東俊太郎(1987),「序説　比較数学史の地平」,『中世の数学』,伊東俊太郎編，共立出版，pp. 1-29.

小川雄三(2010),「指で「掛け算九九」」,『新潟日報(2010 年 4 月 26 日刊)』,11 面.

片野善一郎(1964),『問題形式による数学史』，富士短期大学出版部.

伊達文治(2008),「数学教育における文化的価値に関する研究－高校数学の基盤をなす代数表現とその文化性－」,全国数学教育学会誌『数学教育学研究』第 14 巻，pp. 51-58.

伊達文治(2013),『日本数学教育の形成』,溪水社.

中村幸四郎(1980),『近世数学の歴史　微積分の形成をめぐって』，日本評論社.

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.19-32

高等学校数学Ⅱ「微分・積分の考え」における「微分すること」・「積分すること」の意味理解に関する研究 —極限の考えの理解過程に着目して—

片寄　恵理奈
上越教育大学大学院修士課程３年

1.　はじめに

微積分の学習において，計算はできるが，その意味はわからないまま，という状況は少なくない。微積分指導の現状に対して，次のような指摘がある。大田(2009)は次のように述べている。

「概念を教えないまま計算の仕方だけを教える数学教育は，「公式を覚えて問題を解く科目である」という誤った数学観を形成してしまう。暗記主義の教育を受けて大学生になったものがそのまま教師になって暗記主義の教育をしているという状況すら生まれている。」（大田，2009，p.22）

微積分の意味理解を伴わない指導の問題点が指摘されている。これに関わり，塚原(2002)は，極限の扱いについて，次のように述べている。

「高等学校における数学Ⅱの微分積分法は，極限の概念は微分積分法の理論の根幹をなす重要な概念であるにもかかわらず，その扱い方は指導上の困難点の一つである。（略）　極限に関わる問題提起とその根拠，及び速度，接線，極値，面積を求める際の着想と方法を提示することにより，極限の考えが生まれるその背景を理解させることが，極限の概念理解のための一つの方法であると考える。」（塚原，2002，p.106）

微積分の意味理解には極限の概念理解が重要であることを指摘している。

一昨年，高等学校普通科の第２学年の生徒で微積分学習の既習者三十数名を対象に，微積分学習に関するアンケートを行った。その中に，「「微分すること」・「積分すること」の意味を詳しく説明してください」と問う設問がある。この設問に対して，生徒の回答は，「微分は次数を下げることで計算をしやすくし，積分は微分したことで得られた解を微分する前に戻すことができる」，「微分は文字の次数を減らす，積分は面積を求める」など，それらと同様の回答が殆どであった。これらの回答は，生徒が数学Ⅱ「微分・積分の考え」において，「微分は次数を下げること，積分は微分の逆であること」という結果のみを覚えているだけであって，「微分すること」・「積分すること」の意味は不十分なものである。この意味理解には極限の考えが必要であることは言うまでもない。

これらの指摘が筆者の課題意識につながり，数学Ⅱ「微分・積分の考え」における

「微分すること」・「積分すること」の意味理解に関して，極限の考えの理解過程に着目して研究を行うこととした。

本研究は，高等学校数学Ⅱの単元「微分・積分の考え」全体に亘る指導改善を行おうとする取り組みの一環である。数学Ⅱ「微分・積分の考え」の指導における極限の考えと意味理解に着目し，微積分学習において意味を伴った活動を繋いでいき，「微分すること」・「積分すること」の意味理解に到達できる指導への改善を示すことを目的としている。

2. 現在の数学Ⅱ「微分・積分の考え」の学習上と困難と指導の問題点

数学Ⅱ「微分・積分の考え」までの素地指導で形成される極限の考えや数学Ⅲ「極限」の指導において形成される極限の考えと比較し，数学Ⅱ「微分・積分の考え」における概念的操作を通して得られる極限の考えを明らかにしていく。

2.1. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」における極限の考え

2.1.1. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」までの極限の考えの素地指導

数学Ⅱ「微分・積分の考え」までの極限の素地指導として坂井(2015)や大塚(2009)を取り上げる。坂井(2015)は，極限の考えの素地について以下のように述べている。

「小学校算数や中学校数学においては，極限が内在する学習内容を通して，一定の数値に収束するという極限の考えの素地を育むことが，小学校高学年から中学校の段階における連続性に基づいた指導内容として重要であると考えられる。」（坂井，2015，p.5）

ここでは，極限の考えが小学校算数や中学校数学の学習にも見られると指摘している。大塚(2009)では，平均の速さから瞬間の速さを考える過程について以下のように述べている。

「変化の割合がxの変域によって違うことを理解する学習(習得)，xを時間，yを距離とし，平均の速さを求めることで変化の割合を捉え直していく学習(活用)，平均の速さの変域を縮めていくことで瞬間の速さを求めていく学習(探求)を仕組んでみた。」(大塚，2009，p.60)

ここでは，変化の割合が一定ではないということから，平均の速さの変域を縮めていく学習を通して，数学Ⅱ「微分の考え」で扱う極限概念の素地ができると考えられる。

2.1.2. 数学Ⅲ「極限」において獲得される極限の考え

平成 21 年度の高等学校学習指導要領解説数学編理数編では，高等学校第 3 学年における数学Ⅲ「極限」において，数学Ⅱ「微分の考え」で学習した極限の理解に重点を置きながら新たに数列の極限を学習する。このとき，極限の理解については，極限の直観的な理解までにとどめられている。

次に，高等学校数学Ⅲ「極限」における極限の指導について，詳説数学Ⅲ(啓林館，2013)を取り上げることにする。

極限の学習は数列の極限と関数の極限とに分かれており，∞の極限について考える指導がされている．数列$\{a_n\}$を考えたとき，nを限りなく大きくしていくときの一般項a_nの値を考えさせて∞についての極限を学習する。ゆえに，数学Ⅲ「極限」の「$n \to \infty$」という数列の極限において「任意のnを限りなく大きくするとき，0 に限りなく近づく」という意味の極限を学習する。

2.2. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」における極限の扱い

2.2.1. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」における代数的操作としての極限

代数的操作としての極限の扱いについて明確にするため，高等学校数学Ⅱの教科書の詳説数学Ⅱ(啓林館，2013)を取り上げる。

この教科書では，微分係数$f'(a)$を求める操作がaに値を代入すると記述されており，代数的操作を行っていると考えられる。

2.2.2. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」における概念的操作としての極限

次に概念的操作としての極限の扱いについて明確にするために，上記と同じく詳説数学Ⅱ(啓林館，2013)を取り上げることにする。

ここでは，一般の関数の平均変化率や微分係数を導入するための準備として，斜面を転がる球の運動の平均の速さを考えさせる。この学習を通して，生徒はh の値に 0 を代入するのではなく限りなく 0 に近い値を考えることで瞬間の速さについて考えることになる。このときに，数学Ⅱ「微分の考え」で獲得される極限概念を生徒に意識させることができると考える。

2.3. 数学Ⅱ「微分・積分の考え」において獲得される極限の考えを育む概念的操作

瞬間の速さでは，hが限りなく 0 に近づく($h \to 0$)という操作を具体的な事象をもとに生徒に考えさせている。瞬間の速さという事象も日常とつながりのあるものであり，実体験できる対象であるため，代数的な操作になりにくいと考えられる。

次節では，数学史にみられる極限の考えの形成過程を踏まえた上で，数学Ⅱ「微分・積分の考え」において生徒が極限の考えを形成する学習上の困難と指導上の問題点を述べる。

3. 歴史的視点からみる極限の考え

3.1. 塚原久美子(2002)の 4 つの課題からみる極限に関する指導の困難性

塚原(2002)は「17 世紀における微分積分の法の誕生の動機は，次の四つ課題①瞬間速度を求めること②接線を求めること③最大値・最小値を求めること④曲線で囲まれた部分の面積を求めることの解決であると言える。」(p. 108)と述べている。これらは微分積分の単元においても，基礎・基本であるとし，授業の流れの構造図を次のように考えている。

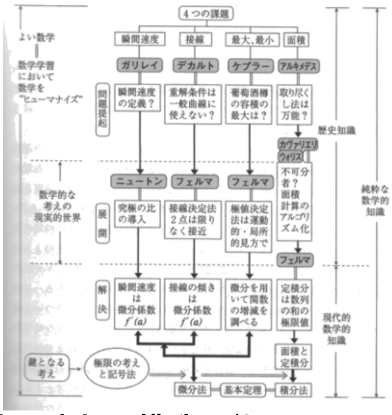


図 1:授業の流れの構造図(塚原, 2002, p.137)

ここでは，4 つの課題の内，瞬間速度の流れについてカギとなる考え，すなわち極限の考えに焦点を当ててみていきたい。

3.2. ガリレイとニュートンにみる極限の概念

ガリレイは自由落下運動について数学的に証明を行う際に，発展的な問題として平均の速さから瞬間の速さを考えるアプロー

チを問題として考え，その問題を解決するために「極限の考え」を用いており，ごく直観的な「極限の考え」を考えたとされる。その後，ニュートンはガリレイの問題提起を受けて，一つの数学的モデルとして「究極の比」を考え，その方法として流率法を生み出した。塚原(2002)はガリレイとニュートンの研究を次の図のようにまとめている。

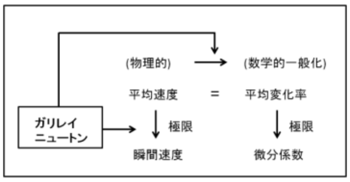


図 2:瞬間の速さと微分係数の概念の構造化（塚原, 2002, p.141）

3.3. デカルトとフェルマにおける極限の概念

塚原(2002)は,「ギリシャの初等幾何学では，幾何学的曲線として認知されていたのは,直線と円だけであった」と述べており，この図形の性質は数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する。

デカルトの方法では，放物線でも円の接線を求める方法と同じく一点を共有することで機械的に処理できるとしている。しかしフェルマの方法は，デカルトとは異なり曲線上にある 2 点を限りなく近づけていくことで直線を捉えようとしたものである。

デカルトは円以外の曲線における機械的に接線を求める方法を確立したが，そこに極限の考えは用いられていなかった。デカルトの方法をさらに一般的な方法へと転換したのが，フェルマの方法である。ここで 2 点 P，Q が限りなく近づいていくことで直線となる発想が生まれたのである。

数学史における極限の概念形成を参考にして,次に極限の考えを含む「瞬間の速さ」・「微分係数の図形的意味(接線)」・「面積と定積分」の学習におけるそれぞれの極限の考えを捉えるために，生徒の意味理解の様相を構想し理解過程を明らかにしていく。

4. 極限の考えの意味理解を促す学習指導案の作成

調査授業の概要について述べる。

【調査研究の概要】

・単元：数学Ⅱ「微分・積分の考え」
・対象：福島県 S 高等学校　文系クラス
　　　第 2 学年 1 組　8 名
　　　第 2 学年 2 組　25 名
・実際の調査授業の日程等

平成 27 年 9 月
　14 日(月)：瞬間の速さの授業
　16 日(水)：微分係数と接線の授業
　17 日(木)：曲線の概形についての授業
　18 日(金)：定積分の授業

上記に示した通り，対象を高等学校第 2 学年として調査授業は単元「微分・積分の考え」で行った。調査授業は，考案した学習指導案を基に全 4 時間(2 クラス合計 8 時間)で実施した。

調査授業の方法は，高等学校数学Ⅱの教科書を概観し，この単元の学習の流れについて考察することで，それぞれの学習での理解過程を構想する。次に「瞬間の速さ」,「微分係数の図形的意味(接線)」,「面積」の学習における生徒の「微分すること」･「積分すること」の変容が実際の授業で見られるか明らかにするために，学習指導案を作成する。授業者は当クラスの数学教科担当の教師であり，作成した学習指導案をもとに授業を実施するというものである。

5. 微積分学習における極限の考えの理解過程

ここでは，設計した授業をもとに行われた調査授業の実際を述べ，生徒の思考がどのように変容し，それに伴い活動がどのように変容し，数学Ⅱ「微分・積分の考え」に関わる意味理解に結びついたのかを分析し考察する。

5.1. 瞬間の速さの学習について

5.1.1. 瞬間の速さの学習における極限の考え

瞬間の速さは，山口昌広(2014)の調査授業を用いて考察を行った。この調査授業では，瞬間の速さの時間幅を生徒に考えさせており，生徒は以下のように答えている。

s5	時間の幅は, あっいや, 変わらない？
s3	狭くなってる。
s6	少なくなってる。

(山口昌広，2014)

このように生徒によっては瞬間の速さの時間幅についての捉え方に差異がみられた。このことから瞬間の速さを理解していくにはいくつかの過程があると考えられた。下記の表 1 は瞬間の速さの時間幅を 0 と考えられない生徒の理解過程である。

表 1　調査授業にみられた瞬間の速さの理解段階

①　速さは全て，距離を時間で割ることで求められると考えている
②　瞬間の速さと平均の速さを混同して考えている
③　どのような状態の速さにあたるのか考える
④　瞬間の速さの時間幅がどうなっているか考える
⑤　瞬間の速さの時間幅を 0 と考えることができない
⑥　瞬間の速さは，時間幅を小さくしていけば求められるのではないかと考える
⑦　瞬間の速さを，時間幅を限りなく 0 に近づけていくことにより，求めることができると考える

下記の表 2 は生徒が瞬間の速さの時間幅を 0 と考えた場合の理解過程について，筆者が考察したものである。

表 2　調査授業を受けて考えられる瞬間の速さの理解段階

①　速さは全て，距離を時間で割ることで求められると考えている
②　瞬間の速さの時間幅は 0 であると考える
③　瞬間の速さは，0 で割れば求められるのではないかと考える
④　瞬間の速さは，0 で割ることでは求めることができない
⑤　瞬間の速さは，時間幅を小さくしていけば求められるのではないかと考える
⑥　瞬間の速さを，時間幅を限りなく 0 に近づけていくことにより，求めることができると考える

山口昌広(2014)の調査授業では表 1 のように瞬間の速さの時間幅を 0 であると考えることはできなかったが，時間幅を 0 に限りなく近い値にして，瞬間の速さを求めようとする生徒の様子が明らかになった。

5.1.2. 瞬間の速さの学習における極限の考え

5.1.1 において考察した「瞬間の速さ」における生徒の理解過程で，瞬間の速さの時間幅を 0 と考えるか考えないかに分岐するのではないかと考え，これらの理解過程を調査授業で実施し検証した。

調査授業のここでの目的は，斜面を転がる球の運動を実際に生徒に見せて,「瞬間の

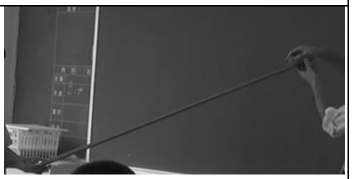
速さの時間幅はどうなっているか」と投げかけることで，生徒の瞬間の速さにおける意味理解の過程を明らかにすることである。

下の表 3 は瞬間の速さの授業の場面ごとに①～⑥の番号で区切りをつけている。s1，s2 などは生徒個人を表わしており，それ以外で生徒とだけ表記されている場合は生徒全員であることを表している。

表 3　瞬間の速さにおける生徒の理解過程

① 1 学期の間に学習した微分についてプリントを用いて復習する。このとき，「なんで平均のって言葉がついているの？」と投げかけられたので s1 は「1 秒後と 2 秒後のときでは速さが違うから，真ん中の平均のってつけた」と回答し，それを受けて教師は「速さっていうのは色んな種類があるんです。そうなっちゃうと平均の速さを出すしかないので平均の速さってことです」と説明した。

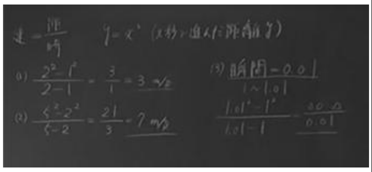
② 「1 秒後から 2 秒後までの速さが全部同じって考えているかもしれません。そこでちょっと実験ね」と言い，教師は右図のように竹竿を傾けて坂を作り，ボールを転がす実験を行った。その後「1 秒後から 2 秒後までの平均の速さはどのようにして求めますか」と投げかけられたので，s3 は「距離÷時間」と答えた。



③ 次に教師は「瞬間の速さとはどんなものか」と投げかけた後，右図のように竹竿を傾けて坂を作り，瞬間を白い板同士の隙間で表してボールを転がす実験を行った。この実験で瞬間の速さが坂の頂点と下で速さが違うことが分かった。

④ 「この計算で瞬間の速さを捉えようとしたら，どんな計算になるか。s5 の感覚でボールがひゅっと通った感覚は何秒くらいだと思う？」と投げかけられたので，s5 は「0.04 くらい，いや 0.000…」と答えた。次に「じゃあ s5 の思う瞬間を 0.01 としよう。そしてスタートを 1 秒から 1.01 秒までを瞬間の速さとしよう。そうすると，どんな計算になる？」と聞かれたので，s5 は「1．01-1」と答えた。更に「1．01-1 分の？」と聞かれたので，s5 は「1.01^2-1^2」と答えた。

s5 が答えた式を右図のように黒板に板書しながら「これが瞬間の速さですって言っていいですか？」と投げかけられたので，s5 は「違うと思います」と答えた。



⑤ 「そうだね，違うよね。じゃあこの瞬間をもっと小さくしたら ok ですか？」と投げかけられたので，s1 は首を傾げながら「だめだと思う」と答えた。教師に「(瞬間の速さは)どんな量だと思う？」と投げかけられたので，s3 は「存在するんでしょうけど，ちっちゃすぎてよく分かんないくらいちっちゃい」と答えた。黒板に【存在するけど小さい】と板書された後，「s2 はどう？」と投げかけられたので，s2 は「いっそ存在しないと」と答えた。それに対して「存在しないって言うのを数字でいうと？」と投げかけられたので，s2 は「0 です」と答えた。

⑥ 「存在しないのは 0 ですよね。そうすると，分母が 0 っていうと？」と平均の速さの式を指しながら問いかけられたので，s7 は「ないです」と答えた。次に「瞬間ていうのがなんだかよく分からないから，この瞬間をよく h っておくよね。そうすると，2 秒から $2+h$ までの何を求めてる？」と投げかけられたので，s4 は「あ，平均の速さ」と気付いたように声を上げて答えた。

黒板に板書された【2 秒から $2+h$ までの平均

の速さ】を見ながら,「hを限りなく 0 に近づけます。限りなく 0 に近づけるっていうのを limと置きます。これを 2 秒後の瞬間の速さです」という教師の説明を受けて，s1 は「瞬間の速さは特定距離間までの平均の速さに等しい」と理解した。

この理解過程では，生徒の多くは瞬間の速さの時間幅を 0 と考えることができなかったが，教師の働きかけで時間幅を 0 と考えた時，0 で割ることができないことに気付くことはできたようである。その上で，極限の考えである「0 ではない値をとりながら，限りなく 0 に近づけていく」ことを生徒に意識させることができることを明らかにした。

5.2. 微分係数の図形的意味(接線)の学習について

5.2.1. 微分係数の図形的意味(接線)の学習における極限の考え

微分係数の図形的意味(接線)は，啓林館の詳説数学Ⅱの教科書を用いて考察を行った。ここでは，関数y　　)のグラフ上にある点 A を点 B に近づける(A)とき，直線 AB がどう変化するか考え(B), また, その直線 AB に近づく直線があると気付き, 最終的に生徒の理解が直線 AB に「近づく直線」が微分係数であることに気付くことで,「近づく直線」が接線の傾きも表すことに気付くと考えられる生徒の理解過程を明らかにした。

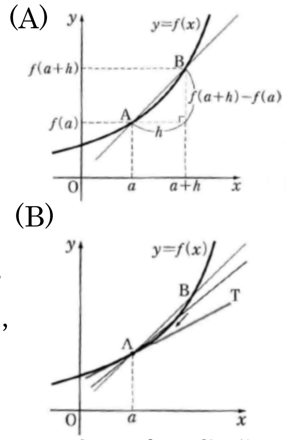


図 3:教科書の指導 (啓林館, 2013, p.198)

これを受けて生徒の理解過程を考察すると以下のようになると考えられる。

表 4 教科書にみられた微分係数の図形的意味(接線)の理解過程

① 微分係数　の中にある　が何であるかを確認する
② ①で確認した平均変化率がグラフにおいてはどの図形で表されるのかを考える
③ ②で考えた図形が図 3 の(A)にある直線 AB であることを確認する
④ 　，すなわちhを限りなく 0 に近づけるということは図 3 の(B)においてどのような図形的意味を持つのかを考える
⑤ ④で考えた　の図形的意味は，点 A を点 B に限りなく近づけることを確認する
⑥ 点 A を点 B に限りなく近づけるとき，直線 AB はどのように変化するかを考える
⑦ ⑥で直線 AB の変化を考えていく中で，直線 AB が近づく直線があることに気付く
⑧ ⑦でその存在に気づいた「近づく直線」（接線）の傾きが，①の微分係数の図形的意味であると認める

生徒はこのような過程を経て微分係数の図形的意味(接線)を学習していく。数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する円の接線は，判別式により決定することができるが，数学Ⅱ「微分・積分の考え」で扱われる円以外の曲線はその限りではない。

5.2.2. 「微分係数の図形的意味(接線)」における調査授業の実践と分析

5.2.1 では, 学習指導要領や教科書を用いて微分係数の図形的意味(接線)における生徒の理解過程を考察してきた。その結果，微分係数や接線で極限を扱い導関数の応用として接線の傾きを学習し，微分係数は接

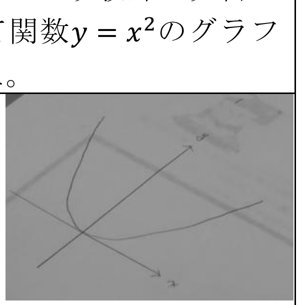
線の傾きを表すことを図とともに視覚的に理解させる学習を行うようになっている。しかし，数学Ⅱ「図形と方程式」で学習する円の接線は，判別式により決定することができるが，数学Ⅱ「微分・積分の考え」で扱われる円以外の曲線はその限りではない。この認識の差は極限の考えを用いる微分係数の図形的意味(接線)において実際にどのように生徒の理解が進んでいくかみるために調査授業を実施することとした。

調査授業の目的は，平均変化率の極限値が微分係数であり，微分係数が接線の傾きになることを図形的に捉えさせることである。そのため授業ではまず，平均変化率と微分係数の復習を行う。次に関数$f(x$
を用いて，瞬間の速さを図形的に考える活動を通して，平均変化率の極限値が微分係数として求められることを生徒に気付かせ，微分係数が接線の傾きになるだろうと考えるのではないかと想定できる。実際の授業における生徒の理解の様相を次にみていく。

表 5　微分係数の図形的意味(接線)における生徒の理解過程

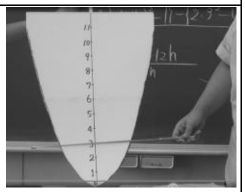
①　1 学期に学習した平均変化率と微分係数の復習をプリントで行った後，「1～2 秒後までの平均の速さを求める時にどんな計算をしたっけ？」という教師の問いかけから，s1 は「$4-1/2-1$」と答えた。「この計算をグラフにするとどうなるのかっていうのを考えて行きたいと思います」という教師の発言から，黒板の板書に従って関数$y=x^2$のグラフをプリントの裏に書いた。

②　右図のように，関数$y=x^2$をプリントの裏に書いた。教師は「この計算てグラフで考えると何の計算だか分か



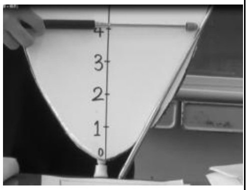
る？」と黒板に板書された式を指差しながら s3 に投げかけた。s3 は「yの増加量/xの増加量」と答えると，更に「つまり，これは？」と問いかけられ，「傾き」と答えた。s3 は教師とのやり取りから平均変化率の式がグラフでは傾きを表すと理解し，生徒はプリントのグラフの横に「yの増加量/xの増加量 = 傾き」と書いた。

③　「今日はこの道具を使ってね，これをこのグラフで表すとどうなる？」と①の式を指差しながら問いかけられると，s2 は前に出



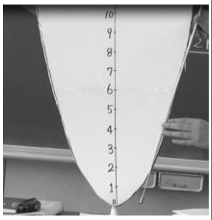
てきて「3 のところ」と言いながら，指示棒を用いて右上図のように$y=3$となるx軸に平行な直線をグラフに表した。「さっき s3 が言ってたのってなんだっけ？」と再度問われると，s2 は「傾き」と答えた。同じやり取りを繰り返していると s2 は「あ，そうか x が 1 から 2」と呟いて(A)の図のようにグラフに表した。

(A)



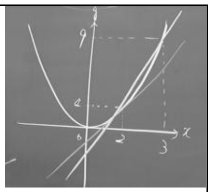
次に「じゃあ次に 2 秒から 3 秒までの平均をグラフでやろうとしたらどうなる？」と投げかけられると， s7 に指示棒を渡すと，(B)の図のようにグラフに表した。

(B)



それを受けて「前回やった 2 秒後の瞬間の速さって言ったらこのグラフはどうなりますか？」と問いかけられたので， s1 は「2 秒のときの？」と確認し，「普通に($y=$)4 のところに」と言いながら$y=$上の(2,4)に接するように指示棒を傾けた。「どうしてこうだと思うの？」と問いかけられると，s1 は「さっきの，これ(座標(2,4))とこれ((3,9))が，ここと ここと でぶつかるから」と答えた。他の生徒は s1 が指示棒を用いてグラフに表した直線をみて理解を示した。

④　「この線っていうのはどういう線？」と聞かれたので，s1 は「$y=x^2$の接線」と答えた。教師が右図のように今までの直線を黒板のグラフに板書したので，板書に従ってプリントに書いた。次に「何で接線になっちゃうんだっけ？」と問いかけられると， s3 は「前に出てもいいですか？」と言い黒板のグラフを指して「さっき求めてた平均の速さがここからここまでの線のグラフだと思ってたんですよ。で，それがちっちゃくなるから，最終的にはここ(2,4)で終わるんじゃないかなって，考えてたんです」と答えた。「ぎゅーっとなって点になっちゃうみたいな？」と教師が補足すると，s3 は首を縦に振って肯定を示した。



⑤　「s 3 の解釈としては，瞬間の速さっていうのはどんどんどんどん，線が短くなっちゃって，最終的に，点になると．そういうイメージでいたわけね。ならこれが，こうあって，こっから，ここまでの話だと思ったんだね。じゃあなんできゅーって短くなんの？」と問いかけられると，s3 は「段々範囲になっている平均の速さの範囲がぎゅーってなっている」と答えた。「平均の速さの場合が？ここで言うところの範囲っていうのは？」と投げかけると，s3 は「2～3」と答えた．更に「2～3 ね，この範囲が？」と問われると,「狭まっている」と答えた。教師は「狭まっているんだね．どんどんどんどん，狭まっていってぎゅーって狭まって行く。そして最終的に，接線になったっていうことだね」と説明したので，s3 は瞬間の速さを点で捉えるのではなく，線で捉えると理解した。

⑥　「この接線はどうやって求めるの？」と問いかけられると，s2 は「$y-4=$・・・」と式を答えた。「傾きを？どうやって計算すんの？」と投げかけられると，s2 は「微分で計算」と答え，「微分で計算すんの？微分は今日は何をやるの？」と再度問われると「$\lim_{h\to 0}$で」と答えた。教師が黒板に「$f'(2)$」と板書して「これは別名なんていうの？」と投げかけられると，s2 は「傾き」「変化の割合」「平均変化率」と答えて最後に「微分係数？」と答えた。

教師は最後に「微分係数や接線の傾きは同じです。だからどんどんどんどん畳んでいって，接線になっちゃう。この幅がぎゅーっと狭まるから，接するしかないから接線なんですよーということです」という説明をしたので，生徒は「$f'(a)$」が微分係数であり接線の傾きであると理解した。

この理解過程では，生徒は瞬間の速さで必要となる極限の考えを用いることはできていたが，曲線上を動く点の動的な動きを一方向のみで考えていること，及び接線の傾きを求めるときに必要となる極限の考えを用いることができないという実態がみられた。これにより，数学Ⅱ「図形と方程式」で扱われる円の接線の求め方と数学Ⅱ「微分・積分の考え」で扱われる接線の求め方との差を理解しにくい生徒の様子が明らかになった。

「微分係数の図形的意味(接線)」の意味理解は,「瞬間の速さをグラフで表すとどのように表すことができるか」という教師の発問から「瞬間の速さが微分係数や接線の傾きと同じであり，接線の傾きが微分係数の図形的意味である」という意味を理解することである。そのような意味理解に到達するには，瞬間の速さの授業と関連付けて平均変化率や微分係数というものがグラフでどのように表されるのか考えさせる所から始め，なぜそうなるのかという意味を伴った活動をつないでいき,「微分係数の図形的意味(接線)」の意味理解に到達させるこ

とが必要である。

5.3. 面積と定積分の学習について

5.3.1. 面積と定積分の学習における極限の考え

面積と定積分は,「なぜ, 定積分の計算で面積を求めることができるのか」という意味を理解する生徒の理解過程の考察を数研出版の高等学校数学Ⅱの教科書を用いて考察を行った。面積と定積分の意味理解には概ね, 次のような手順を踏むことになると考えられる。

① を定義する。)は面積であり, また, xの関数である。
②)を導く。
③ (x)を$f(x)$の不定積分F)を用いて表す。
④

②の理解が最も大きなポイントである。②の説明の方法として, 多くの教科書で次の 2 つの方法がとられている。東京書籍の数学Ⅱの指導書(p.246)を参考に,「$S'($)を導く方法 1, 2」として, 次に示す。

「$S'^{(x)} = f(x)$を導く方法 1」は, 図 4 において

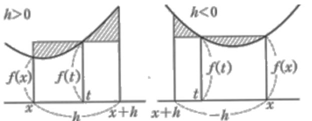


図 4:S (t)を導く方法

を導きこれを満たす t の存在を直観的に認めさせるものである。この方法では, 極限の考えを用いる箇所「h 0のとき x」において, 位置がどこか定まらない t の値の変化と極限を考えなければならない。このことが, 理解の困難性につながると考えられる。

「$S'(x) = f(x)$を導く方法 2」は, 図 5 において最大値, 最小値の存在定理を直観的に認めさせるものである。この方法では, 極限の考えを用いる箇所「$h \to 0$のとき,), $M \to f(x)$」において, 位置がどこか定まらない最小値 と最大値 の値の変化と極限を考えなければならない。このことが, 理解の困難性につながると考えられる。後述する調査授業で使用した高等学校数学Ⅱ(数研出版, 2012)では, 上の 2 つの困難性を生じさせない工夫がなされている。その教科書を用いて生徒の理解過程を考察すると以下のように考えられる。

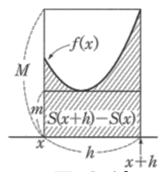
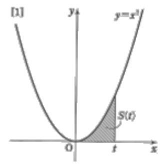
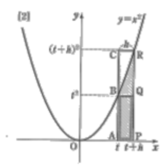


図 5. 最大値と最小値で導く方法

表 6 教科書による説明に沿う生徒の理解過程

① (教科書の指示に従って) 定積分と図形の面積との関係を関数$y = x^2$で考えようとする。
② (教科書の指示に従って) 下図において関数$y = x^2$のグラフとx軸および直線$x = t$で囲まれた斜線部分の面積は, の関数であることを確認し, この関数を とする。 
③ (教科書の指示に従って) が成り立つことを示そうとする。
④ (教科書の指示に従って) $\frac{S(t+h)-S(t)}{}$を考え, hを 0 に限りなく近づけることにする。
⑤ (教科書の指示に従って) > 0のとき, 斜線部分の面積は$S(t+h) - S(t)$であることを右図において確認する。 
⑥ (教科書の指示に従って) 横の長さが である 2 つの長方形 APQB, APRC の面積の大小関係を考えようとし,

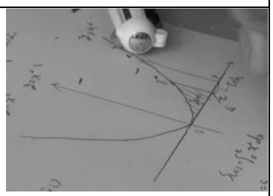
という不等式が成り立つことを導く。
⑦　(教科書の指示に従って)　　0である ことから⑥の不等式の各辺をhで割り， という不等式を導く。
⑧　(教科書の指示に従って)　hを 0 に限りなく近づけると(t　　は限りなくt^2 に近づくことを確認する。h　0のときも同様であることも確認する。
⑨　よってこのとき，$\frac{S(t+h)-S(t)}{}$ も t　に限りなく近づくことになると確認する。
⑩　上で調べたことから， すなわち であることを導く。

ここでは，なぜそうするのかという理由がわからないままに，それを考えることもなく，教科書の指示に従って説明を読み進めていくという受動的な学習となり，「0 とは異なる値をとりながら 0 に限りなく近づけていくとき･････」というような「極限の考え」に迫ることもない，ごく表面的な理解に止まる生徒の理解過程を明らかになった。

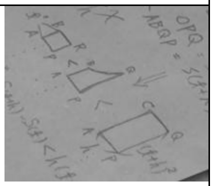
5.3.2. 「面積と定積分」における調査授業の実践と分析

「面積」における調査授業の目的は，曲線を含む図形の面積が定積分の計算で求めることができることの意味理解を図る授業を行い，生徒の意味理解の過程を明らかにすることである。調査授業では，4.4 で先述した高等学校数学Ⅱ(数研出版，2012)の教科書にある「$S'(x)=f(x)$を導く方法 3」による説明を主として展開した。「なぜ積分することによって面積を求めることができるのか」という発問を生徒に投げかけることから始められた。以下の表 7 の①~⑩の番号は，表 6 の番号に対応させている。 s1，s2 などは生徒個人を表わしており，それ以外で生徒とだけ表記されている場合は生徒全員であることを表している。

表 7　面積と定積分における生徒の理解過程

①　1 学期の間に学習した積分についてプリントで復習を行った後,「どうして積分すると面積になるのかということを今日はやっていきます。関数$y=x^2$から考えてみよう」という教師の発言から，黒板の板書に従って関数　　のグラフをプリントに書いた。
②　右図のように，関数　x のグラフと直線　$=t$および$x=t+h$を教師の指示に従ってプリントに書いた。関数$y=x^2$のグラフとx軸および直線　　tで囲まれた面積を$S(t)$とした。教師が　　　のグラフとx軸および直線　　$+h$で囲まれた図形を指し，「ここの面積はどう表せるか」と聞きながら，グラフの横に$S(t+h)$と書いた。
③　(表 4 の③に該当する事項はない)
④　(表 4 の④に該当する事項はない)
⑤　②の図を指して「この ABQP の面積は，なんて表現できる？」という問いかけに「$S(h)$」と答えた。「多分ここ($S(t)$)とここ($S(t+h)$)で計算しちゃったのかもしれないけど，ちょっとここでは計算できないので，そのまま考えると？」という問いかけに，s3 は「$S(t+h)$引く$S(t)$」と答えた。s3 は教師とのやり取りから，ABQP の面積を求めるには　　　(t)という文字式を用いて考えると理解し，生徒はプリントのグラフの横に

「S　　　　　)」と書いた。



⑥-1　図形 ABQP の面積を　　　　(t) と表した後，「特殊な考え方をしていきます」「あ，ここ($y=x^2$のy座標)はなんぼ？」と聞かれたので，点 B と点 Q のy座標をそれぞれ「t^2」「(　　　」と答えた。その後上図をプリントに書き，教師の説明を受けて，生徒は 2 つの長方形 ABRP と長方形 ACQP の間に図形 ABQP があると理解した。

⑥-2　「この(ABQP)の面積は出すのが難しいので長方形なら縦×横ででるよね」と聞かれたので，s4 と s5 は 2 つの長方形 ABRP と長方形 ACQP の面積をそれぞれ「　　」「$h(t+h)^2$」と答えた。

⑥-3　板書された図形 ABQP を指し示しながら「(ABQP の面積は)長方形 ABRP より大きいけど, 長方形 ACQP より小さいことになる」という教師の説明を受けて，図形と長方形の面積をそれぞれ確認した。生徒は⑤で表現した図形 ABQP の面積が

という不等式で表されると理解し，⑥-1 の図の下にその不等式を書いた。

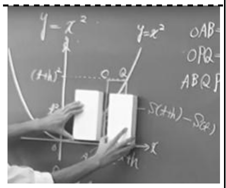
⑦　板書された不等式の中の h を指して「　っていう幅があります。h は 0 じゃありません。なので，全部 h で割ります」と指示されたので，生徒はそのまま⑥-3 の不等式をhで割り，

を⑥-3 の不等式の下に書いた。

⑧-1　⑦の不等式の中辺を指して「これってどこかで見たことある？」という教師の問いかけに，s1 は「瞬間の速さ」「傾き」「微分係数」と答えた。更に教師から「何における微分係数？」と聞かれたので，s1 は「t における微分係数」と答えた。その後，教師は――――の下に$S'(t)$と板書したので，生徒は図形 ABQP の面積は微分係数で表されることを理解した。

⑧-2　教師の説明を聞きながら，⑦の不等式の下に板書で示された

を確認した。教師から「limというのはhを 0 に近づけるということです」という説明を受けた。(注；ここでは≦であるが実際の板書はなかった)



⑧-3　「hを 0 に近づけると, えー微分係数というものが出てきちゃいます。hを 0 に近づけるっていうのは一体どういうことか」と聞かれ，その問いを確認した。その上で，教師は 2 つの長方形の発泡スチロールを右図のように近づけながら，「hは幅であり，0 に近づけていくと，面積が 0 に近づくが 0 にはならない」という教師の説明を受けた。ここでの教師の説明から，s1 は授業後のアンケートで「瞬間の速さのときの面積の集合体なので面積が求められる」という理解を示していた。

⑧-4　⑧-2 の不等式の左辺を指して，「hを 0 に限りなく近づけると，t^2は何になりますかね」と聞かれたので，s3 は「0」と答えた。教師の「0 にはならないよね。hを 0 に近づけるから，何も変化しません。これはt^2です」という説明を受けた。授業後のアンケートで s3 は「線は長方形なので，正確な値は存在しないが, それにとても近いものが求められる」という理解を示していた。

⑧-5　⑧-2 の不等式の中辺を指して，「これ

($\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$)は何になる？」と聞かれたので，「微分係数」と答えた。教師から「$S'(t)$になりますよね」と説明を受けた。授業後のアンケートで s2 は「細かい線で図形を描き，その線の面積を足し行けば求められる。その線をもとめる途中の最後の手順は微分されているので，積分して戻す」と回答しており，微分係数の授業との繋がりを感じていた。
⑧-6　⑧-2 の不等式の右辺を指して，「h を 0 に限りなく近づけると，$(t+h)^2$は何になりますか」という教師の問いかけに，「t^2」と答えた。その後，教師の「t^2に近づいていくよね」という説明を受けた。このとき，生徒は h を限りなく 0 に近づけると，$(t+h)^2$のt^2に限りなく近づくことを確認した。
⑨　「t^2より大きくてt^2より小さい。これはいわゆる t^2 にだんだんと近づいていくということです」という教師の説明を受けて，$\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$の式を見ながら，h を限りなく 0 に近づけるとき，これは t^2 に限りなく近づくことを確認した。
⑩　「$S'(t)$は t^2 に近づく。$S'(t)$の微分を元に戻すにはどういう計算するのか？」という教師の問いかけに s2 は「積分する」と答えた。教師は「積分しますよね．両辺積分すると，元に戻るけど，t^2はこう($\int t^2 dt$)なります．だから積分すると，面積が出てくるんです」と説明した。このとき，生徒は積分すると面積を求めることができると気付いた。

この理解過程では，教師の問いかけや説明などとそれに伴う生徒の活動によって進められ，意味理解により近づいたものになっていることが認められる。意味理解という観点からみたとき，改善すべき最大のポイントは，面積の不等式から高さの不等式への視点の移行が，「教師の「全部 h で割ります」という指示」(⑦についての記述の下線部)により進められたことである。ここの改善で考えられるのが，「h が限りなく 0 に近づくとき，面積の他に変化するものがないか？」という教師の問いかけにより，面積の極限から高さの極限へと視点を移行させる工夫などである。

「面積と定積分」の意味理解は，「定積分の計算で面積を求めることができる」という結果と共に，「なぜ，定積分の計算で面積を求めることができるのか」という意味を理解するということである。そのような意味理解に到達するには，定積分と面積の関係を考えようという始まり方ではなく，関数$y=x^2$のグラフを含む図形の面積をどのように求めたらよいかということから始め，なぜそうするのかという意味を伴った活動をつないでいき，「面積と定積分」の意味理解へと到達させるという指導が必要である。表 7 の調査授業には，その指導の可能性が具現されている。なぜそうするのかという意味を伴った活動をつなぐ教師の問いかけ，（考える準備としての）説明，働きかけを工夫すれば，特に理解過程⑦において面積の極限から高さの極限へと視点を移行させる教師の問いかけを工夫すれば，意味を伴った活動を切れ目なくつないでいき，「面積と定積分」の意味理解へと到達させることができると考える。

6. まとめと今後の課題

本研究により，調査を行った「瞬間の速さ」・「微分係数の図形的意味(接線)」・「面積と定積分」の授業では，なぜそうするのかという意味を伴った活動を繋ぐ，教師の問いかけや(考える準備としての)説明，働きかけを工夫することでそれぞれの学習で意味理解へと到達させることができるとい

う指導への改善を示すことができた。また,「瞬間の速さ」で用いた極限の考えを「微分係数の図形的意味(接線)」の学習で用いることで,グラフに表すと点として捉えようとしていた「瞬間の速さ」を直線の傾きとして捉えることができるようになるという効果などを確認することもできた。意味理解を図る授業を通して,それぞれの学習内容は関連付けられ,学習の意味を考えながらより理解を深めていくことのできる授業を創る可能性をも示すことができたと言えよう。本研究の成果を出発点として,これからも一層,高等学校数学Ⅱ「微分・積分の考え」における極限の考えに着目した「微分すること」・「積分すること」の意味理解につながる指導を志向していかなければならない。

本稿において数学Ⅱ「微分・積分の考え」における極限の考えの理解過程に着目して,生徒の理解過程を考察してきたが,極限の考えを用いない,例えば曲線の概形などの学習においては明らかにすることができなかった。今後は,「瞬間の速さ」・「微分係数の図形的意味(接線)」・「面積と定積分」のという極限の考えに関わる学習だけではなく,数学Ⅱ「微分・積分の考え」全体を通して,「微分すること」・「積分すること」の意味理解を明らかにするために各学習の生徒の理解過程に着目し,数学Ⅱ「微分・積分の考え」の意味理解につながる指導改善の研究と実践を更に発展させていきたい。

7. 引用・参考文献

Boyer,C.B.(1949). The History of the Calculus and its Conceptual Development.New York:Dover.

Edwards, Jr.C.H. (1937). The Historical Development of the Calculus, NewYork: Springer-verlag.

片寄恵理奈．(2015).「数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する一考察-瞬間の速さの理解段階に着目して-」．日本数学教育学会第 48 回秋期研究大会発表集録．pp．275-278．

片寄恵理奈．(2015).「高等学校数学Ⅱ「微分の考え」における極限に関する一考察」．上越数学教育研究第 30 号．pp.85-92．

文部科学省．(2009)．高等学校学習指導要領解説　数学編．実教出版．

大田邦郎．(2009).「高等学校の積分指導におけるいくつかの問題」. 北海道大学大学院教育学研究院紀要 108．pp．21-29．

大塚明彦．(2009).「平均の速さから瞬間の速さへ」. 教育科学/数学教育. 1 月号. pp.60-64.

大島利雄他．(2013).『高等学校数学科用　数学Ⅱ』．数研出版．

坂井武司．(2015).「小・中の連続性に基づいた極限の考えの素地指導～学習内容の本質に迫る教材開発～」. 学校数学研究会誌　学校数学研究　Vol.23　No.1．pp.5-11．

高橋陽一郎他．(2013).『詳説数学Ⅱ』．啓林館．

高橋陽一郎他．(2013).『諸説数学Ⅲ』．啓林館．

塚原久美子. (2002).「数学史をどう教えるか」. 東洋書店．

山口昌広．(2014)．高等学校数学Ⅱにおける微分学習の指導改善に関する研究-微分することの意味理解に着目して-. 上越教育大学学校教育研究科修士論文(未公刊).

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.33-42

現実性のある場面における
子どもの小数の乗法及び除法の知識形成過程について

—model の自己発達に着目して—

藤川　亮一
上越教育大学大学院修士課程３年

1. はじめに

小数の乗法及び除法の学習は，整数の乗法及び除法の学習に数としての小数の複雑さが絡んだり（高橋裕樹，2003)，整数の範囲から小数の範囲へと意味の拡張をしたりする（松原，1985）という点で難しい。現に 2007 年より実施されている全国学力・学習状況調査において，しばしば小数の乗法及び除法に関する問題が出題されているが，子どもたちの正答率は芳しくない（eg.,国立教育政策研究所，2012)。

他方で，小数の乗法及び除法は，現実場面との連関性という特性をもつことから，子どもが現実場面から自ら知識を形成していくという，算数における学習の典型的な有り様を支えるものである（高橋等, 2009）ことや，あるいは乗法及び除法を整数の範囲から小数の範囲へ拡張することを通して「拡張の考え」を理解することができる（eg.，中村，1996；板垣，2002）など様々な教育的な意義が含まれており，算数科における主要な学習内容の一つである。

これまでに小数の乗法及び除法の指導改善への有益な示唆を得るために，様々な研究（eg.，麻柄，1995；高橋久誠，2000）がなされる中で，数直線を有効に用いて小数の乗法及び除法を割合で意味づけたり，子どもが場に応じて解決の単位を設定したりすることの重要性が示されてきた。とりわけ，高橋裕樹（2003）は，現実的数学教育（Realistic Mathematics Education, 略称 RME）理論に基づき，子どもの小数の乗法及び除法における知識形成過程を明らかにしている。一方で，子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が，informal なものから formal なものへと発達していく過程を，model の自己発達という視点から細かな経路を辿って考察し，それらの経路にどのような転換点があったのかを明らかにする必要がある。model の自己発達については，これまで「文脈」,「領域」及び「機能」による三つの転換が指摘されている（Van den Heuvel-Panhuizen，2003）。

上記より，本研究の目的を，現実性のある場面から出発する子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が，informal なものから formal なものへと発達していく過程を model の転換という視点から明らかにすることとする。

本稿では，第一に，小数の乗法及び除法に関する先行研究を概観することにより，子どもが自らの知識を基に小数の乗法及び除法の知識を形成していくために必要な要件を明らかにする。第二に，現実的な場面から出発して数学化に至る立場を取るRME理論の提唱者であるFreudenthal, Hの思想などを基に，本研究における「現実性」の定義を明確にする。第三に，RME理を視座としたGravemeijer et al.（2000）や Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の心的構成物であるmodelの自己発達について考察する。第四

に，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の理論的枠組みを精緻化し発展させることで，新たな理論的枠組みを構築する。第五に，新たに構築した理論的枠組みと子どもの小数の乗法及び除法における知識形成の過程とを照らし合わせることで，小数の乗法及び除法の知識形成を捉えるための理論的枠組みを構築し，それを基に教授実験における子どもの学習過程の分析，考察を行う。

２．小数の乗法及び除法における先行研究の考察

松原（1985）は，小数をかけるということの意味について，これまで子どもたちが学習してきた「倍」の意味を，あらためて拡張して見直させる必要があることを示した。小数の乗法の意味の拡張に関して，中村（1996）は，乗数が整数のときには「同数累加」で捉え，乗数が小数になったときには「割合による意味付け」で捉える立場から，数直線を用いた指導を提案している。さらに中村（2007）では，子どもが小数の乗法の意味をどのように捉え，表現しているのかに着目し，子どもは，数直線を用いて乗法の意味を割合で捉え，整数倍から小数倍へと移行していることを明らかにしている。中村（1996，2007）では，子どもは数直線を用いることによって数量の関係が比例関係になることや，あるいは乗法の意味を割合で捉え，整数倍から小数倍へと移行していることを明らかにしている。他方で，子どもが比例関係をどのように捉えるようになっていくのかや，あるいは，子どもが数量関係を数直線へと表していくまでの過程を明らかにする必要がある。

白石（2005）は，除法の「意味の拡張」とは「１」へのアプローチを，これまでの「累加，累減」の方法から「倍関係」を使った方法に拡張することであるとし，それを子どもたちに導入する際には，数直線を用いることが有効であることを示している。さらに白石（2006）では，先行研究を基にした授業における子どもの活動を分析，考察することで，数直線が式を立てたり，困難を乗り越えたりするのに便利な道具として子どもに意識されている様相を明らかにした。白石（2005，2006）では，授業における子どもの学習過程の分析，考察から，子どもたちが数直線を用いて比例的な見方をできることや，あるいは数直線を立式の際に有効な道具として用いることを明らかにした。他方で，小数の除法の知識形成において，どのような視点で自らのmodelを転換させていくのかということや，あるいは子どもたちの小数の除法の知識形成において，小数の乗法の知識がどのように関わるのかといったことを考慮する必要がある。

高橋裕樹（2003）は小数の乗法及び除法の指導改善への有益な示唆を得るために，RME理論に基づき，子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が，informalなものからformalなものへと発達していく過程を明らかにした。他方で以下の二点を考慮する必要がある。一点目は，子どもの活動の分析に用いた理論的枠組みに，算数授業で複数あるsituationや，文脈に応じてformal knowledgeを繰り返し用いてformal knowledgeを更に洗練させていく過程を明示化することである。二点目は，子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が，informalなものからformalなものへと発達していく過程を，modelの自己発達という視点から細かな経路を辿って考察し，それらの経路にどのような転換点があったのかを明らかにすることである。以上のことから，本研究における視点として二つのことを考慮する必要がある。一つ目は，子どもが自らの知識を基に小数の乗法及び除法の知識を形成していくために，どのようなことを考慮する必要があるのかである。それは（１）子

どもが整数の乗法及び除法の知識を生かしながら解決のために用いる単位や，それと対になる単位量をどのように形成していくのか，（２）数直線や図などで単位量を利用していくことにより，どのように比例の考えを発達させていくのか，（３）子どもの小数の乗法の知識が，どのように小数の除法の知識形成に関わるのか，あるいは，小数の除法の知識形成がどのように小数の乗法の知識の洗練に関わってくるのか，である。二つ目は子どもの小数の乗法及び除法の知識が，informalなものからformalなものへと発達していく過程を，modelの自己発達という視点から明らかにすることである。

３．本研究における「現実性」の定義づけ

Freudenthal（1991）は，子ども一人ひとりの現実性を生かし，ある特定の共同体においてつくられる共通の感覚を基盤に据えた学習の展開の重要性を提言し，「現実性は，歴史的に，文化的に，環境的に，個別的に，そして主観的に決定される。」とも述べている。つまり現実性は，学習者の発達や学習状況，あるいは共同体での文化と密接に関連するものと言えるだろう。実際の授業における子どもの現実性をみると，吉田（2000）は，子どもの内に構成された現実性が発展し算数をつくり上げるという立場から，具体的な活動を通して構成する活動的現実性を起点とした，算数の文脈において構成する数学的現実性への発展について言及した。結果として吉田（2000）は，活動と記号との相補的な関係を契機として，あるいは子どもが扱う言葉を媒介として現実性が促進する様相を明らかにした。さらに吉田（2000）は，常に日常的な場面を用意することで活動的な現実性が促進するとは言い切れず，減算モデルが数学的に意味することを捉えるための活動が重要になったりすると述べている。双方の現実性に対する考察より，現実性とは学習者によって変わるものであり，実感を伴うものが現実的であると言える。例えば，数学者にとっては，記号の世界で表される数学そのものが現実的であり，親しみのある場面である。

他方で，子どもたちが活動と記号との行き来を繰り返すことで現実性を捉えていくためには，何かしらの扱う対象，例えば具体物や，自らが表した図や式などの model が存在するはずである。問題場面における子どもたちの現実性を，授業者が捉えるためには，それらの対象がどのように扱われているのかを把握する必要がある。中村（2000）は，小学校の重さの授業場面における子どもの活動をみることで，対象とそれを操作すること，そしてそれらが関係することで数学が発展することに数学的な現実性の一つの側面があることを示し，さらに捉える対象には対象とそれを操作する方法があることを言及した。吉田（1998）と中村（2000）とを踏まえると，子どもが現実性を捉えていくためには，活動をする中で何らかの操作を経験したり活動と記号との関係を見直したりすることで，ある数学的な対象をつくり出す，という過程を繰り返すことが重要だと言えるだろう。

一方で，現実世界は子どもにとって親しみのある場面であり，多くの場合，日常的な現実性をもつものである（高橋等，2003）と示されるように，現実性と日常生活とのつながりは切り離せないものである。問題場面と現実性に関して，池田（2013）では，児童・生徒にとって本当に現実的であるのか，あるいは児童生徒にとって馴染みのある場面であるかどうか，問題を解く必然性があるかどうか等を論点とした上で，問題の現実さについて言及している。すなわち，問題場面の現実性という視点では，子どもが親しみを感じたり，馴染みを覚えたりするような，子どもの日常生活に即した状況

を問題の文脈に考慮することが大切である。

先行研究の考察より，本研究における現実性を定義づけるに当たって，ⅰ）現実性とは学習者によって変わるものであり，実感を伴うものが現実的であるという視点，ⅱ）活動と記号との相補的な関係を契機とするような，活動的現実性を起点として構成する数学的現実性への発展という視点，ⅲ）活動をする中で何らかの操作を経験したり，活動と記号との関係を見直したりすることで，ある数学的対象をつくり出すという視点，ⅳ）問題場面と現実性に関して，子どもが親しみを感じたり，馴染みを覚えたりするような，子どもの日常生活に即した状況という視点，の４つを考慮する必要がある。

したがって，本研究における現実性を「子どもが，自分の経験や知識と環境（問題場面）とを照らし合わせてそれらの類似性を把握したり，活動をすることで数学的対象を自らつくり出したり，環境に対して親しみを感じたりすること」と定める。なお，ここでいう親しみとは，学習者の発達や学習状況，あるいは共同体での文化と密接に関連するものとする。

４．子どもの数学的な知識の形成過程を捉えるための理論的枠組みについて

４．１．Gravemeijer et al.(2000)における model の自己発達

Gravemeijer et al.(2000)は，図１に示すように，informal knowledgeがformal knowledgeへと向かうための起点であるべきだとする，modelの自己発達というRMEの鍵となる理論を提示した。図１において，situationsは現実世界であり，算数の授業では，現実性をもつ問題場面に相当する。model-ofはsituationsのもとで，心的にモデル化されたものであり，situationに依存したmodelである。このmodelがformal knowledgeに向かうことにより，model-forとなり，最後に，数学的に標準的に記述された形式的知識であるformal knowledgeに至る。

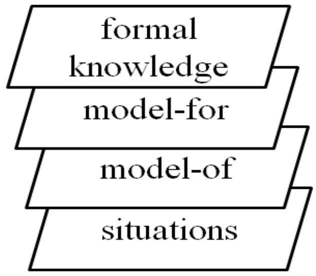


図１ Gravemeijer et al.(2000)の図式

４．２．Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の model の自己発達

Gravemeijer et al.（2000）では，modelとは，生徒自身がもつ心的構成物のことであり，問題を解決する際にformal knowledgeに向かって発達するものであることが示されていた。他方，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）はmodelの表れ方に関して以下のように言及している：

RME において，model は問題状況の表現として見られ，またはその問題状況に関連する数学的概念と構造の不可欠な様相を反映するが，種々の現れ方をする。これは「model」という用語が過度に文字通り用いられないことを意味している。道具，視覚的スケッチ，典型的な状況，スキーマ，図表，記号さえも model として目的に適う。

（Van den Heuvel-Panhuizen，2003，p.13）

すなわち「model」とは，子どもたちにとっての算数や数学，その他の関係からなる心的な構成物，あるいは知的な構造体であり，問題場面から数学的な関係を抽出した状態で表れたり，問題場面を把握し表現するために表れたりと，様々な様相を反映するものであると捉えることができる。

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，

Gravemeijer et al.（2000）のmodelの自己発達をさらに発展させ，model-ofからmodel-forへの移行の段階にさらに小さなmodel-ofからmodel-forへの漸進的な発達があることを図２にのように示している。Van den Heuvel-Panhuizen（2003）はこの転換に関して，文脈に結びつく水準でinformalな解釈を記号化したmodelが，局所的かつ連続的発達を伴い，最終的には一般的で形式的な解決のためのmodelになることを示している。

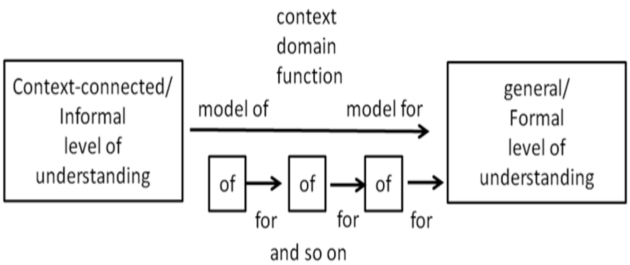


図２ Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の図式

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は図２の図式を用いて，子どもの百分率の学習過程におけるmodel-ofからmodel-forへの移行を分析し，以下の三つの転換を明らかにした。

４．２．１．「文脈」による転換

前の文脈で記号化された方法が次の文脈を表現するために用いられる際に生じる転換である。Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，この転換を，劇場の占有の度合いを記号化する方法が，次の文脈での花の1/4が赤だということを表すために用いられたことから見出している（図３）。

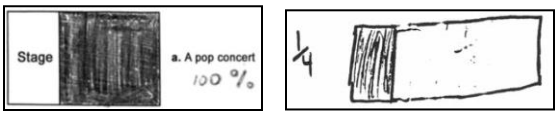


図３ 劇場の占有具合（左）と花々の 25%の表現（右）

４．２．２．「領域」による転換

内容領域における転換である。Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，この転換を，分数を表すための帯図の model が，分数に加えて，百分率のために用いられたことから見出している（図４）。

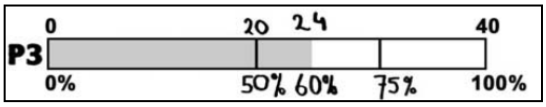


図４ 百分率のために用いられる帯図

４．２．３．「機能」による転換

最初はただ文脈を表すための図や表が，答えを導くために用いられる際に生じる転換である。Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，この転換を，最初は数量の関係を把握するための帯図のmodelが，百分率を見積もるために，あるいは，新たに値引きされた値段からもとの値段を計算するために用いられたことから見出している（図５）。

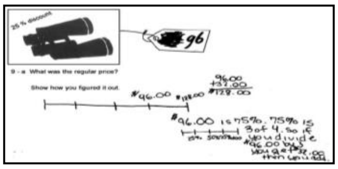


図５ もとの値段を計算するために用いられる帯図

４．３．Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の理論的枠組みの精緻化

上記で示したVan den Heuvel-Panhuizen（2003）の子どもの活動の分析・考察の結果では，model-ofからmodel-forへの転換が生じる際には，複数のsituationの設定があったり，子どもが領域ごとのつながりを意識したりすることが示された。この複数のsituationというのは一つのformal knowledgeに対して設定されるものであり，領域ごとのつながりというのは各単元におけるformal knowledge間のつながりのことであると解釈できる。したがって，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の子どもの活動の分析・考察の結果より，子どものmodelの自己発達を精緻に捉えていくためには，子どもの活動を捉えるための理論的枠組みを，一つのformal knowledgeに対して設定され

る複数のsituationと，formal knowledgeの洗練の過程という視点から精緻化する必要があると考える。我が国の算数・数学教育実践においても，一つのformal knowledgeに対し，複数のsituationからformal knowledgeを洗練させるための活動を何回か繰り返したり，formal knowledgeを更に数学的に洗練させるような単元間の系統があったりする。そこで筆者は，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の子ども活動の分析結果を基に，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の図式に複数のsituationから出発するmodelの自己発達やformal knowledgeの洗練の過程を明示化することで，理論的枠組みの精緻化を行った（図６）。

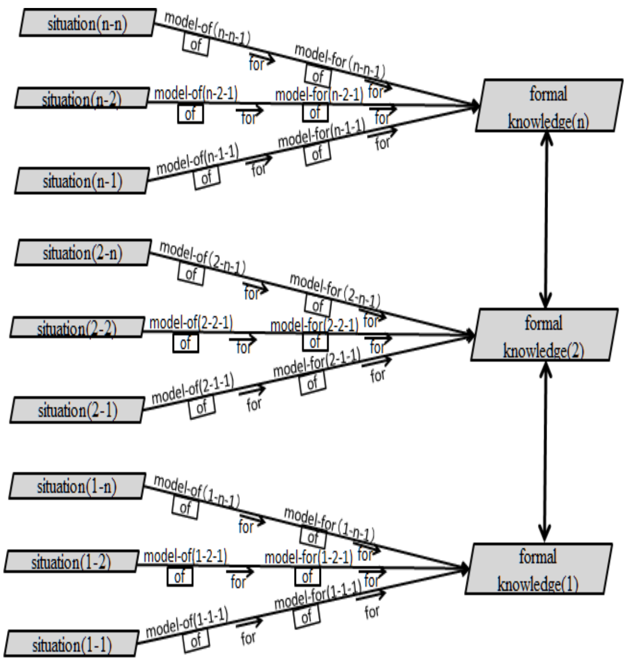


図６　新たに構築した理論的枠組み

図６において，situation（1-1）（括弧の中の一番目の番号はsituation間の区別をする順番を，二番目の番号はformal knowledge（1）に対するsituationの順番を表す）は，formal knowledge（1）（括弧の中の番号は到達したformal knowledgeの順番を表す）に対しての最初のsituationである。model-of（1-1-1）（括弧の中の三番目の番号はmodelの出現の順番を表す）は，situation（1-1）に基づいた最初のmodelであり，そこからは，formal knowledge（1）へと向かってVan den Heuvel-Panhuizen（2003）の図式と同じようにmodel-ofとmodel-forが繰り返される。具体的に示すとmodel-of（1-1-1）の次にmodel-for（1-1-1）（括弧の中の三番目の番号はmodelの出現の順番を表す），model-of（1-1-2），model-for（1-1-2），…，model-of（1-1-n），model-for（1-1-n）と徐々にmodelが発達していくことを想定する。situation（1-2）は，formal knowledge（1）に対しての第二のsituationである。situation（1-2）からformal knowledge（1）に至るまでの過程は，situation（1-1）の場合と同様である。すなわち，formal knowledge（1）に対してsituation（1-1），situation（1-2），…，situation（1-n）と複数のsituationを設定するのである。formal knowledge（2）は，formal knowledge（1）に対して更に洗練されたformal knowledgeであり，同様にformal knowledge（3），formal knowledge（4），…，formal knowledge（n）と次々とformal knowledgeが洗練されていく。

５．教授実験

５．１．教授実験の概要

2016年２月12日～３月15日までの間に，新潟県公立小学校の４年生２人を調査参加者（NaoとKeiと呼ぶ）として，１回50分の授業を計６回実施した。データをビデオカメラ３台による撮影，調査参加者の筆記記録によって収集した。データからプロトコルを作成し，プリントの記述を参考にNaoとKeiの学習過程を捉えることとした。なお，本稿ではNaoの学習過程について分析，考察する。また，インタビューアーは筆者であり，Tと略記する。

５．２．調査の概要

単元構想においては，高橋裕樹（2003）を

参考に，表１に示すように小数の乗法，包含除，等分除の順に小単元を配置し，最後に，比の三用法の場面を用意した。

表１　調査で扱った situation

Situation	
(1-1)	２m で 170 円の赤のリボンがあります。このリボン 14m の代金はいくらですか。
(1-2)	１m で 80 円の黄色のリボンがあります。この黄色のリボン 3.2m の代金はいくらですか。
(2-1)	青いリボンが 15m あります。一人に 2.5m ずつ配ると何人に配ることができますか。
(3-1)	2.5m で 200 円の黄色のリボンがあります。この黄色のリボン３m の代金はいくらですか。
(3-2)	２ℓ で 390 円の牛乳と 1.6ℓ で 360 円の牛乳があります。この２つのうち，どちらの牛乳がお得ですか。
(4-1)	親ライオンは 63kg です。これは，子ライオンの体重をもとにすると，1.5 倍にあたります。子ライオンは何 kg ですか。

６．Nao の学習過程の分析

situation(1-1)では，formal knowledge(1)(170÷2×14＝1190(円))の形成が目指されていた。Nao は，以下のように発言する中で，170×4 を立式し 680 を求める。

Nao：あっそっかー，７だった．４にしちゃったよ，170×4 にしちゃったよ。

T：なんで４にしたの？

Nao：えー，わかんない。14m だから４にしたのかな．勝手に４になっちゃった。

Nao は，14m の４に着目することで，170×4 を立式するが，その式に戸惑う様子を見せた。その後 Nao は，Kei の考え(170×7)を受けたり，２m のリボンが何個分あるかについて「あれ，14÷2 だった。これで２m のリボンが何個分か分かった」と発言したりする中で，自らも 170×7 を立式し 14m の代金 1190 円を求めた。これは，２m の代金 170 円を１とみなす model-of(1-1-1)である。次に Nao は，リボンを折ったり切ったりすることで，２m の半分の１m に着目した。Nao は，「１m が 14 個で 14m だから」と発言し，85×14 を立式することで 1190(円)を求めた。これは，85 を１として，14 にあたる数がいくつになるかを表した model-for(1-1-1)である。

situation(1-2)では，formal knowledge(1)(80×3.2＝256(円))の形成が目指されていた。Nao は，既習の(小数)×(整数)の考えに基づいて 3.2×80 を立式し，2560 を求める。その後，Nao は Kei の考え(3.2×80＝256)を受け，2560 の誤りに気付き，2560 の 0 を斜線で消した。これは，既習の(小数)×(整数)の考えに基づいた model-of(1-2-1)である。次に Nao は，Kei の考えを受けたり，実際にリボンに印をつけたりすることで，3.2m を３m と 0.2m に分けて考え，80×0.2 を立式することで 16 円を求めた。最後に Nao は，３m の代金 240 円と 0.2m の代金 16 円を足し合わせ 3.2m の代金 256 円を求めた。これは，小数を整数と純小数に分けて捉える model-for(1-2-1)である。

Nao がリボンを表す図を描いていたため，T は数直線シートを導入した。Nao は，比例的な考え(１m は 80 円，２m は 160 円，３m は 240 円)を基に数直線シートに線を引き，さらに 3.2m の上に 256 を記入した。これは，図としての model-of(1-2-2)である。

T が Nao と Kei に 3.2m は１m の何倍であるかを尋ねると，Nao は 3.2m の代金が１m の代金の 3.2 倍であることに気付いた。そして Nao は，図に倍関係を表す矢印を記入(図７)した後，80×3.2 を立式した。これは，80 を１として，3.2 にあたる数がい

くつになるかを表した model-for(1-2-2)である。さらに，Nao が導いた 80×3.2＝256 は，formal knowledge(1)である。

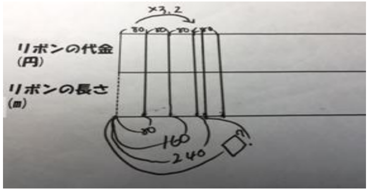


図７　Nao が描いた図

situation(2-1)では，formal knowledge(2)(15÷2.5＝6(人))の形成が目指されていた。Nao は，2.5 を四捨五入し３とし，15÷3 を立式し仮商５をたてた。これは，既習の(整数)÷(整数)に基づいた model-of(2-1-1)である。その後 Nao は，「2.5×5 をして 12.5 になって，でそしたら 12.5 ならもう一回足せばいいんだって 15 になりました。」と発言し，2.5×6 を立式し 15 を導いた。これは，2.5 を１として，次々と足し合わせていく model-for(2-1-1)である。Nao は，2.5×6 の式をしばらく眺めた後，「これでも計算できる」と発言し 150÷25 を立式し６を求めた。この立式の背景には，乗法の逆が除法であるという考えや，既習の(整数)÷(整数)の考えがある。これは既習の(整数)÷(整数)の考えに基づく model-of(2-1-2)である。次に，Nao は，Kei の考え(15÷2.5＝6)と 150÷2.5 を比べることで除数と被除数を 10 倍しても答えは同じであることに気付き，15÷2.5＝6 をノートに記述した。

situation(4-1)では，これまでに形成した formal knowledge を活用し柔軟に用いることが目指される。Nao は，始め「1.5 倍とか 63 とかが意味分からない」と発言するなど，しばしば考え込む様子を見せた。T は，Kei の「いつものように図にしたらいい」という発言を受け，数直線シートを提示した。Nao は，T の説明を受けながら，数直線シートに 63kg で 1.5 倍と□kg とを記入し，続けて 1.5 倍の矢印を記入した(図８)。

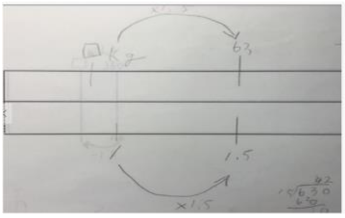


図８　Nao が描いた図

Nao は，「下(１と 1.5 の関係)と同じように上(□と 63 の関係)も」と発言し，□×1.5＝63 を立式した。これは，既習の小数の乗法の考えに基づいた model-of(4-1-1)である。Nao は□×1.5＝63 の解決に悩んだあと，630÷15 を立式し 42 を求めた。これは，包含除的な考えに基づいた model-for(4-1-1)である。Nao は，Kei の考えを受け，再び解決に当たった。

Nao：4.2kg はやせすぎだよ…，ちょっとまって(4.2×1.5 と 42×1.5 とを立式)。
T： この計算は確かめるためにしたの？
Nao ：確かめ算なのかな…だって 4.2kg はやせすぎだもん。

Nao は，立式した□×1.5＝63 と 630÷15＝42 とをしばらく見比べた後，4.2×1.5 と 42×1.5 とを立式し 6.3kg と 63kg とを求めることで，6.3kg が誤りであることに気付いた。Nao は，乗法の model を用いて捉えなおしたり，等分除の model を用いたりすることで解決に至った。

７． Nao の学習過程の考察

Nao の学習過程の分析によって二つの知見を得た。一つ目は，model-of から model-for への転換と formal knowledge 間の転換の双方で働く「比較」による転換を見出したことである。このことは，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)が示した三つの転換に加えて，「比較」による転換という分類が必要なことを示すものである。二つ目は，model-of から model-for への転換について，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)が示した「文脈」による転換に含まれる「具体物を

用いた活動」による転換と，「領域」による転換に含まれる「formal knowledge」による転換とを見出したことである。

７．１．「比較」による転換

７．１．１．formal knowledge 間の転換

situation(4-1)で Nao は，まず formal knowledge(1)に基づき，model-of(4-1-1)として□×1.5＝63 を立式した。その後，Nao は，formal knowledge(3)に基づき model-for(4-1-1)として 630÷15 を立式することで，親ライオンの体重 42kg を導いた。次に Nao は，Kei の考え(子ライオンの体重は 4.2kg)を受け，□×1.5＝63 と 630÷15＝42 を見比べた後，4.2kg と 42kg を model-of(4-1-1)で表された立式の□に当てはめることで，4.2×1.5＝6.3 と 42×1.5＝63 とを導いた。この一連の過程を，図式(図９)に表す場合，formal knowledge(1)としての A があり，それと formal knowledge(3)としての B を比較することで，A と B の双方を行き来できる状態に至ったとみることができる。

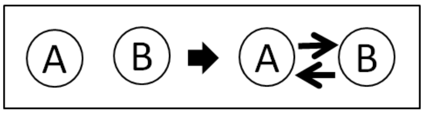


図９「比較」による転換の図式

７．１．２．model-of から model-for への転換

situation(2-1)において Nao は 150÷25 を立式し 6 を求めた model-of(2-1-2)と，Kei の考えである 15÷2.5＝6 とを比較することで，除数と被除数を 10 倍しても答えが同じであることに気付いた。この過程を図９に表すと，150÷25 を立式した model-of(2-1-2)としての A があり，それと B としての 15÷2.5＝6 とを比較することで，A と B の双方を柔軟に行き来できる状態へと転換したとみることができる。

７．２．「具体物を用いた活動」による転換

situation(1-1)において Nao は，170×7 を立式する model-of(1-1-1)を表した後，リボンを折ったり切ったりすることで，85×14 を立式する model-for(1-1-1)を形成した。situation(2-1)においても Nao は，2.5cm を１とみてリボンをシートに貼っていくことから，2.5×5 を次々と足し合わせていく model-for(2-1-1)を形成している。すなわち，具体物であるリボンを用いることによって，model-of から model-for への転換が生じている。Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は，「文脈」による転換を示しているけれども，situation によって子どもの活動や，あるいは子どもが用いる具体物が異なるという点から，「具体物を用いた活動」による転換は，「文脈」による転換に含まれるとみることができる。

７．３．「formal knowledge」による転換

situation(2-1)において Nao は，15÷3 を立式し仮商をたてる model-of(2-1-1)を表した後，formal knowledge (1)の考えに基づき 2.5cm を 1 として次々と足し合わせていく model-for(2-1-1) を形成した。situation(3-1)においても Nao は，(整数)÷(整数)の考えに基づいた model-of(3-1-1)を表し，formal knowledge(2)の考えに基づき 2.5m に 0.5m が 5 つ含まれることに気付くことで，0.5 を単位とする model-for(3-1-1) を形成した。Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は，「領域」による転換を示すが，formal knowledge が異なる内容領域間をつなぐ役割をもつ点から，「formal knowledge」による転換は，「領域」による転換に含まれるとみることができる。

８．結語

子どもの小数の乗法及び除法の知識形成過程を分析，考察した結果，得られた知見は以下の二点である。

第一に，授業場面において，子どもが純粋な考えに基づく状況に依拠したmodelを自ら発展・洗練させるためには，自らが形成したmodel相互を比較したり，友達のmodelと比較したりといった子どもたちの活動を教師が見逃さず, modelを比較できるような場の用意や，あるいは支援を大切にする点である。

第二に，子どもの小数の乗法及び除法のformal knowledgeの洗練過程には，formal knowledge間の比較という子どもの活動があるため，教師は，領域におけるformal knowledgeが何かを適切に見極め，それらを比較できるような場を複数用意したり，子どもたちがお互いのformal knowledgeを比較できるような場を設定したりすることを大切にする点である。

引用・参考文献

Freudenthal,H.（1991）. *Revisting Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer.K., Cobb.P. & Bowers.J., White nack,J.(2000).Symbolizing,Modeling, and InstructionalDesign. In Cobb,P., Yackel., & McClain,K(eds.),Symbolizing and Communicating in MathematicsClassroom (pp.225-273). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

国立教育政策研究所.（2012）.平成26年度全国学力・学習状況調査：調査結果のポイント.小学校算数.文部科学省.（http://www.nier.go.jp/ 08chousakekka/01chousakekka_point.pdf）.

池田敏和．（2013）．モデルに焦点を当てた数学的活動に関する研究の世界的傾向とそれらの関連性.日本数学教育学会誌，95(5)，2-12.

松原元一.（1982）.算数「子どもの考え方・教師の導き方」.国士社.

中村光一．（2000）．授業にみられる数学的なリアリティと数学的対象．上越教育学研究，15，1-8.

中村享史．（1996）．小数の乗法の割合による意味づけ．日本数学教育学会誌，78(10)，7-13.

中村享史．（2007）．小数の乗法に関する記述表現の分析-乗法の意味づけの児童のノート記述を中心に-.第40回数学教育論文発表会論文集，361-366.

白石信子．（2005）．子どもの理解に基づいた小数のわり算の指導について-数直線への比例的な見方を通した意味の拡張-:.上越数学教育研究，20，163-174.

白石信子．（2006）．小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究．数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して.上越数学教育研究,第21号,69-80.

高橋等.（2003）.子どもの算数・数学的活動を大事にする，湧き出させる．上越数学教育研究，18，31-48.

高橋等.（2009）.勝雄の割合の知識の形成過程における表象の変容と関係性．上越数学教育研究，24，13-20.

高橋久誠.（2000）.小数の乗法の授業構成に関する考察-比例の考えをもとにして-.上越数学教育研究，15，85-94.

高橋裕樹.（2003）.小数の乗法と除法とにおける子どもの知識の構成過程について-子どもが比の三用法を活用していくまで-上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

Van den Heuvel-Panhuizen, M.（2003) The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory. *Educational Studies in Mathematics* , *54,* 9-35.

吉田亨．（2000）．算数の授業における子どものリアリティの構成とその発展．日本数学教育学会誌，68(10)，45-50.

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.43-50

中学校数学において生徒の不安を生じさせる要因

児玉誉也
上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

筆者は中学生に数学を指導していく中でよく生徒からの次のような声を耳にした。「明日の学校の授業についていけるか不安である」、「中学校で定期テストがあるが、数学で悪い点数を取ってしまわないか不安である」、「入試で数学の平均点を割ってしまい、志望校に入れなくなってしまう」といった声だ。なぜそのように不安を感じるのかを突き詰めていくと、「授業に対する理解度の低さ」が挙げられた。授業内容を理解できないため、結果的に家で勉強をしない。そして、次の授業を受ける際に不安になるといったケースが多いようであった。このことから、生徒の不安は数学の授業から生まれていくのではないかと推測された。

実際、Skemp(1979)は、数学不安のメカニズムについて「理解ができなかった経験に対して、過度に不安を感じることによって、努力が困難となり、理解が悪くなり、不安が増していく」(p.111)と指摘している。さらに、「この経験を何度も味わえば、授業そのものが不安の条件刺激となっていく」(p.111)と述べている。

また、OECD 生徒の学習到達度調査(国立教育研究所、2012)では、全国の高等学校、中等教育学校後期課程、高等専門学校のうち 200 校の 1 年生を対象に数学不安に対する調査を行っている。その結果、日本は「数学の授業についていけないのではないかと心配になる」が 70%、「数学の宿題をやっていると気が重くなる」が 56%、「数学の問題をやっているとイライラする」が 40%、「数学の問題を解くとき、手も足を出ないと感じる」が 35%、「数学でひどい点数を取るのではないかと心配になる」が 67%であり、5 項目全てで OECD 平均よりも不安を示すような反応が多かった。そして、「数学不安に対する指標」の平均値を見ると、2012 年の日本の値は 0.36 で、調査に参加した 17 カ国中最も大きかった。

この調査から、日本の生徒は他国よりも数学不安を感じている割合が大きく、約 7 割の生徒が数学の授業に対して不安を持っていることが明らかとなった。

そこで本稿では、数学不安における先行研究から、数学不安の発現要因を検討していく。

2. 数学不安における先行研究

Richardson と Suinn(1972)は数学不安を「学習時や日常生活などいろいろな状況で、数を操作することや数学の問題を解くことへの妨げとなる緊張や不安の感情」(p.551)と定義し、数学不安を測定する尺度として 98 項目からなる The Mathematics Anxiety Rating Scale(MARS)を作成している。

2.1. 鎌田の研究

これに対し鎌田(1983)は、MARS のような測定器具を翻訳して文化・社会の違う我が国において使用することは妥当性に問題が生じるとし、独自の 30 項目を作成して

いる。そして、この尺度を用いて、中学校1年生から3年生を対象に数学不安について調査を行った。その結果、数学不安の性関連差の存在を得ており、女子生徒が男子生徒よりも数学不安が強いことを指摘している。

2.2. Mark と Jeremy(2007)の研究

一方で、Mark と Jeremy(2007)は学部学生 80 名を対象に数学不安を査定し、数学不安の度合いを高不安、中不安、低不安に分類した後、Wide Range Achievement Test(WRAT)を実施し、WRAT の難易度と正答率との関係性を調べる調査を行った。なお、WRAT は「標準的な数学的達成テストであり、その難易度は Line1 から Line8 まで存在する」(p.245)としている。この調査の結果、次の2点を報告している。

1点目は「Line1 の問題において、数学不安の度合いによる正答率の差を発見することはなかった」(p.245)ということである。

2点目は「Line4、Line5 にかけて各グループ(低不安者・中不安者・高不安者)のパフォーマンスが分岐し始め、最も難易度の高いテスト(Line8)においては高不安者グループの平均が5つの問題においてグループの平均よりも低かった」(p.245)ということである。

これらのことから、課題の難易度が上がるにしたがって、数学高不安者の数学パフォーマンスは低不安者、中不安者に比べ悪化することが示された。

2.3. Micke と Mateo(2011)の研究

そして、Micke と Mateo (2011)はシカゴ大学、ルーズベルト大学の学生 73 名(男：29 名、女：44 名)を作業記憶能力の高低と数学不安の高低で分類し、コルチゾール濃度と数学パフォーマンスの関係を調べる調査を行った。作業記憶能力、数学不安、コルチゾール濃度、数学パフォーマンスは以下のように定義されている。

作業記憶

「課題に関連した情報の限界量の保持、統制、支配に関わる短期システムのことである」(p.1000)と定義し、作業記憶能力を Participants' performance on the automated Reading Span(RSPAN)を用いて測定したとしている。

数学不安

「数学不安は数学や数学を行うことに対する不都合な感情である」(p.1000)と定義し、MARS により測定したとしている。

コルチゾール濃度

「被験者の課題を行う生理的反応の指標」(p.1001)とし、生理的反応が強いことを「数学に関連した状況において心臓をドキドキさせたり、掌に汗を浮かべたり、手を揺さぶること」(p.1001)としている。

数学パフォーマンス

数学パフォーマンスを合同算術の正誤判定の正確性で測定している。問題は X≡Y(modZ)という形で出題し、x, y は 2 から 98、z は 2 から 9 までの自然数であり、x は y よりも大きくなるようにするとしている。そして、被験者には 71≡23(mod3)のような合同式の正誤判定をさせたとしている。

また、被験者を RSPAN、MARS により低作業記憶者、高作業記憶者、低数学不安者、高数学不安者に分け、コルチゾール濃度と数学パフォーマンスとの関係を調査したとしている。

その結果、次の2点を報告している。

1点目は「低作業記憶者の数学パフォーマンスはコルチゾール濃度や数学不安に関係がない」(p.1003)ということである。

2点目は「高作業記憶者の数学パフォーマンスは数学不安やコルチゾール濃度と関連していた」(pp.1003-1004)ということである。具体的には、「低不安者はコルチゾール濃度が増加すると、パフォーマンスが上

昇していたが、高不安者はコルチゾール濃度が増加するとパフォーマンスが降下していた」(p.1004)としている。これらのことを表に示すと以下の表 1 のようになる。

表 1 コルチゾール濃度増加に伴うパフォーマンスの変化

WM / A	HMW (高作業記憶者)	LWM (低作業記憶者)
High	Performance ↘	Performance→
Low	Performance ↗	Performance→

これらの要因について「不安は作業記憶の効能を破壊し、パフォーマンスが作業記憶のシステムをあてにするとき、パフォーマンスが損害を被る」(pp.1000-1001)という知見に基づき以下のように分析している。前者については、「低作業記憶者は数学的な計算を解決するために作業記憶をあてにしないため、彼らのパフォーマンスはコルチゾール濃度が増加しても変わらないままだった」(p.1003)としている。後者については、数学パフォーマンスに差が出た要因を「個人の数学状況の解釈が生理的反応を損害的なものにするか利益的なものにするか決める」(p.1003)としている。

このことから、低不安者は数学的状況を積極的に解釈するため、自身の生理的反応が有益に働き、パフォーマンスを上昇させるが、高不安者は数学的状況を消極的に解釈するため、自身の生理的反応が有害なものとなり、パフォーマンスが降下すると考えられる。

鎌田(1983)の研究から中学生における数学不安の性差が明らかとなった。また、Mark と Jeremy(2007)の研究から、課題の難易度が上がるにしたがって数学不安の度合いと数学パフォーマンスは関連する可能性があることが示され、Micke と Mateo(2011)の研究では、数学状況への解釈が要因となり、数学高不安者のパフォーマンスが低下する可能性があることが明らかとなった。

3. 不安の発現要因に示唆を与える研究

Mark と Jeremy(2007)の研究、Micke と Mateo(2011)の研究は数学不安の数学パフォーマンスに与える影響に焦点を当てて行われていた。そして、そのような研究の傾向が近年まで見られている。しかし、いずれの研究も数学不安の発現要因については明らかにされていなかった。ここでは、認知的学力と情意的学力に関する先行研究から数学不安の発現要因について考えてみる。

3.1. 湊と鎌田(1994)の研究

湊と鎌田(1994)は下記の測定時期から 2 時点を設定し、知能水準と時間的経過に伴う両学力の因果的優越性との関係を明らかにすることを目的とした調査を行った。ここでの両学力とは認知的学力と情意的学力であり、因果的優越性とは一方の学力が他方の学力の形成に影響を及ぼす程度であるとしている。

測定時期

1 学年時

①9 月下旬から 10 月上旬にかけての 4 日間

②3 月上旬から下旬にかけての 4 日間

2 学年時

③6 月下旬から 7 月中旬にかけての 3 日間

④12 月上旬から中旬にかけての 3 日間

3 学年時

⑤6 月下旬から 7 月中旬にかけての 3 日間

なお、この 5 つの時点から 2 時点を以下の 6 通りに設定したとしている。

(1) ①と②を 2 時点とする場合

(2) ②と③を 2 時点とする場合

(3) ③と④を 2 時点とする場合

(4) ④と⑤を 2 時点とする場合

(5) ①と③を 2 時点とする場合

(6) ③と⑤を 2 時点とする場合

そして、秋田県北部に位置する 4 校の中学生を被験者とし、被験者を知能検査の結果により L 群(偏差値 40-49)と H 群(55-64)に分類した。また、同一被験者群の認知的学力と情意的学力を以下のように測定したとしている。

認知的学力 C

数と式(N)、図形(G)、数量関係(Q)を測定する問題を開発し、N,G,Q およびこれら全体からなる総合(CA)を測定する。次に、測定された総合(CA)を能力別に分類して知識・理解(U)・技能(S)、数学的な考え方(MT)を得る。

情意的学力 A

被験者を問わず妥当性と信頼性とがみられる SD 型 MSD 尺度を用いて、総合 MSD、評価性 MSD(E)、力量性 MSD(P)、明快性 MSD(C)を、また、リッカート型 FA 尺度によって数学に対する好意性を測定する。

この調査の結果、次の 2 点を報告している。

1 点目は、(1)、(5)から「両学力の測定時点 1 を中学 1 年 2 学期中頃(①)に設定したときには、L 群、H 群とも両学力間の因果的な優越関係はかなり多く存在し、両群とも認知的学力が情意的学力に影響を及ぼすという方向が、その逆よりも一貫して強いという規則性が見られる」(p.13)ということである。

2 点目は(3)、(4)、(6)から「中学 2 年、あるいは中学 2 年から 3 年にかけての各期間においては、大筋 H 群においては先行する認知的学力が後続する情意的学力に影響を与えるという方向に、L 群においては先行する情意的学力が後続する認知的学力に影響を与えるという方向にある」(p.13)ということである。

これらのことから、以下の図 1 のように中学校 2 年生以降、L 群では形成された情意面が認知的学力に影響を及ぼすと考えられるが、他方で L 群、H 群ともに中学校 1 年 2 学期中頃の認知的学力が 2 年時の情意面を形成するという傾向が見出されている。

・中学校 2 年時～(L 群)

情意面 → 認知的学力

(2 年時)

・中学校 1 年時～2 年時

認知的学力 → 情意面

(1 年 2 学期)　(2 年時)

図 1　認知的学力と情意面の関係

3.2. 鈴木(1994)の研究

湊と鎌田(1994)の結果を受けて、鈴木(1994)は「文字や文字式は中学校数学を学習していくうえで基礎的な内容として重要な位置を占めており、中学校第一学年における文字の学習の成否がそれ以降の数学の学習に大きな影響を持っている」(p.106)という認識から、文字の理解(L)と数学不安(AX)との間の因果的関係を分析すること、並びにその性関連差に関する知見を得ることを目的とした調査を行った。

秋田市立の中学校 1 学年 254 名(男子 128 名、女子 126 名)を対象とし、第 1 学年の 3 学期の測定を時点 1、2 学年の 2 学期の測定を時点 2 とし、文字の理解と数学不安を測定したとしている。そして、各時点における、測定用具と測定の実施については以下のように示されている。

時点 1

L1 の測定用具

中学校学習指導要領(1977)の数と式領域の第 1、2 学年の内容から 50 項目

L1 の測定方法

45 分の調査を 2 回

L1 の測定時期

2 月 20 日～3 月 9 日

AX1 の測定用具
Likert 型測定用具 AX(鎌田, 1988)
AX1 調査実施日
2 月 14 日～2 月 18 日
時点 2
L2 の測定用具
時点 1 で使用した 50 項目と予備調査で留保した 19 項目の計 69 項目の問題
L2 の測定方法
難易度を考慮し、69 項目を 2 つに分け、45 分の調査を 2 回実施
L2 の測定時期
9 月 2 日～9 月 6 日
AX2 の測定用具
Likert 型測定用具 AX
AX2 調査実施日
8 月 30 日～9 月 2 日

そして、この調査の結果、次の 2 点を報告している。

1 点目は、図 2 に示すように「男子、女子とも文字の理解が原因となって数学不安が形成されるという因果的方向性が見られる」(p.111)ということである。

・男子
文字の理解 → 数学不安

・女子
文字の理解 → 数学不安

図 2　文字の理解と数学不安の関係

2 点目は、「男子より女子の方が文字の学習が分かるか否かによって、数学不安の強弱に影響を及ぼす度合いが大きい」(p.111)ということである。

湊と鎌田(1994)の研究から、中学校 1 年 2 学期中頃の認知的学力が中学校 1 年 3 学期、中学校 2 年時の情意面の形成に影響を及ぼすことが示された。また、鈴木(1994)の研究では、文字の理解が数学不安を形成するという方向性があることが明らかとなった。

これらのことから、中学校 1 年時の文字式における理解が発現要因となってその後の数学不安が形成される可能性がある。

4.　数学不安を発現させる文字式の理解

鈴木(1994)の研究から、文字式の理解が数学不安を形成するという方向性があることが示された。また、湊と鎌田(1994)の研究から、2 年時の L 群では形成された情意面がその後の認知的学力に影響を及ぼすことが明らかとなった。これらのことから、文字式の理解が数学不安を発現させ、発現した数学不安がその後の認知的学力に影響を及ぼす可能性がある。これを受け、ここでは、文字式に関する先行研究から、具体的にどのような文字式の理解が要因となり、数学不安を発現させるのか検討する。

4.1.　杜威(1991)の研究

杜威(1991)はある市立の中学校 2 校の 1 年生(A 中学校：1 年生 38 名、B 中学校：1 年生 37 名)を対象に、文字式の計算問題を処理するとき、子どもがどのような操作モデルを持つかについての調査を行った。なお、操作モデルについて「子どもが文字式の処理に意図的に働き掛けたと考えられる心的な操作をモデル化したもの」(p.158)としている。

この調査の結果、18 通りの操作モデルが得られたとしているが、その中でも図 3 に示すモデル 15 について以下のように分析している。

$$m+2(1-m)=-2m+m+2=-m+2=m$$

$$2+(n-3)=-1+n=-n$$

図 3　杜威(1991)の調査で見られた誤答
(操作モデル 15)

このモデルは「非同類項の足し算や引き

算をより“完全”にするモデル」(p.173)であり、「このモデルは、子どもがオープンな文字式(＋、－記号を含む式)に対して不安を持って、より納得できるような結果を追求していたことから来るものとみられる」(p.173)と述べている。そして、子どもがオープンな文字式に不安を持つ理由を「数の世界から来る影響であると考えられる。数の計算をするときに、結果となるのは、計算記号を含む数の式ではなく、ただ1つの数だけである」(p.196)とした上で、「子どもはこの長年の間に形成された意識を持って、文字式の計算を処理していく。よって、記号＋と－があるよりは、ない方がより“完全”だと彼らは思いこんでいると考えられる」(p.196)としている。

このことから、「結果となるのは 1 つの数だけである」という数の世界で形成された意識が要因となり、図3のような＋、－記号が含まれるオープンな式を1つの単項式にまとめるという誤答が見られることが明らかとなった。そして、鈴木(1994)による「文字式の理解が数学不安を形成するという方向性がある」という知見から、このような文字式の理解が要因となり、数学不安が発現する可能性がある。

4.2. 牧野(1997)の研究

牧野(1997)は Sfard(1991)の二面性の考えに基づき、文字式には操作的な見方と構造的な見方があると述べている。そして、「文字式に対する操作的な見方(過程と見る)は算数を学習してきている生徒たちにとっては受け入れやすい見方であるが、構造的な見方をすることは多くの生徒にとって難しい」(p.92)と指摘した上で、「文字式の操作から操作(過程)かつ結果(対象)としての見方の移行は、算数と数学との接点で起こり、そこに文字式の理解に関する認知的ギャップが存在すると考えられる」(p.92)としている。

この考えに基づき、牧野(1997)は中学校1年生 110 名、2 年生 62 名、3 年生 68 名を対象に、文字式の二面性の理解に関し、生徒の困難性が存在するかどうかを調べることを目的とした調査を行った。

この調査において、以下の図4のように 2x+4 を 8, 6x, 8x、5y+2+4 を 13y, 11y, 11 と単項式にまとめるという誤答が見られた。また、無答を含め上記のような誤答の生起率は中学校1年生で 23.6%であったことを報告している。

式	誤答
2x+4	8, 6x, 8x
5y+2+4	13y, 11y, 11

図4 牧野(1997)の調査で見られた誤答

そして、こうした誤答をした生徒について、「2x+4 などの式を操作(過程)としか見ることができない。したがって、操作(過程)があれば必ず結果を出さなくてはいけないと考え、なんとか一語解答をして 6x, 8x などの誤答をしたと考えられる」(p.95)と分析している。

このことから、図4のような誤答をした生徒は 2x+4 などの式を操作(過程)としか見ることができないと考えられ、鈴木(1994)による「文字式の理解が数学不安を形成する方向性があるという」知見から、このような文字式への見方が数学不安を発現させる要因になる可能性がある。

杜威(1991)、牧野(1997)の調査から、図3図4に見られるように、＋、－記号が含まれる式を1つの単項式にまとめるという誤答が見られることが明らかになった。また、杜威(1991)の調査では、このような誤答がモデル 15 だけでなく、モデル 6、モデル 13、モデル 14-1 と複数のモデルで見られたこと、牧野(1997)の調査では、第1学年から第3学年までの全学年で見られたことをそれぞれ報告している。

そして、杜威(1991)、牧野(1997)はこの誤答の要因をそれぞれ「数の世界から来る影響」、「文字式の操作から操作(過程)かつ結果(対象)としての見方の移行」にあると分析していた。

このことから、結果となるのはただ１つの数であると認識する、式を操作的に見るという子どもたちの算数での経験が要因となり、文字式の構造的な見方への移行が適切にいかなくなる可能性が示された。そして、このような文字式に対する見方が図3、図4のような誤答を生み、数学不安を発現させている可能性がある。

5. まとめと今後の課題

本稿では、まず Richardson と Suinn の論文から、数学不安についての定義、尺度について整理し、鎌田の論文から、中学生における数学不安の性差について示された。そして、Mark と Jeremy、Micke と Mateo の論文から数学不安の度合いと数学パフォーマンスは関連する可能性があることが示された。しかし、これらの論文からは数学不安が発現する要因について明らかにされていなかった。

そうした疑問に対しては湊と鎌田の論文から、中学校１年２学期時の数学における認知的学力が要因となり、中学校１年３学期時、中学校２年時の情意的学力に影響を及ぼすことが明らかとなった。さらに、鈴木の論文から、中学校１年時における文字の理解が要因となり、数学不安が形成されることが示唆された。

そして、杜威、牧野の論文から、「結果となるのはただ１つの数である」、「式を操作的に見る」という子どもたちの算数での経験が要因となり、＋、－記号が含まれる式を単項式にまとめるという誤答が見られることが明らかとなった。つまり、小学校算数と中学校数学の認知的なギャップが文字式の誤った理解を生み出す可能性があることが示された。そして、鈴木(1994)による「文字式の理解が数学不安を形成する方向性がある」という知見から、このような文字式に対する理解が数学不安を発現させている可能性があることが分かった。しかし、杜威、牧野の調査では、図3、図4のような文字式に対する誤答が子どもたちの算数での経験が要因となるとしているが、その根拠として子ども自身の記述や考え方が明示されていない。

したがって、今後は実際の子どもたちの活動の分析を通じて、上記のような認知的ギャップが文字式への誤った理解を生み出しているか、またそれが数学不安の発現要因となるのかを検討していく必要があると考えられる。

引用・参考文献

Micke. A. M. & Mateo. J. (2011). Choke or Thrive? The Relation Between Salivary Cortisol and Math Performance Depends on Individual Differences in Working Memory and Math-Anxiety. *Emotion, 11* (4) (pp.1000-1005). American Psychological Association.

鎌田次男. (1983). 中学生の数学に対する不安の分析. 日本数学教育学会誌, *65,* 258-264.

鎌田次男. (1988). リッカート型用具によって測定された我国中学生の数学不安について. 日本教科教育学会誌, *13* (1), 9-17.

国立教育政策研究所. (2012). OECD生徒の学習到達度調査(PISA)2012年調査国際結果報告書. 明石書店.

牧野眞裕. (1997). 文字式に関する認知的ギャップ. 全国数学教育学会誌, 数学教育学研究, *3*, 91-97.

Mark. H. A.& Jeremy. A. K. (2007). Working memory, math performance and math anxiety. *Psychonomic Bulletin & Review, 14* (2), 243-248.

湊三郎. 鎌田次男. (1994). 生徒の知能水準と中学校数学における認知と情意に関する因果的優越性との関係. 日本科学教育学会研究会研究報告 *8* (6), 7-14.

Richardson. F. C. & Suinn,.R.M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19,* 551-554.

Sfard. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22* (1), 1–36.

Skemp. R. R. (1979). 数学学習の心理学 (藤永保、鈴林浩訳). 新曜社.

鈴木勇幸. (1994). 中学生の文字の理解と数学不安との間の因果的な関係. 日本数学教育学会誌, *76* (5), 106-112.

杜威. (1991). 学校数学における文字式の学習に関する研究. 東洋館.

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.51-62

不等式学習の困難性についての研究

坂岡　昌子
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

高校生にとって不等式の学習は必ずしも容易ではないようである. 平成 17 年度に実施された教育課程実施状況調査（国立教育政策研究所, 2007）では,「不等式の性質と一次不等式」についてよくわかったと回答した高校生は 42.4％であり，半数の生徒が理解に不安があることがわかる. 伊藤 (2002) や服部 (2010, 2011) は, 2 次不等式の学習において, その解決の方法（関数的アプローチ・代数的アプローチ）に焦点を当て，学習者の困難性とそれを解消する方法を検討している．高等学校における不等式学習の困難性に関する先行研究では，問題を解決する際の方法についてのものが多い．

一方，中学校・高等学校での不等式は，解くこともあれば，証明することもある．さらに不等式は，大小関係を表したり，関数の変域を表したり，集合を表したりと，様々なところで現れる．そして，不等式がそもそも表現なのか，抽象的な概念なのかといったことも必ずしも明確でない．こうしたことを考えれば，不等式というものを捉えることは，そもそもそう容易なことではないように思える．

そこで本研究では，より基本的な問いに戻り，不等式とはいかなるものか，いかなる性格をもつのかといった問いに対する回答を見つけ，不等式の持つ性格を明らかにしたうえで，学習者の困難性を探る必要があると考えた．不等式の性格とは，不等式が何によって特徴づけられ，いかなる性質をもっているのかといった不等式の本性，不等式が何のために必要となるのかといった不等式の機能などを意味しており，本研究ではこれらを包括的に探る．不等式の性格に焦点を当て研究を進めることで，不等式学習の新たな困難性を明らかにし，不等式学習の困難性を生じさせている要因を明らかにできると考える．したがって，本研究の目的は，不等式とはいかなる性格をもつのかに焦点を当て，不等式学習の困難性を明らかにすることである．

なお，本研究は修士論文作成のために進められたものである．本稿はその要点をまとめたものである．詳細は，修士論文を参照されたい．

２．本研究の理論的枠組み

本研究は,「教授人間学理論」(以下，ATD) (Chevallard, 2006; Bosch & Gascón, 2006) に依拠する．ATD は「教授学的転置理論」から発展して構築されてきた数学教育学の理論である (cf. Bosch & Gascón, 2006)．本研究では,「教授学的転置 (didactic transposition)」という現象を分析する際に用いられる「基本認識論モデル (reference epistemological models)」とそれを記述する「プラクセオロジー (paraxeology)」の概念をとりわけ援用する. 教授学的転置は，様々な社会（正確には institution と呼ばれる）にはそれぞれ異なった数学が存在することを前提とし，数学が一つ

の社会から別の社会へ置き換わることにより，その性格が大きく変化することを示したものである．学校数学の場合には，「学問としての数学」「教えるべき数学」「教えられた数学」「学ばれた数学」が存在すると考え，その過程が図 1 の上部に示されている．これらの数学が，それぞれいかなるものでいかに作り上げられるのか，その仕組みを明らかにすることが主たる研究課題となる．そして，基本認識論モデルを始め，各々の数学を記述する道具がプラクセオロジーの概念である．プラクセオロジーは，不等式であれば不等式に関わる知識や技能がどのようなものか示したものである．そしてそれは，数学的な活動や行為の実践的な側面を記述した「実践部 (praxis)」とその背後にある「理論部 (logos)」からなる．より詳細には，前者は，課題の種類を示す「タスクタイプ (type of tasks)」と課題の解決方法を示す「テクニック (technique)」からなり，後者は，テクニックを生成し説明し正当化する「テクノロジー (technology)」とさらにテクノロジーを生成し説明し正当化する「セオリー (theory)」からなる．したがってプラクセオロジーは，理論的な知識のみならず実践的な営みをも含め，数学に関わる知をモデル化したものである．

３．研究方法

上述の研究目的を達成するために主な研究課題及び方法を次のように設定した．

まず，先行研究では不等式の解き方に関するテクニックを分析・考察しているものが多く，不等式自身に焦点を当てた研究がなされていない．そのため，不等式とはいかなる性格をもつのかを特定し，日本の学校数学での不等式の扱い方を分析することを通して基本認識論モデルを構築した．具体的には，①数学辞典，②数学史，③学校数学を分析することで，不等式とは何かを明らかにし，不等式のプラクセオロジーを特定した．これは，不等式は大小関係を表すだけでなく，範囲や集合を表したり，不等式を解くといったりする扱い方をするため，不等式の性格を整理するためのものである．

次に，わが国において，「教えるべき数学」として指導する不等式としていかなる内容が定められ，いかにして教科書で扱われているのかを明らかにした．構築した基本認識論モデルを視点に，「教えるべき数学」として学校数学における不等式の扱い方，すなわち，中学校・高等学校における不等式の扱い方を，教科書・教授資料を用いて明らかにした．

その後「学ばれた数学」として，その内容を学習者はいかに理解し捉えているのかを分析することで，不等式学習の困難性がより明確になる． そのために，構築した基本認識論モデルを視点に，「学ばれた数学」として不等式学習後の学生にインタビュー調査を行い，収集したデータを分析し，困難性について考察した．そして，学習者の実態や実際の困難

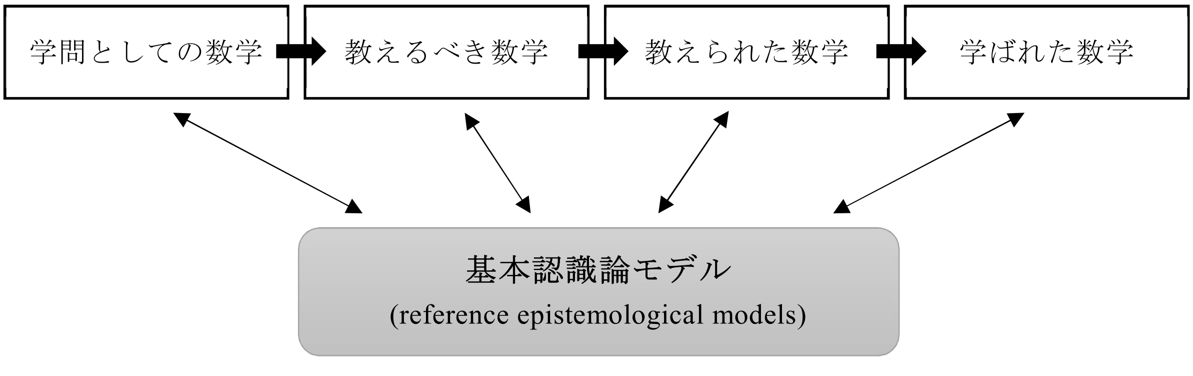


図 1　基本認識論モデル（図は Bosch & Gascón, 2006 を参考に作成）

性を明らかにした．最後に，教育への示唆と今後の課題について述べる．

４．基本認識論モデルの構築

本研究では，不等式についての基本認識論モデルを構築するにあたって，まず，不等式がいかなるものか考察してきた．その結果，不等式が「概念」と「表現」の二面性をもつとの考えに至った．ここで，不等式の「概念」とは「大小関係」であり，「表現」とは「不等号とともに数字や文字を用いて書かれた記号列もしくは式」のことである．実際，三角不等式などは，不等号の記号や代数式がまだ存在していないユークリッドの時代より存在していることから，ここでの不等式は用いた記号に依存しないある特定の大小関係を意味し，それが「不等式」と呼ばれている．ところが，私たちは大小関係をはじめ，範囲，集合といった数学的対象を，不等式を用いて表し，不等号を伴う式を「不等式」とも呼ぶのである．

この不等式の二面性の視点から不等式に関するプラクセオロジーを考えれば，不等式概念についてのタスクと不等式表現についてのタスクの存在を指摘できる．筆者は，ここから基本認識論モデルとしてのプラクセオロジーを記述してきた．

大小関係という不等式概念についてのタスクタイプは二つが考えられ，一つは「T_1: 条件不等式を解く」，もう一つは「T_2: 絶対不等式を証明する」である．それぞれを解決するテクニックは，式変形による代数的なものから，関数を用いるものまで多様だが，代数的なものに焦点を当てれば，条件不等式は不等式の同値変形により解集合を導くテクニックが用いられ，その背後には実数の大小関係の性質とりわけ必要十分条件となる性質がテクノロジーとして用いられる．この大小関係の性質は絶対不等式を証明する際の代数的な式変形の背後にもあるテクノロジーである．条件不等式を解く際との違いは，T_2 では同値変形である必要がないため，必要十分でない大小関係の性質（例えば推移律）をも用いることができる点である．

一方，不等式表現についてのタスクタイプは，三つが考えられた．それぞれ「T_3: 大小関係を不等式で表す」「T_4: 範囲を不等式で表す」「T_5: 集合を不等式で表す」である．一見同じように見えるが，各々で目的が異なる．また，これらのタスクは表記に関すること，すなわち記号の用い方といった慣習に関することであるため，理論部は存在しない．実際，$\{x \in \mathrm{R} \mid x < 3\}$ という集合を「$x < 3$」と略記する理由は，数学的なものではなく，この数学が扱われる社会における慣習的なものである．

以上がこれまでに構築してきた不等式に関する基本認識論モデルの概要であり，特定したタスクタイプ，テクニック，テクノロジー，セオリーをまとめると表 1 のようになる．詳細は，拙稿 (坂岡・宮川, 2016) を参照されたい．

表 1　基本認識論モデルとしての不等式のプラクセオロジー

	タスクタイプ	テクニック	テクノロジー	セオリー
大小関係	T_1: 不等式を解く	τ_1: 代数的アプローチ τ_2: 関数的アプローチ	θ_1: 大小関係の性質（必要十分のもの）	Θ: 実数の理論
	T_2: 不等式を証明する	τ_3: 大小比較 τ_4: 絶対不等式の変形	θ_2: 大小関係の性質	
表記	T_3: 大小関係を不等式で表す	τ_5: 表記テクニック		
	T_4: 範囲を不等式で表す			
	T_5: 集合を不等式で表す			

５．学校数学における不等式の扱い方

前節で示したように，不等式に関して 5 つのタスクタイプを特定した．これらのタスクタイプは中学校と高等学校の教科書における不等式の扱いを明確化するうえで一つの視点となる．この視点から，教科書をみていくこととする．

5.1　中等教育で扱われる不等式

中学校のある教科書では，3 章の一次方程式において不等式を説明しており，次のようなタスクがあった．「次の（1）～（4）のそれぞれについて左右の式を比べ，□にあてはまる等号や不等号を書き入れてみましょう．(2) 20－8 □ 7×2　（4）9－(－1) □ 9＋(－1)」（一松ほか，2016a，P.92）さらに，同じ教科書の教師用指導書を見ると，1 章の正の数・負の数で，数の大小を，不等号を用いて表すことの解説・留意点には「負の数の大小を，数直線を利用して説明する問題である．」（一松ほか，2016b，p.18）と記述されており，テクニックとして数直線を用いることが重視されている．そして，4 章の比例と反比例で変域について学習するが，その内容に関して教師用指導書には,「これまで不等号は数量の間の大小関係を表す記号として用いており，変域を表す意味で用いるのは初めてである．まず，変域を「0 以上 15 以下」のように言葉で表現し，それを不等号による表現，数直線による表現へとつなげていきたい．」(一松ほか，2016b，P.128）と記述されている．このように中学校では，表記に関するこの 2 種類のタスクタイプのみが扱われ，テクニックは基本的に「τ_5: 表記テクニック」であった．実数の大小関係もしくは順序を認識する必要はあるものの，大小関係の性質はテクノロジーとして用いられない．換言すれば,「不等式」の語は出てくるが，実数の大小関係の性質は扱われず，生徒にとって目新しいことは，範囲を不等式で記述するという表記に関するテクニックのみである．そのため，もしこの段階で生徒が範囲を不等式で表すことに困難性があったとすれば，それは大小関係やその性質についての認識ではなく，不等式で何を表しているのかという認識に関連しているといえるであろう．

一方，高等学校では，数学 I と数学 II において不等式について学習する. 数学 I では「T_1: 不等式を解く」, 数学 II では「T_2: 不等式を証明する」のタスクタイプが扱われる．教科書では，様々な単元に渡り 5 つ全てのタスクタイプが見られた．例えば，数学 I の 1 次不等式や 2 次不等式の単元で扱われる T_1 は, 数学 II の三角関数と指数関数・対数関数を学習するところでも見られた．また,「τ_1: 代数的アプローチ」のテクニックにより T_1 を解決する際には，基本的には，同値変形のテクニックを多用し,「θ_1: 大小関係の性質（必要十分のもの）」をテクノロジーとしていた．そして，これらによって得られた解, すなわち集合は，不等式によって表される．また，ある教科書では，数学 I の T_1 を解決する際（同値変形）に必要となるテクノロジーを「不等式の性質」（大島ほか, 2012, p.36)，数学 II で「T_2: 不等式を証明する」際に必要となるテクノロジーを「実数の大小関係に関する性質」(川中ほか, 2012, p.28）と，大小関係の性質に異なった名称が付されていた．学習者にはその違いを知る由もないだろうが，θ_1とθ_2の区別が表出しているともいえる．この T_1 と T_2 を代数的に解決する際のテクノロジーの違いは，教科書でもほとんど触れられておらず（「移項」などテクニックの説明はあるが), 学習者の困難性を生じさせかねない．例えば，次のような T_1 のタスクに対する式変形の誤りを指摘できない生徒が少なくないのではないだろうか．

「$2x - 7 > 0$ を移項により，$2x > 7$ とする．$2x > 7 > 6$ であるから $2x > 6$ となり，$x > 3$ が解である」(この事例は，濵中裕明氏（兵庫教育大学）にご教示いただいた.）

この式変形は T_1 のタスクではなく, T_2 のタスクであれば，しばしばみられるものであり（例えば，ε-δ 論法を用いた極限等の証明)，誤りではない．実際，大小関係の推移律を用いて得られた $2x > 6$ は，$2x > 7$ を満たす x については，まったく正しい命題である．ところが，不等式を解く場合には同値変形が必要となり，$2x > 7$ と $2x > 6$ の両者は条件として同値ではないのである. これは, θ_1とθ_2の違いである．この違いが不等式学習の困難性の一要因となっているのではないだろうか．もしそうであれば，教科書において不等式を解く際に，式変形の根拠となるテクノロジーをより明確に扱う必要があるであろう．また，基本認識論モデルは，知識の構成をも表しており，プラクセオロジーのそれぞれの要素がいかに関連しているのか，していないのかを明確化する．例えば，条件不等式の解集合を略記して不等式で表すことが，慣習的なものであり，大小関係の性質とはほとんど関係がないことがわかる．すなわち，慣習的な表記テクニックには数学的な理論部の知識（大小関係の性質）がなくてもタスクを解決することができるのである.

5.2　不等式学習の困難性の考察

不等式に関する基本認識論モデルは，不等式学習の困難性の要因を探る手がかりとなる.

基本認識論モデルより，条件不等式を解く際 (T_1) に用いる必要十分な大小関係の性質の認識に関する困難性を指摘できる．T_1 を解決する代数的なテクニックは，不等式の同値変形による．同値変形は，ある条件から必要十分な別の条件を導くものであり，このテクニックの背景には，「$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$」などの実数の大小関係の性質がテクノロジーとして用いられている．高等学校の生徒はこのテクノロジーをどの程度意識しているであろうか．教科書では，T_1 を解決するテクニックは「移項」などの言葉で説明されているものの，テクノロジーについてはほとんど触れられていない（e.g. 大島ほか, 2012, p. 37)．さらに，実数の大小関係の性質は,「$A < B$ ならば $A + C < B + C, A - C < B - C$」などと不等式の性質として記述されることが多く（大島ほか, 2012, p. 36)，必要十分となる性質を用いていることは教科書からはほとんどわからない(逆が成り立つことはほとんど明らかだが).以上のことから，学習者は T_1 と T_2 で用いられるテクノロジーの違いをほとんど認識しておらず（T_2 を代数的に解決する場合は必要十分の性質を用いる必要はない), 条件不等式を解く際に，必要十分でない性質を用いていても，その誤りの根拠を指摘できないといった困難性が生じると予見される.

また，表記に関するタスクタイプは 3 種類存在するが，学習者はこれらの違いを明確に捉えることができるであろうか．中学校の教科書では「次の□に不等号を書き入れて, 2 数の大小を表しなさい．-3 □ -7」（岡本ほか, 2013, p.18）や「変数 x のとる値が，3 以上 10 未満のとき，x の変域を，不等号を使って表しなさい.」(岡本ほか, 2013, p.100) のように，大小関係を不等式で表すのか，範囲を不等式で表すのかといった何を，不等号を用いて表すのか言葉の指示がある．しかし，高等学校の教科書では「次の不等式を解け. $5x - 8 \leqq 22$」（大島ほか，2012，p.37）のように，何を不等式で表しているのか明確でない．そして,「不等式のすべての解の集まりを，その不等式の解ということもある.」(大島ほか, 2012, p.37) と記載されており，不等式の解が集合を表していることも明確に記述されていない．したがって，学習者は，不等式の解が集合を表していることをどの程度理解できているのだろうか．さらに，中学校と高等学校の教科書の記述の仕方の違いを見ると，T_3，T_4，T_5 のように，何を不等式で表しているのか区別できていないといった困難性が考えられる.

６．インタビュー調査の詳細と結果

上述のように，これまでの研究から不等式を操作する際のテクノロジーをはじめ，不等式で表されるものの区別の認識などに関する困難性が予見された．そこで，この不等式学習の困難性の実際とその要因，それにまつわる他の数学概念と関連した困難性を探るために，大学生に対するインタビュー調査を実施した．本節では，インタビュー調査の詳細をはじめ，その結果を示す．そして，次節で，大学生の調査問題の解決過程の分析と考察を行い，不等式学習の困難性の実際とその要因を明らかにする．

(1) 調査の対象と方法

筆者が所属する国立教員養成大学の数学を専攻している学部 3 年生と 4 年生の 7 ペア計 14 名に対し，平成 28 年 6 月に調査を実施した．大学生はみな，中学校教諭と高等学校教諭の一種免許状（数学）を取得予定の者である．大学生は，前節で言及した複数のタスクタイプに関連する不等式を全て学習済みであり，さらに，大学で微分積分学を学習したことによって，不等式をさらに柔軟に捉えることができると考えられる．したがって，大学生を調査対象とすることで「学ばれた数学」として不等式についての困難性の実際をより明確にすることができる．

調査は，思考が言語化・顕在化されることを期待し二人ペアに対するインタビュー形式とした．不等式の問題を 1 問ずつ被験者に与え，個人で解答する．おおよそできたら，互いに自らの解答と考えを紹介し話し合う．解けていない場合はペアでその問題にさらに取り組む．インタビューアは，話し合いが活発になるように適宜質問する．質問は主に発言や考えを明確にするためのものとした．不等式の問題は 4 問を用意し，全問同様の過程を繰り返した．1 ペアにつき約 90 分の時間を要した．

(2) 調査問題

調査問題は全部で 4 問用意した．それらの問題を図 2 から図 5 に示す．

【問題 1】
「不等式 $2x - 7 > 0$ を解きなさい」という問題に，春子さんは次のように解答しました．

解）　$2x - 7 > 0$

$2x > 7$

$7 > 6$ より $2x > 6$

$x > 3$

《質問》この解答及び解き方は正しいですか．間違っていると考える場合は，間違っている箇所とその理由を述べてください．春子さんの解答が正しいと考える場合は，下の解答欄に「正しい」と書いてください．

図 2：問題 1

【問題 2】x を実数とすると，$|x| \geqq 3$ は，$x \leqq -3,\ 3 \leqq x$ を表しています．では，$|x| \geqq x$ は何を表していますか．

図 3：問題 2

【問題 3】x を実数とすると，$|x-1| < 1$ ならば $|x| \leqq 2$ であることを示してください．

図 4：問題 3

【問題 4】a, b を実数とすると，$|a| - |b| \leqq |a - b|$ であることを示してください．

図 5：問題 4

問題 1 は条件不等式を解く際に用いるテクノロジーの認識に関するものである．ここでは，条件不等式を解く際に必要となるテクノロジーについて議論させ，不等式のプラクセオロジーの理論部をどの程度意識しているか，どのような理論部をもっているのかみる．

問題 2 は，不等式が表すものが見方によって変わりうることに関するものである．問題の 2 つの不等式は，範囲を表した不等式もしくは実数全体が解となる条件不等式と捉えることが可能であれば，全ての実数に対して成り立つ絶対不等式という捉え方も可能である．

この表しているものの違いをどのように捉えるのかみる．

問題 3 は，不等式からなる含意命題が真であることを示すものである．それぞれの不等式を集合と捉えそれぞれの不等式について包含関係を考える，もしくは大小関係という二通りの捉え方ができる．この二つの不等式をどのように認識し，また，その関係をどのように把握するのかをみる．

問題 4 は T_2: 絶対不等式の証明として三角不等式の変形を証明するものである．通常，a, b を正負の数で場合分けする方法，または，両辺の 2 乗$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$を計算し，$|ab| \geqq ab$ の絶対不等式を利用することで示すことができる．また，$|ab| \geqq ab$ は問題 2 で登場する．これらより，絶対不等式の証明を通して大小関係をいかに捉えているのかみる．

(3) 結果

問題 1 においては，7 ペア 14 名全員が $2x-7>0$ の解は $x>7/2$ であると指摘した．そのため，春子さんの解答及び解き方が「正しい」と答えたペアはいなかった．そして，被験者らは皆，自分たちが導いた解を正答とし，春子さんの解答である $x>3$ と比較することで，解の妥当性を議論した．$x>3$ を間違いとする理由は，春子さんが $2x>6$ として解いたことであると主張した．しかし，その理由をテクノロジーの大小関係の性質を用いて説明する学生はいなかった．最終的に 6 ペアは $x>3$ を“間違いとは言い切れない”と結論を出した．1 ペアは“間違い”と断言し $2x>6$ としたことが間違いと指摘したものの，その理由をテクノロジーの大小関係の性質を用いて説明することはなかった．

問題 2 は，$|x| \geqq x$ をある 2 点の関係として大小関係を表していると捉えていた学生が 4 名おり，全ての実数に対して成り立つ不等式である絶対不等式として捉えている学生が 5 名いた．その他に，範囲を表していると答える学生や，具体的に答えることができなかった学生が 5 名いた．また，議論の中で，不等式が表すものを範囲から大小関係へと変化したり絶対不等式としたり不等式を捉え直す学生がみられた．

問題 3 では，全ての被験者が二つの不等式は集合を表すと捉え，その包含関係を考えることより真偽を検討していた．$|x-1|<1$ と$|x| \leqq 2$をそれぞれ $0<x<2$ と$-2 \leqq x \leqq 2$に捉えた学生は 12 名いた．2 名は絶対値を外すことができなかったが，議論の中で前述の 12 名と同様に捉えた．しかし，集合の包含関係は把握しているものの，含意命題の真偽と適切に関連させることができず，「$|x-1|<1$ ならば$|x| \leqq 2$」は偽であると捉えた学生が 7 名いた．筆者らの予想に反し，不等式を大小関係と捉え条件不等式として変形した学生はいなかった．

問題 4 では，三角不等式の証明として捉えた学生はいなかった．この問題の解決には大きく二つの方法がみられた．一つ目は，a, b を正負の数で場合分けして不等式が成り立つことを確認する方法である．この方法を用いた学生は 8 名いた．二つ目は，両辺を 2 乗して大きい方から小さい方を引き，0 以上となることを示す方法で 5 名がその方法をとっていた．うち 2 名が，$|ab|$ と ab の大小関係を比較するところまで記述していたが，問題 2 を意識していないことがインタビューよりわかった．また，どちらの証明方法とも判断できない学生が 1 名いた．

7．データの分析と考察

本節では，基本認識論モデルとして構築した不等式のプラクセオロジーの視点より，調査問題の解決過程のデータの分析と考察を行い，大学生の持つ不等式に関する考え方や捉え方を示す．それにより，不等式を操作する際のテクノロジーをはじめ，不等式で表されるものの区別の認識など，その他の種々の困難性の実際とその要因を明らかにする．また，

分析するデータは，インタビュー調査時に被験者が記入した解答用紙とプロトコルを用いる．本稿では，不等式学習の困難性の要因が顕著に表出した問題 1 と問題 2 と不等式学習に付随する集合と論理に関する困難性が明らかとなった問題 3 を取り上げる．それ以外の問題に関するデータは，筆者の主張を裏付けるために適宜用いることとする．以下には，被験者数名の解答と考え方を示し，不等式の捉え方の考察を示す．この他の被験者の解答及び分析と考察については，筆者の修士論文を参照されたい．

(1) 問題 1

問題 1 において，「間違いとは言い切れない」と結論を出した代表的な学生 F の解答と考え方を示し，不等式の捉え方を考察する．

学生 F

学生 F は，図 6 のように学生 C と同様の間違い箇所を指摘していた．理由の冒頭に「まず“$7>6$ より”としたところでおかしい」と書き，続けて，$2x-7>0$ の x に 3.2 を代入すると左辺が負の数となり，所与の不等式を満たさないため，$x>3$ は正しくないと記述している．そして，最後の 2 行の「②から $x>3.5$

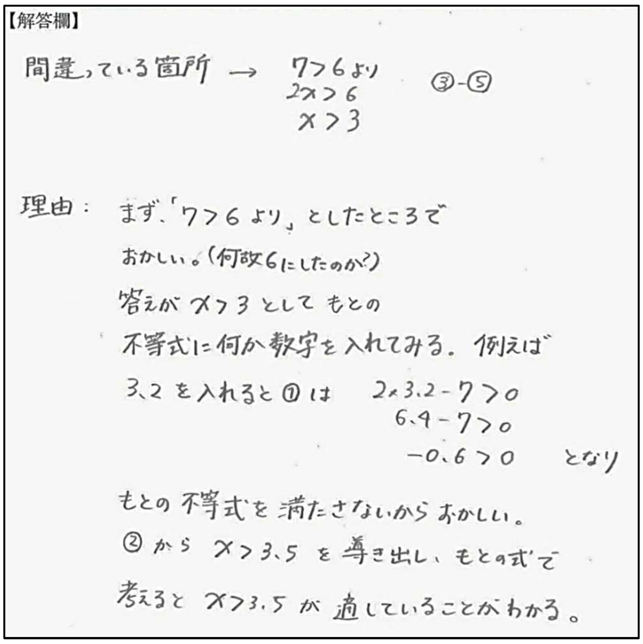


図 6　学生 F の解答

を導き出し，もとの式で考えると」（②は $2x>7$ を指す）は，$x>3.5$ を満たす値は「もとの式」である $2x-7>0$ をも満たすため，$x>3.5$ が適切であると指摘していると解釈できる．

では，この解答から，学生 F の不等式を解く際の理論面のテクノロジーについて見ていく．学生 F は，テクニックである $7>6$ から $x>3$ の 3 行を誤答箇所として指摘している．このテクニックが間違いであると判断する根拠は，与えられた不等式である $2x-7>0$ に 3.2 を代入し，不等式が成り立たないことである．すなわち，答えから解が適しているか，解の妥当性を判断しており，$7>6$ がなぜ間違いであるのかその理由を述べてはいない．この代入は，条件不等式を変形することとは関係なく，答えと所与の条件不等式のみに着目しており，答えが条件不等式を満たすかに焦点が当たっている．したがって，学生 F は，条件不等式を同値変形というテクニックの背景となるテクノロジーには着目せず，最初と最後の条件の関係のみを議論しているのである．より詳細に述べれば，学生 F は「$x>3$ ならば $2x-7>0$」の真偽判断をしている．条件 $x>3$ を満たす 3.2 が条件 $2x-7>0$ を満たさないため，3.2 がこの命題の反例になり，この命題は偽だと判断しているのである．これは，「$2x-7>0 \Leftrightarrow x>3$」が偽であることも示しているとはいえるもののテクニックの背景となる大小関係に関わる必要十分となる性質は意識していないのである．条件不等式を解くことにおいては，同値変形をしなければならない．この同値変形のテクニックには，大小関係の性質の必要十分条件のものがテクノロジーとして用いられる必要がある．しかし，学生 F は，テクノロジーである大小関係の性質の必要十分条件のものを考えていない．

次に，学生 F は不等式をどのように捉えているのであろうか．学生 F は，ペアの話し合いの中で，「3.～という小数の域に入って来て，そっから 3.5 までは満たさない．けど，3.5 よ

りも大きかったら満たすので，この場合（$x>3$ の場合）だったら，満たすときもあるけど，満たさないときもある」（プロトコル No.40）と発言し，x を変数のように捉え，x が変化していく様子を説明した．そして，「大きい」や「そっから」という言葉を用い，3.2 など特定の値に注目している．こうしたことから，学生 F は，$x>3$ という不等式を，この条件を満たす数の集合をあらわしているのではなく，「x は 3 より大きい」と x と 3 の大小関係を表していると捉えていると考えられる．実際，$x>3$ の解が正しくないことを示す際も，正答の $x>3.5$ と春子さんの与えた不等式 $x>3$ を比べることはなく，3 より大きい特定の数を選び，その数のみを用いて春子さんの答えを検証している．学生 F は，x を何らかの値をとる変数として捉え，集合ではなく単体でその値をみているといえる．さらに，ペアの話し合いの中で，相方は $x>3$ や $x>3.5$ の不等式は集合を表すと捉え，何度も「範囲」という言葉を用いているが，学生 F が一度も用いていない．このことからも，学生 F は不等式を集合とは捉えていないことがわかる．

40　F　x が 3 より大きいってことは，3 を含まないんですけど，3.～という小数の域に入って来て，そっから，3.5 までは満たさない．けど，3.5 よりも大きかったら，満たすのでこの場合だったら満たすときもあるけど満たさないときもあるよね．っていう答えになってしまった．と思います．

以上のように，学生 F は，テクニックが不適切であることを答えから指摘している．学生 F は，$x>3.5$ を x は 3.5 より大きい数を表した不等式と捉えている．その結果，「$x>3$ について満たすときと満たさないときがある」（プロトコル No.40）と発言し「ちょっと違う，間違っているのかな」（プロトコル No.42）とまとめた．

不等式学習においての困難性は，不等式を解く際の大小関係の性質である必要十分条件のテクノロジーを学習者が認識していないことである．学習者は，テクニックを駆使し，不等式の解を求めている．しかし，なぜそのテクニックを用いることができるのか，そのテクニックを生成し説明し正当化する理論的なテクノロジーが存在することすら意識がないのかもしれない．その結果，不等式を解くことは同値変形をすることと同じことであるいう認識は持たなくなっている．そして，不等式の解が正しいかどうかである解の妥当性は，ある値を代入することで判断しなければ確認できないこととなる．これが，条件不等式の変形を学習する上での困難性となってくるのであろう．

(2) 問題 2

問題 2 において，$|x| \geqq x$ を条件不等式から全ての実数を表すと捉え直した学生 C の解答と考え方を示し，不等式の捉え方を考察する．

学生 C

学生 C は，$|x| \geqq 3$ について，x を正負の数で場合分けし，数直線に $x \geqq 3$ と $x \leqq -3$ を示した．

$|x| \geqq x$ についても，図 7 のように，x を正負の数で場合分けをし，「x が正のとき $x \geqq x$ $0 \geqq 0$，x が負のとき $x \leqq 0$」と解答欄に記述した．これは，$|x| \geqq x$ を条件不等式と捉え，x を場合分けすることで，不等式を解こうとしたのだろう．事実，ペアの議論の中で，$|x|$

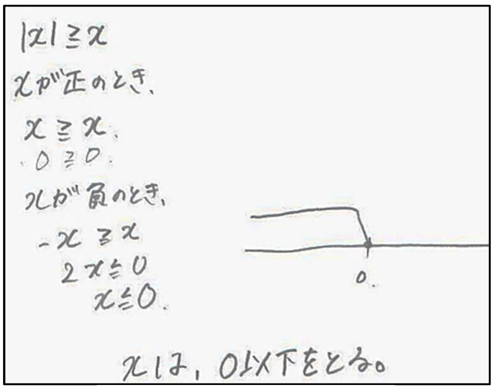


図 7　学生 C　解答

$\geqq x$ が表すものを「解なしにしたら，答えないってことでしょ？」（プロトコル No.89）と発言していることから，条件不等式を解いた答えについて考えていることがわかる．

そして，学生 C は，$|x| \geqq x$ が表すものについて「だから，もう，0 以上．0 は 0 以上 0 以下．つまり 0 なのかな．」（プロトコル No.25）と発言した．これは，x が正のときは 0 以上，負のときは 0 以下として二つの不等式を連立させ，共通部分を考えると 0 が共通する値となり，答えになると判断していると考えられる．すなわち，場合分けした不等式を連立不等式として捉えたことにより，共通部分と答えたのである．しかし，この議論を繰り返す中で，学生 C は「もはやすべての値をとるんじゃないかと」（プロトコル No.52）とも発言した．これは，解について 0 以上と 0 以下の和集合を考えている．したがって，共通部分から和集合へと考え方が変わったといえる．

最終的には，1 と -1 をそれぞれ $|x| \geqq x$ に代入し，$1 \geqq 1$，$1 \geqq -1$ と書き表した．そして，$|x| \geqq x$ にイコールが有るためどのような実数を代入しても不等式として成り立つことをプロトコル No.75 のように説明し，$|x| \geqq x$ は全ての実数を表すと述べた．

75	C　イコールなかったらダメだけど $1 = 1$ になるし．全部なんじゃない？
77	C　つまり，すべての実数ですかね．

学生 C は，条件不等式として場合分けする方法から具体的な数を代入する方法へと捉え方を変えたことによって，不等式の表すものの見方も変化した．

(3) 問題 3

問題 3 において，命題は偽であると捉えた学生 CD ペアの解答と考え方を示し，不等式の捉え方を考察する．

学生 C は，$|x-1| < 1$ について，$x-1$ が正のときと負のときに場合分けし，$0 < x < 2$ を導いた．そして，$|x| \leqq 2$ についても同様に x が正のときと負のときに場合分けし，$-2 \leqq x \leqq 2$ を導き，$0<x<2$ を①，$-2 \leqq x \leqq 2$ を②とした．しかし，それぞれの場合分けに 0 と等しいときを入れていないことや，$x-1 > 0$ のとき $x < 2$，$x-1 < 0$ のとき $x > 0$ と記述されていたことから，$x < 2$ と $x > 0$ の共通範囲として $0 < x < 2$ を導いたと考えられる．

そして，「$|x-1| < 1$ ならば $|x| \leqq 2$ である」という問題文に対し，次のような発言をした．

15	C　これ（$|x-1| < 1$）であるならばこれ（$|x| \leqq 2$）って言うのが，すごく納得いかないって．逆ならいいのかな～って思った．
16	D　あ～、そうだね．

そして，解答欄には，図 8 に示した図をかき，「-2 以上 2 以下の間に，0 より大きくて 2 より小さいのは，ここに含まれてるから，これは言える」（プロトコル No.49）と説明し，「$|x-1| < 1$ ならば $|x| \leqq 2$ である」は成り立たないが，「$|x| \leqq 2$ ならば $|x-1| < 1$」は示すことができると主張した．したがって，「$|x| \leqq 2$ ならば $|x-1| < 1$」を「$-2 \leqq x \leqq 2$ は $0 < x < 2$ を含んでいる」と解釈したことによって，命題は正しくないとしている．

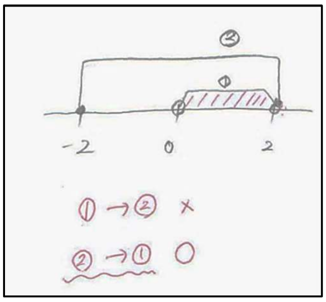


図 8　学生 C　解答

学生 D も，$|x-1| < 1$ について，$x-1$ を正のときと負のときに場合分けし，$0 < x < 2$ を導いていた．そして，$|x| \leqq 2$ についても同様に x が正のときと負のときに場合分けし，$-2 \leqq x \leqq 2$ を導いた．また，学生 D は，$-2 \leqq x \leqq 2$ を $x \leqq 2$ と $x \geqq -2$ の共通部分として捉えていたことが図 9 の解答欄に与えられた数直線の範囲を示す矢印からわかる．すなわち，$|x| \leqq 2$ について x を正負

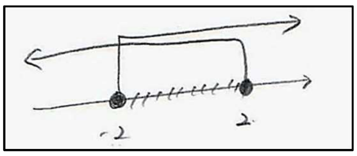


図 9　学生 D　解答 1

の数で場合分けしていることから，解の和集合で捉えるところを，$x \leqq 2$ と $x \geqq -2$ を連立不等式として捉え，共通範囲を求めた解法になっていた．$|x-1|<1$ についても同じ捉え方をして $0<x<2$ を導いたと考えられる．

そして，$0<x<2$ に含まれず，$-2 \leqq x \leqq 2$ に含まれる要素があるため，命題は成り立たないと図 10 を用いてプロトコル No.40 のように説明した．このような説明から，学生 D は，$0<x<2$ と $-2 \leqq x \leqq 2$ を集合を表した不等式として捉えていたと考えられる．

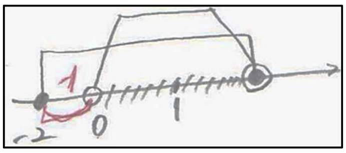


図 10　学生 D　解答 2

40　D　最初のやつ（$|x-1|<1$）にそれ（$-2 \leqq x \leqq 0$）が無いんだから，やっぱり -1 とかをここ（$|x-1|<1$）に入れるじゃん．-2 になって，1 だからダメだ．

これは，$0<x<2$ は -1 を含んでいないため，「$0<x<2$ は $-2 \leqq x \leqq 2$ を含んでいる」と捉えた命題は成り立たないことを説明したものである．

このように，学生 CD ペアは，二つの集合の包含関係を考え，命題の真偽を判断した．「$|x-1|<1$ ならば $|x| \leqq 2$」を「$0<x<2$ は $-2 \leqq x \leqq 2$ を含む」と捉えていたため，プロトコル No.40 のように命題が成り立たないことを -1 を例に挙げ説明したと考えられる．

学生 CD ペアの議論から，「A ならば B である」を「A は B の部分集合である」すなわち「A は B に含まれる」という捉え方に困難性があることがわかった．

また，絶対値を含む条件不等式を場合分けによって解決した際，場合分けした条件を用いずに共通部分を不等式の解としていた．本来であれば，場合分けした条件を考慮し，和集合として不等式の解を求めるべきである．このように不等式の解を共通部分で捉えるか和集合で捉えるかといった不等式の解の捉え方も困難性の要因であるといえよう．

８．おわりに

本稿では，これまでの研究から示唆された不等式学習の困難性について，基本認識論モデルとしての不等式のプラクセオロジーの視点より，不等式学習の困難性の実際とその要因を明らかにした．その結果，学習者はテクニックを駆使し，条件不等式を解いているが，その背後にあるテクノロジーとしての理論的な大小関係の性質を意識していないこと，不等式が表すものを捉えることの困難性が確認できた．そして，不等式学習の困難性において他の数学概念との関連も明らかになった．これらの点についてまとめ，本稿を終えたい．

大学生に対するインタビュー調査問題である $2x-7>0$ を解くことに推移律を用いて $x>3$ を解としたことに対し，ほとんどの学生は，$x>3.5$ と比較し解の妥当性を判断したり，ある値を $2x-7>0$ に代入し不等式を満たすかを確認したりする方法で不等式の解 $x>3$ が間違いであることを指摘していた．しかし，本来，不等式を解く背後にある大小関係の性質において必要十分のものをテクノロジーとして学習者が意識していれば，不等式を解いて答えを求めなくともテクニックの誤りを指摘できるはずである．解法の途中に $7>6$ という推移律を用いていること，同値変形になっていないことを指摘すれば，答えを比較しなくてよいのである．こうしたことが，被験者の活動に見られなかったことから，学習者には不等式の変形の背後に理論的に適切なテクノロジーがないと指摘できる．また，不等式で表されるものの区別の認識については，$|x| \geqq x$ を全ての実数に対して成り立つ不等式と捉えることが可能である．実際に実数全体を指していると答える学生がいた．一方，$|x| \geqq x$ を範囲を表した不等式と捉える学生や条件不等式として解を求めようとする学生もいた．また，条件不等式の解を大小関係を表した不等式と捉える学生もいた．これらの

ことから，不等式が表すものを判断すること は容易ではないといえる．中には，不等式の意味を考えるのではなく，不等号（≦，≧）の表し方に疑問を抱く学生もいた．また，問題 3 の結果からは，集合の包含関係は把握しているものの，含意命題の真偽と適切に関連させることができない学生がおり，不等式を集合と捉えた場合に生じる，含意命題の真偽についての困難性がみられた．さらに，$|x-1|<1$ の絶対値を外すことができないという絶対値の処理に関する課題もみられ，不等式学習に付随した絶対値学習の困難性が関係していることがわかった. このような結論から，インタビュー調査結果のデータを分析・考察したことにより不等式学習の困難性の要因を明らかにすることができたと言えよう．

そして，本研究で得られた不等式学習における教育への示唆は次の 2 点である. 一つは，不等式を解くことと不等式を証明することには，異なるテクノロジーを用いているという認識を学習者に明確に理解させるが重要性であるということ．もう一つは，不等式で表しているものを明確に学習者が認識することの必要性である．

今後の課題は, 不等式の性格の一つである，不等式がいかに発生するのかといったその起源について検討することである. その検討は，基本認識論モデルを構築するにあたって非常に大事な要素であるため，不等式が学習においていかに発生するのか，すなわち，学習者がいかにその必要性を感じ自ら創り上げることができるのかといった起源を検証することである．

謝辞

本研究を進めるにあたり，濵中裕明氏（兵庫教育大学）に色々とご教示いただきました．ここに感謝の意を表します．

引用・参考文献

一松信ほか (2016a).『中学校　数学 1』. 学校図書.

一松信ほか (2016b).『中学校　数学 1　教師用指導書　実践編』. 学校図書.

伊藤伸也 (2002).「 2 次不等式表現の翻訳・処理に関する調査研究―解答困難な生徒の理解の様相―」.『筑波数学教育研究』, 第 21 号，pp. 73-80.

大島利雄ほか (2012).『数学 I』. 数研出版.

岡本和夫ほか (2013).『未来へひろがる数学 1』. 啓林館.

川中宣明ほか (2012).『数学 II』. 数研出版.

国立教育政策研究所 (2007). 平成 17 年度高等学校教育課程実施状況調査　教科・科目別分析と改善点（数学・数学 I）.
（http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h17_h/h17_h/05001031040004000.pdf）.

坂岡昌子・宮川健 (2016).「不等式の性格についての一考察～基本認識論モデルの探求～」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 22 巻，第 2 号，pp. 73-84.

日本数学会 (2007).『岩波数学辞典　第 4 版　日本数学会編集』. 岩波書店.

服部貴大 (2010).「2 次不等式の学習の困難点に関する研究: 2 次不等式に関する知識の観点から」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第 92 巻，第 7 号，pp. 12-20.

服部貴大 (2011).「2 次不等式における関数的アプローチの理解促進に関する研究」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第 93 巻，第 11 号，pp. 12-20.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, no. 58, pp. 51-65.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M. (ed.) *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona, Spain: FUNDEMI-IQS.

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.63-74

算数授業における子どもの数学的モデル化に関する研究

ー子どもの思考過程に見られる推論と価値観に着目してー

佐々木　英男
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

全国学力・学習状況調査で依然として課題となっている活用する力を高めるためには，現実的問題と数学的知識をいかに結びつけていくかが重要になる．この力を育成するためには，現実的問題を数学化して捉えていく数学的モデル化を授業における活用場面に取り入れることが有効であろう．数学的モデル化に関する先行研究は，中等教育段階のものは数多くある（e.g.,芦田，2000；西村，2012；清野，2015）が，初等教育段階での研究は十分になされているとは言えない（平林，2015）．

算数授業において「見通し，追究，比較検討」に沿う問題解決を行えば，児童は数学的モデル化を遂行できるのではなかろうか．さらに，初等教育段階において数学的モデル化能力の素地を養うことは，中等教育段階におけるさらなる数学的モデル化能力の向上につながるだろう．特に，現実的問題から現実的モデルを構成する過程を授業において意図的に取り入れることで日常生活における活用力の育成にもつながる．

西村（2012）は，数学的モデル化は，様々な現実上の目的に根ざす応用的な面に関する「数学的過程」として位置付けられていると述べている．数学的モデル化が目的的問題解決であることを考慮すると，数学的モデル化の過程では，モデル化を遂行していく上での推論に，何らかの価値観が関わっていると考えることができる．数学教育における価値観に関しては，近年取り上げられており（e.g.，島田，2015；山崎，2015）また，推論に関しては，特にアブダクションが注目されている（e.g.，和田，2008；2012）．しかし，数学的モデル化と推論や価値観を扱った研究は少ないのではないか．以上から，本研究の目的は，算数授業において，児童が数学的モデル化を遂行する際，どのような推論がなされ，そこにどのような価値観が働いているのかを明らかにすることである．

そのために，まず，数学的モデル化と推論との関わりを，先行研究をもとに新たな理論枠組みとして示す．また，推論に関わる本研究における価値観の捉えを明確にする．次に，数学的モデル化過程を分析するための教授実験として，活用に関する問題を取り上げた授業を計画し実践する．最後に，教授実験で得られたデータを分析し考察する．

２．理論的枠組み

(1)　数学的モデル化と推論との関わり

先行研究を概観すると，数学的モデル化過程は研究者の視点によって様々な解釈がなされているが，三輪（1983）に代表されるように，現実世界から数学的モデルを構成しそこから導き出された数学的結果を現実世界に再解釈するという基本的な過程は

共通している．本研究では，数学的モデル化と推論との関わりを分析するために，以下で表される，Kehle & Lester,Jr.(2003)による数学的モデル化過程を表した図 1 と記号過程と推論について表した図 2 の関係を基に新たな理論枠組みを提示する．

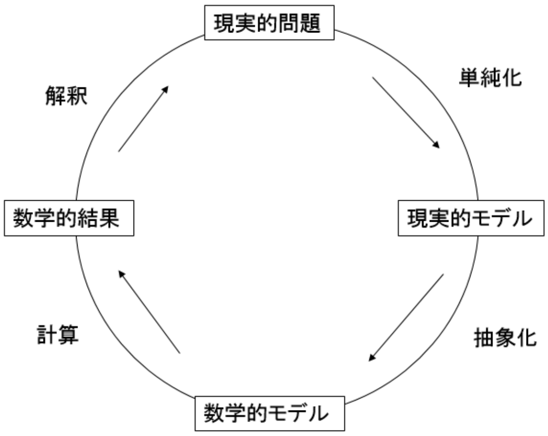


図 1　Kehle & Lester,Jr. (2003)をもとにした数学的モデル化過程

Kehle & Lester,Jr. (2003)は C.S. Peirce の記号論に関わる三つの推論である，アブダクション, 演繹的推論, 帰納的推論を挙げ，図 2 の過程を考察している．

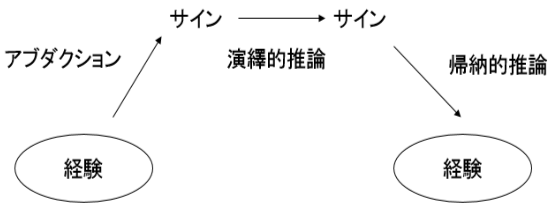


図 2　Kehle & Lester,Jr. (2003)による記号過程と推論

Kehle & Lester,Jr. (2003)は日常で遭遇する経験において，これら三つの推論を意識することなく使っているとも述べており，これらの推論と数学的モデル化を関連づけて考察することは有効である．図 1 の「現実的問題」が図 2 では「経験」として表されている．アブダクションは，図 1 では「単純化」と「抽象化」の場面で表れる．図 2 における一つ目の「サイン」は「数学的モデル」を表し，演繹的推論により導き出された二つ目の「サイン」が「数学的結果」となる．さらに帰納的推論により「解釈」され,「経験」として「現実場面」に戻される．

Kehle & Lester,Jr. (2003)は，アブダクションとは，新しい経験に直面したときに，それを理解することが可能な仮設を導き出す推論であると述べており，近年の数学教育研究においても注目されている推論である．和田(2012)は，アブダクションが演繹的推論や帰納的推論とともに連鎖的に働いているのであれば，数学教育においても重要な推論と考えると述べており，アブダクションの意義や機能を検討することは，探求的な授業の推測の段階を解明することに寄与するであろうとも述べている．このことから本研究では，授業過程の見通しの段階に見られる推論，つまり，数学的モデル化においては，現実的問題から数学的モデルを構成する段階に見られる単純化と抽象化における推論をアブダクションとして捉える．

以上を踏まえ，これらの思考過程による推論と数学的モデル化過程との関わりから Kehle & Lester,Jr. (2003)の図 1 および図 2 を改良した図式を図 3 として示す．

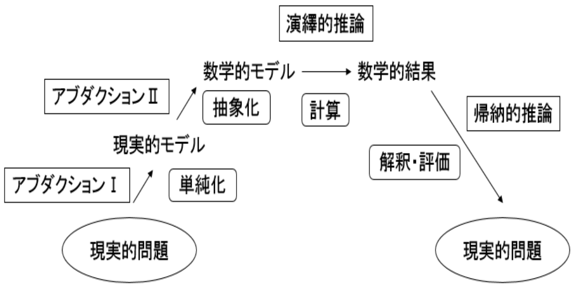


図 3　子どもの思考過程を捉える理論的枠組み

Kehle & Lester,Jr. (2003)ではアブダクションに関して特に区別する記述は見られないが，本研究においては，現実的問題から

現実的モデルを構成する推論をアブダクションⅠ，現実的モデルから数学的モデルを構成する推論をアブダクションⅡとして区別する．一つの経験（現実的問題）を出発点に，アブダクションⅠにより現実的モデルを構成する．具体的な数値を含まないような現実的問題から，数学的表現や数値を含む現実的モデルを構成する過程は，初等段階においては困難であることが予想される．しかし，児童が日常場面で遭遇する経験は，必ずしも数学的表現や数値を含んでいるとは限らない．そのためアブダクションⅠには，児童の興味関心に基づく推論や科学的仮設に基づいた推論も含まれる．構成された現実的モデルからアブダクションⅡにより数学的モデルを見出し記号化（数学化）する．ここでのアブダクションⅠ・Ⅱは相互に矛盾しない（三輪，1983）．

次に演繹的推論により，計算等の数学的処理が行われる．ここでの演繹的推論とは，数学的処理全般を示しており，論証はもちろんであるが，数学的概念と記号を用いた計算や知的表現としての絵図等の数学的処理も含めるものとする．図１のモデル化過程では数学的モデルから数学的結果に至るまでの「計算」の過程がこれにあたる．

最後に，帰納的推論により正しい結果を特定の経験（現実的問題）に適用する．ここで適用できなければ，再度アブダクションにより数学的モデル化過程を繰り返すことになる．ここでの帰納的推論は，数学的結果の妥当性を検討する上で重要な推論であり，帰納的推論によって現実的問題と数学との関わりが明らかになる．図２の「解釈」がこれにあたる．以上の過程を本研究の理論枠組みとして示す．

(2)　本研究における推論の捉え

科学的論理的思考の方法または様式として，一般的に，演繹（deduction）と帰納（induction）の二種類が挙げられる（米盛，2007）．C.S.Peirce は，この二種類の推論にアブダクション（abduction）と呼ばれるもう一つの顕著な思考の方法または様式が存在し，特に科学的発見・創造的思考においてはそのアブダクションが最も重要な役割を果たすと唱えた（米盛訳，1995）.アブダクションが科学的探求のいわゆる「発見の文脈」において仮設や理論を発案する推論であるのに対し，帰納はいわゆる「正当化の文脈」において，アブダクションによって導入される仮設や理論を経験的事実に照らして実験的にテストする操作である（米盛，2007）．つまり，子どもの思考においては，課題を発見したり，課題から結論を推測したりする見通しの段階に見られる推論をアブダクションと捉える．また，帰納的推論は，数学的結果の妥当性を検討する段階，子どもの思考においては，比較検討の段階に見られる推論を帰納的推論と捉える．

演繹的推論は明確な形式的構造を有し，推論の内容を考慮に入れずに，推論の形式のみによって真なる前提から必然的に真なる結論が導かれるというすぐれた特性があり，また演繹的推論はそれが妥当か否かを容易に確かめることができるという利点がある（米盛，2007）．明確な形式的構造を，四則演算や図，表やグラフと捉えれば，演繹的推論は，数学的モデルから数学的結果を導き出す段階で見られる推論であると捉えられる．科学的探求における分析的な演繹的推論の役割は，アブダクションによって提案される仮設や理論を前提にして，その仮設や理論の内容を分析解明し，その仮設や理論から実験観察可能などんな経験的諸帰結・予測が必然的にあるいは高い確率で導かれるかを示すことによって，その仮設や理論を実証的事実に関連づけることである（米盛，2007）．

また，Polya（1958，柴垣訳）は，推論には，論証的推論と蓋然的推論の二種類があ

ることを示している．Polya（1958，柴垣訳）は，論証的推論は数学的証明のように，完全で争う余地のないものであるのに対し，蓋然的推論は争う余地があり，暫定的なものであると述べている．また，Polya（1958，柴垣訳）は，帰納的推論は蓋然的推論の特別な場合であるとも述べていることから，仮設的な推論であるアブダクションと帰納的推論は蓋然的推論であり，演繹的推論は論証的推論であると捉える．帰納的推論は，あることが真であるようないくつかの事例から一般化を行い，それらの事例が属しているクラス全体についても同じことが真である，あるいは，事例のある部分についてあることがいえることを見出して，それらの事例が属するクラス全体についても同じ割合で同じことがいえると推論することである（米盛，2007）．これに対し，同じ蓋然的推論であるアブダクションは，直接観察したものとは違う種類の何者かを推論する，あるいは，直接には観察不可能な何ものかを仮定する（米盛，2007）ことである．

以上から，本研究におけるアブダクション，演繹的推論，帰納的推論を次のように定義する：

アブダクションとは，ある驚くべき現象の観察から出発し，その現象がなぜ起こったかについて何らかの可能な説明を与えてくれる仮設を考え出すことであり，アブダクションは，仮設を立てたり立て直したりしながら問題解決の突破口を見出し，探求を方向づける役割を果たす，思考における「見通し」の段階に見られる推論である，

演繹的推論とは，アブダクションによって提案された仮設からどんな経験的諸帰結が必然的にあるいは非常に高い確率で導かれるかを示したり，仮設から実験観察可能な諸予測を演繹的に導出したりすることであり，演繹的推論は，思考における「追究」の段階に見られ，計算や証明などが演繹的推論の役割を果たす，

帰納的推論とは，仮設が最初に観察された変則的な現象を正しく説明しているかどうかを経験的事実に照らして実験的にテストすることであり，思考における「比較・検討」の段階に見られる推論である．帰納的推論の方法として，Polya（1958，柴垣訳）は，与えられた一組の対象の考察からそれを含むより大きな組の考察に移る一般化，与えられた一組の対象の考察からそれに含まれるより小さな一組の対象の考察に移る特殊化，一つの対象で成立している事実や知識をもう一方の対象との間に類似性を認め，その類似性に基づいてもう一方の対象の考察に移る類比を挙げている．

(3)　本研究における価値観の捉え

本研究においては，最終的な意思決定の根拠となるものを価値観として捉える．見田(1966)は，価値を「主体の欲求をみたす，客体の性能」と定義している．さらに見田（1966）は，その一般的な機能として，意識的行為における選択の基準となることとも述べていることから，価値に対する価値意識が主体の欲求を満たすものを価値観として定義する．ここでいう「欲求」に関して見田(1966)は，もっとも広い意味であって，道徳的・芸術的・社会的欲求を含むあらゆる分野において，あるものを「のぞましい」とする傾向のすべてであると述べているが，本研究では「問題解決の目的に応ずるもの」を「欲求」として捉える．

島田（2015）は社会的オープンエンドな問題を基に，問題解決学習で表出する社会的価値観の特性や多様性を考察している．また，価値観と数学的モデルの変容について，中，長期的に分析しており，社会的オープンエンドな問題の継続的な扱いが大切

である（島田，2015）と述べている．本研究においては，社会的オープンエンドな問題に関わらず，活用に関する問題を扱い，数学的モデル化を意識した授業過程を展開する中で，児童のもつ価値観が特に推論との関わりでどのように作用しているかを分析する．数学的モデル化において価値観がより鮮明に表れる過程として，アブダクションⅠにより現実的問題から現実的モデルを構成する過程を，また，アブダクションⅡにより現実的モデルから数学的モデルを構成する過程を，さらに，帰納的推論により数学的結果から現実的場面へと解釈する過程を捉え分析する．

３．研究方法

本研究では，先行研究をもとに新たに構築した理論枠組みが，子どもの思考において数学的モデル化過程に沿ったものであるという妥当性を検証していく．そのため，本研究では質的研究によるアプローチを試みる．質的研究は，広い意味では，人が書いたり話したりした言葉や観察された行動などの記述的なデータを集め分析する研究方法である．また，もともと社会学や文化人類学で行われてきた研究方法であり，未開の民族から始まって現代社会に至る様々な社会がもつ内部のきまりや構造，文化といったものをえぐり出すことを目的とする研究方法である（日野，1997）．

日野（1997）は，教室には様々な特有のきまりや構造，文化があることに注目すれば，そこに質的な研究方法を適用することができると述べている．さらに，数学教育研究における質的研究の可能性について「①質的研究では参加者と同じ視点から数学の問題や数学が教えられている環境を理解しようとするので，ともすると当然のこととみなされ問題にされてこなかった事柄に光が当てられる．②質的研究で得られた結果に基づいた実践を行うことにより，意味と理解の過程に視点をおいた指導やカリキュラムの研究の可能性がこれまで以上に高まる．」と述べている．本研究では，授業における子どもの思考過程を解釈し，数学的知識の活用においては数学的モデル化が行われており，そこにどのような推論や価値観が関わっているかを明らかにすることを目的としている．

以上から，先行研究をもとに構築した理論枠組みにおいて質的研究を用いることが妥当であると考え，本研究の方法として質的研究を採用するものとする．

本研究では，教授実験により児童の数学的モデル化過程を分析し，その過程において推論と価値観がどのように関わっているかを明らかにする．群馬県にある公立小学校 6 年生（学級全体 33 名のうち習熟度別：標準コースを選択している 22 名）を調査参加者として，2016 年 2 月下旬から 3 月上旬にかけて全 8 時間の教授実験を実施した．この学年の児童は第 2 学年および第 4 学年時において筆者が担任した児童であり，教授実験では筆者が授業者となった．

教授実験で扱った問題は，全国学力・学習状況調査の主として「活用」に関する問題（国立教育政策研究所，2015）に準ずるものや，尋常小学算術（文部省，2007）等を参考に，できるだけ児童の身近にある事象を取り上げたものである．教授実験では A と N の 2 名を抽出児とし，授業中の活動をビデオに記録した．2 名の学力は中程度であるが，授業中の発言が活発であるため思考過程がとらえやすいと判断し抽出児とした．教室の前後 2 台の固定カメラと抽出児に対する移動カメラ 1 台の VTR および IC レコーダーの記録から作成したプロトコルと，授業で使用したプリントの記述等をデータとした．次章におけるプロトコルの左側の数字は発話番号を表し，教師（T），抽出児（A）（N），抽出児以外の児童（S）と

する．

また，実践前には「算数が日常生活に役立っているか」等を，実践後には「日常生活の中に算数の学習が使われていたり使えたりすることを感じられるようになったか」等のアンケート調査を実施しており，抽出児の授業における反応と合わせて分析する．本稿では，その中から二つの教授実験について考察する．

4．教授実験の内容とその解釈

(1)　教授実験 1

教授実験 1 は 2016 年 2 月 29 日に行った．扱った問題は，尋常小学算術 6 年上（文部省，2007）の「うるう年」についてである．うるう年についての知識は「4 年に一回」や「オリンピックの年」程度であったが，「うるう年はなぜあるのか」という現実的問題から現実的モデルへと単純化する過程を以下のプロトコルで示す．

S22：一年間は 5 時間と 49 分で…違う違うええっと，一年と 5 時間と，違う，ええと…一年間と 6 時間よりも 11 分短いんです．それが何年間かするとずれていくのでうるう日がある．
A75：2 月の日にちが極端に少ないからじゃない．
S79：何かの記念かな．
N80：科学者が何か発表する．
A83：4 年に一度何かしら誤差が出る．地球の自転の誤差が生じる．
S141：地球がまわる時間がずれるから．

上記のように，現実的問題から数学化するための現実的モデルを作り出すアブダクションⅠとして，児童の興味関心による探究心に基づく価値観（S79，N80）や科学的根拠に基づく価値観（S22，A83，S141）によるアブダクションⅠから現実的モデルを構成しようとしていることが分かる．ここでは，A83，S141 のアブダクションⅠを踏まえ，教師側から以下の現実的モデルを提示した．

地球が太陽の周りをちょうど一周するのに 365.2422 日かかる．一年を 365 日とすると，どんな不都合なことが起こるか．

現実的モデルを提示した後，4 年間ではどうなってしまうかを問うとある児童が，「0.96？」と発言した．これは数学的モデルである 0.2422×4 から 4 年間で約 0.96 日ずれることを指摘したものである．この児童は，アブダクションⅡにより，小数部分を 4 倍すればどのくらいずれるかが求められると判断したのである．ここでは，科学的な根拠に基づく価値観によるアブダクションⅠが数学的モデルを構成するためのアブダクションⅡにつながったと考える．さらに 10 年ではこれを 10 倍した「9.688」「(約) 9 日後に変わる．」ことを見出している．「8 月にサンタさんとか．」の発言からは，季節がずれることを指摘したかったことが予想され，数学的モデルである「0.2422×4」を演繹的推論により計算した「0.9688」という数学的結果を帰納的推論により現実的問題に照らし合わせたときに，4 年に一度うるう年を置くだけではまだずれが生じてしまうことに気付くことができた．そこで条件を追加した以下の現実的モデルを提示した．

4 年ごとにうるう年をおいても 4 年後にちょうど元の位置に戻らない．そこで次のように定める．西暦が 4 で割り切れる年はうるう年とする．しかし，西暦が 100 で割り切れる年のうち，さらに 4 でその商が割り切れないものは平年とする．

この前に 4 年ごとに来るはずのうるう年が平年となったのは西暦何年か．この次にこのようなことが起こるのは西暦何年か．

ここでは新たな現実的モデルから数学的モデルを再構成することになる．前半の現実的モデルでは，ずれが生じることを乗法

により導き出した．後半の現実的モデルから数学的モデルへと抽象化する過程では，「4 年ごと」という現実的モデルから「公倍数や倍数を使う」というアブダクションⅡが見られた．また，「割り切れる」という現実的モデルから「偶数ではないか」というアブダクションⅡも見られた．児童が数学的モデルを構成する際には，現実的モデルに示されている言葉を基にアブダクションⅡにより演算や既習内容を考えている．ここでは，現実的モデルから数学的モデルを構成する手がかりとなる言葉を探していくという，児童のこれまでの経験から生じる価値観が働いている．以下にその場面のプロトコルを示す．

T244：ちょっと自分でこの計算使いそうだなっていうのを書いてみて．割り算使えそう？あとは？何の勉強使いそう？
S264：公倍数.
A293：たぶんヒントは 100 が 4 の倍数ってこと
A323：で，これ上二ケタっていうんかな？
N324：上二ケタ？はあれじゃない，奇数はだめ，奇数は無理でしょ.
A325：うん,奇数は 4 で割り切れないから.
A335：4 で割れなければうるうではないって書いておこう.

A と N はしっかりと立式して計算しているのではなく，上二ケタの筆算や，100 の倍数を書き出して消していきながらあてはまるものを探し出した（A323，N324）．現実的モデルを与えられた段階から，会話と記述による演繹的推論が行われている．追究の段階においては，明確に立式しなければならないという制約がなければ，二人が行っていたような会話や，メモ程度ではあるが知的表現としての簡単な記述による演繹的推論が行われる．

数学的結果から帰納的推論により現実的問題へと解釈する段階では，数学的結果を導いたとほぼ同時に解釈が行われており，それが個人で解釈される場合（A305）と，会話による解釈が進められる場合（N375 以降）が見られた．以下にその場面でのプロトコルを示す．

A305：あれ，何でだろう？あ，そうか．これは小数になるからいけないんか.
N375：8 足す 4 が 12，12 足す 4 が 16，だから，やっぱりこれ公倍数いけるね.
A376：うん．計算はエックス割る 100 割る 4 ができてしまえば，そのときは普通にうるう年のときだよ.
N377：やっぱり 4 の公倍数のときじゃないとだめでしょ．公倍数いけるね.
A378：4 の倍数じゃない？公倍数なの？
N379：うん，公倍数でいいんじゃね？
A380：4 と何の公倍数なの？
N381：4 と…

A305 の発言では，数学的結果を帰納的推論により解釈した際に,「割り切れるということは商が整数になることである」という経験により，商が小数になることは誤りであることに自ら気づいている．公倍数という言葉の使い方について，N は倍数で考えていながら公倍数と発言している（N375）ことから，A は二つ以上の数字が必要であることを指摘し，公倍数の正しい解釈を促している（A378，A380）．比較検討の段階では，数学的な正しさを追求したり，数学的結果の妥当性を検討したりしようとする価値観から帰納的推論により解釈することで数学的結果を現実的問題に適用できるか，または再解釈が必要かを判断している．

(2)　教授実験 2

教授実験 2 は 2016 年 3 月 1 日に行った．

事前に行ったアンケート調査において，「算数が日常生活に役立っているか」という問いに「はい」と答えた 29 名の児童のうち，26 名が具体的な場面として「買い物」や「消費税の計算」を挙げた．本時では，

この「買い物」の問題を扱った．

はじめに，買い物の場面で児童がどのような価値観をもっているかを明らかにするために，買い物をするときに何を気にしているかについて聞いた．以下にその場面でのプロトコルを示す．

S24：商品の値段
S28：目的，何がほしいとか．
S31：消費税
S45：一個あたりの値段
S63：生産地

ここで見られる価値観は，経済活動に基づく価値観（S24，S31），物的欲求に基づく価値観（S28），数学的な事実に基づく価値観（S45），社会的事実の探求に基づく価値観（S63）など様々であった．

本時では，電化製品を購入対象として設定した．児童が高額の電化製品を購入するという経験はほとんどないが，家族の中で電化製品を購入した経験をしている児童は多い．また，今後そういった経験が増えることを想定して本時の課題を設定した．

電化製品を購入する際に考えることについては，「品質」，「性能」，「メーカー」，「強さ」などが挙げられた．ここでは購入金額に目を向ける発言は見られない．児童にとって買い物の場面での購入金額はそれほど重要ではないことが考えられる．しかし，現実的モデルを構成するためには，買い物という現実的問題に数学的な視点を与える必要がある．現実的モデルを提示するまでのプロトコルを以下に示す．

T157：いろいろ（な店を）見た結果，全く同じものが売っていたとしたら，その後何考える？
S159：値段．
T160：何で値段を考えるかというと…
S161：安さが違ったり…割引とか．
S163：ポイント．

買い物という現実的問題では，教授実験1で見られたような現実的モデルの構成に至るアブダクションⅠが表れなかったため，教師は値段に目を向けるような働きかけをした（T157，T160）．児童にとって買い物の場面では，経済活動に基づく価値観よりも物的欲求に基づく価値観が表出しやすいと判断できる．さらに本時で設定した課題には購入に際し付加されるポイントを考慮したものを考えた．S163 から，購入特典としての「ポイント」は児童の身近に存在していることがうかがえる．ここでは，S159，S161 の発言を受け，以下の現実的モデルを提示した．

先生は部屋用のコードレスの掃除機と小さめのテレビを買おうと思います．A 店と B 店はそれぞれ次のような価格設定で販売しています．

A 店：全品 10%オフ，さらに値引き後の 10%ポイント還元

B 店：2 品同時購入で合計金額の 20%オフ

掃除機の定価は 29800 円，テレビの定価は 39800 円です．どちらの店で買うとお得ですか．

ここで，直感的にどちらがお得かを問うとほとんどの児童が B 店を予想した．そこであらかじめ次の条件を用意し提示した．

先生は A 店のポイントカードで 500 ポイント分使おうと思っています．1 ポイントは 1 円です．

この条件を提示したところ，数人が A 店の方がお得ではないかと予想を変え，「微妙です．」という発言も見られた．ここでは，はじめに 10%オフの 10%ポイント，つまり，「10%オフのさらに 10%オフ」と「20%オフ」では「20%オフ」の方がお得だというアブダクションⅡが行われたが，授業者が条件を加えることで児童のアブダクションⅡが揺らいだと判断できる．このことにより再度アブダクションⅡを行い，数学的モ

デルを構成していく．追加された条件から推測した結果，微妙であると判断されたことで数学的モデルを構成する必要性が生じ，新たなアブダクションⅡが促された．

現実的モデルから数学的モデルを構成する際には，演算の根拠となるアブダクションⅡが見られた．以下にその場面のプロトコルを示す．

A235：2 品同時購入ってことは足し算は使うよね．
N236：つうか，かけ算もいるでしょ？
A237：引き算はどうかな？500 ポイント使うから 500 引くか．
N238：てゆうかこれ全部いるんじゃないの？
A250：どっちが大きいのか，あ，値段が高いのかっていうのを知るときに引き算．

A の発言からは，演算の根拠となるアブダクションⅡが見られる（A235，A237，A250）が，N の発言には見られない（N236，N238）．N はこの後，演繹的推論により，割合の計算をしながら何ポイントもらえるかを求めているが，A237 の発言をもとに進めたことで間違いがあることに気づく．ここでは，演繹的推論により導き出された数学的結果を帰納的推論により解釈しているが適用できないと判断し，再度数学的モデルを構成し直している．以下にその場面でのプロトコルを示す．

N368：500 ポイント使うってことは，0.1 したあと 500 引く．
N373：やすっ．1000 円単位になっちゃったよ．おかしいな．なぜ．なぜ 1000 円単位になった？
N375：おかしすぎる．ま，とりあえずこれに 0 を一個付けておこう．
N376：これ何求めたんだっけ？6174 が値引き後の 10%付きだから．
A378：6763 はね 10%値引き後のポイント付きでしょ．片方のそれぞれの 10%のポイントがあるじゃん．そのポイントを足した数．だからその数と 500 を足すとどれくらい引かれるかっていうあれになる．
N378：なんだ．足すんかよ．

N の計算では，もらえるポイントを合計しようとしているため，「500 引く」ではなく足さなくてはならない．また，N373 からは，ポイントを計算しているはずが購入金額を計算していると勘違いしてしまっていることが予想される．N375 からは，0 を一個付けることで，29800 円や 39800 円といった数値と比較し購入金額に近くなるのではないかという，これまでの経験を踏まえた価値観が働いていたと考える．

５．結果と考察

本研究における教授実験を通して，算数授業において，児童が数学的モデル化を遂行する際にどのような推論がなされ，そこでどのような価値観が働いているかが明らかになった．

現実的問題から現実的モデルを構成するアブダクションⅠに関わる価値観としては，教授実験 1 で明らかになったように，児童の興味関心による探究心に基づく価値観や，科学的な根拠に基づく価値観が見られた．そこから現実的モデルを構成し，その現実的モデルを基に数学的モデルを構成することができた．教授実験 2 で見られたように，アブダクションⅠにおいて，現実的問題に対する児童の価値観が現実的モデルを構成するに至らない場合もある．現実的モデルを構成するためのアブダクションⅠを促す教師の働きかけも必要である．アブダクションⅠは現実的問題に依存するものであると言えるが，現実的問題と数学的知識を結びつけるものとしてきわめて重要な推論である．

教授実験 2 では，現実的モデルへの目的

意識をもたせることでアブダクションⅠを促すことができた．西村（2001）においても，数学的モデル化教材では，実際に児童が探求の必要性を感じることが大切であることが述べられており，目的意識をもたせることの重要性が示されている．現実的モデルを構成（または提示）する前に，いかに現実的問題から数学化するための目的を見出していくかを児童と教師，または児童相互で議論していくことが日常場面での活用につながり，自らの興味関心に基づく価値観から数学的モデル化を進めることで算数への興味関心も高まる．

教授実験後のアンケート調査において，「算数が意外と世の中で使われていることがわかりました」という記述が多く見られた．これらから，児童は日常場面において算数が使われているという意識が低かったことがわかる．また，これまでの授業においても，教科書で学んだ知識が日常場面にどう使われているのかを考えることが少なかったのだろう．本研究における教授実験では，数学的表現を含まない現実的問題から児童のもつ多様な価値観をもとに現実的モデルを構成していく過程を教師が意図的に取り入れることで，算数授業と日常場面をつなげることができた．

現実的モデルから数学的モデルを構成するアブダクションⅡにかかわる価値観としては，既知の数学的知識を使って数学的モデルを作ろうとする価値観が表れやすかった．具体的な数値や数学的表現を含む現実的モデルが構成されれば，数学的モデルに向かうための価値観からアブダクションⅡが行われる．これは児童にとっては当然の数学的活動である．使用する四則演算については学級全体ではすべて必要であると確認される場面もあったが，個人の活動を見ると，それぞれが根拠をもとに演算決定を行っていた．ただし，帰納的推論により数学的結果が適用されない場合は再度アブダクションⅡにより演算を変更する様子も見られた．

数学的結果を導き出す演繹的推論の場面では，明確に立式して数学的モデルを解いていくというよりも，個人の活動のみならず，児童相互の会話やそれに付随するメモ程度の記述の中で演繹的推論が進められていることが多かった．本研究における教授実験の記述では，単語程度の記述や知的表現としての絵図，表等による数学的処理が多く見られた．

教授実験２において，N は数学的モデルから数学的結果を導き出した際に，N373 の発言から帰納的推論が行われたと考える．数学的結果からすぐに帰納的推論が行われ「おかしい」と判断された．三輪（1983）は，解釈・評価の場面においては，たとえば，結果の数値に対する敏感さが要求されようと述べている．つまり帰納的推論では，数学的な正しさを追求したり，結果の妥当性を検討したりするという価値観により，数学的結果を導いたこととほぼ同時に帰納的推論を行い，現実的問題に適用できる結果かどうかを判断している．

帰納的推論の場面では児童のそれまでの経験，特に算数授業に関わって，数学的な正しさや妥当性を検討しようとする価値観が見られた．しかし，数学的結果に対して，帰納的推論を行わずそれが正解だとして思考を終えてしまう児童も見られた．三輪（1983）は，数学的モデル化過程は，単に，事象に対する数学的モデルを作るということにとどまらず，これを使って作業し，評価し，いっそう改良するという全過程を含むものとして解されることは注意を要することであると述べているように，帰納的推論により，数学的結果を現実的問題に戻って解釈することが数学的モデル化においては重要な役割を果たす．

本教授実験では，筆者のこれまでの教職経験で行ってきた，見通し・追究・比較検討といった授業構成で授業を進めた．図3で示した本研究における子どもの数学的モデル化過程と推論を捉える枠組みと授業構成との関係を表したものを以下の図 4 として示す．

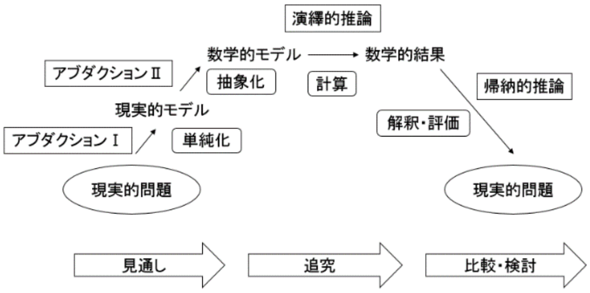


図 4　図 3 の枠組みと授業過程との関係

アブダクションが，仮設や理論を発案する推論であると捉えると，それに伴う数学的モデルを構成する過程が「見通し」，演繹的推論が，明確な形式的構造を有する推論であると捉えると，数学的モデルから数学的結果に至るまでの過程が「追究」，帰納的推論が，仮設や理論を経験的に事実に照らして実験的に操作する推論であると捉えると，数学的結果を解釈・評価する過程が「比較・検討」と言える．本教授実験では，教科書以外の題材から，活用に関わる問題を設定し教授実験を行った．授業構成自体は，これまで筆者が行ってきた，教科書の題材を扱ったときと同様，見通し，追究，比較・検討に沿う授業を展開した．その結果，教授実験の解釈から，それぞれの授業で違いはあるものの，子どもの思考過程において数学的モデル化過程と言える段階が見られることが明らかになった．これは，数学的モデル化の特徴である，数学的知識の活用によるものであると捉える．与えられた課題から，既習の数学的知識を活用しようとすると，解決の見通しをもってアブダクションにより数学的モデルを構成し，その数学的モデルから演繹的推論を行い，数学的結果を導き出し，帰納的推論により現実的問題を解釈するという過程は，これまでの算数授業において繰り返し行われてきた過程である．教師が数学的モデル化を意図し，子どもの思考に沿うように「見通し，追究，比較検討」という授業過程を構成していくことで，子どもの数学的モデル化能力の素地を養うことにつながる．しかし，初等段階においては，子どもが一人で問題場面の数学的な解釈を進めることには限界がある（平林，2015）ため，数学的モデル化を遂行するには教師の適切な関わりも不可欠である．

６．まとめと今後の課題

本研究では，算数授業において，児童の数学的モデル化過程に推論と価値観がどのように関わっているかを，教授実験を通して分析した．本稿では，先行研究をもとに新たに構築した理論枠組みにより二つの教授実験について考察した．

アブダクションや帰納的推論に関わる価値観に関しては，本研究の教授実験だけでは，取り上げられたものがまだ少ない．そのため，価値観の分類をすることができなかった．価値観の分類ができれば，それぞれの推論に対して傾向がつかみやすくなることも考えられる．今後，実践を重ねる中で，価値観の分類も可能になってくるだろう．

今後は，本研究で構築した理論枠組みと結果を基に実践を積み重ねていくことが必要である．

引用・参考文献

芦田俊彦．(2000)．数学的モデリングの導入に関する考察－中学校への導入を中心として－．第 33 回数学教育論文発表会論文集．199-204.

G.Polya（柴垣和三雄訳）．(1958)．数学における発見はいかになされるか１　帰納と類

比．丸善
G.Polya（柴垣和三雄訳）.（1958）．数学における発見はいかになされるか２　発見的推論－そのパターン－．丸善
日野圭子．（1997）．数学教育における質的な研究方法によるアプローチの可能性－授業における子どもの理解を捉えるために－．東京理科大学理学専攻科雑誌第 39 巻．13‐21．
日野圭子．（2009）．子どもの授業中の問題解決における他者の理解－算数科「こみぐあい」の調査から－．宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要第 32 号．61-70．
平林真伊．（2015）．数学的モデル化における児童による問題場面の解釈の促進－混み具合の問題に関するインタビュー調査を通して－．日本数学教育学会数学教育学論究．第 97 巻．169-176．
Kehle, E. & Lester, K. Jr.（2003）． A semiotic look　at modeling behavior. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*（pp. 97-122）Lawrence Erlbaum Associates.
国立教育政策研究所.（2015）. 平成 27 年度全国学力・学習状況調査解説資料．
国立教育政策研究所.（2016）. 平成 28 年度全国学力・学習状況調査解説資料．
国立教育政策研究所．(2012)．OECD 生徒の学習到達度調査（PISA）.
http://www.nier.go.jp/kokusai/pisa/pdf/pisa2012_result_point.pdf(2016.2.16 確認)
国立教育政策研究所．（2016）．全国学力・学習状況調査　授業アイディア例．http://www.nier.go.jp/jugyourei/index.htm（2016.12.6 確認）
見田宗介．（1966）．価値意識の理論．弘文堂．
三輪辰郎．（1983）．数学教育におけるモデル化についての一考察．筑波数学教育研究．第 2 号．117-125．
文部省.(2007).尋常小学算術　復刻版　第六学年児童用上．啓林館.
西村圭一．（2001）．数学的モデル化の教材開発とその授業実践に関する研究－高等学校数学科を中心に－．東京学芸大学大学院修士論文．
西村圭一．（2012）．数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究．東洋館出版社．
清野辰彦．(2015)．「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導－「比例とみなす」見方に焦点をあてて－．日本数学教育学会数学教育学論究．第 97 巻．105-112．
島田功．（2015）．社会的オープンエンドな問題を用いた問題解決学習で表出する日本の小学生の社会的価値観と数学的モデルの特性の研究－横断的研究法と縦断的研究法を用いて－．第 3 回日本数学教育学会春季研究大会論文集．109-116．
清水美憲．（2007）．算数・数学教育における思考指導の方法．東洋館出版社．
和田信哉．（2008）．数学教育におけるアブダクションの基礎的研究－形式の観点からの検討－．新潟大学教育学部数学教室数学教育研究．第 43 巻第 2 号．4-10．
和田信哉．（2012）．探求的な算数・数学の授業における推測の段階に関する研究．科学研究費助成事業研究成果報告書．
山崎美穂．（2015）．数学教育における価値を捉える視点とその理論的背景．日本数学教育学会数学教育学論究．第 97 巻．201-208．
米盛裕二編訳．（1990）．パース著作集 1　現象学．勁草書房．
米盛裕二．（2007）．アブダクション－仮説と発見の論理－．勁草書房．

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.75-84

教育内容としての数学的方法に関する研究

― 高等学校数学科における「中心概念」に着目して ―

秋山　拓也
上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

今年（2017年）２月14日，文部科学省より小中学校次期学習指導要領の改訂案が公表された。改訂案では中教審が定義した「主体的・対話的で深い学び」が前面に押し出されている。知識の理解を深めて，資質・能力を育むという理念は，改訂案全体に貫かれている。高等学校学習指導要領においてもこのような方向性のもと，次期改訂に向けて準備が着々と進められている。

高等学校数学教育の目標と教育内容は，教育の目的「人格の助成」を根本に据えながら，時代とともに変化してきた。現行の高等学校学習指導要領における「数学科の目標」は，次のように述べられている。

「数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。」（高等学校学習指導要領解説数学編理数編，2009，p.16）。

このように「数学科の目標」の冒頭には，「数学的活動を通して」と明記され，「数学的活動」が全面に押し出されている。「数学的活動」は，平成10年度高等学校学習指導要領から「数学科の目標」に取り上げられたものである。平成21年の改訂においては，高等学校で一貫して目標の冒頭に「数学的活動を通して…」が位置づけられ，その充実が一層強調された。活用力・思考力・表現力等の育成，数学のよさの認識などを意図して，「数学Ｉ」と「数学Ａ」には「課題学習」が位置づけられるとともに，新選択科目として「数学活用」が設けられた。「数学科の目標」に強調されている「数学的活動」について，現行の学習指導要領には，次のように記されている。

「目的意識をもった主体的活動を通してのみ真の数学の学習は可能であり，数学学習にかかわる目的意識をもった主体的活動を数学的活動といっている。したがって，数学的活動は，生徒が数学を学習する方法というだけではなく，数学の学習を通して身につけるべき内容ともいえるべきものである。」（高等学校学習指導要領解説数学編理数編，2009，p.67）

このように現在，「数学的活動」は「教育方法」という意味合いだけではなく，「身につけるべき内容」すなわち「教育内容」として位置づけられている。しかし，学習指導要領の文面から「数学的活動」の具体的な内容をみると，やはり「教育方法」の意味合いが強く，それ自体が「教育内容」であるという捉え方については，あまり明瞭ではないように思える。目的意識をもって主体的に学び，「教育内容」を身につけさせるという「教育方法」としての「数学的活動」が重視されている一方で，主体的に取り組むだけでよいの

か，或いは何に主体的に取り組めばよいのか，その対象についての捉えの検討が十分になされているのかが疑問となる。「教育内容」としての「数学的活動」をより明確にする必要があると考える。

長崎（2013a）には，「教育内容としての数学的方法」という文言が使われている。この「教育内容としての数学的方法」は，方法論的内容とも言えるもの，「教育内容」そのものが「教育方法」となるという「教育内容」の一つの捉え方である。これを「教育内容」としての「数学的活動」に置き換えて考えてみたい。現行の高等学校学習指導要領において，この「教育内容としての数学的方法」に該当する事柄を明らかにできれば，「教育内容」としての「数学的活動」を具体的に打ち出すことができるのではないかと考えた。

本稿の目的は，「教育内容としての数学的方法」に着目し，「数学的活動」の「教育内容」としての捉えを明確にすることである。

2.「教育内容としての数学的方法」の考察

この節では，長崎（2013a）において記述された「教育内容としての数学的方法」の内容及び意義を明確にし，その関連する内容について記述する。

2.1.「教育内容としての数学的方法」とは

長崎（2013a）は，昭和31年度改訂版において記述された「中心概念」は，次のように述べられている。

「すべての高校生が一般教養を身に付けるという教育目的のもとでの教育目標としての数学的な考え方に対応する，教育内容としての数学的方法」（p.255）

ここに「教育内容としての数学的方法」と呼ばれる表現の初出がみられる。「すべての高校生が一般教養を身に付けるという教育目的のもとでの教育目標」としての「数学的な考え方」に対応するものである。「一般教養」とは，長崎（2013b）によると，「高等学校の程度として最低限必要な共通的な教養」（p.80）である。そして，必要最低限な共通的教養を身につけるという目的から生ずる目標における「数学的な考え方」を「教育内容」として具体化したものである。「教育内容」そのものが「数学的な考え方」であり，「教育内容」を通して「数学的な考え方」を身につけさせる一つの「教育方法」でもある。

長崎（2013a）が「中心概念」を「教育内容としての数学的方法」と位置付けた背景には，「中心概念」が明記された昭和31年度改訂版及びその作成過程が密接に関係してきている。次は，長崎（2013b）の先行研究から，昭和31年度改訂版の作成過程における「中心概念」の誕生過程，意義，内容を明らかにし，「教育内容としての数学的方法」を歴史的な視点から考察をしていく。

2.2.　昭和31年度改訂版の作成過程

長崎（2013b）は，「中心概念」が記述された昭和31年度改訂版を作成するためにあった「教材等調査研究会中学校高等学校数学小委員会」（以下，数学小委員会と略す）の会合記録をもとに，その作成過程及びその後について明らかにしている。

以下，長崎（2013b）が特定した数学小委員会の活動項目である。（p.28）

①科目の編成
- 総合コースの採用
- ２つのコース案の作成
- 科目の編成と調整

②教育目標の形成
- 必修の目的の検討
- 必修・選択の目標の検討
- 教科・科目の目標の検討
- 教科・科目の目標の再検討

③必修・選択の内容の形成－数学的内容－
- 必修の内容の検討
- 必修・選択の内容の検討
- 選択の内容の再検討
- 必修・選択の内容の検討の調整

④必修・選択の内容の形成－数学的方法－

・方法論的内容の検討

・中心概念の検討

・中心概念の拡張

・中心概念の再検討

2.2.2.「中心概念」の誕生に至るまでの議論

「中心概念」に関わる議論は，②教育目標の形成と④必修・選択の内容の形成－数学的方法－であると長崎（2013b）は特定している。以下，「中心概念」に関わる議論である②及び④の概略を記述する。（pp.80-82）

②教育目標の形成

教育目標の形成過程は，「必修科目の目的の検討，必修・選択の目標の検討，教科・科目の目標の検討，教科・科目の目標の再検討」の４つの段階に分かれる。

第１の必修科目の目的の検討の段階（第３回～12回会合）では，必修の目的が，高等学校の程度として最低限必要な共通的な教養（一般教養）と数学のあとの科目や他教科の科目を学習する基礎（基礎教養）から議論され，必修のねらいを数学的な見方や考え方であるとした。

第２の必修・選択科目の目標の検討の段階（第13回～23回会合）では，必修の目標として，一般教養としての「数学的な見方や考え方」が確認され，第13回会合において「必修科目目標案」が数学小委員会から提案された。これは，必修科目の目標案として，①数学的な考え方，見方，②数学的な用語，③基礎教養，④数学の性格や数学の意義，⑤態度，の６項目を挙げている。その中において，①数学的な考え方，見方について，「次にあげるような数学的な考え方，見方を理解し，これらに基づいて，ものごとを的確かつ正確に処理できるようになる。」として次の15項目が挙げられている。（図１）

ここには，一般教養としての「数学的な見方や考え方」が表記されている。この「必修科目目標案」は，この作成過程において，最も早く提案された目標案であり，後に記述する「中心概念」の内容に該当する項目の存在から，「中心概念」における「教育目標としての数学的な考え方」の原点であることがいえよう。

第３及び第４の教科・科目の目標の検討，再検討の段階（第46回～68回会合）では，数学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，応用数学の目標が明らかにされ，学習指導要領の文案を検討する中で幾度となく再検討がされていった。

a．変化するものの間に不変な関係を見出し、これによってものごとをとらえる。
b．変化しているものの間に対応関係をつけ、函数としてとらえる。
c．式やグラフを用いて関係を表現する。
d．記号を用いて表現を簡潔で、しかも機械的に楽に扱えるようにする。
e．式を、その形によってとらえる。
f．新しいことがらの表現が、それまでのことがらの表現と同じ形式になるように、表現の場を拡張する。
g．演算がいつも可逆になるように、演算を組み立てていく。
h．前提と結論の関係を明らかにし、その間に論理的なすじみちをつけることによって、ものごとを条件的にとらえる。
i．全体の論理の根底になることと、それから導かれる重要事項とを区別して、理論を組み立てる。
j．条件を整理したり、結論を修正したりして、よりすっきりした形にまとめていく。
k．物の形や位置関係などを数学的な関係によってとらえる。
l．空間や空間の中の図形を、それを構成する要素との関係でとらえ、構成的、動的に図形を決定していく。
m．図形を、運動、射影、極限移行などの操作によってとらえ、異なる図形の間に関係を見出し、統一的にとらえる。
n．数・式を図形の世界にうつし、図形を数・式の世界にうつして、互いに他を補い、おのおのの特性を明らかにする。
o．事物の間に蓋然的な関係を見出し、これを数量的にとらえる。

図１：「必修科目目標案　項目①」（長崎，2013b，pp.41-42）

④必修・選択の内容の形成－数学的方法－

必修・選択の内容－数学的方法－の形成過程は，「方法論的内容の検討，中心概念の検討，中心概念の拡張，中心概念の再検討」の４つの段階に分けることができる。

第１の方法論的内容の検討の段階（第19回会合）では，第13回会合で提案された「必修科目目標案」における項目①「数学的な考え方，見方」に対応するものとして，「教育内容」としての方法論的内容が提案される。目標案では，一般教養としての「数学的な考え方，見方」の具体的な例示として表されていたが，方法論的内容においては，必修科目としての「教育内容」の検討がなされ，より

「教育内容」に即したものとして位置付けられるようになった。以下，数学小員会第19回会合記録（1954年１月）である。

「代数・解析的な面，幾何的な面のどちらにも関係する考え方，方法に関する内容は，両者のどちらにも含ませず，もうひとつ，方法論的内容とでもいう欄を上の表の中間に設け，この内容は，解析，幾何のどちらの面で強調し，それをどの教材でどこでやるかは自由にする」（長崎(2013b),p.139）

第２の中心概念の検討段階第（34回~45回）では，数学Ⅰをもとに「中心概念」が具現化された。第34回会合（1954年５月）では，方法論的内容に「中心概念」という名称が与えられ，第45回会合（1954年12月）にかけて，「中心概念」が継続的な検討を経て具体化されていった。数学Ⅰ，Ⅱ，について，代数的内容，中心概念，幾何的内容が提案され，「中心概念」は代数的内容と幾何的内容の両者の学習を通して一般化すべき数学的な考え方，方法を示したものであるとされ，数学Ⅰの中心概念が検討された。

第３の中心概念の拡張の段階第（50回~57回）では，中心概念を数学Ⅱ，Ⅲでも考えるとともに，その意義が話し合われ，数学科の目標，数学Ⅰなどで言われている「考え方」を内容に即して例示したもの，目標の具体化であるとされた。つまり，「中心概念」は「教育目標」における「教育内容」に準ずる「数学的な考え方」を具体的に「教育内容」として明示したものであることがわかる。

第４の中心概念の再検討の段階（第64回~68回会合）では，中心概念の位置付けを内容とは離れたものとし，それまでの中心概念が再検討されて，構造的には，代数，幾何の下に中心概念を置くことになった。（図２）

その後「中心概念」は，告示された学習指導要領の数学Ⅰ，Ⅱ，Ⅲにおいて記述された。数学Ⅰは，図２の通りに「中心概念」が記述され，数学Ⅱ及びⅢは，幾何的内容と代数的内容に対応するものに，数学的内容として示してある。これと「中心概念」との関係は，数学Ⅰの場合と同じである。数学Ⅰにおける科目の目標及び「中心概念」を図２，３として表記する。

数学Ⅰは、代数および幾何の初等的基本的な分野の学習を通じて、数学的な考え方の基本を会得させ、あわせて、他教科ならびに数学科の他の科目の学習に必要な基盤を作ることをねらう科目であって、主として次のことを目標とする。
(1) ものごとを的確に表現したり、科学的に研究したりしていく上に、数・式・図形が果たしている役割を知り、これらを進んで開いていく態度を養う。
(2) 代数についての基本的な概念・原理・法則等を理解し、簡単な式を目的に応じて適切に運用する能力を養う。
(3) 幾何図形についての基本的な性質を理解し、これを応用する能力を養う。
(4) 幾何および代数の体系や研究方法が同じような考え方にもとづいていることを理解し、この体系が知識のまとめ方のひとつの典型であることを知る。
(5) 論理的に筋道を立てることの意味を理解し、その能力を養うとともに、いろいろな場面に、前提と結論との関係や論理の進め方に注意を払う習慣を身につける。
(6) 数学的な物の見方、考え方の意義を知るとともに、これらにもとづいて広くものごとを的確に処理する能力と態度とを身につける。

図２：「高等学校学習指導要領数学科編　昭和31年度改訂版」の「数学Ⅰの目標」（長崎，2013b，p.225）

代数的内容	幾何的内容
a　函数の概念	a　直線図形の性質
一次函数	三角形の合同
二次函数	三角形・四辺形の性質
一般の比例	比例と相似形
b　数・式の取扱い	b　円の性質
整式の四則，因数分解	円周角
簡単な分数式と無理式	直線と円，円と円との関係
平方根数の計算	円と三角形
c　方程式	円と多角形
連立方程式	c　軌跡および作図
二次方程式，根の公式	基本的な作図
不等式の解法	軌跡としての直線・円
不等関係の証明	いろいろな曲線
d　対数	d　空間図形
指数の拡張	直線・平面の結合関係・位置関係
対数の定義と性質	正射影および投影図への応用
対数計算	e　三角函数
計算尺の原理	180°までの三角函数
e　統計	三角函数の基本的な性質
資料の整理	正弦法則・余弦法則
代表値・標準偏差	三角形の面積公式
相関関係・相関係数	

中心概念
a　概念を記号で表わすこと。
記号・文字による一般的表現
文字式
式の形
b　概念・法則などを拡張すること。
拡張の原理
c　演繹的な推論によって知識を体系だてること。
公理・定義
定理・命題
証明
d　対応関係・依存関係をとらえること。
函数的関係
統計的関係
図形的な対応関係・依存関係
命題の論理的依存関係
e　式や図形について不変性を見いだすこと。
f　解析的方法と図形的方法の関連。
函数のグラフ

図３：「高等学校学習指導要領数学科編　昭和31年度改訂版」の「数学Ⅰの内容」（長崎，2013b，p.68）

学習指導要領における「数学Ｉの目標および内容」に次のような表記がある。「（２）代数的内容および幾何的内容は，目標１，２，３，４等につらなるものであり，中心概念は，目標４，５，６等につらなるものである。いずれも，一方が他方の方便にすぎないというものではない。（３）実際の指導に当っては，代数的内容と幾何的内容を中心として指導し，中心概念の指導は，これらの指導の中に適宜織り込まれていくもので，これらとは別に中心概念を指導するものではない。」（長崎（2013b），p.256）ここには，「中心概念」に該当する目標とその指導についての注意事項が明記されている。つまり，「中心概念」は，数学Ｉの目標において記述されている「体系性・論理的思考力，数学的な物の見方，考え方」に関係し，その具体化されたものは，それ自体を指導するのではなく，「教育内容」を指導する中において適宜指導していくものであることがわかる。

2.2.2. 昭和31年度改訂版における必修科目数学Ｉにおける「中心概念」の内容

図２において記述された「中心概念」は，それぞれ「教育目標」における「数学的な考え方」を「教育内容」に即して，具体化したものである。以下，「中心概念」の項目における具体的な内容を長崎（2013b）の資料に掲載されたもの（pp.257-258）から抜粋する。（下線は筆者による）

a　概念を記号で表わすこと

この意味は，数学的な概念を記号によって簡潔明確に表現したり，個別的にわかった数量的な関係を文字を使って一般的な形で表わしたりする数学的な記号の用い方についての考え方のことで，特に代数的な記号は，それを用いた式についての演算が形式的に整うように考えていく点に特徴がある。その結果として，式の形という見方が生れ，これが代数的に考えを進めていくときの目のつけどころになる。

b　概念・法則などを拡張すること

特殊な場合から出発して，いつも，もっと一般的に同じような形で定理が成り立つように，概念を拡張したり，法則を拡張したりしていく考え方をさす。数概念を拡張する場合に，演算法則の形式が不変になるように新しい概念を作っていくのもこれに当る。

c　演繹的な推論によって知識を体系だてること

一群の知識に対して，それらの基礎になる事項を明らかにし，用語の意味を一義的に定め，それらから演繹的に他の事項が導かれることを確かめることによって，知識に体系をつけ，まとめていく考え方をさす。この際に証明・公理・定義のもつ役割がそれぞれ重要なものである。

d　対応関係・依存関係をとらえること

数学においてとらえる関係は，多くは対応関係，依存関係としてである。変数の間の対応，依存の関係として函数の概念をとらえ，統計的な変量については，統計的関係としてとらえられる。また図形の性質などについても，これをその構成要素間の対応関係ないし依存関係と見ることができ，またそう見直すことによって，定理の意義が明らかになる場合が多い。同じような関係は，命題相互の間の論理的な関係にも見られる。必要条件・十分条件などという考えも，二つの事項を，一方を他方の条件と考えた場合に起る論理的な関係を表わしたものと見られる。

e　式や図形について不変性を見いだすこと

円周角の定理は，角の頂点の変化に対して不変な性質を示すものであり二次函数のグラフの形が放物線であることは，

二次式の係数が変化しても不変な性質である。このように，数学の定理には，その背後に変化しているものを予想し，その間の不変な関係として把握することによって，その意味が深くとられるものが多い。対称・射影等の変形で不変な点・直線に着目したり，式の変形において式の値が不変であることに着目したりするのもその例である。

f　解析的方法と図形的方法の関連

式で表わされた函数の特徴をとらえるのにそのグラフを利用したり，図形の性質を調べるのに代数式や三角函数を用いたりするように，解析的な方法（式による表現）と図形的な方法（図形による表現）の特徴やその間の対応を生かして用いていく考え方をさす。

（長崎（2013b），pp. 257-258）

2.3.「教育内容としての数学的方法」としての「中心概念」について

長崎（2013b）によると，昭和31年度改訂版において記述された必修科目数学Ⅰの「中心概念」は，数学小委員会第13回会合において提案された「必修科目目標案」に表記されている「一般教養としての数学的な考え方，見方」を原点として，形作られたことがわかる。そこから，代数・幾何の両面に関係する考え方，方法に関する内容として方法論的内容となり，その方法論的内容に「中心概念」と名前が付けられ，「中心概念」が誕生した。そして，その意義としては，「教育目標」における「一般教養としての数学的な考え方，見方」の具体化であり，それ自身「教育内容」として価値のあるものである。また，「中心概念」の指導に関しては，代数的内容と幾何的内容とを中心として指導し，「中心概念」の指導は，これらの指導の中に適宜織り込まれていくものとされ，「中心概念」は直接指導するものではなく，「教育内容」から間接的に指導するものであることがわかる。図2の前文より，「代数および幾何の初等的基本的な分野の学習を通じて，数学的な考え方の基本を会得させ，」という表現からこの時代における「数学的な考え方」は「教育内容」を通して身につけるものであるとされている。これは，「教育内容としての数学的方法」における「数学的な考え方」の捉えと同様のものであり，ここからも「教育内容としての数学的方法」と「中心概念」の関連性が見える。また，図3の「中心概念」の内容より，これは「教育内容としての数学的方法」の中でも特に「教育内容」に重きを置いたものであることがわかる。

「教育内容としての数学的方法」は「すべての高校生が一般教養を身に付けるという教育目的のもとでの教育目標としての数学的な考え方に対応する」ものであり，昭和31年度改訂版における「中心概念」がそれにあたることを確認することができた。あくまでも「中心概念」は「教育内容としての数学的方法」の具体例であることに留意しておきたい。そこには，当時の「教育目標」があり，その目標内に存在する「数学的な考え方」が大いに関わってくる。したがって，すべての高校生が一般教養を身に付けるという教育目的のもとで「教育目標」における「数学的な考え方」が変遷すれば，「教育内容としての数学的方法」がその時々に応じて変化することが分かる。

そこで，次節において学習指導要領の高等学校数学科「教育目標」における「数学的な考え方」の変遷を辿り，各目標概念における「数学的な考え方」の所在を，川村(2009)を参考に社会的背景を踏まえ明らかにしていく。

3.「数学的な考え方」の目標論的展開

川村(2009)の先行研究では，「数学的な考え方」が登場した昭和31年度改訂版以降の学習指導要領の変遷をたどり，それぞれの時代

における当該概念の意味と，そこに期待されてきた価値観を，具体的に明らかにしている。以下，川村（2009，pp.25-31）において述べられている各学習指導要領の目標概念における「数学的な考え方」の所在及び扱われ方の概略を述べる。

3.1.　昭和31年度改訂版

川村(2009)は，「教育内容」に関する「数学的な考え方」の「具体化」として「中心概念」が挙げられており，それらは数学における本質的な考え方であり，これらの考え方に共通する特徴として，比較的高度な「数学的構造」に目をつける考え方であることを指摘している。しかし，戦後まもない時期で社会の目指す豊かさへの方向，「数学的構造への着目」と特徴付けられる「数学的な考え方」が，どのように貢献するのか，明らかではなかったが，数学的構造の簡潔さや合理性に価値観を感じ，社会生活をある程度それに同一視したいという発想であったのかもしなれいという懸念が述べられている。

3.2.　昭和45年度

昭和45年度学習指導要領について見ていく。

> 事象を数学的にとらえ，論理的に考え，統合的，発展的に考察し，処理する能力と態度を育成し，また，社会において数学の果たす役割について認識させる。
>
> このため，
>
> 1　数学における基本的な概念，原理・法則などを理解させ，より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力と態度を養う。
>
> 2　数学における基本的な知識の習得と基本的な技能の習熟を図り，それらを的確かつ能率的に活用する能力を伸ばす。
>
> 3　数学的な用語や記号を用いることの意義について理解を深め，それらによって数学的な性質や関係を簡潔，明確に表現し，思考を進める能力と態度を養う。
>
> 4　事象の考察に関して，適切な見通しをもち，抽象化し，論理的に思考する能力を伸ばすとともに，目的に応じて結果を検討し，処理する態度を養う。
>
> 5　体系的に組み立てていく数学の考え方を理解させ，その意義と方法について知らせる。

この時代，「数学的な考え方」が最も全面に押し出されている。

「統合的，発展的に考察し」という言葉には，数学教育現代化運動の息吹が込められており，この時代の「数学的な考え方」を特徴づけている。また「事象」という言葉には，数学的な事象に限らず，より一般的な日常事象をも含むと捉えられることから，数学外においても「数学的な考え方」の価値観が認められていると言える。

3.3.　昭和53年

昭和53年度学習指導要領について見ていく

> 数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，体系的に組み立てていく数学の考え方を通して，事象を数学的に考察し処理する能力を高めるとともに，それを，活用する態度を育てる

この時代は，環境問題や，人生の充実の問題など，これまでとは違った一意的な答えの出しにくい問題が持ち上がり，問題が「相対化」し，価値観の相対化も引き起こした。そこでそのような新種の問題への対処として，「数学的な考え方」を「教育内容」として捉えるだけでなく，問題解決をするための「教育方法」として捉えられるようになってきた。昭和44年以前の特徴である「数学的考え方」の数学的構造への着目は継続している中で，「体系的に組み立てていく数学的な考え方を理解させ」がこの時代においては，「体系的に組み立てていく数学的な考え方を通して」と変更され，「数学的な考え方」を通して「事象」を考察し，「活用」することをねらいとしていることが読み取れる。すなわち，この学習指導要領において，「教育方法」としての「数学的な考え方」が明示され始めていることが読み取れる。

3.4.　平成元年

平成元年学習指導要領について見ていく

> 数学における基本的な観念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高めるとともに数学的な見方や考え方のよさを認識、それらを積極的に活用する態度を育てる

急激な情報化の進展と，それに牽引される価値観の多様化，および更新の速さが際立ってきた。この目標から「体系的に組み立てていく数学の考え方」という表記はなくなり，「数学的な見方や考え方のよさを知る」といった表現が加わった。川村はこの「よさを知

る」という表現を「鑑賞」（外部からの視点）と呼び，「考え方」を対象としそれを評価することで，「考え方」を修正したり，新しい「考え方」を創り出す可能性があると考えられ，これ自体が，「数学的な考え方」と捉えられると述べている。外部からの視点により，固定された「数学的な考え方」だけでなく，問題に応じた「考え方」を見出すことを「考える」ことがこの時代における「数学的な考え方」の捉え方である。前の学習指導要領に引き続き，「教育方法」として「数学的な考え方」を捉えていることがわかる。

3.5. 平成10年

平成10年度学習指導要領について見ていく

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる

「価値観の相対化」，「価値観の多様化，および更新の速さ」は，更に加速する方向で続いている。この学習指導要領より「数学的活動」という，学習の方法原理が目標文に明記された。川村は，「活動」つまり，具体物操作や思考実験は，必ず数学的思考を伴い，そうした思考の「方法」を「数学的活動」が与えているという意味で，「数学的な考え方」と捉えられると「数学的活動」自体を「数学的な考え方」と見なしている。あくまで，この指導要領における「数学的活動」は「教育方法」としての「活動」であり，「教育内容」は含まない。ここに現行の「数学的活動」との違いがある。

4. 現行の高等学校数学科の「教育目標」の考察および「教育内容としての数学的方法」の特定

4.1. 「教育目標」における「数学的な考え方」の考察

数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる

現行の目標においては，第1節でも指摘した通り，「数学的活動」が目標文の冒頭に表記されたことで，「数学的活動」を通して（ア）「数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解」，（イ）「事象を数学的に考察し表現する能力の向上」，（ウ）「創造性の基礎」，（エ）「数学のよさ」，（オ）「数学的論拠に基づいて判断する態度」を育成及び理解させていくことが目標とされた。前学習指導要領まで「数学的な見方や考え方のよさ」と表記されていた「数学的な見方，考え方」は削除され，新たに「数学のよさ」が加わった。これは「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」(2009)によると，「「数学のよさ」とは，数学的な見方や考え方のよさ以外に，数学の概念や原理・法則のよさ，数学的な表現や処理の仕方のよさを含み，さらに，高等学校では，数学の実用性や汎用性などの数学の特長，数学的活動や思索することの楽しさなども含んだものである。」(p.17)と記述されている。また変更の理由について「現在，高等学校には，数学の学習に関心や意欲を見いだせない生徒がいることも事実である。そのような高等学校の現状を踏まえ，数学の学習が単なる問題の解法の暗記にならないよう絶えず数学のよさや数学を学ぶ意義を認識させることに留意し，数学に対する関心と主体的に数学を学ぼうとする意欲を高めることが大切である」(p.17)と述べている。中村(2014)は，「数学のよさ」を本質的に理解させるためには，「「数学のよさ」を感得し（感じ取り），この経験を繰り返す（多面的な意味の「数学のよさ」を繰り返し感得する）こと」が必要であることを述べている。(p.58)この主張を参考にすると，「教

育内容」の「よさ」を感得したうえで，これを「数学的活動」を通して繰り返し感得していくことで「数学のよさ」を認識できる。これは，「数学的活動」を通して「数学のよさ」を認識させることとは，逆の視点である。例えば，二次関数を学習する際，二次関数を学ぶということには，どのような「よさ」があるのかあらかじめ押さえたうえで，それらが感得できるような「活動」を取り組ませることで「よさ」を認識できる。つまり，ここに「教育内容」としての「数学的活動」が存在していることがわかる。「数学のよさ」を「教育内容」と捉えることで，その「教育内容」そのものが「活動」となる。さらに言い換えると，「数学のよさ」は，現行の学習指導要領の高等学校数学科の「教育目標」における「教育内容としての数学的方法」である。

4.2.「数学のよさ」と「中心概念」

「数学のよさ」は，現行の学習指導要領における「教育内容としての数学的方法」であり，「教育内容」としての「数学的活動」として捉えることができることを特定した。しかし，あくまでも「教育目標」という文面上での解釈であるため，その確証を得ることができない。そこで「数学のよさ」は「中心概念」とも関連があることから，図 3 として表記した「中心概念」の内容の項目一つ一つの語尾に「よさ」を付け，「数学のよさ」を「教育内容」と置き換えることができるのか確認していく。

a. 概念を記号で表わすことの「よさ」
b. 概念・法則などを拡張することの「よさ」
c. 演繹的な推論によって知識を体系だてることの「よさ」
d. 対応関係・依存関係をとらえることの「よさ」
e. 式や図形について不変性を見いだすことの「よさ」
f. 解析的方法と図形的方法の関連の「よさ」

a ～ f の項目は，すべて「数学のよさ」を具体的に例示したものとなることがわかる。ここに「数学のよさ」を「教育内容としての数学的方法」として特定することの根拠ができた。

4.3.「数学のよさ」の考察

先にも述べた通り，「数学のよさ」は学習指導要領において「数学的な見方，考え方」だけではなく，「教育内容」にまで踏み込んだ形となっている。また「数学のよさ」の説明において，一般的な表現が述べられていることも指導要領において述べられている。本節においては，「中心概念」のように具体的に「教育内容」として表現がなされているかを検討していくこととする。対象は，数学Ⅰ及び数学 A の「教育内容」として，各単元における「数学のよさ」として記述されているものを「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」（2009，pp.20-65）から抜粋し，以下に記述する。また「数学のよさ」に関係したもので数学の「有用性」について言及しているものについては（有用性）と明記するものとする。

＜数学Ⅰ＞
●図形と計量
「正弦定理や余弦定理を具体的な問題の解決や測量などに活用することを通して，「角の大きさを用いて測る」という数学のよさを認識できるようにする」
●二次関数
「一般の二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ を扱い，関数概念の理解を深め，関数を用いて数量の変化を表現すること」（有用性）
「二次不等式では，二次不等式の解の意味を理解させ，二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ x 軸との位置関係から二次不等式の解を求めることができるようにするとともに，グラフを活用することのよさを認識する」
●課題学習
「身近な事象を二次関数を用いて考察し，数学のよさを認識する」

＜数学A＞
●場合の数と確率
「身近にある不確定な事象を数量的にとらえる確率の学習を通して，不確定なものをとらえる数学的な考え方などの数学のよさを認識できるようにする」
「場合の数を数え上げるには，あるものに着目して分類・整理すること，より分かりやすいものと 1 対 1 に対応付けること，規則に基づき数の列をつくること」（有用性）

図 4 ：現行の高等学校数学科の「数学Ⅰ」および「数学 A における「数学のよさ」に関する記述抜粋

もちろん，この図 4 のように，明示されている記述の背後には，各単元における「よさ」は必ず存在している。しかし，明示をすることが「教育内容としての数学的方法」を捉え

る上で重要である。昭和31年度，その当時には，「教育内容としての数学的方法」が「中心概念」として明示されたが，現行の学習指導要領においては，図４及び「数学のよさ」の一般的な表現から，感覚的に「数学のよさ」を語っているだけで，具体的な表現としての「教育内容としての数学的方法」は示されていないように思える。その現在の「数学のよさ」を具体的につかむためには，「中心概念」と対比させることによって，その当時のものを生かしながら，現代の学習指導要領について考えていく。その検討については，これからの課題となる。

5. 本稿のまとめと今後の課題

本稿の目的は，「教育内容としての数学的方法」に着目し，「数学的活動」の「教育内容」としての捉えを明確にすることであった。「教育目標」，「教育内容」，「数学的活動」，「数学的な考え方」，「中心概念」，「教育内容としての数学的方法」などのキーワードを基に，それらとそれらの関係性を明確にする作業と整理，そして考察を進めてきた。

本稿において，昭和31年度改訂版に記述された「中心概念」の内容を現行の学習指導要領の「教育目標」に明記されている「数学のよさ」と照らし合わせることで，それが現代における「教育内容としての数学的方法」として発展的に捉えることができると考えるに至った。現行の学習指導要領における「数学のよさ」は，昭和31年度改訂版に記述された「中心概念」のように，具体的な内容としては明記されておらず，抽象的な表現としてのみの記述に終わっている感があり，「教育内容としての数学的方法」の検討は十分とは言えないであろう。更なる検討が必要である。

今後の課題としては，実際の「数学Ⅰ」及び「数学Ａ」の単元における「教育内容」について検討し，「数学のよさ」つまり，「教育内容としての数学的方法」の具体的な内容から，図３のような「教育内容としての数学的方法」の新たな枠組みの構築を試みたい。その上で「教育内容としての数学的方法」に関する研究と実践を推進していきたい。

6. 注釈及び引用・参考文献

文部科学省(2009)．『高等学校学習指導要領解説数学編理数編』，実教出版．

長崎栄三(2013a)．「高等学校数学科における「中心概念」の誕生とその後：高等学校学習指導要領数学科編昭和31年度改訂版を中心に」，日本数学教育学会誌．臨時増刊，『数学教育学論究』95，pp. 249-256.

長崎栄三(2013b)．『高等学校　学習指導要領数学科編　昭和31年度改訂版の作成過程とその後ー戦後の高等学校数学科の教育課程の確立ー』，日本学術振興会科学研究費補助金による研究資料集．静岡大学学術リポジトリ．
http://ir.lib.shizuoka.ac.jp/handle/10297/7383

片桐重男（1988)．『数学的な考え方の具体化』，明治図書.

川村晃英（2009)．『数学的な考え方の再考ー人間の数学的潜在性に着目してー』，広島大学．修士論文（未公刊）．

宮本一郎（1995)．「数学教育カリキュラムの中心概念とその様相：大学教養数学に関して」，『数学教育論文発表会論文集』28. pp. 537-542.

中原忠男（2000)．「算数・数学教育の目的・目標」，『日本数学教育学会誌』82. 第７・８号，pp. 48-51.

池田敏和（1997)．「数学教育の目標に関する一考察」，『横浜国立大学教育紀要』37. pp. 1-20.

中村好則（2014)．「高校における「数学のよさ」を認識するための指導ーグラフ電卓を活用した放物線の探究ー」，『岩手大学教育学部研究年報』．73．pp. 57-74．

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.85-94

中学校数学授業におけるメタディスコースに関する研究

―B.Güçler による理論枠組みの精緻化を通して―

浦野　正
上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

OECD 実施の生徒の学習到達度調査では PISA2015 から新科目として協働問題解決能力調査が加わった(国立教育政策研究所,2016)。これは、他者と協力し、社会と関わり合いながら問題解決を図れることが 21 世紀に求められる重要な資質であることを示している。国内でも新学習指導要領において「主体的・対話的で深い学び」という言葉の普及を通じ、能動的な取組から生じる協働や対話、先哲の考え方を手掛かりにして自らの考えを広げ深める力の育成を目指している(文部科学省,2016)。今教育現場では生徒相互、または生徒と教師による相互作用を通じて学ぶ資質が求められている。

しかし、数学的な概念はその抽象性ゆえ形成が困難な場合もあり、授業中積極的な活動が見られたからといって生徒の学びが達成されたとは言えず、コミュニケーション活動の進展と概念形成の関わりは明確にならないことが多い。教師には表面上の反応に惑わされず、生徒の学習を的確にとらえながら授業を進める資質や方法が必要となる。

Güçler(2016)は、ディスコースの視点を用いて数学的な対象を形成するための、メタレベル規則を伴った教育アプローチを提案している。Sfard(2008)を背景にした理論では、関数概念形成の様相を分析するだけでなく、教授法としての示唆も得られており、今日の日本でも求められている主体的で対話的な授業アプローチを開発する可能性がある。

Güçler(2016)の教授実験は、大学レベルの授業でのディスコースを一階上の言語レベルで分析している。この Güçler(2016)の理論枠組みを中学校の授業に適用することが可能ではないか。その理由としては、中学生であってもディスコースの中で言外の意味を伝達し合うことが、筆者の教職経験でも多く見られたからである。また、例えば教室内に内在する社会的文脈（金本,2000,2001）やディスコースのシフト(小池,2005)等のいう性格は、Güçler(2016)のいうメタ規則に関わると捉えられる。これまでのコミュニケーションや相互作用に関わる数学教育研究のディスコースにおけるメタレベルの視点を整理することが必要である。このようにして Güçler(2016)の理論枠組みを再構築し、授業をデザイン、分析することは、生徒の数学的活動を豊かにするディスコースとメタレベルの作用の関係を見出すことにつながる。

そこで本研究は、Güçler(2016)と他の先行研究やそのプロトコル分析を基に、数学的な概念形成に向けた子どもと教師のディスコースを方向付ける意味でのメタディスコースを捉える理論枠組みを提示し、その妥当性を示すことを目的とする。

２．Güçler (2016)の理論枠組み

Güçler(2016)の実践は、大学院の教育課程において学生が関数の定義づけをする活動の分

析からなっている。まずはそこに見られる理論枠組みについて Güçler(2016)が依拠している Sfard(2008)を参照しながら、コモグニション、ディスコース、メタディスコースの 3 点から考察する。

2.1　コモグニション

2.1.1　コモグニション論

語「コモグニション(commognition)」は A. Sfard の造語である。Sfard(2008)において、コミュニケーション（communication）と認知(cognition)の組み合わせとするこの語は、思考と個人間のコミュニケーションを包含し、これら 2 つの過程のタイプの統合を強調するために創り出された。Sfard(2008)による思考の定義は：

「思考とは、（個人間の）コミュニケーションの個人化バージョンである。」

(Sfard,2008,p.81)

とされ、思考は個人が他人とコミュニケーションする方法で自分自身とコミュニケーションすることができるようになるときに表出する人間の行為の型だと考えられている。コモグニション論では一般的にコミュニケーションという言葉を表す個人間のコミュニケーションに加え、一見個人的な「思考」もコミュニケーションに含まれる。

このようにコモグニション論は思考とコミュニケーション、表記を同じ現象の異なる表れと捉え、統一的に取り扱っている。これにより、思考や認知を従来の観察不可能な精神内の現象でなく、教室内のコミュニケーションの中に見いだすことが可能になる(大滝, 2014)。

2.1.2　コモグニションにおける数学的対象

コモグニション論では、言語に注目して記号表現(signifier)を実体(realization)に関連付けることによって学習を定式化する。Sfard (2008)によれば、記号表現とは名詞的に使われる記号、実体とは知覚を通してとらえられるものであり、記号表現は通常多くの知覚的に近接可能な実体をもつ。例えば「7x+4=5x+8という方程式の解決過程」という記号表現は、「2x+4=8の解決過程」や「2x=4の解決過程」といった代数的な表現、グラフを用いた幾何学的な表現、数表を用いた表現などの実体が付随する(Sfard,2008)。Sfard(2008)は、このような記号表現と実体の関係が樹形上に連なったものを数学的対象とする。

また、数学的対象の形成は命名によって特徴づけられ、その方法によって「単一的ディスコース対象(simple discursive object)」と「複合的ディスコース対象(compound discursive object)」に分類される。前者は初源対象(primary object)と呼ばれる、見たり触ったりできる知覚可能な具体物に、名前や記号を与えることで形成される。例えば現実の犬に名前をつけることがあげられる。また、後者は現存するディスコース対象や初源対象に、以下の方法によって名詞や代名詞を与えることによって形成される(Sfard,2008)。

- 同一化(saming)：前もって「同じこと」であると思われないいくつかのものに、一つの記号表現を割り当てること（一つの名前を与えること）。
- カプセル化(encapsulation)：ある対象の集合に一つの記号表現を割り当て、それら集合の性質についてまとめて言及するときに、単数形でその記号表現を使うこと。
- 具象化(reifying)：一つの名詞や代名詞を導入し、いくつかの対象についての過程に関する語りが、対象間の関係に関する「タイムレス(timeless)」な語りとなる。

以上より、コモグニション論において数学的対象は数学的概念を表すことになる。よって本研究では、コモグニション論に基づき、記号表現と実体の関係によって数学的な概念を捉えていく。また、数学的対象の形成にはディスコースが深く関与する。これは2.2で述べることにする。

2.1.3 Güçler(2016)の実践におけるコモグニション

Güçler(2016)はコモグニション論に基づき、「関数」という数学的対象を言語に注目して分析している。例えばLea (以下Lea、Ron、Fred、Martin、SteveはGüçler(2016)の教授実験の調査参加者である)は授業中の関数の定義づけを行う場面で、「関数」という記号表現を「一つの変数がもう一つと関係して変わる2変数間の依存性」だと語り、実体化している。さらに、実体として現れた言葉、例えば「関係」を次の記号表現とした新たなディスコースを構成しているケースもあり、記号表現と実体は相対的な関係であると捉えている。

このようにGüçler(2016)は、記号表現を実体化する活動を繰り返し、学生に様々な実体を知覚、関係付け、序列化させることで、関数という数学的対象の形成を試みている。

また、上記の Lea のディスコースは初期調査において記述されたものである。Güçler は学生が授業後に書いた日記も分析に利用しており、コミュニケーションの対象が個人内、個人間の行為全般であるというコモグニション論に基づいている。

2.2 ディスコース

2.2.1 Güçler(2016)の実践におけるディスコースとメタ規則

コモグニション論における分析単位はディスコースであり、Sfard(2008)はディスコースをコミュニケーションの特定の種類であるとしている。また、言語ディスコースは言葉の使用(word use)、視覚的媒介(visual mediators)、認められた物語(endorsed narratives)、ルーチン(routines)によって特徴づけられる(Sfard, 2008)。ここで言葉の使用とは、そのディスコースが持つ独特な語の使い方のことである。視覚的媒介とは数学的なコミュニケーションを高めるのに用いる可視化できる対象であり、具体的には図や数表、グラフ、代数的記号等である。認められた物語とは関連する共同体によって真であると認められる一連の相互作用を意味し、数学的な定義や定理、性質を含む。物語(narratives)という語を使っているのは学習者が関係する共同体においてそれが築かれてきた文脈を意識してのことだろう。ルーチンとは、類似の状況で同じことが繰り返される、ディスコースのパターンを決定するメタ規則の集合である。メタ規則とは参加者の活動規則であるため、例として、関数を同定するための方法を使うことや、論証場面において合同条件を使うことなどが挙げられる。

2.1.2よりコモグニション論において数学的対象の形成は、ディスコース対象の形成であり、これらは言葉の使用、視覚的媒介、認められた物語、ルーチンによって特徴づけられるディスコースにおいてなされる。これより本研究におけるディスコースとは、記号表現と実体を関連付けるコミュニケーション過程を指す。また、コモグニション論の定義により、ディスコースは個人間だけでなく、個人内においても起こり得る。さらに、ディスコースを構成するとは、記号表現の実体化を図ることであるといえる。

Güçler(2016)はSfard(2008)に準じ、数学をディスコースそのものとして捉えている。しかしGüçler(2016)の捉えるメタレベル規則には、後述(2.3.3)のようなディスコースに内在する個人の価値観や社会規範的な物も含まれ、Sfard(2008)のいう数学的ディスコースにおけるメタ規則より広い。

金本(2001)は文脈を「推論や意味の構成にあたって前提として機能するもの」と定義し、教室という空間には社会的規範等の価値を含む社会的文脈も存在するとしている。また、「メタ」という言葉自体が一階層上からその対象自体について語る性質をもつため、メタディスコースには既存の様々なディスコースや文脈が内包されると考えられる。この意味で、金本(2001)のいう文脈が授業中のディス

コースに埋め込まれてメタ規則化したものは、Güçler(2016)のいうメタレベル規則に相当し、数学的な概念形成に影響する。

よって本研究では、Güçler(2016)やSfard (2008)、金本(2001)のいう、ディスコースの言外の暗黙的な部分を示したり、制御したり、その方向性を定めたりする行為に関わる規則全般をメタレベル規則、その明示や変更を伴うディスコースをメタディスコースとして捉えていく。

Güçler(2016)は全授業を通じて「関数の定義づけ」をテーマにしている。したがって、授業中は関数をめぐるディスコースが構成され、その記号表現には常に関数と関連する語が含まれている。この活動から、例えば、「独立変数、一対一対応、表」といった言葉の使用や「表や式、グラフ」等の視覚的媒介を道具として用い、「独立変数が一つの従属変数のみと一対一対応になる」「表を使ってグラフをかく」などの認められた物語が実体として現れてくる。また、時には形成された実体をより明らかにするため、実体化された認められた物語やそこに使われる言葉、視覚的媒介が記号表現となって新たなディスコースを構成することもある(表1)。

記号表現	メタレベル規則	実体
関数	ルーチン	言葉の使用 視覚的媒介 } 道具 認められた物語

表1　ディスコースの構成

Güçler(2016)は関数という記号表現を様々な形に実体化することでディスコースを発達させ、新たなディスコースを構成している。また、それらを修正したり、関連付けたりすることによって、個人の数学的な概念が形づくられていくとしている。Sfard(2008)は計算ディスコースを図1のように発達するものだと示しており、Güçler(2016)もこれに準じて関数という数学的対象の形成を図っているといえる。

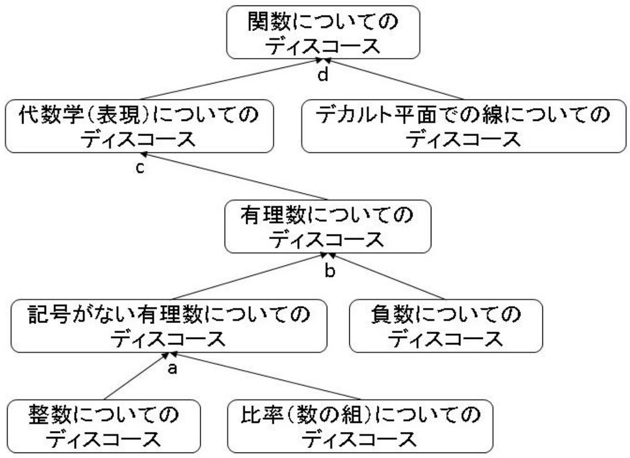


図 1 Sfard(2008) 計量ディスコースの発達

2.2.2　先行研究と本研究の位置づけ

コモグニション論におけるディスコースに基づく先行研究は日本国内においても多数行われている。記号論の視座からのミスコンセプション研究(真野,2013)や単元構造の分析(大滝,2013)、ディスコースへの参加と数学的対象の構成に関わる研究(布川,2016)、授業中数学的対象を構成する際の教師や生徒の語りを分析した研究(日野,2016)など、その対象は広範囲に及ぶ。しかし、Güçler(2016)も含め、どの研究においてもメタレベル規則について語られているにも関わらず、その捉え方やディスコース内の表出過程は様々であり、精緻が必要である。

そこでまず、メタディスコースが構成される場について考察していく。

2.3　メタディスコースが構成される場

Güçler(2016) のディスコース分析において生じているメタレベル規則に焦点を当てて、メタディスコースの構成場面を考察し、分類していく。

2.3.1　記号表現と実体を関係づける場

Güçler(2016)は、2.1.3で述べたLeaの「関数」という記号表現(以下図中はS)に対する「２変数間の依存性」という実体(以下図中はR)が、「動的な変化を想定する」というメタ規則(以

下図中はM)に基づくと分析している(図2)。

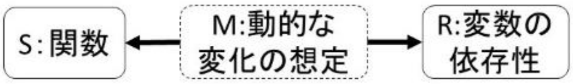


図2　Leaのメタディスコース

メタ規則はしばしば暗黙的であるため、Güçler(2016)では「関数とは」に続く単語を答えさせ、その語に関わる考えを詳しく述べる活動を取り入れていれることでその表出を促している。さらに、授業中の観察だけでは記述できない場合を想定し、授業後に個別のインタビューを実施し、ディスコースを形作るメタ規則の把握を目指した。さらに学生は授業を振り返る日記をつけて、振り返りの中で自らもつ関数的実体を形作るメタ規則について考える機会を与えられる。

このようにGüçler(2016)では、記号表現と実体を関係づける数学的な根拠、推論等といったメタ規則の明示を図るメタディスコースの場が構成されている。

また、このディスコースは実体が連鎖することもあり得る。例えば2.1.2で示した「7x+4=5x+8という方程式の解決過程」という記号表現は、「等式の性質」というメタ規則により「2x+4=8の解決過程」や「2x=4の解決過程」といった実体と関連付けられる。このように複数の実体を伴う一連のメタディスコースもある。

2.3.2　ディスコースを比較・分類・包含する場

Güçler(2016)には複数のディスコース対象から複合的ディスコース対象を形成するメタディスコースも見られる。以下は、関数の定義づけを行う教授実験中において、一人一人が一つの言葉を示した後、それを詳しく説明する場面のプロトコルである。

Ron:[写像について] 出力のため定義域を値域に写像する過程です。

Fred:[グラフについて] 関係の描写のためです。

Martin:[パターンについて]それは…変わり方がいつも同じようなものです。

⋮

Teacher:関数を定義づける方法が少なくとも10ありそうです。それらは全て同じですか？

Steve:関係が全てを捉えると思います。グラフ、写像、パターンは全て関係の構成要素です。

Güçler(2016)は、グラフを対象としたディスコースが、(1,3)、(2,5)など、一つの入力値が一つの出力値をもつ２変数を描写した視覚的媒介を想定したメタ規則に、写像を対象としたディスコースが、xに対してただ１つのyが存在するという写像を想定したメタ規則に、そして、パターンを対象としたディスコースが、変数xの値にyの値を定める規則性が想定されるメタ規則に基づくと分析している。教師の働きかけによって既存のディスコースの比較・分類がなされ、Steveは「グラフ、写像、パターン」がすべて２変数やそれに限らない「関係」を表しているため、その同一的特徴を捉えて「関係」を取り出した。Güçler(2016)はこの過程を既存のディスコースを包含するメタ規則である同一化(saming)だと捉えており、「関係」という複合的ディスコース対象が形成された(図3)。

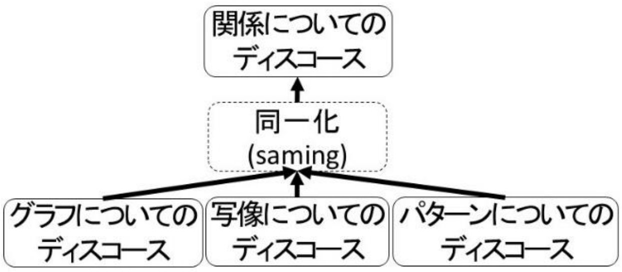


図3　同一化(saming)過程

このようにGüçler(2016)は複数の実体を分類し、類似点があれば包含するメタディスコースを引き起こすことで、ディスコースを進展させている。

そしてこれは具象化(reifying)過程でもある。関係を対象としたディスコースは他の3つを包含したことにより、その後はこの文脈を省略でき、タイムレス(timeless)な語りが可能に

なる(図4)。

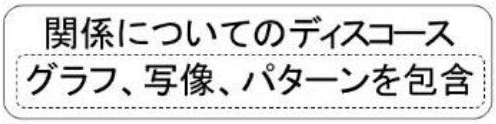


図4　具象化(reifying)後の対象

このような過程によってディスコースは複層的なものとなる。また、この過程の結果として「関係という言葉には２変数をグラフに表記した視覚的媒介を含む」というこの共同体特有の認められた物語がつくられた。これより認められた物語は、それ自身がメタ規則化しているものであると考えられる。

このようにGüçler(2016)では、対象間を比較・分類したり、包含したりする場において数学的な推論を用いたメタディスコースが構成されている。

2.3.3　ディスコースを評価する場

Güçler(2016)においては多様な実体についてのディスコースから、自らの関数的な対象を形成することに主眼が置かれている。複数の実体の構成、分類がなされた後に発生するのが、それまでのディスコースからどれを上位の概念として位置付けるか評価する視点である。

例えばFredはディスコース終了時に様々な関数的実体への理解を示したうえで「私の考えにおいて強いモデルなので、まだ出入力モデルを使いたい。」と発言し、自らの嗜好に基づくメタ規則を示している。また、Leaは「一つの変数がもう一つと関係して変わる変数の過程」だと語り、その根拠を「教師である自分は生徒に『出力値』や『値の組の集合』といった関数の静的な面よりも、その背後にある過程をよく理解することを望むからだ」と語っている。これをGüçler(2016)は、生徒には答えという結果だけでなく、それを導く過程を重んじてほしいという、Leaの教師としての社会的な立場から生じるメタ規則であるとしている。

このように、Güçler(2016)では既存する複数のディスコースを俯瞰し、評価する場面でもメタディスコースが構成されている。ここで見られるメタレベル規則には、必ずしも数学的だとはいえない、個人の価値観や社会規範的なものも含まれている。

３．先行研究に見られるメタディスコースの構成場面

3.1　ディスコースをシフトさせる場

小池(2005)は、言及されている対象と意味の側面からディスコースのシフトについての研究を行っている。以下は小池(2005)による中学校3年生の中点連結定理の学習場面で、ジオボードに作られた三角形を動かし、三角形の中点を結んだ線と底辺の関係について考察する活動中のプロトコルである。

154　鈴木　これとこれ(底辺と赤のゴムを指して)は平行なんや。
155　C　これとこれ。
156　広瀬　何で？
157　鈴木　平行なんやない？
158　鈴木　これとこれ。
159　谷口　これとこれ(底辺と赤のゴムを指して)。
160　鈴木　平行で、ここと ここ(直角に近い同位角を指して)等しくって・・・。
161　T　どうして平行になるんや？
162　広瀬　どうして平行になるんや？
163　鈴木　平行やとしたらやぞ。
164　広瀬　証明してください。
（中略）
178　広瀬　同位角や。
179　鈴木　２組の角が等しい？
180　広瀬　うん、２組の角が等しい。
181　鈴木　んで、ここ(頂点を指して)は？
182　生徒　共通。

小池(2005)は、154鈴木の発話で対象の意味としての側面であった平行である関係が、164広瀬の「証明してください」という発話によって言及する対象に移行し、対象と意味が

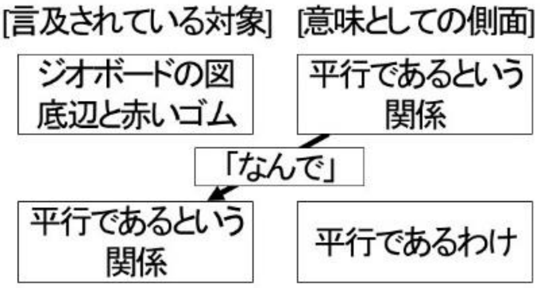


図5　小池(2016)ディスコースのシフト

共に変わり新たなディスコースを形成する起点となっていることを指摘している(図5)。

しかし、本研究における分析枠組みでは、ディスコース対象となっている記号表現はあくまでも「平行」である。154鈴木は「ジオボード中の２辺」という知覚可能な初源対象に対して、見た目による経験的な認識から「平行」という記号表現を導入するディスコースを形成している。それに対して156広瀬の「何で？」や164広瀬の「証明してください。」によって「証明する対象」としてのメタ規則に変更されて「同位角が等しい」という平行線の性質（認められた物語）を実体とするディスコースを形成した(図6)。

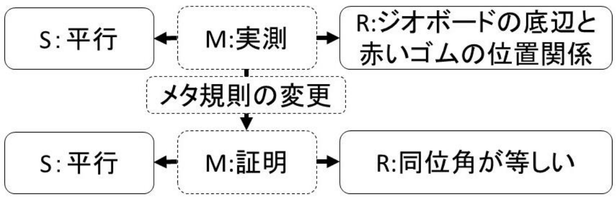


図6　本研究のディスコースのシフト

このように小池(2005)のいうディスコースのシフトは、メタ規則の変更に伴って新たな記号表現や実体を生み出すディスコースの構成過程であると考えられるため、本研究ではこのようなシフトを「ディスコースをシフトさせる場」でのメタディスコースとする。また、これはSfard(2008)でいうメタレベルでのディスコースの進展であり、既存のディスコースについての振り返りを引き起こす。この場面では平行という対象について、具体物と認められた物語が結び付けられたことになる。多くの場合、メタレベルの進展は新しい数学的対象の導入によって引き起こされる(日野, 2016)ため、Güçler(2016)においても個々の学生が実体化した複数の認識を比較することでこの進展を図っている。しかし、実際の授業場面においては、論証の必要性等の子どもの価値観などにより、生徒から新たな関係が見出されることもあり得る。

また、真野(2013)は、中学校における平方根の加法の学習において、$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{a}$となる有理数$a$は存在しないことを示す議論の中に、具象化に伴うメタ規則の変更を同定している。この過程では、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$という平方根を含むフレーズ型の式に対して、計算プロセス(過程)を表すメタ規則を、プロダクト(結果)を表すメタ規則に変更することを必要とする。これより、メタ規則の変更を伴うディスコースのシフトは具象化過程そのものであるケースもあり、数学的な概念形成につながるメタディスコースである(図7)。

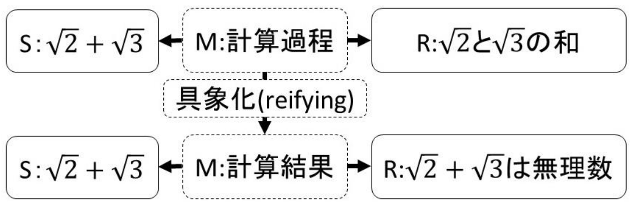


図7　具象化に伴うディスコースのシフト

3.2　メタディスコースの構成場面の関係

上述のメタディスコースがどのように関係しているのかを考察する。まず「記号表現と実体を関係づけるメタディスコース」においてメタ規則を伴った数学的対象が形成される(図 8①)。この過程を経たディスコースは「ディスコースを比較・分類・包含するメタディスコース」によって新たなディスコースを構成したり、他との区別化が成されたりする(図8②)。また、時にはメタ規則の変更によって「ディスコースをシフトするメタディスコース」がなされ、新たなディスコースを構成する場合もある(図 8③)。このようにして複数構成されたディスコースは「ディスコースを評

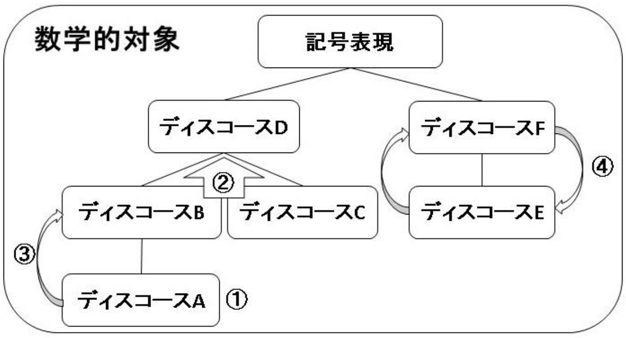


図 8　メタディスコースの関係

価するメタディスコース」によってその順序や位置づけが変更される(図 8④)。

数学的対象は、これら一連のディスコースによって記号表現と実体が関係づけられることで形成される。

4．ディスコースを方向付けるメタディスコースの要素

授業中はディスコースの進む方向に作用し、数学的対象の形成に関わるメタディスコースの要素が存在する。ここでいう要素とは、全体を分断した一部ではなく、何らかの影響を与えるような単位的な視点である。したがって、要素が集まったからといって全体を示せるわけではなく、全体には要素の集まりだけでは説明できない暗黙性が関与しているものとする。以下先行研究の知見とプロトコルを通じて考察する。

4.1　公的なディスコースと個人的なディスコースという視点から

中村(2002)は授業中に直接話している教師や生徒によって構成されるディスコースを公的、生徒個々が構成しているディスコースを個人的と表現している。その上で、子どもたちがこの2つのディスコースを関連付ける､つまり個人的なディスコースを公的なディスコースに方向付けるためには、「自分では気付かない、考えられないことがあった」、「自分ではやっていないこと」のように自分の考えの外にあるという観点が必要であることを見出している。自分とは異なる個人的なディスコースが公的なディスコースになることが重要であるといえる。

これは本研究において、記号表現と実体を関係づける場とディスコースを比較・分類・包含する場の結びつきによって可能になる。分からないなら分からないという自覚も含め、自らのディスコースの構成状態を把握してから、公的ディスコースに参加して比較をするという一連の過程をメタ規則化することで、個人のディスコースを生かした能動的で対話的な授業を展開できる。個々のディスコースが互いに共有されて公的なディスコースを構成し、再度個に還元されるサイクルによって数学的対象そのものが発展し、生徒個々に複数の実体を伴った豊かな数学的対象を形成することにつながる。さらに、これらの過程によって生徒たちが互いに関わり合う人間的な成長も望まれる。

またこれより、メタディスコースには範囲や大きさがあることも同定できる。一人の生徒の思考やつぶやきによってなされるメタディスコースを｢個人的なメタディスコース｣、一部の生徒相互、または教師と数名の生徒によってなされるメタディスコースを「ローカルなメタディスコース」、授業中の一斉場面で、学級という共同体全体によってなされるメタディスコースを「公的なメタディスコース」と名付ける。

4.2　教授実験におけるプロトコルから

金本(2000)は小学５年生の単元「四角形と三角形の面積」において、台形の面積の公式と三角形の面積の公式を関連付けることを目標とした以下のプロトコルを考察している。

01 T：　うん、じゃ、台形の面積の公式と三角形の面積の公式、いっしょにできない？台形の面積の公式、どうに見れば三角形の面積の公式になっちゃう？

02 C：　えーっ。

03 渡辺：三角形の方は、底辺が１つしかないけ

ど、２つにすると、底辺が２つになって…
04 T：　なるの？
05 渡辺：上底と下底。
06 T：　三角形に上底があるのですか？
07 渡辺：ていうか、２つたすと…
08 T：　２つくっつけて平行四辺形にするということ？
09 渡辺：で、…
10 T：　いいよ、いいよ、ちょっとおいといて。はい、安部くん。
11 安部：ぼくは、２つの台形をくっつければ平行四辺形になるのだから、上底と下底というのを２つ分と見ないで、平行四辺形の底辺と見た方が…
12 T：　あー、そういうことじゃなくて、公式の方から見て、公式の上から…
13 高橋：上底も下底も底辺だから、台形の面積は三角形の面積の式になる…
14 T：　何か、分かっていそうだけど。じゃ、いいよ。聞きますよ。実に簡単な質問。三角形に上底ってあるの？
15 中村：ない。
16 T：　下底は？
17 中村：ある。
18 T：　あるよね。じゃ、三角形の公式で言えば、上底は？
19 C：　ない。
20 T：　ゼロなんでしょ。
21 C：　あーっ。
22 T：　すると、ゼロたす底辺、×高さ÷２.
23 C：　何だ。

この場面は台形の面積の公式と三角形の面積の公式の同一化を図っていることから、ディスコースを比較・分類・包含する場として位置づく。07渡辺の「2つたすと…」から11安部は「平行四辺形」を想起し、ディスコースが台形と平行四辺形の関係に移りかけている。そこで12教師は「そういうことじゃなくて、公式の方から見て、」と修正を促す発話を行い、上底がないという児童の発言に対して20で「ゼロなんでしょ。」と言い換えることによって公式同士の関連付けに向けてディスコースを進展させている。

この過程において金本(2000)は、教師の公共性の決定者、形成者としての性格を示している。子どもたちがもつ教師の言葉には数学的な真実が潜み、それを見出そうとするメタ規則に基づいて、教師が意図する同一化に向けた公的なメタディスコースが構成されているといえよう。

その一方で､台形には上底と下底があるが、三角形には底辺しかないという認識から07渡辺が2つの三角形を想起したり、11阿部は2つの台形を用いることで等しい長さを作り出そうとしたりしている。これより児童たちは図形的な操作によって解決しようとしていることが分かる。幾何学的問題に代数的認識を適用するメタ規則の変更が同一化の困難性となっている。これは中学校において、例えば図形領域の柱体と錐体、円とおうぎ形、関数領域のグラフと式を関連付ける場面でも生徒の学習を妨げる要素になる。

Güçler(2016)は､子どもたちが同じだと見ないことを指導者が異なるものとして捉えられないことが、メタ規則が暗黙的になる一因であるとするSfard(2008)に同意する。ディスコースを比較・分類・包含する場がスムーズに進まない時には、同一視させない何らかのメタ規則が働いているものとして生徒目線で探っていく必要がある。この特定を図り、メタ規則の変更を伴うディスコースのシフトを丁寧に扱うことが、同一化という結果に対する子どもたちの同意につながる。

５．おわりに

本稿では Sfard(2008) を参照しながらGüçler(2016)の実践と先行研究を通じてコモグニション論に基づくディスコースとメタディスコースに関わる概念規定を行い、具体的な教授場面におけるメタディスコースの所在

を明らかにしてきた。その上でそれらの場においてディスコースを方向付けるメタディスコースがどのように存在し、どんな要素をもつのかを考察してきた。

その結果「記号表現と実体を関係づけるメタディスコース」と「ディスコースを比較・分類・包含するメタディスコース」に関わる一連のメタ的行為を規則化することが、個人的なディスコースと公的なディスコースを関連付けることにつながり、数学的な対象を発展させるとともに、生徒が他と関わり合う能力を高める要素になる可能性を見出した。また、授業中は、いくつかのメタ規則が複層的に関わり合っており、生徒の目線に立ってその特定を図ることが生徒の学習に関わる困難性の解消につながるといえる。さらに、授業中のメタディスコースは､個人的､ローカル､公的の３段階の大きさをもつことも特定された。

今後はより多くの教授場面の検証を通じてメタディスコースが構成される場の更なる精緻を行うとともに、反復的に見られるメタ規則を明らかにすることが課題である。また、メタディスコースの視点を取り入れた授業のデザイン、実践を通じて、メタディスコースが数学的対象の形成に及ぼす影響について考察を進めていくことも必要である。

引用・参考文献

Güçler, B. (2016). Making implicit metalevel rules of the discourse on function explicit topics of reflection in the classroom to foster student learning. *Educational Studies in Mathematics*, 91, pp.375-393.

日野圭子. (2016). 関数の授業における数学的対象の構成－Sfard の談話論からの考察－. 日本数学教育学会，第 4 回春期研究大会論文集, 41-48.

金本良道. (2000). 算数科の授業における多層的なコンテクストとコミュニケーションの機能．全国数学教育学会誌数学教育学研究, 6, 77-87.

金本良道. (2001). ある算数科の授業における意味とコミュニティとの相互的構成．数学教育学論究, 77, 3-21.

小池徳雄. (2005). ディスコースのシフトの観点から見た中学校数学の授業改善に関する考察．上越数学教育研究, 20, 61-70.

国立教育政策研究所. (2016). OECD 生徒の学習到達度調査-2015 年調査国際結果の要約-. http://www.nier.go.jp/kokusai/pisa/pdf/2015/00_result.pdf (2016.2.15 確認).

文部科学省. (2016). 次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめのポイント. http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shishi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2016/09/09/1137702_3.pdf (2016.2.15 確認).

中村光一. (2002). 数学授業における公的なディスコースと個人的なディスコースのかかわり．第 35 回数学教育論文発表会論文集, 563-568.

布川和彦. (2016). 対象把握のためのディスコースと学習のパラドクス．日本数学教育学会，第 4 回春期研究大会論文集, 49-56.

大滝考治. (2013). 確率単元の構造に関するコモグニション論的考察－中学校数学教科書の分析を通して，数学教育学論究, 95, 49-56.

大滝考治. (2014). 確率ミスコンセプションのコモグニション論的解釈－小数の法則に焦点をあてて－．全国数学教育学会誌数学教育学研究, 20, 1-9.

Sfard,A. (2008) *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York: Cambridge University Press.

真野祐輔. (2013). 平方根の加法の学習における記号論的連鎖と具象化の分析-A.Sfard の数学的ディスコース論の視座から-. 数学教育学論究, 95, 193－200.

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.95-104

中学校関数領域における教科横断型授業のデザイン
～「世界人口総和問題」を題材にしたSRP～

葛岡　賢二
上越教育大学大学院修士課程１年

１．問題の所在と本稿の目的

中学校の現場で数学の授業を行った際に，筆者は生徒から「数学をなぜ学ぶのか？」や「数学は将来役に立つのか？」という質問を受けたことがある．生徒たちにとっては，数学は人間が生きる上で大切な学問であり，数学があらゆるものを作り出す基本となっていることを理解し実感することが困難なようである．TIMSS2011 質問紙調査結果から,「日本の中学生は学習の楽しさや実生活との連関に対して肯定的な回答する割合が低い」という報告がなされた（文部科学省，2016a）．数学を学ぶ意義は広く深いものだが，生徒が向き合っている数学の授業では，そのような意義深い数学を体感できていないようである．では，生徒が数学を学習する必要性を感じることができない要因は何であろうか．筆者はこの疑問に対して，問題の所在を現在の中等教育の数学の授業にあると考えた．

通常の授業では，生徒は限られた道具（紙と鉛筆）と既習内容（記憶やノート）を頼りに，限られた時間で，１人（または 2，3 人のグループ）で解決する．教師は学習内容で知り得た既知の情報だけを活用して，「主体的な学習」を行わせようとする．しかしながら，そこでは，生徒が求めることが期待される正解を教師は知っているため，生徒は教師の期待する解答を探すという行為が生じる．さらに，与えられた問題の解決において，生徒が今学習している単元の内容を活用すればよいことは，本時のねらいからほとんど明らかである．したがって，そうした生徒が「主体的」に動いているように見える問題解決型の授業では，実は教師の期待を探って問題や課題を解決するといった，必ずしも主体的とは言い難い学習が少なくない．

一方，数学の有用性を生徒らに感得させるために日常の文脈が与えられた問題や課題が与えられることもしばしばあれば，課題学習のようにそれまでに学習した内容を関連付けさせるためのトピック的な授業もしばしばみられる．しかしながら，こうした授業においても，数学の有用性を生徒らに十分に感得させることができていないのではないかと考える．その理由は二つ考えられる．第一に，日常の文脈を扱っていても，学習者に十分に現実性を与えられないことである．小学校の文章題がその最たるものと考える．問題は日常の文脈で与えられているのにもかかわらず，答えを見つけたのち日常の文脈でその答えを吟味することもないため，日常と切り離され学習者がそれを現実的なものと捉えづらい．日常の文脈は式や方程式を立てる上では有用だが，それ以上の役割を果たしていないのである．第二の理由は，より現実的な問題が扱われる課題学習などにおいて，課題が常に教科で閉じられていることと考える．実際，日常や社会における多くの問題や課題の解決には，数学に特化した知識・技能だけが必要ということは少なく，様々な領域の知識・技能が必要になる．社会における課題解決は教科横断的，複合的なものであり，数学とい

う狭い世界に閉じられることは必ずしも多くないのである．そして本来，そうした複合的な場面で数学が必要となるからこそ，数学の有用性が生じてくる．今日の中学校における課題学習では，こうした教科横断的な活動が十分になされていないのではないだろうか．このことは，最近，次期学習指導要領の検討においても取り上げられており（文部科学省，2016b），今後，いかに教科横断的な活動を授業に取り入れていくのか多くの検討が必要となる点である．

そこで筆者は，中学校の数学の授業において，生徒が教師の期待を探るようなことなく，純粋に回答を求める探究型の授業が実現できないかと考え，中学校関数領域における授業実践を通して教科横断型の思考力・判断力・表現力を重視する数学授業のデザインを目的とした研究を推進することとした．関数領域を対象とする理由は，二つある．一つ目の理由は，平成 27 年度全国学力・学習状況調査の結果でもっとも正答率が低い領域が関数領域であること．二つ目の理由は，関数領域が他の図形領域や数と式領域との関連が多いこと，実生活や他教科との関連も図られることが多いことから，幅広い学習が可能になると考えることである．また，教科横断型の探究を実現するにあたって，シュバラール氏らによる「教授人間学理論（anthropological theory of the didactic）」（以下，ATD）の範疇で提示されている，“世界探究パラダイム”に基づいた“Study and Research Paths（SRP）”と呼ばれる探究活動を拠り所とする．SRP の性格については次節で述べるが，本研究では，中学校の数学科の授業で SRP を行うことで，いかなる探究活動（特に数学的な探究）が生じるのか検証したい．

したがって本研究の目的は，中学校関数領域において世界探究パラダイムに基づいた SRP という一連の探究活動を採り入れた教科横断型授業の可能性を検討することである．この目的を達成するために，実際に授業をデザイン・実践し，そこで収集したデータを ATD の諸概念をツールに分析するといった教授工学を実施する．

そこで本稿では，授業実践の前段階の研究の成果を報告する．具体的には，まず現実的な課題として教科横断型授業の必要性について概説する（2 節）．次に，世界探究パラダイムや SRP の理論的枠組みの概要を，分析等で重要になる諸概念とともに示す（3 節）．そして，授業デザインについて検討し（4 節），授業のアプリオリ分析を示す（5 節）．

２．教科横断型授業

中央教育審議会答申（2016）では，「第 6 章何を学ぶかー教科等を学ぶ意義と，教科間・学校段階間のつながりを踏まえた教育課程の編成ー」において，「様々な資質・能力は，教科等の学習から離れて単独に育成されるものではなく，関連が深い教科等の内容事項と関連付けながら育まれるものである」とあり，教科横断型の授業の重要性を指摘している（文部科学省，2016b）．現在の中学校の数学の授業では「数学的な活動の充実」が求められている（文部科学省，2008a，p. 16）が，今後は，単独で数学科の内容を学習するだけでなく他教科と関連付けて，「探究的な学習」や「主体的な学習」を行うことを通して，思考力・判断力・表現力の育成が求められるであろう．

これまでにも，教科横断的な学習が取り組まれた時期があった．2002（平成 14）年度から教育課程に導入された「総合的な学習の時間」において，「横断的・総合的な学習など創意工夫を生かした教育活動の充実」をねらいとする授業改善が指摘されている（文部科学省，2008b，p. 3）．また，先行研究においても，数学学習にねざした総合学習の必要性が指摘されている（両角，2002）．さらに，中学校において数学科と「総合的な学習の時間」を関連付けた授業実践も行われてきた．しかし，それらの授業内容は数学のある特定の領域の活用を重視した授業が多い．つまり，教科内容重視の考えは捨てき

れず，教科横断型授業への転換は進んでこなかったように思われる．

そこで，筆者は教科横断型及び探究型授業をデザインする上で何かしらの根本的なアイデアの転換が必要なのではないかと考えた．それが本研究における，世界探究パラダイムの採用である．上述したように，本稿は，中学校の数学の授業において世界探究パラダイムに基づいた教科横断型授業のデザインを目指すものである．今回の中学校での授業実践は，学習指導要領の次期改訂を視野に入れた中学校数学科の授業改善やカリキュラム改善への示唆となることが期待される．

３．本研究の理論的枠組み

本研究では，世界探究パラダイムに基づいたSRP を教科横断型の数学の授業としてデザイン・実践する．以下では，拠り所とする理論的枠組みの概要を示す．これらは，授業をデザインする際に参照されるとともに，データの分析ツールとしても用いられる．

(1) 世界探究パラダイム

ATD では，これまでなされてきた数学の授業の背景にある考えを「記念碑主義的（monumentalism）パラダイム」（シュバラール，2016）と呼び批判する．そこでの学習は，過去の偉大な先人達が作りあげてきた数学を細分化し，カリキュラムとして整列し，順々に訪ねるようなものになっているというのである．そうした学習では，数学が作りあげられた歴史や困難は省かれ（脱人間化，脱文脈化），往々にして学ぶべき数学がなぜ必要なのかといった存在理由が消滅し，知識の詰め込みになってしまう．一般社会の人間の活動では，人は知りたいことや疑問に思うことは，いろいろな方法で調べ学習し解決しようとするものである．使えるものは何でも使い，誰かに聞いたり協力し合ったりと効果的な解決策を判断し選択し回答を得ようとする．最近ではインターネットを活用し情報を得ることは難しいことではなく，むしろ，インターネットは多くの人々の生活の中で最も効果的な情報源となっている．数学の授業においても，学習者はいろいろな方法で問題を解決するという開かれた活動を保証してもよいのではないかと考える．そうした考えが，「記念碑主義パラダイム」に代わるべき教授パラダイムとされる，「世界探究（questioning the world）パラダイム」（シュバラール，2016）の基本的な考えである．

シュバラール（2016）によれば，世界探究パラダイムは，学習者（研究者）が未回答の問いや未解決の問題に対して，必要なものは必要に応じて学び，新しい発見や知識の獲得に前向きに，臆することなく回答を追い求めるといった態度の育成を目標とする，といった指導・学習に対する考え方である[1)]．こうした態度を育成する授業をイメージすると，これまでの数学の授業でよく見られた，限られた道具（主に紙と鉛筆と記憶）を用いて，限られた時間に答えが既知の問題（教師にとって）を 1 人で解決するのではなく，使えるものは何でも使い，必要なものは必要に応じて学び，個人の関心に応じて探究が多方向に進みつつ，試行錯誤しながら自らの回答を作り上げていくという，研究者のような，非常に主体的な教科横断的な探究を実現するような授業となる．このような授業こそが，生徒らの主体的な学びと数学の有用性の感得を可能にすると筆者は考えたのである．

(2) SRP（Study and Research Paths）

世界探究パラダイムに基づく指導・学習の過程を定式化したものは SRP（Study and Research Paths）と呼ばれる．以下では，探究活動をモデル化する道具として「①問い・回答の往還，及び樹形構造」，「②ヘルバルト図式」，「③メディア・ミリューの往還」の概要について述べ，SRP でいかなる探究活動が想定されているのか示す．詳細については，宮川ほか（2016），濵中ほか（2016）を参照のこと．

①問い・回答の往還，及び樹形構造

SRP では，1 つの素朴（自然）な生成的な強

い問いもしくは疑問 Q_0 から学習が始まる．最初の問い Q_0 に対し最終的な回答 $A^\heartsuit$を作り出すために様々な資料（メディア）をあたるとともに，資料から得てきた情報を用いて試行錯誤する．ただし，最終的な $A^\heartsuit$にすぐに至るわけではなく，それに至る前に新たな問い（疑問）が発生し，その問いに対してさらに回答を探すといったように，問いと回答の行き来を繰り返す．この学習の仕組みは「問い・回答の往還 (questions-answers dialectic)」と呼ばれる．場合によっては，回答はなかなか得られず，問いばかり増えることもあろう．このような探究活動の過程は図 1 のような樹形構造で表現することができる．「樹形構造」は SRP における問い・回答の往還のダイナミズムを表わしてくれると期待する．

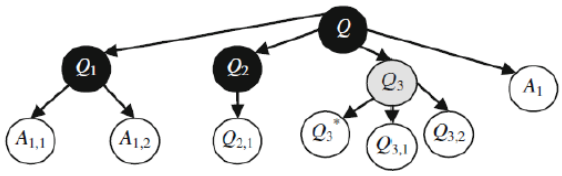


図 1　SRP の樹形構造（Winslow et al. , 2013, p.271）

②ヘルバルト図式（Herbartian schema）

ヘルバルト図式とは，学習もしくは探究の全体的な仕組みを示すものである．簡略化された図式は，$[S\ (X;\ Y;\ Q) \Rightarrow M] \hookrightarrow A^\heartsuit$　といったものである．ここで，S は教授システム 2)，X は学習者の集まり，Y は学習者を助ける人の集まり，Q は問い，M はミリュー（ミリューについては TDS で扱われるミリューとほぼ同様），$A^\heartsuit$は Q に対して自ら作り上げた回答である（宮川ほか, 2016, p. 29).

この図式は，学習者は問いの回答を得るためにはメディアから情報を収集し，それがミリューを形成し，そのミリューと相互作用を行うことにより，自らの回答を作り上げていくことを表わしている．メディアからは，先人が作り出した既存の回答 $A^\diamond$やデータ D などが得られ，これらと，関連する概念や理論，実験等の仕事 O によりミリューM が構成される．したがって，ヘルバルト図式は，より詳細に示せば，次のように記述される（宮川ほか, 2016, p. 29）．

$$[S(X,Y,Q) \Rightarrow \{A_1^\diamond, A_2^\diamond, \ldots, A_k^\diamond, O_{k+1} \ldots, O_l, D_{l+1}, \ldots, D_m,\}] \hookrightarrow A^\heartsuit$$

本研究においては，この図式，特にその要素を用いて，探究の中で生じる問いや回答，ミリューになり得る既存の回答 $A^\diamond$やデータ D を特定し，生徒がどのようなミリューと相互作用したのかを示す．

③メディア・ミリューの往還

SRP では，問い Q_0 からその問いの回答 $A^\heartsuit$に至るまでに，メディアとミリュー3) との相互作用によって学習が進むと考える．この探究の仕組みは「メディア・ミリューの往還 (media-milieu dialectic)」と呼ばれる．SRP の最大の特徴は文献やインターネットなどからなるメディアの利用を前提としている点である．メディアを利用することは，研究者や一般社会においてはごく当たり前のことだが，学校教育，とりわけ通常の数学の授業においては，認められていないことが多いだろう．SRP における探究は，既に触れたが，学習者はメディアから情報を収集し，収集したものからなるミリューと相互作用（試行錯誤等）する．それに行き詰ると再度メディアにアクセスし，さらなる情報を収集し，ミリューを新たなものとし再度相互作用をする．こういった探究の仕組みがメディア・ミリューの往還である．

本研究では，インターネットから得られたデータ D と既存の回答 $A^\diamond$を生徒がどのように捉え，どのように試行錯誤するのかに焦点をあてる．「メディア・ミリューの往還」は，生徒が自らの回答 A をいかに導き出すのか，どのような探究が行われ，いかに最終的な $A^\heartsuit$にたどり着いたのかを示す．

(3) プラクセオロジー

ATD では，数学的な知識や活動，その体系を「プラクセオロジー（praxeologie）」の概念でモデル化する．プラクセオロジーは，人間の行為の背景となる知が実践的な側面（praxis）

と理論的な側面（logos）をもつことに注目し，以下の構成要素からなるとするものである（宮川, 2011, p. 53）.

T：タスクタイプ（タスク t∈T）
ある対象の解決に関わる問いの種類．タスクタイプを構成する 1 つ 1 つの問いをタスクという．

τ：テクニック
タスクを成し遂げる解決方法．

θ：テクノロジー
テクニックを正当化する，説明し理解する，生成する理論的なもの．

Θ：セオリー
テクノロジーをさらに正当化，説明，生成するもの．

タスクタイプとテクニックが実践面を記述し，テクノロジーとセオリーが理論面を記述する．ATD では，あらゆる学習や指導，または学習に関わらず生活の中のあらゆる行為まで，プラクセオロジーを用いてモデル化できるとする．すなわち，教科横断型の授業においては, 数学に関する活動や知識のみならず, 他教科に関するものもプラクセオロジーの概念により記述できるのである．

したがって本研究では，中学校関数領域におけるデザイン・実践された授業においてどのような数学的なプラクセオロジー，そしてその他のプラクセオロジーが生じたのか明らかにし，教科横断型授業の成果を検討する．

４．授業デザイン

(1) 問いの設定

SRP の授業で，主体的な探究を生じさせるためには，問い Q_0 が重要となる．先述のように，SRP では，問い Q_0 は生徒にとって自然な問いであり，そこから多くの問いが生まれるものであることが求められる．本研究では，中学校関数領域に関する教科横断型の問いであり，新たな数学的な内容を必要に応じて学習する必要が生じる問いを用いたい．これは，換言すれば，(1) 数学の核心をつくもの，(2) 学校を超え，社会と関連するもの, (3) 学問的関心に基づく新たな探究に導くもの（濵中ほか，2016），といった Q_0 が満たすべき条件として指摘される 3 つの条件を備えた問いである [4)]．

そこで今回は次の Q_0 を最初の問いとして設定することとした．この問いは，2016 年 10 月に大阪で開催されたシュバラール氏とボスク氏による ATD のワークショップで紹介されたものである．

Q_0：「1900 年までの世界人口の総和と 1900 年以降の世界人口の総和が同じになるのは何年か？」

今回この問いを採用した理由は，まず，「世界人口」という言葉は生徒には壮大な印象を与えるかもしれないが，社会・生活と関連した問いであること, そして自らは問うたことはないかもしれないが, 言われてみればどうなのだろうと中学生も疑問に思いそうな自然な問いであることである．さらに，この問いには必ずしも明確な回答がないため, 様々な探究が可能であり，回答を見つける過程では，関数や，そのグラフ，表，関数で囲まれた面積など，関数領域の数学学習に関わる知識・技能が必要となる．したがって，この問いは，先述した SRP の Q_0 が満たすべき条件を満たしているのである．また，数学的な活動に加え，社会科等他教科の知識を融合した学習が見込める点, すなわち教科横断型の授業が期待される点も，この Q_0 の設定が適切であると判断した理由である．

今回の授業のねらいは，以下の二つである．

①世の中における素朴な疑問に答えるために，自分のもっている全ての知識を総動員し，さらに必要なものは必要に応じて調べかつ学習するという探究者の態度を養う．

②「数学及び教科横断的な探究」，「様々な資料を活用した情報収集」，「探究の成果発表」を通して，数学的な思考力・判断力・表現力を身に付ける．

①は「探究者の態度を養う」という SRP の

本性に関わるねらいである．②は，今回の授業が数学科の中でなされることから，この探究活動を通して期待される数学的な力をねらいに設定した．

(2) 授業の設計

授業は，中学校 2 年生を対象とし関数領域に関わる「課題学習」に位置づける．全 4 時間程度の授業を想定している．授業展開は至ってシンプルであり，以下のとおりである．

第 1 時：授業の説明と問いの提示，グループ活動

第 2 時：グループ活動

第 3 時：グループ活動

第 4 時：発表・まとめ

また，授業の導入では，豊かな主体的な探究が生じるように工夫する．具体的には，この授業が通常の授業と異なり研究者による探究を行うことを説明し，そのため，インターネット等の必要なものは何を使ってもよいこと，グループで協力して探究を進めること，教師も回答を知らないこと，最終回の発表では，みんなを納得させることができる自分たちのオリジナルな素晴らしい研究成果を示すこと，などの指示を教師から与える．また，問い Q_0 の提示においては，Q_0 が生徒らの素朴な問いとなるような工夫も必要である．

第 1 時から第 3 時の生徒らの探究活動における教師の役割は，探究において前向きに回答を導き出す気持ちを維持させること，探究についてアドバイスを与えること，数学的な探究に進むように生徒らを励ますことなどである．とりわけ，この最後の点が SRP において非常に大事になる．世界探究パラダイムの目指すところは，自らが得意でない数学に出会っても，それを避けるのではなく，何とか理解し回答を作り上げようとする意志や態度を育成することである．今回の授業においても，数学の苦手な生徒は，数学を避けようとする可能性がある．そこに打ち勝てるような補助が教師に必要となる．

また発表に際しては，各グループ 5 分程度の発表を予定している．自分たちの作成したレポートを発表するだけでなく，数学的な根拠を示し，周りを納得させる発表となるよう促す．先述したように，最終的な回答には正解はなく，教師も回答を知らない．「できなかった」，「分からなかった」と探究を放棄することがないよう，自分たちの作り上げた回答に責任をもち，最後まで自信をもって説明させたい．研究者の前向きな態度が表現できるような発表を期待する．

５．アプリオリ分析

ここでは，上に示した授業によりいかなる探究活動が可能となるのか，理論的に検討し，SRP の視点を取り入れた教科横断型の数学授業の可能性を示す．

(1) 生徒の探究過程

まず，問い Q_0 に答えを見つけるために，最初から多くの疑問が生じると期待される．まず生じる問いは，「Q_1 : 1900 年までの世界人口の総和は何人なのか」，「Q_2 : 1900 年以降の総和は何人なのか」，そもそも「Q_3 : 現在の世界人口は何人なのか」などといった疑問であろう．これらの新たな問いに答えるために，インターネットを用いてメディアから既存の回答 $A^◊$ を探すことになる．生徒たちは何らかの回答 $A^◊$ を得ることは難しくないであろう．これは，インターネットからの情報を頼りに世界人口についての情報を探るだけの調べ学習の段階である．しかし，インターネット上では多くの情報であふれているため，何が正しいのか，誰からの発信なのか，根拠は何なのか，という疑問をもつであろう．次に考えられる探究の方向性は，「Q_4 : 人類の起源はいつなのか」や「人間とは何か」といった疑問であろう この疑問に関する回答は様々な説がある．約 500 万年前のアウストラロピテクスの存在やそれから進化したネアンデルタール人の存在等がインターネットの情報から得られる．約 10 万年前のホモ・サピエンスが人類

の起源であるという節がやや支配的である．そこで，「$Q_{4\text{-}1}$：ホモ・サピエンスとは何か」や「$Q_{4\text{-}2}$：ホモ・サピエンスはどこで生まれたのか」，つまり，「人類は地球上のどこで誕生したのか」といった疑問を抱くであろう．これらの疑問の回答を得る探究は数学科の学習というよりも，社会科の探究である．この段階の探究では，多くの問いが発生し，それらの問いに対し，メディアから様々な既存の回答 $A^{\diamond}$を得てきてミリューを構成する．Q_0 に対する自らの回答 $A^{\heartsuit}$はまだまだ先である．

次に生じると予想される主な探究は，「世界人口の総和」に目を向けながら，人類の起源や世界人口について，必要なデータをメディアから収集することであろう．

世界人口の総和に関しては，まず「人口の総和」が何を意味するのかといった問いが大きな問いとして生じるであろう．世界人口の各年の数値の総和を求める（世界人口の単なる和）だけでは，重複して数値を足してしまうため，正確な回答に至らない（しかし，そのような探究を進めることも一つの選択であり，いろいろな方向性があることを認めることとする）．「世界人口の和」を計算することは可能であるが，数十億人という大きい数値

年	-10000	-1000	0	1500	1900	1925	1950	1975	2000	2020	2050
人口	4	50	170	425	1625	2000	2500	3900	5750	7659	9539

図２　世界人口推移・予測知（表）

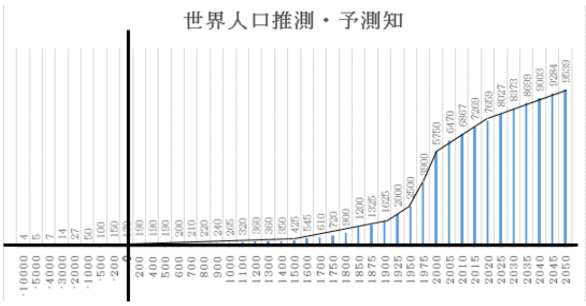


図３　世界人口推移・予測知（グラフ）

の和を計算することは面倒な処理となる．そこで，概数や有効数字の概念を用いて表したり，人口の単位を千人や万人にしたりする数学的な知識が使われるであろう．さらに，「世界人口の総和」を求める上で，その他の要素が必要となってくる．それは，「平均寿命」や「出生率」等である．つまり，「世界人口の総和」を求めることは，「世界人口の和」を「平均寿命」で割ることや，「出生率」をかけるという計算処理が行われることによって得られる．以上のことから，生徒の探究が数学的に進むかどうかの分岐点は，「Q_5：人口総和を求める方法は何か」という疑問であると考えられる．さらに，世界人口のデータを表で表したり（図 2），グラフで表したり（図 3），人口増加の傾向を関数式で表したりする数学的な学習も起きると考えられる．これらの関数（特に一次関数）の活用は，探究を有意義に進めるものである．さらに，「世界人口の総和」のデータをグラフで表し，グラフで囲まれた部分の面積を求める（三角形や台形の面積を求める）という積分に関する数学的な活動が考えられる．また，関数式で表すことができたら，Q_0 の回答を求めるために，x 年に総人口が等しくなるとして，方程式を作ることも考えられる．数学的な探究の広がりがより説得のある $A^{\heartsuit}$へと導くのである．

今回の授業では教師は正解をもっていないため，通常の数学の授業でよく見られるような解答を導くための絶対に正しい使えるヒントは存在しない．しかし，SRP の探究活動がスムーズに進むための道筋を示すために，補助発問を用意しておく必要がある．ATD では，この補助発問を“control question”と呼ぶ．これは，大学や大学院での研究指導において，あまりにも脱線してしまわないようにアドバイスするようなものである．今回の SRP では，“control question”により，数学的な探究に進むように仕向ける．例えば，あまりにも社会科の探究に進んでいるグループには，「世界

人口の総和をどのように求めたらよいのだろうか」等のデータや数学的な処理を促すものが考えられる．

生徒の探究活動は，多くの問いが生まれることで活発に行われる．問いは，生徒が抱く些細な疑問もあり，必ずしも数学の内容に限ったものではない．探究の方向も間違った方向に進むこともあり得る．しかし，全ての疑問に答えようとする探究態度は，本時の授業のねらいとするところである．SRP では，学習者が前向きに探究する態度を前提としているため，教師による授業の概要説明や探究活動の説明は，生徒の探究心をかき立てる上で重要である。また授業中の教師の役割は，グループ活動の支援と“control question”を効果的に取り入れることである．このような教師の関わりは，生徒の探究活動が促進される鍵となるであろう．

(2) 樹形構造及びメディア・ミリューの往還

生徒の探究は，多方向へ広がると予想できる．Q_0 から Q_1 や Q_2 に進み，すぐに回答が得られないと，Q_3 や Q_4 のような数学以外の探究へ向かい，インターネットから得られるデータ D や既存の回答 $A^{\Diamond}$は膨大なものである．$A^{\Diamond}$ は正しいのか，データ D が何を表しているのか，を試行錯誤する．次にどのような問い Q が必要なのか，その回答 A は何なのか．自分の回答 A を導き出しながら，新たな探究を行うことになる．これらの一連の探究活動はおおよそ図 4 の樹形構造のように表すことができる．この図の詳細には触れないが，特に Q_1 や Q_2 は数学的な探究となるので，メディアとミリューとの相互作用が活発に行われるところである．$Q_{1\text{-}1}$ や $Q_{2\text{-}1}$ として，「人口の和の求め方はどうすればよいか」という問いが生まれ，それに答えるためにデータ D から得られた数値を表で表したり，グラフで表したりしながら，人口の和を求めることになる．つまり，インターネットで得られたデータ D や既存の回答 $A^{\Diamond}$ だけでは最終的な回答 $A^{\heartsuit}$にたどり着かない．$A_{1\text{-}1}$ や $A_{2\text{-}1}$ を得るためには，四則演算や関数領域の学習が頻繁に行われる．生徒の探究が関数領域の学習へ発展する可能性は十分にあり，関数と結びつけて考えることが回答 $A^{\heartsuit}$を得るのに重要であると考えられる．

授業実践で見られた生徒たちの探究活動をこうした樹形構造で示すことにより，グループの探究の広がりや深まりを示すとともに，他のグループの探究との比較も容易になると考える．

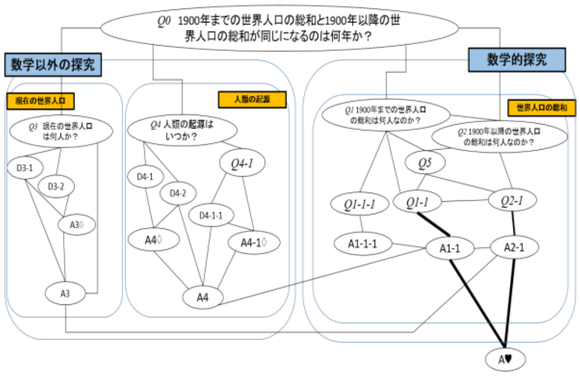


図４　SRP 探究活動の樹形構造の例

(3) プラクセオロジー

生徒の探究活動では，どのような知識・技能が用いられ，学習されるのだろうか．本研究では，それをプラクセオロジーの概念を用いて記述する．上で予想した探究活動におけるタスクタイプを特定し，どのような知識・技能が関連しているのか明確にする．

今回の探究活動のタスクタイプの代表的なものは以下であろう．

*T*1：人口を求める

*T*2：人口の総和を求める

*T*3：人類の起源を明らかにする

*T*4：平均寿命を求める

*T*5：出生率を求める

これらのタスクタイプは基本的に社会科のタスクタイプである．しかしながら，ここには数学のタスクタイプが混じっている．例えば，「*T*1：人口を求める」タスクタイプに対し，インターネットで年代別の人口を調べ，データを収集し，表を作成するという行為（テクニック）

を考える．このテクニックは，社会科もしくは統計のプラクセオロジーの一部である．一方，「$T2$：人口の総和を求める」というタスクタイプは，上の表が既にある場合，表の数値を合計するというテクニックにより解決される．この際，このテクニックは，$T2$ に対するものであるとともに，「数列の和を求める」という数学のタスクタイプに対するテクニックでもある．さらに，もし $T2$ を解決するにあたって，データより関数のグラフを作成し，それにより囲まれる面積を計算するというテクニックを用いたとすれば，そこには，「表からグラフを作成する」，「グラフで囲まれる図形の面積を求める」という数学のタスクタイプに取り組んでいるといえよう．

そこで，$T1$ から $T5$ に取り組むにあたって，生じる数学のタスクタイプを抽出すると「四則演算を行う」，「関数の変化の様子を捉える」，「データを表で表す」，「表からグラフを作成する」，「グラフから関数式を求める」，「グラフで囲まれる図形の面積を求める」などが考えられる．このように，今回の授業では社会科の学習と数学の学習が混在していることが分かる．一つのタスクタイプもそこで行われる探究は社会科のタスクタイプと数学科のタスクタイプに分けられる．このように一連の探究活動は数学的な探究を実行する上で数学的なテクニックも沢山存在している．最終的な回答 $A^{\heartsuit}$に向かう核心的な探究は数学的活動が必要であるが，まだ検討段階であるため，全てのタスクタイプを網羅しているわけではなく，ほんの一例に過ぎない．

授業での生徒の探究活動でどのような学習が生じたのかについて，タスクタイプとテクニックをもって実践部分（praxis）をまとめることができる．今回はタスクタイプのみを検討したが，一つ一つのタスクタイプについて，テクニックがあり，それらも社会科のテクニックと数学科のテクニックとに別けられる．また，実際の授業では，データより特定したタスクとテクニックより，プラクセオロジーの理論部分であるテクノロジーとセオリーを特定する予定である．これにより，生徒の探究活動がどのような方向へ進んだのか，また，社会科の学習と数学科の学習とがどのように関連し合ったのかを明確にする．

６．おわりに

本稿の目的は，中学校関数領域における世界探究パラダイムに基づいた授業デザインを検討し，SRP を拠り所とする教科横断型授業の可能性を検討することである．本稿では，今後実践予定である中学校での SRP の授業を視野に入れて，数学的な広がりや教科横断型の授業の可能性を検討した．まだ，検討段階であるため，授業中の生徒の探究活動において，どのような学習が生じたのか，どのような探究活動の深まりが見られるのかは未知数である．宮川ほか（2016）や濵中ほか（2016）によると，SRP の論証活動では，学習者が「なぜ？」の回答を求める探究を行い，自ら回答を見出すことができる論証活動が生じやすいということ結論が得られている．中学校で SRP の授業を行うことに様々な制約があるが，実現の可能性は十分にあると考える．特に，教科横断的な学習の充実は，次期学習指導要領改訂でも議論されており，注目すべきことである．今後の課題は，関数学習のプラクセオロジーの構築と他教科のプラクセオロジーとの関わりを分析することである．そして，中学校数学科の授業において，生徒が教師の期待を探るようなことなく，純粋に回答を求める真の探究の実現を目指し，教科横断型の思考力・判断力・表現力を重視する数学授業の研究を進めていきたい．

註

1）シュバラール（2016）によると，未回答の問いや未解決の問題に対する理解ある態度を，「ヘルバルト的（Herbartian）」と呼ぶ（p. 78）．また，前向きに知ることを，「前進認知的（procognitive）」と呼ぶ（p.

78）．また，いつまでも学習し続ける人を，「開かれた人（exoteric）」（p. 82）と呼ぶ．

2) 教授システム(didactic system)とは，*S*(*X;Y;*♥)で表されるものであり，「教授争点(didactic stake)」と呼ばれる．また，♥は何らかの問や数学的な作品・仕事，プラクセオロジーなどである(宮川ほか, 2016, p. 29)．教授システムについては，Bosch & Gascon(2014)が指摘している．

3) メディア（media）とは，媒体や媒質，伝達手段と訳されるが，一般的な知識や情報を伝えるシステムであり，雑誌や新聞や論文等を指す（宮川ほか, 2016, p. 29）．
ミリュー（milieu）とは，「環境」と訳される．ブルソーによって構築された「教授学的状況理論」（TDS）で用いられる，数学の「知」に関する理論的構成物である（宮川, 2011, p. 45）．

4) 濵中ほか（2016, p. 63）では，SRP の問い Q_0 が満たすべき３つの条件を，「数学的合法性」，「社会的合法性」，「機能的合法性」と述べている．これは，Garcia ほか（2006），Garcia ほか（2013）が指摘している．

引用・参考文献

シュバラール（2016）．大滝孝治・宮川健訳「《翻訳》明日の社会における数学指導－来たるべきカウンターパラダイムの弁護－」．上越教育大学数学教室，pp. 73-87.

濵中裕明・大滝孝治・宮川健（2016）．「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動（2）－電卓を用いた実践を通して－」．全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 22 巻，pp. 59-72.

宮川健（2011）．「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格－わが国における「学」としての数学教育研究をめざして－」．日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，第 94 巻， pp. 37-68.

宮川健・濵中裕明・大滝孝治（2016）．「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動（1）－理論的考察を通して－」．全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 22 巻，pp. 25-36.

両角達男（2002）．「数学学習にねざした総合学習—東京教育大学・筑波大学附属中学校における教育実践を踏まえて－」上越教育学研究，第 17 号，pp. 21- 34.

文部科学省（2008a）．『中学校学習指導要領解説数学編』．教育出版.

文部科学省（2008b）．『中学校学習指導要領総合的な学習の時間編』．教育出版.

文部科学省（2016a）．算数・数学に関する資料．（http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/siryo/__icsFiles/afieldfile/2016/01/04/1365620_9.pdf）

文部科学省（2016b）．次期学習指導要領答申について（中央教育審議会（第 109 回）資料より）．（https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo0/toushin/1380731.htm）

Garcia, F. J., Gascon, J., Ruiz Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 226-246.

Garcia, F. J. & Ruiz-Higueras, L. (2013). Task design within the anthropological theory of the didactics: Study and research courses for pre-school. In C.Margolinas (ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of ICMI Study 22,2pp.421-430).

Winslow, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013).Study and research courses as an epistemological model for didactic. *Educational Studies in Mathematics*, vol.83, no.2, pp.267-284.

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.105-118

教授学的転置の 25 年

マリアンナ・ボスク (Marianna Bosch)*　ジュゼップ・ガスコン (Josep Gascón)**
*ラモン・リュイ大学 (Universitat Ramon Llull)
**バルセロナ自治大学 (Universitat Autònoma Barcelona)
大滝孝治（北海道教育大学）・宮川健（上越教育大学）訳

本稿は次の論文の全訳である．
Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58*, 51-65.

> 小説で一番たいせつなのは，誰が現実を思い描き，そして誰がそれを他者に与えるのか，といった視点を解決することである．
>
> M. B. モンタルバン

2005 年 10 月，教授人間学理論について研究していたり，この理論の発展に関心をもっていたりする研究者のグループが，中世の町並みを残す南スペインの町バエサで開かれた会議に集まった．参加者らは，「数学教授学 (didactics of mathematics)」と呼ばれる数学教育における新しいパラダイムに「教授学的転置 (didactic transposition)」という語が導入されて以来，25 年間にわたって進められてきた研究を共有し確認した．われわれはいま，研究領域としての数学教育の進展において，教授学転置理論が主に貢献したと理解される 3 点を紹介するための，十分な全体像を把握している．

目次

1. 「教授学的転置」理論の普及
2. 「数学教授学」領域内の教授学的転置
3. 貢献 1：実証的な分析単位の拡大
4. 貢献 2：数学的活動と教授活動の記述
5. 貢献 3：様々な決定水準における制約

1. 「教授学的転置」理論の普及

しばしばアイデアの時間というのは，人々の時間よりもずいぶんとゆっくりと流れていく．25 年ほど前，シャンルースにおける「第 1 回数学教授学夏期講習会」の際に（フランス，1980 年 7 月 7–19 日），イブ・シュバラールは教授学的転置についての最初の講義を行なった． 1970 年代に教授学的状況理論 (Brousseau, 1997a) とともギ・ブルソーが築いた新しいパラダイムの初期段階にあった．

教授学的転置という概念は，このパラダイムに最初の形を与えた次のような概念の集まりに急速に統合されていった．教授システム，教授学的状況・亜教授学的状況，教授学的契約，概念スキーム，道具・対象の往還，教授工学などである．教授学的転置の概念とともに，数学教育学が研究しようと企てる社会的現実の新しい「シーン」を名付ける—すなわち生み出す—他の新しい用語が現れてきた．知識の総体 (body)，「ノースフェール」（あるいは教育について考える人々の領域），プロト数学的知識とパラ数学的知識，そして，方法論的なものでは，絶え間ない「認識論的警戒」によって研究者が克服しなければならない教育的現実の「自明性の錯覚」である．

ときとともに，「教授学的転置理論」と呼ば

れ始めていたものが，国や言語コミュニティ，研究者グループの科学的あるいは文化的な親和性に依りながら，多種多様な方法で広まり始めた．『教授学的転置：学問知から教育知へ』(Chevallard, 1985a) の第 1 版は，フランス語圏コミュニティに影響を与えた．それは，少なくともフランス語圏コミュニティにおいては，新たな研究領域を開拓しているようであった数学教授学や実験科学における数多くの研究に引き継がれていった．ジルベール・アルザックは，教授学的転置の出発地点から 1990 年代までの変遷を正確に描写している (Arsac, 1992)．

スペイン語圏コミュニティにおいては，すぐにディルマ・フレゴーナの手による「灰色」の訳本が現れた．数年後，アルゼンチンの出版社 Aique が第 2 の訳本を出し，この本の登場によって転置理論は数学教育領域の外にまで広く普及することになる．言語，実験科学，哲学，体育，テクノロジー，社会科学，音楽，なんとチェスまで！　国際的な英語圏コミュニティにおける普及は，ジェレミー・キルパトリックのような著名な研究者がすぐにこの新しいアプローチを実践に移す方法に精通したのにもかかわらず（例えば，ワン・カンの学位論文，Kang (1990)，Kang & Kilpatrick (1992) においてのように），ずっと遅かった．彼の後に続くものはほとんどいなかった．Google で少し調べてみると，フランス語表記 ‘transposition didactique’ が 27000 件以上，スペイン語表記 ‘transposición didáctica’ が 11000 件以上ヒットする一方，英語表記では 500 件にみたない（‘didactic transposition’ と ‘didactical transposition’ の両方を含めて）．

教授学的転置は何から構成されるのか，そしてその理論はどのような新しい要素を数学教育研究へ与えるのだろうか．特筆すべきことは，学校で教えられているもの（「内容」あるいは「知識」）が，ある意味で外因性を有する産物，すなわち教育や普及に関する社会のニーズによって学校にもちこまれた―「転置された」―学校外で生み出されたものである，ということを考察する必要性を指摘したことである．このため，学校で教えられているものは，学校が与える新しい環境の中で「生きる」ことができるように一連の適応のための変換を通過する必要がある．学校で教えられるべきいくつかの知識については，学校のためにつくられたわけではないものを学校の中で再構築されうるものへと変容させるために，転置作業 (transpositive work) が施される必要があるのである．

教授学的転置の過程は，伝達されなければならない知識の総体の選択という，学校から遠く離れた場所から始まる．それから，単なる「移転」や適合，単純化ではない，明らかに創造的な作業，つまり知識の様々な要素を解体し再構成する過程が続く．この作業はその知識の力や機能的特徴を保ちながらそれを「指導可能」にするというねらいを伴う．転置作業は，政治家，数学者（「学者」)，指導システムのメンバー（特に教師）を含む多くの仲介者（ノースフェール）によって，そしていつでも容易には見極められない歴史的条件や制度的条件の下で行なわれる．それは指導を可能にするが，学校でできることやできないことに多くの制限を課す．転置の過程の後に，学校は教えられるべき知識の存在理由，すなわちこの知識の創造の動機付けとなった問いを失うことがよく生じる．例えば，なぜ三角形はそんなに重要なのか，関数の極限は何のためにつくられたのか，なぜわれわれは多項式を必要とするのか．ここに，Chevallard (2004) が「記念碑主義的 (monumentalistic)」な教育と呼ぶものがみられる．記念碑主義的な教育では，生徒は，時間とともにその存在理由が消滅してしまった知識の総体について思いを巡らすことを求められるのである．

25 年前，数学教育の研究は学習の心理学的見地に非常に影響を受けていた．転置過程の

存在を明らかにすることは，生徒によって進められる数学的活動を越えて，そして教室の中で教師によって行なわれる取り組みを越えて研究領域を切り開くことを意味した．教授学的転置を考慮に入れることは，さらに転置過程の具体的な道筋，それを制限する制約の種類，ある特定の転置が行なわれて他の転置が行なわれない理由を説明するメカニズムを問うことをも意味した．要するに，教育にかかわる制度[訳注1]に伴う制約を検討することは，数学を指導し研究し学習する際に教師と生徒が行なっていることを，より包括的な仕方で説明する手助けとなる．その意味で，教授学的転置理論は，それまで名前もなく，したがって考察もされてこなかった教育的現実の一つの側面を生じさせることにより，数学教育研究の研究対象の拡大に寄与した．

しかしそれだけではなかった．以下でみていくように，考察される実証的な現実の拡大に伴い，数学教育の問題を定式化しそれに取り組むための新たな方法が出現した．それが，「人間学的アプローチ」や「教授人間学理論」と呼ばれるものである (Chevallard, 1992, 1999; Chevallard, Bosch & Gascón, 1997)．したがって，この新しいアプローチの萌芽と今日みなされる教授学的転置の概念が，数学教育研究者の取り組みを通して，異なったペースで様々な方法で広まってきたことは驚くべきことではない．転置現象を追うその取り組みは，今度は学問としての数学教授学それ自体に影響を与える．一部の者にとって数学教育における「古典的な用語」とみえるもの，すなわちいつもそばにあったものは，そのコミュニティの他のメンバーにとっては，現在であっても発見すべき概念でありうるのである．

2. 「数学教授学」領域内の教授学的転置

教授学的転置理論の意味や適切性は，それに価値を与えるもともとのプロジェクトからはじめない限り理解されえない．それは，教授学的状況理論 (TDS)とともにギ・ブルソーによって開始された数学教育研究の新しいプログラムである．実際，TDS は，数学の指導と学習にかかわる問題を研究する方法に劇的な変化をもたらした．この革命は，学習と指導の過程を研究するために用いられる概念においてのみならず，教育の現実を問う特殊な方法においても変化をもたらした．TDS は，問題を変え，用いられるモデルを変え，そして教育にかかわる制度において暗黙裡に前提とされている数学的知識を問うというところから始める方法論を通して，研究されるべきシステムを変えたのである．数学的知識を問うとは，幾何とは何か，統計とは何か，小数とは何か, 数え上げとは何か, 代数とは何か，などといったことである．そして TDS は，数学的概念を特定すると同時に教室の中でそれを構成する方法として用いられる，数学的知識の固有認識論モデル—状況や「ミリューとのゲーム」—を提案する．これに関してブルソーは次のように述べている．

> 《状況は，その中で人が自分自身や，自分とミリューをつなぐ関係をみつけるような環境の集合である．したがって，知識の総体の普及や学習を統括する環境を研究対象に据えるということは，それらの状況を研究することにわれわれを導く．》(Brousseau, 1997b, p. 2)

> 《状況は，ある決められた影響をミリューに及ぼすために主体がミリューとの間につくりあげる固有の関係の中に，そうした知識がどのように介入してくるかを「説明する」最小のモデルである．》(Brousseau, 2000, p. 2)

> 《数学教授学において，これらの「モデル」は，教授現象の分析と説明の一貫性を示すための手段として，つまり研究の道具として基本的に使用される．たとえ教授工学を

構築するために使用されるときでさえ，それらは，再生産すべき「事例」としても，教師の判断を導びいたり，未来の教師を養成したりするために直接的に使用されるべき原理としても，決して提示されてこなかった．対照的に，社会／教師／子どものシステムの複雑性と，これらのモデルの有効範囲やメタファーの誤用を無視した即席の拡大適用の危険性を［それらは示している］.》(Brousseau, 2005, p. 56)

社会的な制度における数学の生成と普及の過程における意図されざる規則性として現れ，対応する認知現象や社会現象，言語現象には還元されえない，教授現象の存在を最初に仮定したのは，ブルソーである．このことは，数学の「指導」と「学習」が検討される認識論モデルの基本用語によって定義されうるため，それらはもはや一次的な研究対象ではなく二次的な対象になる（重要でないということを意味しているのではない！), ということをも意味する．指導と学習の研究と改善のために，一般に受け入れられている自生的な(spontaneous) 認識論モデルに疑問を感じ[訳注2]，われわれ自身のモデルを作り上げる必要性が「認識論的プログラム」(Gascón, 2003)と名付けられたものの出現を求める．[1]

「認識論的探究」を実行する必要性を強調することにより, 教授学的転置理論は TDS の計画をよりはっきりとしたものにした．その計画は，既に明確で最良の指導法が存在する一つしかない数学的知識，という幻想を打ち砕くことに貢献するものである．知識の総体は，いくつかの特殊なニーズへの回答として学校外で構成され，いくつかのかなり固有な条件に応じて定式化される．複数の当事者と異なった時間性を伴う社会的構成の過程が存在し，これを通して知識の総体のいくつかが教室に届くまでに選択され，限定され，再組織され，よって再定義されるのである．この過程の研究は，教室でなされていることの理解へ向けた重要なステップである．それは，たとえ指導行為自体がこの過程（つまりこれら全ての再定義という現実)の存在を否定し，指導を社会的に正当なものとする知識が一つしかないという幻想を保たなければならないとしてもである．

《教授学者 (didactician) にとって，［教授学的転置の概念］は，一歩下がり，証拠を疑い，単純な考えを取り除き，研究対象との油断ならない親密さを免れることを可能にするツールである．それは，教授学が独自の領域として自身を確立するために行なわなければならない切断の道具の一つである．教授学の問題の中へ「知識を通して入ること」が可能態から現実態に移行するのはこのためである．なぜならば,「知識」はそれを通して問題性 (problematic) をもち，今後，問題（新しいものや再定式化されたもの）の定式化とそれらの解決における用語として現れうるからである.》(Chevallard, 1985a, p. 15)

TDSによって提唱された教授学という一科学のプロジェクトの大胆さは，このように，その実証的な分析単位が大幅に拡張され始めたそのときに，より強められた．数学は社会的な制度の中で生成され，指導され，学習され，実践され，普及されるため，どの数学が学校で扱われるのかを理解するためには，その指導を動機付け正当化する数学を知ることに加え，この数学が様々な指導の制度におい

[1] この表現は，後に「数学教授学」として洗礼を受けるものを，ブルソーが当初「実験的認識論」と呼んでいたという事実からきている．それは，知識を問うことの重要性を強調し，地理や言語に言及するような他のより専有的な命名を避けている（認識論的プログラムのすべての研究がフランスでなされているわけではないし，すべてのフランス教授学がそこに入るわけでもない).

ていかに解釈されているのかをも知る必要がある．

3. 貢献 1：実証的な分析単位の拡大

教授学的転置理論の第 1 の貢献の一つは，数学の学校的再構成に関連する現象を考慮することなしには学校数学を適切に解釈することができず，学校的再構成の起源が数学的知識を生み出す制度の中にあることを明確にしたことである．ここで一つの区別が導入される．それは，数学者などの生産者によって生み出される「もともとの」あるいは「学術的な」数学的知識，カリキュラムによって公式に設計される「教えられるべき」数学的知識，教室において教師によって実際に教えられた数学的知識，生徒によって実際に学ばれ，教授過程の終着地点であり新たな出発地点とも考えられうる数学的知識である．図 1 は教授学的転置過程の各ステップを描写している．

教授学的転置過程は，知識の制度的な相対性を強調し，教授学的問題を制度のレベルに，つまり考察対象の制度に属する個人の特徴を越えたところに位置付ける．その主たる帰結は，どんな教授学的問題においても最小の分析のまとまりが教授学的転置過程のすべてのステップを含まなければならない，ということである．これらの制度各々から得られるデータを実証的基盤として取り扱うことが重要となる．

最初のステップは，ノースフェールの生産を通した「教えられるべき知識」を指定する「指導テキスト」（公式プログラム，教科書，教師への推奨，教材など）の形成の研究に対応し，「教えられるべき知識」が構成され，ゆくゆく変化する（あるいはそのままにされる）ための条件と制約を浮き彫りにする．したがって，指導する領域の教授学的転置（領域それ自体の画定と選定を含む）の分析は，数学教科書の検討には還元されえない．それは，たとえ数学教科書が研究者にとって特別な実証の材料であるとしてもである．重要なのは問われる問いの種類であり（なぜこれを教えるのか，なぜこの構成においてなのか，それはどこから来たのか），教科書が示す（あるいは隠す）現象の種類である．

「学術」という語は，指導過程を保証し社会的に正当なものとする知識を特徴付けるために―かなり皮肉に―用いられている．Kang & Kilpatrick (1992, p. 2)は次のように述べている．《学術的な知識の総体は，新しい知識を生み出したり，新しく生み出された知識を一貫した理論的な集まりへと組織化したりするために使用される知識以上の何物でもない》．「学術的知識」という表現の受け入れ難さは，教えられるべき知識（スタンダードや公式プログラムによって提供されているもの）や実際に学校で教えられた知識と同じレベルでそれを考える難しさを示している．どのような知識の総体が選ばれるのか，それらはどのように名付けられるのか，なぜそれらなのか，なぜこの種の構成なのか，それらの選択の理由は何か，など．「教えられるべき知識」や「教えられた知識」を研究するだけではもはや十分ではない．教育にかかわる制度において自明のものと思われている「学術的知識」の自生的モデルを分析する―細かく検討し分解する―ことも必要となる．このため，「学術的知識」はどんな場合においても，「基本知識 (reference knowledge)」（Astolfi & Develay (1989)によって呼ばれたような）にはなりえない．それは確かに教育にかかわる制度の基準点ではあるが，研究対象としてそれらの制

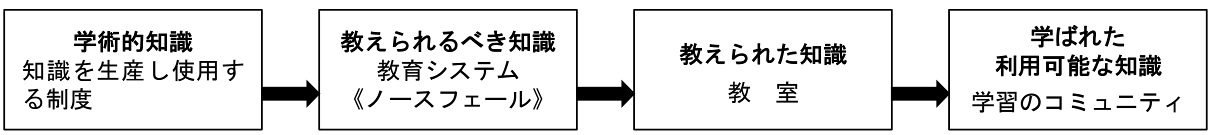


図 1．教授学的転置過程

度を考察する研究者の基準点ではないのである．

ここで，教室内での取り組みの際に教師や生徒に委ねられる自由度を制限するような転置過程の他のステップに言及することはしない．それらのステップは指導過程が通常位置付けられている場所に対応するため，これまでたくさん研究されてきた.強調したいのは，転置過程を新しい研究対象とみなすことは，われわれが属する教育にかかわる制度によって暗黙裡に押しつけられている自生的な認識論的モデルからの数学教育研究者の開放を可能にする，ということである．学術的数学から教え学ばれる数学へのすべてのステップを含むこの新しい実証的対象をみる際に，対応する数学的知識の総体の,われわれ自身の「基本」モデルを作り上げる必要がある．したがって,図 1 は「基本認識論知識」(Bosch & Gasón, 2005) と呼ばれるものによって補完されうる（図 2)．この知識は，研究者のための基礎的な理論的モデルを構成し,数学コミュニティ，教育システム，教室という 3 つの対応する制度についての実証的データから作り上げられるのである．

教授学における研究は，観察される様々な制度，特に「有力な」制度に支配されることを避けられるように，それ自身の基本モデルを入念に作り上げる必要がある．教授学的転置過程の各ステップの様々な知識の総体を分析するために特権的に参照されるシステムは存在しない．基本モデルは，研究コミュニティによって絶え間なく発展させられ，事実により検証され続ける必要がある．これが教授学における「認識論的分析」に込められる意味である．

> 《「学術的知識」が転置過程にふさわしい場所をあてがわれると，教授学的転置の分析が厳密な意味での認識論的分析と不当に置き換わるどころか，まさに教授学的転置の概念が，認識論的分析を教授学的分析に繫げ，そしてそれ以後は教授学における認識論の適切な利用の案内役となりうる，ということが判明する.》(Chevallard, 1985a, p. 20)

検討される教授学的問題が何であれ，研究はそこに含まれる数学的実践について特定の「視点」を採用する必要がある．例えば，学部レベルで教えられる「関数の極限」は何か,あるいは，どのような「証明」や「問題解決」を考えているのか，それは「学術的数学」の中に存在するものなのか,どのような方法で,それは教えられるべき知識として存在しているのか，いつからか，どのようなことばで,どのような制限が教師の実践に課されているのか，生徒の実践についてはどうか，などである．この視点からすれば，TDS は基本認識論モデルを生み出す「機械」である.状況は,教室の中に数学的知識を植え付け(教授工学),学ばれ教えられた知識に関連する現象を分析

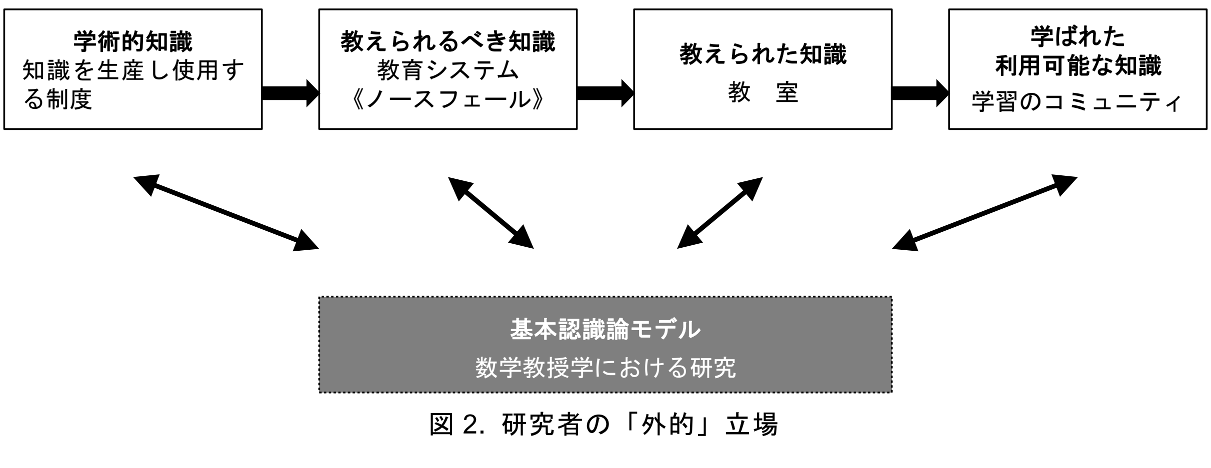


図 2. 研究者の「外的」立場

するためのツールと古くから考えられてきた．しかしそれらは，例えばブルソーの十進数指導についての予備的研究 (Brousseau, 1980) におけるように，学術的知識を記述し，教えられるべき知識の変化を記述するための道具としての適切さをも示してきた．

25 年の間に，「教えられるべき数学」のいくつかの主要な分野の教授学的転置の過程が分析されてきた．例えば，中等学校の指導に関連するものでは,以下のようなものがある．初等代数 (Chevallard, 1985b; Kang, 1990; Coulange, 2001)，比例と量 (Bolea et al., 2001; Comin, 2002; Hersant, 2005)，幾何 (Tavignon, 1991; Chevallard & Jullien, 1991; Matheron, 1993; Bolea, 1995)，「非十進数」と無理数 (Assude, 1992; Bronner, 1997)，関数と解析 (Artigue, 1993, 1998, 2000; Ruiz Higueras, 1994, 1998; Chauvat, 1999; Amra, 2004; Barbé et al., 2005)，線形代数 (Ahmed & Arsac, 1998; Dorier, 2000; Gueudet, 2000)，算術 (Ravel, 2002)，論証 (Arsac, 1989; Cabassut, 2004)，モデル化 (García, 2005)，統計 (Wozniak, 2005)，数学と経済 (Artaud, 1993, 1995)，数学と科学 (Arsac et al., 1994)．

これらの研究は，数学指導に関連するほとんどの現象が，主要構成要素として教授学的転置という特殊な現象を含むということを示している．その意味で，<u>教授学的転置という現象はあらゆる教授学的問題のまさに核心にある</u>，ということができる．それと同時に，これらの現象は数学の生産，使用，普及に関連する現象と切り離すことができない．したがって，学校の数学的活動は，次の数学教授学のより一般的な定義へとわれわれを導く，制度における数学的活動というより大きな問題と不可分に統合されるのである．「人々や人間の制度にとって役に立つ数学的な知識の総体に固有な（課されている）普及の条件についての科学」(Brousseau, 1994)．この定義は，教育にかかわる制度を越えて，どんな種類のものであれ数学的活動が生じるすべての制度を含むべく，教授学の領域を拡大する．

ギ・ブルソーは，教授学における認識論的分析の中心的役割から，数学教育が数学コミュニティに近いところに位置することの重要性を常に強調してきた．しかしながら，教授学の広げられた研究領域の中で発展していくためには，研究者は「教師」や「数学者」といった伝統的な考えの守護者の立場と縁を切らなければならない．新しい立場が必要なのである．「人間学的教授学」(Chevallard, 1992) という手段に訴えることは，この立場を構成する取り組みの必要性を浮き彫りにするであろう．

4. 貢献 2：数学的活動と教授活動の記述

1980 年から 1995 年までの間で，教授学的転置という現象の研究は，<u>知識対象の制度的生態</u>というより広い枠組みの中で，<u>知識の対象</u>や<u>対象との関係</u>という観点から策定された (Chevallard, 1992; Artaud, 1993, 1995)．物質的な次元を含めた数学的実践と，この実践と不可分なものとしての数学的な知識の総体をモデル化するための，よりきめ細かいツールの探求は，「教授人間学理論 (Anthropological Theory of the Didactic)」の枠の中で，<u>数学プラクセオロジー</u>(mathematical praxeology) や<u>数学構成</u> (mathematical organization) という概念を生み出した (Chevallard, 1999, 2002a, 2002b)．この理論は，数学的活動が他の形式の活動とともに通常の人間活動として解釈されねばならない，という主張を基盤にしており，そのため活動の理論的（知識）側面と実践的（ノウハウ）側面を等しく重要視し関連付ける，人間活動の一般的なモデル（<u>プラクセオロジー</u>）を提案する．Chevallard (2006) は以下のように述べる．

《<u>一つの</u>プラクセオロジーは，何らかの方法で，人間行為一般を分析することを可能

> にする基本単位である．[...] 一つのプラクセオロジーとは一体何か．ここでわれわれを案内してくれる語源に頼ろう．どんな人間の行ないも 2 つの主要な相互に関連する構成要素に分解することができる．一方はプラクシスつまり実践部分であり，もう一方はロゴスである．「ロゴス」は，人間の思考や推論—特に宇宙に関するもの—へ言及するために，前ソクラテス期より絶え間なく使用されてきたギリシャ語である．[...] ATD—教授人間学理論—の一つの基本原理に従えば，人間行為は，少なくとも部分的に「説明されたり」,「明確」化されたり，「正当化されたり」,「解説されたり」することなく存在しえない．それは，そうした説明や正当化がどのようなスタイルの「推論」でなされてもである．したがって，プラクシスはロゴスを必然的に伴い，そしてロゴスは今度はプラクシスをバックアップするのである．長い目でみれば，人間の行ないに問題にされないままでいるものはないために，プラクシスには支援が必要となる．勿論，プラクセオロジーには,「プラクシス」部分が非効率的なテクニック—「テクニック」はここでは「やり方」を意味する公式用語である—からつくられていたり，ロゴス部分がほとんどでたらめであったりするような—少なくともプラクセオロジー主義者の視点からすれば！—悪いものもあるだろう.》

制度的な教授過程を分析するより精密なツールを得るために，Chevallard (1999) は複雑さが徐々に増大する配列に数学プラクセオロジーを分類した．1 種類の問題の周りに作り上げられる複数の「より単純な」プラクセオロジー—点的数学構成—は，その理論的背景に応じてお互いに結び付けられうる．理論的背景は，数学の主題，区域，領域をそれぞれ覆う局所的プラクセオロジー，域的プラクセオロジー，大局的プラクセオロジーを生み出す．プラクセオロジーの観点からのモデル化は教授学的転置過程のすべてのステップを記述するために使用されうるので，教授学的転置過程の分析は新しい機能性を獲得する．すなわち，数学の専門書にでてくるような「公式の」学術的な知識の総体や，研究者によって日常業務の中で「活性化される」より非形式的な知識の総体から，教室で明示的に教えられている内容や，生徒のグループによって学ばれる，つまりそのグループにとって利用可能な，あまり明示的でない数学的知識までを記述できる．それは特に,「教えられるべきプラクセオロジー」がもたらす，教師と生徒の実践に影響を与える厳しい制約を研究者が見出すことに導く基本認識論モデルを明確化するための，かなり便利なツールとなる．

例えばボレアは，モデル化のツールとしての代数の指導に作用する教授学的制約を記述しうる初等代数の独自の具体的なモデルを与えている (Bolea et al., 2004). García (2005)は，代数的モデル化と関数的モデル化の間の繋がりに達するまでこのモデルを拡張し，スペインのカリキュラムにおいて比例が孤立していることを示した (García & Ruiz, 2006). 二面性をもつプラクセオロジーの観点からのかなりシンプルなモデルにより，スペインの高校教師が関数の極限を教える際に自ら判断して行動できる余地は極めて狭い，ということが示された (Barbé et al., 2005). プラクセオロジーの観点からの教授学的転置過程のその他の分析は，次のような最近の博士論文の中にみられる．Cabassut (2004) は数学的そして社会的知識としての証明の指導における「ダブル転置」と彼が呼ぶものを分析している．Hersant (2005) は，フランスにおける比例指導の変遷を描き出し，量の学習に僅かな場所しか充てられていないことから比例指導を疑問視する．Ravel (2004) は，フランスの高校レベルでの算術の再導入が難しいことを研究

している．Amra (2004) は関数指導について，Rodríguez (2005) は問題解決とメタ認知技能の指導について，Wozniak (2005) は統計について研究している．

数学的知識がプラクセオロジーという語を用いて記述されうると述べてきた．では，数学の指導と学習，つまり教授過程それ自体についてはどうだろうか．実際，知識が決して確定的な構成物でないことと同様に，数学プラクセオロジーも突然現れたり，確定した形式を得たりしない．それらは複雑なダイナミクスを伴う複合的で進行中の活動の結果であり，今度はそれがモデル化されなければならない．数学的活動と密接に関連する 2 つの側面があるようである．それは，数学的構成の過程—学習 (study) の過程—と，この構成の結果—数学プラクセオロジー—である．改めて，人間活動としてのこの学習の過程もまた，プラクセオロジーの観点からモデル化されることになる．それは教授プラクセオロジーと呼ばれる (Chevallard, 1999)．したがって，学習という概念は，異なる制度（生産制度，普及制度，使用制度，指導制度）において数学プラクセオロジーを組み立てることを目的とする教授プラクセオロジーを記述するためのまとまった領域を提供する．

ここでこれ以上述べないが，次のことだけは述べておきたい．数学教授学の新しい構想では，教授学が「学習する」ことと「学習を助ける」ことに関連しうるどんなものをも含むということである．

《数学教授学は数学の学習と数学の学習の支援についての科学である．そのねらいは，数学を学習したり数学を学習する他者を援助したりする人々（生徒，教師，保護者，専門家など）が抱える困難性に対して，説明と確かな回答を与えるために，学習過程（あるいは教授過程）を記述し特徴付けることである．》(Chevallard, Bosch & Gascón, 1997)

《プラクセオロジーという概念は，教授学の対象を完全に定式化することを可能にする．教授学は，人間のグループの中でプラクセオロジーが誕生，移住，変容，作用，死亡，消滅，再誕などをする際の条件と制約の研究に捧げられる．必然的に，教授学研究のフィールドはかなり拡大される．教授がいつあろうともどんな形態を採っていようとも，教授学は教授を研究するのである[訳注3]．独自の対象を与えることで，教授学は，学校で確立されている教科領域により支配されている状態から，徐々に逃れることを望めよう．》(Chevallard, 2005)

「条件と制約」を「生態」に置き換えるなら，教授学の研究は，制度における数学プラクセオロジーと教授プラクセオロジーの生態の研究である，とより簡潔に述べることができる．Artaud (1993, 1995)によって数年前に示されたように，教授学的転置は，制度的転置の特殊な一形態，すなわち数学的知識の社会的普及の特殊な一形態として現れるのである．

5. 貢献 3：様々な決定水準における制約

数学プラクセオロジーと教授プラクセオロジーの生態の研究は次のことを指摘する．教師と生徒が教えられるべき知識の周りで出会う際に起りうることは，教室の中で直ちに同定できるもの—教師と生徒の知識，利用可能な教具，ソフトウェア，一時的構成など—へは還元されえない条件と制約によって主に決定されている，ということである．たとえこれらの条件と制約が重要な役割を果たすにしても，シュバラールは近年，教室という狭い空間とその中で研究されるべき主体を越えたところにある条件を研究者が同定する助けとなろう「決定水準」の階級（図３）を提案した(Chevallard, 2002b, 2004)．

なぜ理論的枠組みを複雑にし，そのように

研究対象を新たに広げる必要があるのか．答えはいつも同じである．つまり，研究者が疑うことなしに前提にしかねない数学的知識の自生的な考えから自由になるためである.「点的」プラクセオロジー,「局所的」プラクセオロジー,「域的」プラクセオロジー,「大局的」プラクセオロジーは，題材，主題，区域，領域といった低い決定レベルに対応する．おそらく「教師の問題」(最も単純なものは次である.「生徒のグループへ教えられるべき数学的内容が与えられたとき，どのように教えるのがベストな方法なのか」)に近づきすぎていたために，研究者は，学術の制度や教育の制度によって与えられる特定の内容区分を，当然のものとしばしばみなしていた．なぜ数学的内容があれこれの特定の塊に分けられているのか．何がこの分割の規準で，それは教師と生徒の具体的な活動に対してどのような制約をもたらすのか．

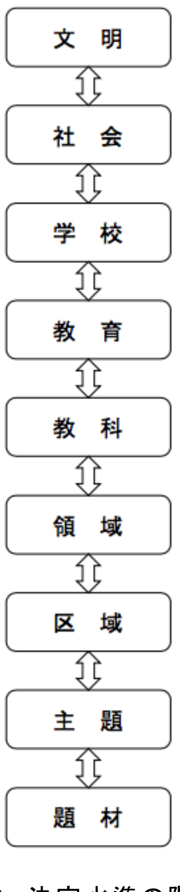


図 3. 決定水準の階級

数学という教科において，推論と証明の指導のために幾何へ与えられている高い価値，初等代数の軽視，そしてヨーロッパのいくつかの国々において「通常の」内容ブロックとしての統計の指導を導入する困難性は，より高い決定レベル（学校，社会，文明）に起源をもつ現象である．数学がそれ自体で完結していることや数学と他の教科の難しい関係はいうまでもないだろう．明らかにこれらは，非数学的対象の混じった数学プラクセオロジーの構成を必要とする，モデル化や統計，その他の実践の学習に抵抗する強い制約である（更なる論の展開は Wozniak (2005)を参照されたい）.

主たる問題は，どのような水準に由来するどのような制約が数学プラクセオロジーの生態にとって決定的になっているのか，を知ることである．本稿の冒頭で，数学的知識の記念碑化の過程について述べた．今日それは，数学教育を越えて，学校で教えられているほとんどすべての種類のプラクセオロジーに影響を与える本質的な転置現象としてまさに現れてくる．シュバラールのもっとも最近の取り組みでは (Chevallard, 2004, 2005, 2006)，知識の総体の存在理由と機能性を学習の核心に位置付ける新しい学校認識論の構築が提唱されている．

> 《従来の数学をある意味で責任ある数学へと変えるようなアップデート［が必要である］．それは，若い世代に対し，学校は自分たちを見捨てるのではなく，反対に，自分たちの周りの世界について考え，知識と理性を備えてその世界へ踏み入れるために必要なツールを与えることに大いに関心がある，ということをはっきりと示すような数学である.》(Chevallard, 2004)

決定水準の階級は，理論の最初の定式化の発端となった教授現象についての研究領域に新たな地平を拓く．25 年前，シュバラールの

仕事は，教授学的転置の過程とこの過程が学校の数学的内容を構成する具体的な方法に由来する制約を考慮に入れるよう促した．すなわち，教科や内容のブロックへの分割から，決定レベルの下層にあたる一連の題材までの制約をである．いま，学校を通して社会が教科の学習を組織する方法に由来する制約を考察するという，更なるステップが必要のようである．それは，より一般的にわれわれの社会が教科や「学習活動」に割り当てる地位や機能にかかわる．この最後の発展は，教育と学習についての共通認識の再検討を可能にし，Kang & Kilpatrick (1992, p. 2) が初期の転置理論の中で主張しえた「もう一つの認識論」の確立を可能にするように思う．

《もし学校数学におけるほとんどの知識が，われわれの価値観や教育目的，数学的技能などとあわさった，観察に適合する知識の合成物であるとすれば，もう一つの認識論が必要であろう．[...] 構成主義の立場を犯すことなしに，少なくとも，認識主体の外側に独立して知識が存在している「かのように」知識を扱うことを可能にする認識論を，われわれは構築することができるだろうか．肯定的な回答を与えてくれる一つの認識論モデルが，シュバラールの教授学的転置理論にみいだされうる．》

引用・参考文献

Ahmed, B., Arsac, G.: 1998, ‘La conception d’un cours d’algèbre linéaire.’ *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18/3, 333-386.

Amra, N.: 2004, *La transposition didactique du concept de fonction. Comparaison entre les systèmes d’enseignement français et palestinien*. Doctoral dissertation, Université Paris 7.

Arsac, G.: 1989, ‘Les recherches actuelles sur l’apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France.’ *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9/3, 247-280.

Arsac, G.: 1992, ‘The evolution of a theory in didactics: the example of didactic transposition.’ In R. Douady and A. Mercier (eds.), *Research in Didactique of Mathematics. Selected Papers*. La Pensée Sauvage, Grenoble (pp. 107-130).

Arsac, G., Chevallard, Y., Martinand, J. L., Tiberghien, A., Balacheff, N.: 1994, *La transposition didactique à l’épreuve*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Artaud, M.: 1993, *La mathématisation en économie comme problème didactique. Une étude de cas*. Doctoral dissertation, Université d’Aix-Marseille II.

Artaud, M.: 1995, ‘La mathématisation en économie comme problème didactique. La communauté des producteurs de sciences économiques : une communauté d'étude.’ In Margolinas, C. (eds.) *Les débats de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble (pp. 113-129).

Artigue, M.: 1993, ‘Enseignement de l’analyse et fonctions de référence.’ *Repères* 11, 115-139.

Artigue, M.: 1998, ‘L’évolution des problématiques en didactique de l’analyse.’ *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18/2, 231-261.

Artigue, M.: 2000, ‘Teaching and learning calculus: What can be learnt from education research and curricular changes in France?’ *CBMS Issues in Mathematics Education* 8, 1-15, A.M.S.

Assude, T.: 1992, *Un phénomène d’arrêt de la transposition didactique. Écologie de l’objet “racine carrée” et analyse du curriculum.* Doctoral dissertation, Université de Grenoble I.

Astolfi, J. P., Develay, M.: 1989, *La didactique des sciences*. PUF, Paris.

Barbé, Q., Bosch, M., Espinoza, L., Gascón, J.: 2005, 'Didactic restrictions on the teacher's practice. The case of limits of functions.' *Educational Studies in Mathematics* 59, 235-268.

Bolea, P.: 1995, 'La transposición didáctica de la geometría elemental.' In: *Educación abierta: aspectos didácticos de matemáticas* 5, I.C.E. de la Universidad de Zaragoza (pp. 89-126).

Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J.: 2001, 'La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad.' *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21/3, 247-304.

Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J.: 2004, 'Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school?' *Quaderni di Ricerca in Didattica* 14, 125-133.

Bosch, M., Gascón, J.: 2005: 'La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques.' In Mercier, A., Margolinas, C. (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble (107-122).

Bronner, A.: 1997, *Étude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée*. Doctoral dissertation, Université de Grenoble I.

Brousseau, G.: 1980, 'Problèmes de l'enseignement des décimaux.' *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1/1, 11-59.

Brousseau, G. (1994): 'Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques.' Text of a lecture presented at the 8th ICMI Study: *What is Research in Mathematics Education and What are its Results?* University of Maryland, College Park, MD, May 1994. (Unpublished manuscript)

Brousseau, G.: 1997a, *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques* 1970-1990. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Brousseau, G.: 1997b, 'La théorie des situations didactiques.' Lecture *Doctorat honoris causa* at Université de Montréal. http://perso.orange.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#publications.

Brousseau, G.: 2000. 'Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire.' *Second Colloque de Didactique des mathématiques* (Réthymnon, Crète, Grèce), 67-83. http://perso.orange.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#publications.

Brousseau, G.: 2005. 'Réponses écrites.' In Salin, M.-H., Clanché, P., Sarrazy, B. (eds.) *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (pp. 48-80). La Pensée Sauvage, Grenoble.

Cabassut, R.: 2004, 'Argumenter ou démontrer: continuité ou rupture didactique? Les effets d'un double transposition. ' *Annales de didactique et de sciences cognitives* 9, 153-174.

Chevallard, Y.: 1985a, *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble (2nd edition 1991).

Chevallard, Y.: 1985b, 'Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique.' *Petit x* 5, 51-94.

Chevallard, Y.: 1992, 'Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach.' In R. Douady and A. Mercier (eds.), *Research in Didactique of Mathematics, Selected Papers*. La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 131-167.

Chevallard, Y.: 1999, 'L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique.' *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19/2, 221-266.

Chevallard, Y. : 2002a, 'Organiser l'étude 1. Structures et fonctions.' In Dorier J.-L. *et al.* (eds) *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y.: 2002b, 'Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation.' In Dorier, J.-L. *et al.* (eds) *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y.: 2004, 'La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire.' *3e Université d'été Animath*, Saint-Flour (Cantal), 22-27 août 2004, APMEP (pp. 239-263).

Chevallard, Y.: 2005, 'La didactique dans la cité avec les autres sciences.' *Symposium de Didactique Comparée*, Montpellier 15-16 septembre 2005.

Chevallard, Y.: 2006, 'Steps towards a new epistemology in mathematics education.' In Bosch, M. (eds) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, (to appear).

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J.: 1997, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori, Barcelona.

Chevallard, Y., Jullien, M.: 1991, 'Autour de l'enseignement de la géométrie au collège.' *Petit x* 27, 41-76.

Chauvat, A.: 1999, 'Courbes et fonctions au Collège.' *Petit x* 51, 23-44.

Comin, E.: 2002, 'L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège.' *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22/2.3, 135-182.

Conne, F.: 2004, 'Problèmes de transposition didactique.' *Petit x* 65, 62-41.

Coulange, L.: 2001, 'Enseigner les systèmes d'équations en Troisième. Une étude économique et écologique.' *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21/3, 305-353.

Dorier, J. L.: 2000, 'Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire.' *Les cahiers du laboratoire Leibniz* 12.
http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/Cahiers2000.html.

García, J.: 2005, *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Doctoral dissertation, Universidad de Jaén.

García, J., Ruiz, L.: 2006, 'Mathematical praxeologies of increasing complexity: variation systems modelling in secondary education.' *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, (to appear).

Gascón, J.: 2003, 'From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes?' *For the Learning of Mathematics* 23/2, 44-55.

Gueudet, G.: 2000, *Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*. Doctoral dissertation, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Hersant, M.: 2005, 'La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui.' *Repères* 59, 5-41.

Kang, W.: 1990, *Didactic Transposition of Mathematical Knowledge in Textbooks*. Doctoral dissertation, University of Georgia.

Kang, W. & Kilpatrick, J.: 1992, 'Didactic transposition in mathematics textbooks.' *For the Learning of Mathematics* 12(1), 2-7.

Matheron, Y.: 1993, *Une étude de la transposition didactique du Théorème de Thalès entre 1964 et 1989*. Doctoral dissertation, Université d'Aix-Marseille.

Ravel, L.: 2002, 'Arithmétique en Terminale S spécialité mathématiques: Quel(s) enseignement(s)?' *Repères* 49, 96-116.

Rodriguez, E.: 2005, *Metacognición, matemáticas y resolución de problemas: una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Doctoral dissertation, Universidad Complutense de Madrid.

Ruiz Higueras, L.: 1994, *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Doctoral dissertation, Universidad de Jaén.

Ruiz Higueras, L.: 1998, *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Servicio de Publicaciones, Universidad de Jaén.

Tavignot, P.: 1991, *L'analyse du processus de transposition didactique. Exemple de la symétrie orthogonale au collège*. Doctoral dissertation, Université Paris V.

Wozniak, F.: 2005, *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique*. Doctoral dissertation, Université Claude Bernard Lyon 1.

訳注とそれにかかわる参考文献

訳注１）原語は'institution'である．ここでは「制度」と訳したが，ATD では，'institution'は，図 2 に見られる数学コミュニティや教育システム，教室を始め，ノースフェール，家族など，知識に対し特定の関係がみられる共同体のようなものを意味し，知識は'institution' なく存在しえないとする．宮川 (2011) は「知的集合体」と訳出している．

訳注２）ここでは,「自生的」は「科学的」の対義語として用いられている．

訳注３）原文では '*the* didactics studies *the* didactic' であり，2 つの 'the' が強調されている．ここでの定冠詞の使い方はいずれも総称用法であり，教授学という学問領域はより広く，その研究対象はより多い，ということを強調している．

宮川健 (2011).「フランスを起源とする数学教授学の『学』としての性格：わが国における『学』としての数学教育研究をめざして」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, *94*, 37-68.

謝辞

著者のボスク先生とガスコン先生には，論文の翻訳掲載をご快諾いただき，心よりお礼を申しあげます．今回の翻訳プロジェクトは約一年前から計画しておりましたが，それが現実味を帯びたのは,本年度 10 月のボスク先生の来日の際に，先生と訳者らの何気ないやり取りの中で翻訳の話題がでたときです．その意味で，特にボスク先生には特別な感謝の意を表したいと思います．

加えて，袴田綾斗氏（広島大学附属中学校教諭）へもお礼を述べたいと思います．今回の訳文は，大滝の予備的な翻訳をベースにしつつ，それに大滝と宮川によって全面的な改訂を施したものです．予備翻訳の段階において，袴田氏には，訳文のチェックや内容の解釈に関する議論にお付き合いいただきました．ありがとうございました．

（大滝孝治・宮川健）

後記

「上越数学教育研究」第 32 号の発行に臨み，多くの方々より御協力を賜りました．心から感謝を申し上げます．

今年度は，2 名の教員の研究論文，8 名の院生と研究論文とともに，マリアンナ・ボスク先生及びジュゼップ・ガスコン先生による *ICMI Bulletin* に掲載された教授人間学理論 (ATD) の概要についての論文の翻訳を掲載しております. ボスク先生及びガスコン先生には，翻訳の掲載に快諾いただき大変感謝しております.

第 32 号掲載論文はインターネット上でも公開しますので, そちらも是非ご覧ください．http://www.juen.ac.jp/math/journal.html

（2017.2.22　宮川健）

「上越数学教育研究」投稿規定

1. 投稿資格　　上越教育大学に関係する研究者
2. 投稿内容　　数学教育および数学に関する研究論文，報告，資料
3. 編集・審査　投稿された論文は必要に応じ審査委員を委嘱し審査する
4. 投稿期限　　毎年 1 月 31 日

編集委員

高橋　等　　伊達　文治　　宮川　健
布川　和彦　　岩崎　浩　　松沢　要一

上越数学教育研究　第 32 号

発行日　平成 29 年 3 月 13 日

発行所　上越教育大学数学教室

〒943-8512　新潟県上越市山屋敷町 1 番地

TEL　025（522）2411　（代表）

印刷所　（株）明間印刷所　TEL 0256（32）3090