

## 石垣曲線のへこみについての考察

内田 菜月 曾根原 光 西堀 朱栄  
町田 一生 村松 達  
上越教育大学学校教育学部 3年

### 1. はじめに

日本の城郭の石垣の輪郭はそれぞれなんとも言えないきれいな曲線をしている。敵の侵入を防ぐため, また建築構造の力学的安定性を考慮して, 石垣を積んだと考えられるが, 昔の人はどのようにしてあのようにきれいに石垣を積み, 美しい輪郭を持った石垣を作ることができたのだろうか。この小論では, 城郭の石垣の曲線を数学的に考察し, その数学の中に, ある興味深い数列が現れることを示し, その数列の性質を石垣曲線の「へこみ」の観点から考察する。

日本には, 昔中世の戦国時代から近世初頭の江戸時代にかけて, 近江の国の穴太(アノウ)と呼ばれる土地に石垣建設の専門家集団がいた。彼らは穴太衆と呼ばれ, 石垣建設のノウハウを決して外部に漏らさず秘伝とし, 日本各地の城郭の石垣普請に携わっていた。穴太衆が持っていた石垣普請の方法は, 北川総一郎 [1], 喜内敏 [2] によれば, 主に2種類あったようだ。柳井浩 [3] では, この2つの石垣曲線の作図方法を現代的な数学の観点から整理され調べられている(他にも, 藤井一幸 [5] 参照)。

一つ目の方法は, 加賀前田藩に仕えた後藤家に伝わる石垣作図法であり, 後藤家に伝わる古文書に詳細が記されている ([1], [2] 参照)。金沢城の城郭もこの作図法によるものではないかと推測される。

二つ目の方法が, 本論文で考察される熊本細川藩に伝わる石垣作図法であり, 古文書「石垣秘伝之書」([1])にある作図法である。熊本

城の城郭もこの作図法によるものではないかと推測される。この小論では, この二つ目の石垣作図法に注目し, 石垣の輪郭の作図で得られる曲線の中に, ある興味深い数列が現れ, その数列を石垣の「へこみ」の観点から考察する。

### 2. 石垣曲線

柳井浩 [3] により, 「石垣秘伝之書」([1])にある作図法は, 数学の言葉により, 以下のように整理された。

与えられたデータ  $(b, d, h)$

$b :=$  石垣の底辺の長さ

$d :=$  石垣の上辺の長さ

$h :=$  石垣の高さ

を石垣データと呼ぶことにする。石垣データ

$(b, d, h)$  に対して  $\delta := \frac{n}{n-1} \frac{d}{h}$  とおく。ここ

で,  $n$  は石垣の段の数を表わす。



(藤井一幸 [5] 32 ページより)

石垣の各段の傾きを

$$s_1 = \frac{b}{h},$$

$$s_2 = \frac{b}{h} - \frac{\delta}{n-1},$$

$$s_3 = \frac{b}{h} - \frac{\delta}{n-1} - \frac{\delta}{n-2},$$

...

$$s_{n-1} = \frac{b}{h} - \frac{\delta}{n-1} - \frac{\delta}{n-2} - \dots - \frac{\delta}{2},$$

$$s_n = \frac{b}{h} - \frac{\delta}{n-1} - \frac{\delta}{n-2} - \dots - \frac{\delta}{2} - \delta,$$

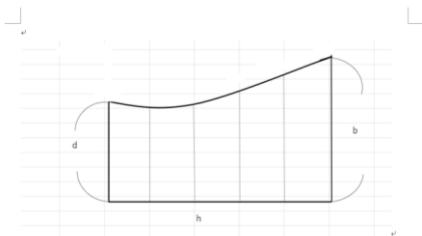
とする (柳井氏の記号  $r_i$  では  $r_i = s_{n-1}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ). 座標  $(x_i, y_i)$  を

$$x_0 = 0, \quad x_i = i \frac{h}{n},$$

$$y_0 = d, \quad y_{i+1} = y_i + s_{n-1} \frac{h}{n},$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

で定義する.



上図は, 石垣の底辺を右辺に, 上辺を左辺になるように  $90^\circ$  回転した図である.

点  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  の  $n \rightarrow \infty$  の極限が石垣の輪郭を表す曲線  $(x, y(x))$  であり, [3] では

$$y(x) = d + \frac{1}{h} \left\{ (b-d)x + dx \log \frac{x}{h} \right\} \quad (1)$$

と求められている. 簡単な計算で

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left( b + d \log \frac{x}{h} \right)$$

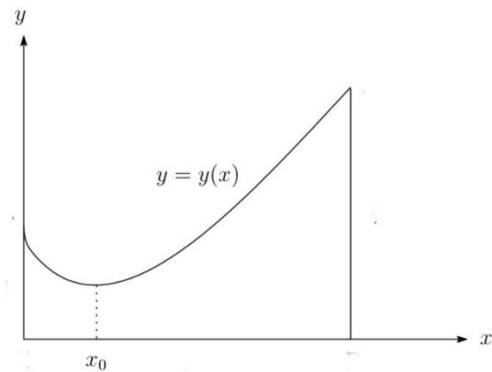
がわかるので,  $y'(x) = 0$  となる点  $x = x_0$  が

$$x_0 = h e^{-\frac{b}{d}} < h$$

と求められる.

$$y''(x) = \frac{d}{hx^2} > 0$$

なので, 石垣の輪郭を表す曲線 (1) には「へこみ」があることがわかる. (藤井一幸 [5] 参照)



### 3. 石垣のへこみ

石垣曲線の構成方法から石垣データ  $(b, d, h)$  に対して  $n$  が小さいと傾き  $s_n$  は負にならないので, 石垣はへこまないが, 石垣曲線 (1) は必ずへこむので,  $n$  を大きくすると, 石垣がへこんでくるのではと予想される. そこで, 次のような定義を与える.

**定義** 石垣データ  $(b, d, h)$  に対して,  $n$  段の石垣積で石垣がへこむ最小の  $n$  を石垣データ  $(b, d, h)$  の「へこみ指数」と定義し  $H(b, d, h)$  で表す.

この小論の目的はへこみ指数の数学的考察を行うことである.

$s_n$  は, 石垣を  $n$  段積んだときの最上階の石垣の傾きを表しており, 数列  $s_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  は単調減少数列になっている. 従って  $s_n < 0 \Leftrightarrow n$  段の石垣でへこむ.

ここで, 数列  $H_n$  を

$$H_n := \frac{n}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \quad n = 2, 3, \dots$$

とおく. すると

$$s_n = \frac{b}{h} \left( \frac{b}{d} - H_n \right)$$

により,

$$s_n < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{d} < H_n$$

従って, 次の命題が示された.

**命題 1.**  $H(b, d, h)$  は必ず有限な自然数として確定し, 次で与えられる:

$$H(b, d, h) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{b}{d} < H_n \right\}$$

従って, へこみ指数  $H(b, d, h)$  は石垣の高さ  $h$  に依存せず, 上辺  $d$  と底辺  $b$  の比のみで決まる.

上記の命題 1 を踏まえると,  $H_n, n = 2, 3, \dots$  がどのような数列であるか興味がわく. そこで, 以下  $H_n, n = 2, 3, \dots$  を調べてみた.

**補題 2.**  $H_n < H_{n+1}, n = 2, 3, \dots$  であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty.$$

証明. 簡単な計算により,  $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n(n-1)} \left( n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$  がわかる.

よって,  $H_n < H_{n+1}$ . また  $H_n > \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$  より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty.$$

$$\gamma_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n, n = 1, 2, \dots \text{とおく.}$$

このとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$  は有限な実数に収束し

オイラーの定数と呼ばれており  $\gamma = 0.5772156649 \dots$  がわかっている (例えば文献 [4] p.370 参照).

**補題 3.**  $\alpha_n = H_n - \log n, n = 2, 3, \dots$  とおく.

(i)  $\alpha_n > 0, n = 2, 3, \dots$

(ii)  $\alpha_n > \alpha_{n+1}, n = 2, 3, \dots$

(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ .

証明.

(i) 簡単な計算で

$$\alpha_n - \gamma_n = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{k=1}^n - 1 \right) > 0 \text{ がわかるので,}$$

$\alpha_n > \gamma_n$  である.  $\gamma_n > 0$  なので  $\alpha_n > 0, n = 2, 3, \dots$  がわかる.

(ii) 簡単な計算で

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n-1}$$

がわかる. 不等式  $\log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) > \frac{1}{n+1}$  より,

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} > \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$$

$$= \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{2}{n+1} \right)$$

を得る.  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{2}{n+1}$  が正であることを数学

的帰納法により示す.  $n = 2$  の場合は  $\frac{1}{12}$  であ

る.  $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \frac{2}{m+1} > 0$  と仮定する.

従って  $\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} > \frac{2m}{m+1}$ .

このとき

$$\frac{m}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k} - \frac{2}{m+2} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \frac{1}{(m+1)^2} - \frac{2}{m+2}$$

$$> \frac{2m}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+1)^2} - \frac{2}{m+2}$$

$$= \frac{m}{(m+1)^2(m+2)} > 0$$

従って  $\alpha_n - \alpha_{n+1} > 0, n = 2, 3, \dots$  である.

(ii) 簡単な計算で

$$\alpha_n = \frac{n}{n-1} \gamma_n + \frac{1}{n-1} \log n - \frac{1}{n-1}$$

従って  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ .

以上により, 次の結果を得たことになる. **定理**

**4.**

(i) 石垣データ  $(b, d, h)$  に対してその「へこみ指数」 $H(b, d, h)$  は必ず有限な自然数として確定し, 次で与えられる:

$$H(b, d, h) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{b}{d} < H_n \right\}.$$

(ii) へこみ指数  $H(b, d, h)$  は石垣の高さ  $h$  に依存せず、上辺  $d$  と底辺  $b$  の比  $\frac{b}{d}$  のみで決まる。

(iii)  $H_n$  は  $n$  について、単調増加数列であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty.$$

(iv)  $\alpha_n = H_n - \log n$  とおくと、 $\alpha_n$  は正の単調増加数列であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \gamma$ .

ここで  $\gamma = 0.5772156649 \dots$  オイラーの定数 ([4] p.370 参照)。

実際の熊本城の石垣を例にしたとき、そのへこみ指数は斎藤敏夫氏(上越教育大学)によれば

$$h = 10 \text{ 間} \sim 18.18\text{m} \quad b = 5 \text{ 間} \sim 9.09\text{m}$$

$$d = 0.6 \text{ 間} \sim 1.09\text{m}$$

とすると  $H(b, d, h) = 293$  である。つまり石垣を 293 段以上積み上げれば、「武者返し」の石垣と言われるが如く本当に反り返るのである。

今回行ったへこみ指数の数学的考察は、もともとは石垣曲線の傾きを数学的に表すという試みから発展したものである。このように、身の回りにあるあらゆる建築物やさまざまなものの中に隠されている考え方を数学的考察によって明らかにするという試みは、私たちにとってたいへん貴重な経験になったと感じる。この経験を生かして、これからもさまざまな数学的考察を行っていききたい。

**謝辞:** 本論文は、上越教育大学の授業である平成 30 年度実践場面分析演習での 3 年生 B グループの発表の際の斎藤敏夫准教授からの質問「石垣は何段積み上げれば初めてへこみますか?」という質問に回答を与えるため、その後、B グループのメンバーが集まり、考察した結果をまとめたものである。この小論の最後にもあるように、斎藤敏夫准教授には、具体的な数値

に対して、石垣がはじめてへこむ石垣の段数も求めていただいた。斎藤敏夫准教授に深く感謝の意を表す。

#### 参考文献

[1] 「石垣普請」 北川総一郎著 法政大学出版会 1987.

[2] 「城石垣の秘法と資料」 「探訪 日本の城」別巻, 喜内 敏著 小学館 1978.

[3] 「石垣の曲線—様式の数理—」 柳井浩著 オペレーションズ・リサーチ 33 巻 (1988), 281—286.

[4] 「解析入門 I」 杉浦光夫著 東京大学出版会 1985.

[5] 「熊本城の石垣曲線と数学」 藤井一幸著 「ある数理科学者の履歴」 (2017), 15—34, 横浜市立大学学術研究会.