上越数学教育研究，第 39 号，上越教育大学数学教室，2024 年，pp. 1-14

割合の指導に関わる諸問題

布川　和彦
上越教育大学

１．はじめに

子どもたちの割合の理解が十分でないことは、これまでも指摘され続けている。令和 5 年度全国学力・学習状況調査算数問題 4(1)は 30 %と同じ割合として「100 人をもとにした 30 人の割合」と「10 人をもとにした 3 人の割合」を選ぶ問題であったが、正答率は 46.3 %であった。また令和 4 年度の調査で果汁 40 %の飲み物 1000 mL に含まれる果汁を求めることができた児童は 64.8 %、500 mL の飲み物を二等分した時に果汁の割合が変わらないと判断できた児童は 21.6 %に留まった。こうした理解の不十分さは異種の二量の割合についても指摘されてきており、例えば令和 3 年度の調査で道のりを時間で割った時の商が表す内容を四つの選択肢から選ぶ問題では正答率が 56.0 %であり、平成 30 年度の調査で同様のことを混み具合の場面で尋ねた問題の正答率 50.3 %から大きな改善は見られなかった。

こうした指摘は以前からなされ、それらを受けて割合の指導についての様々な研究や提案もなされてきた。その上でまだ上述のような状況であるとすれば、従来の研究や提案とは異なる観点からの検討を行うことにも意味があろう。

従来と異なる観点を考える手がかりを、教科書における割合の定義の中に見いだすことができる。ある教科書では「もとにする大きさを 1 とみたとき、くらべられる大きさがどれだけにあたるかを表した数」を割合と言うとしているのに対し、別の教科書では「何倍にあたるかを表した数」が割合であるとしている。前者の教科書もこの定義の直前で「倍を使ってくらべること」を扱い、またその少し前では「5 倍というのは、3 m を 1 とみたとき、15 m が 5 にあたることを表している」と説明しているので、割合を倍と関連づけて考えてはいる。しかし割合が何かの説明としては、前者が「どれだけにあたるか」を基本としているのに対し、後者は「倍」を基本としており、二つの教科書には違いがあるように見える。このことは、割合とは何かについて私たち教師の間にも明確な共通理解がないのではないか、という疑問を抱かせる。

そこで本稿は、割合を理解する上で必要となりそうな事項でありながら、私たちの間で共通理解があるのかが明確ではなく、指導において曖昧になっているものがないかを検討することにする。そのためにまず、共通理解の拠り所である学習指導要領解説(文部科学省, 2017)における割合の説明を確認する。次に、その説明から派生する事項で、算数教育において明確に説明されることの少ないものを取り上げ、検討を加える。なお本稿の引用において、ページ数だけを記したものは全て学習指導要領解説からの引用である。

２．学習指導要領解説における割合

(1) 同種の二量の割合

第 4 学年の学習内容である「簡単な場合に

ついて、割合を用いて比べること」に関し、「簡単な場合」とは「二つの数量の関係が、基準とする数量を 1 とみたときにもう一方の数量が、2 倍、3 倍、4 倍などの整数で表される場合」(p. 218)であると説明されている。ここでは基準量を「1 とみた」時に比較量が何倍と表されるかが割合とされている。

さらに第 4 学年の箇所では割合について次のような説明もなされている：「二つの数量 A と B の関係を，割合を用いて比べるとは、二つの数量のうちの一方、例えば B を基準にする大きさ（基準量）としたときに、もう一方の数量である A（比較量）がどれだけに相当するのかを、A÷B の商で比べることである。この表された数(商)が割合である」(pp. 217-218)。さらに「割合を表す数は，基準量を単位とした比較量の測定値であるともいえる」(p. 218)とされる。ある量を基準量とすることはその量を「1 とみた」ことだとすると、比較量が「どれだけに相当するのか」は上述の倍により表されると同時に、「A÷B の商」であるとされていることになる[1]。

第 5 学年に関しても、第 4 学年と同様、次のように説明がなされる：「二つの数量のうちの一方を基準にする大きさ（基準量）としたときに、もう一方の数量（比較量）がどれだけに相当するのかを、比較量を基準量で割った商で比べることである。この表された数（商）が割合である」(p. 267)。

なお割合については次のような記述も見られる：「さらに、様々な事象における二つの数量の関係について、それらの数量の間に成り立つ比例関係を前提として乗法的な関係から把握される『割合』について学習する。割合は、二つの数量を比較するときに用いられる関係であり、またその関係を表現する数でもある」(p. 35)。

二組の数量のペアを割合を用いて比べることに関しては、次のように説明されている：「二つの数量の関係と別の二つの数量の関係を比べるとは、A、B という二つの数量の関係と、C、D という二つの数量の関係どうしを比べることである。[中略] 比べる対象や目的によって、割合でみて比べる場合がある。割合でみるとは、二つの数量を、個々の数量ではなく、数量の間の乗法的な関係でみていくことである」(p. 64)。

(2) 異種の二量の割合

第 5 学年で学習する単位量当たりの大きさに関わっては「異種の二つの量の割合として捉えられる数量があることを学習する」(p. 264)とされる。例えば、速さを「単位時間当たりに移動する長さとして」捉える (p. 265) としており、速さという単位量当たりの大きさは、時間と長さという二量の割合とされている。「(速さ)＝(長さ)÷(時間）として表すことができる」ことも、「A÷B の商」が割合だとする(1)で確認した割合の説明とも整合している。また単位量当たりの大きさは「基本的な量の性質をもっていない量」(p. 264)であるとも述べられている。

(3) 乗法と除法

前項の引用部に見られるように、割合はしばしば「乗法的な関係」として特徴付けられる(p. 35，p. 64，p. 218，p. 219)。では乗法がどのように説明されているかを見ると、「乗法は、一つ分の大きさが a のものの b 個分の大きさ、あるいは b 倍に当たる大きさを求める計算として意味付けられる」(p. 45)とされる。さらに第 5 学年で学習する乗数が小数の乗法については、「『基準にする大きさ(B)』の『割合(p)』に当たる大きさを求める操作が B×p であるとしてまとめることができる」こと、また「A を『割合に当たる大きさ』とすると、B×p=A と表すことができる」(p. 239) ことが説明されている。

乗法をこのように捉えることで、乗法の逆算にあたる除法も「基準にする大きさ(B)」あるいは「一つ分の大きさを求める場合」と、「割合(p)」あるいは「幾つ分になるかを求め

る場合」(p. 45)とを考えることになる。そして前者を「等分除」、後者を「包含除」と呼んで区別し、教科書でも二つの場合が別に取り上げられている。

３．同種の二量の割合に関わる問題

(1) 下位基準量の不自然さ

2(1)で確認したように、学習指導要領解説では「割合を表す数は、基準量を単位とした比較量の測定値である」(p. 218)とも説明されている。ここで「量の測定とは、量 B を基準にとるとき、他の量 A がその何倍に等しいかを調べ、この何倍に当たる数 p によって量 A の大きさを表現すること」(p. 58)であるので、ある量が別の量の何倍かを求めることが測定の操作であり、また測定こそが倍や割合を求める操作であるとも言える。

例えば長さ 15 cm のテープ A を長さ 5 cm のテープ B を基準として測定するとすれば、基本的には B を任意単位とした測定、つまり B をいくつかつなぎ合わせて A と同じ長さになるようにし、つなぎ合わせた数を用いて「A の長さは B の長さ 3 本分」などと表現するであろう[2)]。この場合、5 cm の 3 つ分で 15 cm となることから 15＝5×3 の乗法が成り立つ。しかし実際に基準量を合わせる操作を遂行しなくても、B を n 本つなぎ合わせて A の長さになると想定して 15＝5×n と考え、その n を除法 15÷5 により求めることもできる。A÷B の商が割合であったことを想起すれば、この n は B を基準にとったときの A の測定値であるとともに、A の長さが B の長さの何倍か、あるいは B の長さを基準量とした時の A の長さの割合を表している。

12 cm のテープ C についても同様に考えると、12÷5=2.4 となるので、C の長さは B の長さの 2.4 倍、あるいは B の長さを基準量とした時の C の長さの割合は 2.4 となる。そして「『基準にする大きさ(B)』の『割合(p)』に当たる大きさを求める操作が B×p」であったので、12＝5×2.4 でもある。この「×2.4」である小数の乗法については、「1 とみた」大きさの 10 分の 1 を 0.1 に当たる大きさとして考えることになる(p. 242)。今の事例では、基準量である B の長さ 5 cm の 0.1 に当たる 0.5 cm を作り、2.4 なので基準量 5 cm の 2 つ分と、0.1 にあたる 0.5 cm の 4 つ分とを合わせた長さが 12 cm になっていると捉えることになろう。この乗法をテープ A の時と同様に基準量をつなぎ合わせる操作とみなすと、「×2.4」は基準量 B を 2 個つなぎ合わせ、さらにその 10 分の 1 の量を 4 個つなぎ合わせる操作に対応する。基準量の 10 分の 1 の量を下位基準量と呼ぶならば、測定値の 2.4 は、基準量と下位基準量を組み合わせて比較量と同じにする測定操作の結果である(布川(2021)参照)。

つまり、「割合を表す数は，基準量を単位とした比較量の測定値」であり、その測定値は「何倍に等しいかを調べ」た結果の表現なのであるから、C の長さが B の長さの 2.4 倍ということも、基準量 B と下位基準量を組み合わせて C の長さと同じにする測定操作やその結果の表現ということになる。

離散量の場合であっても、例えば 12 個は 4 個の何倍かを考える際に、下図のように、4 個のまとまりを基準量とし、それをいくつか合わせて比較量と同じになるようにすることを「測定」と考えるならば、同様の解釈が可能であろう(布川, 2021)。

図１：4 個による 12 個の測定

離散量の小数倍でも、例えば 14 個が 4 個の何倍かを考えて 14÷4＝3.5 から 3.5 倍という結果が得られた場合、4 個という基準量から 2 個のまとまりという下位基準量を構成し、それが 0.5 に当たると考えることで、3.5 倍を

基準量と下位基準量の組み合わせによる測定値として解釈することはできる。

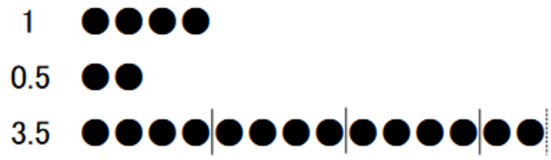

図２：3.5 倍の測定によるイメージ

15 個が 4 個の何倍かを考えると 15÷4＝3.75 倍となるが、これも、4 個という基準量から 1 個という下位基準量を構成し、それが 0.25 にあたると考えるならば、基準量 3 つ分と下位基準量 3 つ分を組み合わせる測定操作、あるいは基準量 3 つ分、0.5 にあたる下位基準量 1 つ分、0.25 にあたる下位基準量 1 つ分を組み合わせる測定操作の結果として解釈が可能である。

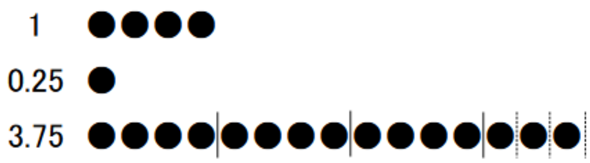

図３：3.75 倍の測定によるイメージ

ただしここでは、4 個を 1 と見たときに 2 個は 0.5、1 個は 0.25 に当たるという理解が必要となる。その際、個数と倍の数とは比例関係にあることや 1÷4=0.25 といった理解も求められることになろう。

長さの倍関係を求める際には、下位基準量として基準量の 0.1 や 0.01 に当たる大きさを構成すれば、小数値の倍を解釈できた。同じことを離散量で行おうとすると、0.1 や 0.01 に当たる下位基準量が 0.4 個、0.04 個などとなってしまう。2 個を 0.4 個で測定したら 5 つ分と考えることで 14 個が 4 個の 3.5 倍であることを解釈することはできるが、「0.4 個」という下位基準量は上の「0.5 cm」という下位基準量に比べ不自然であると言えよう。

このように、離散量の割合で値が小数になる場合、連続量の場合と同様に下位基準量を構成することで測定値として解釈することは可能であるが、単純に基準量の 0.1 や 0.01 に当たる大きさを下位基準量とすることが連続量のときに比べて不自然な場合もあり、逆に 1 個など自然な量を下位基準量にしようとすると、それがいくつに当たるかを考える部分が 0.1 などよりも複雑な数になってしまう。そのため、離散量については小数倍をどう解釈するかに問題が生じうると考えられる。

(2) 異なる基準量による比較

割合によりいくつかの対象を比較する場面では、それぞれの対象により基準量が異なる。割合が測定値であるならば、それぞれを異なる基準量により測定した結果の測定値だということになる。いわば 3 インチと 6 cm を比較するようなものとなる。しかも、実際には 3 インチの方が長いにも関わらず、測定値が 3 と 6 なので 6 の方が大きいと判断するのである。こうした問題を考慮するならば、なぜ割合により比較できるのか、あるいは割合で比較する場合、測定値は対象の何を表しているのかがさらに問題となろう。

異種の二量の割合では基準を同一の単位量 (1 m^2、1 時間等)に揃えるために比較を考えやすいことから、同種の二量の割合による比較を学習する際に、単位量当たりの大きさの考えを利用するという提案もなされてきた(田端, 2003)。例えば第 4 学年で用いられることの多いゴム紐や包帯の伸び具合を考える場面で、1 cm に対応する伸びた長さを考え、その長さで比較することを通して、割合による比較を受容することが考えられる。50 cm のゴム紐が 150 cm に伸びた場合、伸びた後の 150 cm を元の 50 cm に均等に割り当てるならば、元のゴム紐 1 cm に伸びた後のゴム紐 3 cm を割り当てることとなる。他のゴム紐では 100 cm のものが 200 cm に伸びたとすると、200 cm を元の 100 cm に均等に割り当てて、元の 1 cm に伸びた後の 2 cm を割り当てることになる。そして伸びた後の長さである 3 cm と 2 cm の比較により伸び具合を比較し、これを 1 cm が 3 倍に伸びたことと 2 倍に伸びたことと

捉え直すことで、割合による比較を正当化することはできる。これは B×p=A で B の値が 1 の時の A の値が p と等しくなることによるものである。

このような解釈は、包含除的である倍を求める除法 A÷B を一度、1 当たりを求める等分除的に捉え、それを経由して包含除としての A÷B を捉えることになっている。上のゴム紐の事例で言えば、伸びた後の 150 cm を 50 等分した結果の 3 cm と 200 cm を 100 等分した結果の 2 cm との比較を経由し、これらの 3 と 2 の値が、包含除の結果、つまり 150 cm を 50 cm で測定した測定値の 3 と 200 cm を 100 cm で測定した測定値の 2 とそれぞれ等しいことから、測定値による比較の妥当性を納得し、同種の二量の割合による比較を正当化しているものと考えることができる。

実際、ゴム紐を扱ったある教科書の教師用指導書では、次のように書かれている：「50 cm から 150 cm に伸びるゴム A は、10 cm あれば 30 cm に伸びる。それに比べて 100 cm から 200 cm に伸びるゴム B は、10 cm あれば 20 cm しか伸びない」。ここでは 10 cm であるが、二種類のゴム紐で基準量を揃え、その伸びた後の長さの違いから、前者のゴム紐の方がよく伸びると判断している。

またいくつかの教科書で「いつでも同じように伸びる」ことを確認したり、指導要領解説や実践(例えば加固(2021))で、割合による比較において比例関係を前提とすることを強調しているのは、一方の量(伸びた後の長さ)を他方の量(元の長さ)に均等に割り当てられるための条件であるからだと考えられる。

価格の割引などは、ゴム紐の場面と同様、状態の変化であるように見える。例えば 1500 円の商品を 1200 円で購入した場合、定価を元にした購入価格の割合は 0.8 であるが、ゴム紐の場合と同様に考えると、これは定価の 1 円が 0.8 円に変化したものと解釈できる。24 m^2 の塀のうち 6 m^2 を塗った時の、全体の面積を元にした塗った部分の面積の割合 0.25 も、塀の各 1 m^2 の部分のうち 0.25 m^2 だけ塗られた状態に変化したとして解釈することができる。つまり塗った分の 6 m^2 を 24 等分して各 1 m^2 に割り当てたとして捉えられる。その割り当てられた面積の値 0.25 が割合の値に等しくなっている。ここでも等分除を経由して包含除を捉えることが可能である [3)]。

定員と乗客数の場合も、定員 1 人を例えばイスやポスト(地位)などにより象徴的に表すならば、1 つのイスに座ろうとしている人が何人いるか、つまりイスに割り当てられる人数として商を捉えることができる。定員が 140 人のところに 245 人が乗っているとすれば、 定員 1 人に乗客が 1.75 人いる状態として等分除的に解釈できるが、その人数の値 1.75 が割合の値に等しいことから、今の解釈を通して割合が混み具合を表していることを受容することが考えられる。

ただし、等分除的な解釈が自然には行いにくい場面も見られる。例えば 200 人の子どもが集まり、その中の 80 人が 5 年生であったという場面で、200 人を元にした 80 人の割合である 0.4 を上のように解釈しようとすると、子ども 1 人に対して 0.4 人の 5 年生を割り当てるとか、子ども 1 人が 0.4 人の 5 年生に変化するといったことになり、自然な解釈とは言いがたい。

あるいは 8 回シュートをして 6 回成功した場合、シュート回数を元にした成功数の割合は 0.75 である。これを、成功した回数 6 回を 8 等分したときに、シュート 1 回に対し成功 0.75 回を割り当てるとして解釈することも、シュート 1 回が成功 0.75 回に変化すると解釈することも自然とは言えないであろう。ある教科書では「シュートの成績は、もとにするシュートした数を 1 としたとき、比べられる入った数がいくつにあたるかで表すことができます」と説明されているが、なぜ表すことが「できる」のかは明確には説明されていな

い(この問題に関しては門間(2017)も参照)。

つまり、割合の学習で現れるいくつかの場面の中には、等分除的な解釈を経由して、包含除による割合を受容するということが行いにくいものが存在するということになる。また等分除的な解釈が自然な場面を意図的に活用するとしても、そうした場面での学習とそうでない場面とをどう関連付け、割合による比較を学習者に納得してもらうのかを検討しておく必要があろう。比較をするにも関わらず基準量がそれぞれで異なるということから、以上のような問題が生じうると考えられる。

仮に、シュート数を元にした時の成功数の割合を「成功した程度」(Nunokawa (2012)、杉山 (2012)参照)や「成功する確率」などと解釈することで、つまりある人がシュートした事象の質やシュートした人の質を表す数として解釈することで、この問題を解消しようと試みることも可能かもしれない[4]。これにより、複数の対象をある質により比較することにはなる(Silverman (2021)参照)。ただしその場合も、割合を求める除法がどうして「程度」や「確率」を表すことになるのかや、その「程度」や「確率」がどのようなことを意味するのかを、学習者に理解してもらうという問題に、割合による比較の問題が帰着されることになる[5]。

４．異種の二量の割合に関わる問題

(1) 「均す」ことの難しさ

異種の二量の割合では、被除数となる量が離散量であることは「均す」方の量が離散量ということになり、小数値の解釈がさらに難しくなる。例えば 5 m^2 に 9 人がいる場合、1 m^2 当たり 1.8 人となるが、0.8 人を物理的に実現できない以上、どこかの 1 m^2 の上に実際に 1.8 人がいるという状態にはできない。確かに図 4 のように人を均等に配置し、境界線上にいる人は、その状態に応じて適宜小数値として解釈するという考え方もあろう。

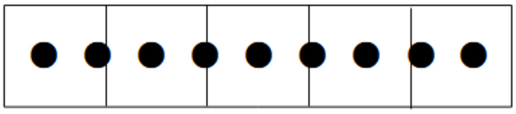

図４：「1 m^2 当たり 1.8 人」の一つの解釈

しかし、図 5 の太線の 1 m^2 を新たに考えてみると、この 1 m^2 については 1.8 人いる状態にはならない。

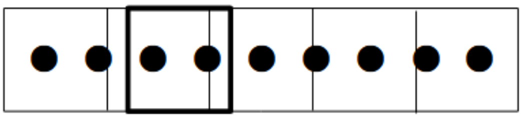

図５：1.8 人とならない 1 m^2 の場合

速さの場合、例えば 1600 m を 20 分で歩いたので分速 80 m と求めた場合、どの 1 分間をとっても 80 m 歩いたと想定する。つまり、歩き始めてから最初の 1 分間、1 分後から 2 分後までの 1 分間で 80 m 歩いたと想定するだけでなく、1 分 37 秒後から 2 分 37 秒後の 1 分間においても 80 m 歩いたと想定する。しかし、「1 m^2 当たり 1.8 人」に関してはこうしたことが成り立たないことを、上の図 5 は示している。

このように考えると「1 m^2 当たり 1.8 人」という単位量当たりの大きさを、どのように解釈するかは自明ではない。もちろん図 6 のような場合の平均の人数と説明することもできるが、その場合は「平均 1.8 人」をどのように解釈するかに問題が帰着される。また図 5 の場合の解釈の問題も依然として残る。

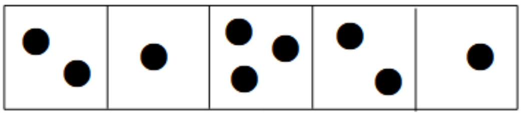

図６：平均による解釈

さらに 44.38 km^2 の面積に 4190 人がいる地域の人口密度を考える場合、仮に図 6 のように単位面積の枠を考えるとしても、1 km^2 の枠が 44 個のほかに 0.38 km^2 分が残ってしまうので、44.38 km^2 の上で 4190 人を「均す」ことはいっそう自明な操作ではなくなる (「均す」操作については新堀(2000)も参照)。

2(4)で確認したように、割合は「乗法的な

関係」として特徴付けられ，「『基準にする大きさ(B)』の『割合(p)』に当たる大きさを求める操作が B×p」であり、「A を『割合に当たる大きさ』とすると，B×p=A と表すことができる」(p. 239)のであった。異種の二量の割合である単位当たり量についてもこれが成り立つとし、B を面積、A を人口と考えると、「1 m^2 当たり 1.8 人」は上の式の p に当たることになる。このように人口が面積に比例するとした場合の比例定数として捉える、いわば面積を人数に変換する際の変換効率を表すといった解釈に留めるならば、「均す」操作を想定しなくても単位量当たりの大きさを考えることはできる。ただしこの場合は、「均す」操作と等分の操作から除法で単位量当たりの大きさを求めることを正当化するのではなく、乗法の逆として除法になることを正当化することになる。

(2) 量の意味の捉え直し

単位量当たりの大きさは、1 km^2 に対応する人口や 1 時間に対応する進んだ距離など 1 に対応する量を除法により求める。上でも触れたように、これは 1 人分などを求める除法とされた等分除に当たるように見える。ただし等分除を改めて検討すると、例えば 12 個を 3 人で割るという量どうしの除法をしているのではなく、12 個を 3 等分して 4 個という結果を得るものであり、個数という一方の量の等分を考えているに過ぎない。

単位量当たりの大きさの場合にも、基本的には一方の量の除法を行っていると見ることができる。その際、二量が比例していると仮定して、比例的推論を用いることになる。先ほどの 44.38 km^2 の面積に 4190 人がいる地域の人口密度を求めるには、1 km^2 の面積に対応する人口を求めることになる。面積が 44.38 km^2 から 1 km^2 へ÷44.38 をすることになるので、人口の方も÷44.38 をすることにより 1 km^2 の面積に対応する人口を求める。この時、確かに÷44.38 をすることは 44.38 km^2 が 1 km^2 の 44.38 倍であるという、面積の倍関係からきているが、実際に行っている除法は 4190 人について÷44.38 をするという人口に関する除法、つまり 44.38 倍すると 4190 人になるような人口を求めているに過ぎない。

同様に B 時間で A km 進んだ時の速さ p を求める際は、時間と進む距離とが比例すると想定した上で、時間が 1 時間から B 時間へと B 倍になっているので、距離も 1 時間で進む距離を B 倍すると A km になると考える。B 時間を 1 時間にするには÷B をするので、距離の方も÷B をすればよいから p は A÷B で求まると言えることになる。÷B をすることは B 時間が 1 時間の B 倍であるという、時間の倍関係からきているが、実際に行っている除法は A km について÷B をするという距離に関する除法、つまり B 倍すると A km になるような距離を求めていることになる。

このことは、教科書に見られる図 7 のような図においても行われている。そして、この比例関係を利用して、一方の量における同種の二量の割合を、他方の量における同種の二量の割合として読み替えていると考えられる。

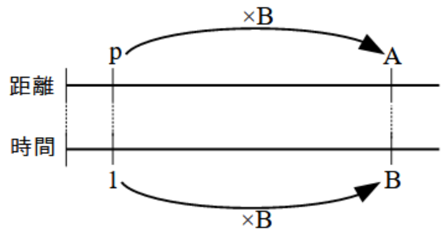

図 7 ：教科書における二重数直線

単位量当たりの大きさという考え方は、今のように、一方の量の単位量に対応する他方の量を比例的推論に基づいて求めた上で、「1 時間当たり 4 km 進む」と「当たり」という言葉を含めることにより、「1 時間では 4 km 進む」という情報と、「時間と距離は比例している」という情報を含むようにしていると考えられる。つまり、距離が時間に比例すると考えた場合の比例定数として、得られた結果を解釈する。それにより、「1 時間で

は 4 km 進む」という情報が、対象としている移動全体の特性や質を表すものとなる。このように 1 時間分の距離が移動全体の特性や質を表すものへと転用される点に、単位量当たりの大きさの要点があると考えられる。これは具体的な二量の比から「反省的に抽象された一定の比」である比率が生まれる必要性に関する Thompson (1994)の指摘(p. 192)とも関わる問題だと考えられる。

「1 時間で p km 進む」を「1 時間当たり p km 進む」と読み替えることで、対象としている移動の一部、あるいはその延長と想定できる移動に関しては同じ比例関係を適用できるので、*k* 時間に進む距離を p km の *k* 倍として p×*k* の乗法により求めることができる。このように p は、この移動における時間という量から距離という量への対応、あるいは時間を距離に変える変換(Simon & Placa (2012)参照)を表すと考えることができる(図 8)。

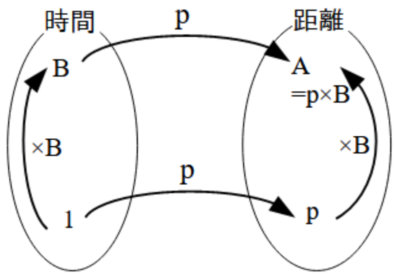

図８：p による時間の距離への変換

異種の二量の割合に関して「基本的な量の性質をもっていない量」(p. 264)であるとされるが、単位量当たりの大きさ p を異種の二量の間の対応や変換を与える「量」と考えるならば、確かにそれ以前に学習してきた量とは異なったものと言えよう [6)]。

以上のように、異種の二量の割合とされる学習内容は、実質的には比例的推論を伴った同種の二量の割合の組み合わせであり、結果として得られる量も基本的には一方の量(上の速さの場合には距離)であると考えられる。ただしその学習においては、他方の量の単位量分の一方の量(上の 1 時間分の進んだ距離)を、対象全体の特性や質を表すものとして捉え直したり、比例定数として二つの量の対応や変換を表すものとして捉え直したりすることが求められる。そのために、その捉え直すことに関わる問題が生じる可能性があると考えられる。

(3) 数の除法と量の除法

割合を「乗法的な関係」と考える(p. 35，p. 64，p. 218，p. 219)と、基準にする大きさ(B)、割合に当たる大きさ(A)、割合(p)の関係は B×p=A と表され(p. 239)、p を求める A÷B の商が割合となるのであった(p. 218)。単位量当たりの大きさを「異種の二つの量の割合としてとらえられる数量」(p. 264)とすると、B×p=A における量 A と B が異なる種類の量の時の p がその割合であり、単位量当たりの大きさということになる。

ただしこの場合、割合を「基準量を単位とした比較量の測定値」(p. 218)とすると不自然なことになってしまう。例えば A が距離、B が時間であった場合に測定の捉え方をそのまま適用し、速さという単位量当たりの大きさを距離と時間という異種の二量の割合と考えると、速さは距離を時間で「測定した」測定値ということになってしまう。しかし距離を時間で「測定する」ということは、長さなどの測定と同様の操作としては考えにくい [7)]。

ここで量の種類という点に注意をして、乗法的な関係を表す B×p=A の式を検討してみる。距離 A km を B 時間で走った場合の速さを 1 時間当たり p km と求めたとする。この時、B×p=A の式における量の種類のあり方として、次の三通りが考えられる。

(a) B×p＝A　（数 B×数 p＝数 A）

(b) B×p km＝A km　（数 B×量 p＝量 A）

(c) B 時間×p km＝A km　（量 B×量 p＝量 A）

(a)では B×p＝A は単に数どうしの乗法であり、それにより積である数を得るので、整合した式となっている [8)]。また(b)は、距離 p km

のB倍を求めて距離A kmを得るので、量の倍を考える式としてやはり整合したものである。しかし(c)の場合には、時間と距離をかけて距離を得るという形となるので、「量の四則演算」(quantity calculus)あるいは「量の代数演算」(algebra of quantities)(国際度量衡局, 2019, p. 117)の観点から、整合性を欠くものとなる。

これを解消するためには、「1時間当たりp km」を、移動全体の特性を表すとか、時間と距離の対応や変換を表すような、「基本的な量の性質をもっていない」距離とは別種の量と捉え、またそれを明確にするような新たな単位を与える必要がある。具体的には時間をかけて距離を得ることから、その単位をkm/時とし、時×(km/時)＝kmとすることが考えられる。実際、量の四則演算では、40 km/h×2 h＝(40×2)×(km/h×h)＝80 km といった計算が行われる(伊藤と山下, 2020; 森川と西山, 1997)。異種の二量の割合が「基本的な量の性質をもっていない量」(p. 264)となるということは、pをこのkm/時といった単位を持つ量として捉える、いわゆる内包量や組立量として捉えるとすれば、理解しやすくなる。

このように、単位量当たりの大きさを含む乗法的な関係を量の間の関係として捉えるとすれば、内包量の導入も含め、それら量の間の関係を整合性を持った形でどう理解すべきかの問題が生じることになる。

この問題は、実際には小学校第2学年において乗法が初めて学習される際に、既に生じている。例えば1台の車に4人ずつ乗ったカートが5台あり、5台分の人数を4×5＝20として求める場合、乗数の5を数と考え、4人という量の5倍の人数を求めると考えるならば量としての整合性が保たれるが、乗数の5も5台という量として、4人×5台＝20人と考えた場合には、上と同様に整合性を欠くものとなる。整合性を保つためには、「4人ずつ」という条件を「1台当たり4人」という単位量当たりの大きさとして解釈し、さらにこれを4人/台という内包量として捉えることになる。しかし今度は、小学校第2学年において単位量当たりの大きさの考えを、潜在的であるにしろ認めるのかの問題が生じる。

同様の問題は、除法についても生じることになる。第3学年で12個のあめを4人で分けたら1人分が3個になるといった場面が扱われるが、12個÷4人＝3個や12個÷3個＝4人と考えると、量としては整合性がとれないことになってしまう。整合性をとるには、3個を3個/人という内包量として捉えるか、12個÷4＝3個や12個÷3個＝4として、4倍すると12個になるのが3個であるといった個数の倍関係として捉えることになる。そして前者の場合には、乗法と同様、小学校第3学年で単位量当たりの大きさの考えを認めるのかの問題が生じることになる。

このように除法を量の間の演算と考える場合にも、ある量を異なる種類の量で割ることがどのような操作であるのか、またその結果得られる商はどのような意味を持つのかが、問題となる。これに加えて、除法を量の演算と考える際には、元になる乗法の被乗数と乗数のどちらを求める除法なのかの問題もあるため、上の(a)～(c)の議論はより複雑になる。(a) 数B×数p＝数AではBもpも数であると考えているので、それぞれを求めるB=A÷pとp=A÷Bとで特に違いはないと考えられる。しかし(b) 数B×量p＝量Aの場合、B=A÷pの除法はAがpの何倍か、つまり図8の縦向きの矢印を求めることであり、割合の第一用法になる。p=A÷BはB倍するとAになるようなpを求める除法、図8の縦向きの矢印の逆に当たる除法であり、基準量を求める第三用法となる。特にBが自然数の場合には、AをB等分した量pを求める除法となる。(c) 量B×量p＝量Aで量としての整合性がとれるよ

うに量 p を内包量と捉えるとすると、p=A÷B は内包量を求める除法、つまり図 8 の対応 p である右向きの矢印を求めることとなる。これに対し B＝A÷p は一方の量を内包量で割る除法であり、対応 p がわかっている時に A に対応する B、いわば A の逆像 p^{-1}(A)を求めることであり、右向き矢印の逆を考えることになる。このように、量として整合するように除法を考えた場合には、五通りの除法が区別されることになる。

量に関する乗法や除法として単位量当たりの大きさに関わる場面を検討してみると、そもそも乗法と除法を算数においてどのような演算として導入するかの問題とも関わってくる。もちろん、学年段階に応じた指導がなされてよいであろうが、ただその場合でも、下の学年での乗法や除法の学習が、上の学年の学習で現れる乗法や除法と整合している、あるいはそこへの発展の仕方が意図的に設計されている必要がある[9)]。

５．二つの割合の関係

図 7 に現れていたように、異種の二量の割合を学習する際、実際には同種の二量の割合を考えていた。他方で 3(2)で確認したように、同種の二量の割合を理解する際に、比例関係を前提として基準量の単位量に対応する比較量、いわば単位量当たりの比較量を考えることがあった。このように、同種の二量の割合と異種の二量の割合とは、学習の中で互いに関連し合っている。

しかし同時に、単位量当たりの大きさを内包量あるいは「基本的な量の性質をもっていない量」(p. 264)として捉える場合には、同種の二量の割合と直接には関連しにくくなる。しばしば言及されるように、前者は(外延量)＝(内包量)×(別種の外延量)の形の量の乗法となるのに対し、後者は(外延量)＝(同種の外延量)×倍という形になるからである。もちろん量の四則演算のように 40 km/h × 2 h＝(40×2)×(km/h×h)と計算してよいのであれば、(40×2)×(km/h×h)＝(40×2)×(km)＝40 km×2 とも計算できるので、二つの乗法を形式的に関連付けることはできる。しかし算数の学習ではこうした単位の計算は行われないので、この形式的な関連付けに期待することはできない。

しかもこの二種類の乗法の問題は、小学校第 2 学年で初めて乗法を学習する際から生じていた。この単元では初めて「倍」も現れ、2 倍、3 倍は基準量の二つ分、三つ分だとされる。単元の導入部では「1 台の車に 4 人ずつ乗ったカートが 5 台あるので、乗っている人は全部で 20 人」という場面を 4×5＝20 と表すといったことを学習する際、4(3)でも指摘したように、これを 4 人の 5 倍と考えるならば後の「倍」の学習と整合するが、「4 人ずつ」を「1 台当たり 4 人」と単位量当たりの大きさのように考え、また乗数も「5 台」と量として考えるならば、倍に基づく解釈とは接続しにくくなる。

乗法については「A を『割合に当たる大きさ』と」したときに「『基準にする大きさ(B)』の『割合(p)』に当たる大きさを求める操作が B×p である」(p. 239)ともされていたが、(外延量)＝(内包量)×(別種の外延量)という乗法の捉え方は、無次元量である数の倍を考えるこうした説明とも整合しないことになる。

確かに、乗法的な関係 B×p=A を基にした時、「基準にする大きさ(B)」あるいは「一つ分の大きさ」を求める等分除 (文部科学省, 2017, p. 45)は単位量当たりの大きさに接続し、「割合(p)」あるいは「幾つ分になるか」を求める包含除 (p. 45)は倍や割合に接続するように見える。しかし単位量当たりの大きさの場合は B×p=A の B と A は異種の二量であるのに対し、倍や割合の場合にはそれらは同種であるから、量の間の関係を考慮した場合は、同種の二量の割合 p に関する B×p=A と、二種の二量の割合 p に関する B×p=A とは、基本的

に異なる乗法的な関係である。したがって、4(3)で見たように、乗法的な関係の(b)の解釈において被乗数を求める除法と乗数を求める除法の二通りが考えられたり、(c)の解釈において二通りの除法が考えられたりはするが、一つの乗法的な関係から、同種の二量の割合と異種の二量の割合が直接、現れると考えることはできない。乗法的な関係 B×p=A は p が同種の二量の割合なのか異種の二量の割合なのかにより、表面的には同じ形をしていても、その内容はかなり異なっている。

このように、乗法の二通りの解釈をどう関連付けるのかの問題は小学校第 2 学年の乗法の導入時において既に存在し、その後に学習される乗法や除法をどのように捉えるかにも関わってくる。そしてその関連付けは、割合や単位量当たりの大きさに現れる乗法や除法をどのように解釈するかとも密接に関わると考えられる。しかしその関係は、以上で見てきたように必ずしも明確ではなく、ここにも割合の指導に関わる問題点が存在していると言えよう。

６．暗黙的な形式的拡張

第 3 節や第 4 節で見た問題点に関わっては、ある種の形式的な拡張が暗黙的に行われていることが関わっている。

同種の二量の割合の学習では、第 4 学年までは長さを中心に連続量の場面が用いられることが多い。この場合は 3(1)で見たように、下位基準量を自然に考えることが可能なので、小数倍も自然に解釈することができる。しかし第 5 学年の学習では、回数や人数など離散量が扱われることが多く、そのため下位基準量を考えることが自然にはできにくい場面も多くなる。したがって 3(1)で見たような問題点が解消されていなければ、離散量の割合については測定操作と結びつきにくく「基準量を単位とした比較量の測定値」(p. 218)として理解しにくくなる。そのため、連続量の場合に測定値である割合が比較量÷基準量の商として得られたことを参照して、離散量の場合も比較量÷基準量の商が割合であると捉えざるを得ない可能性が出てくる。つまり、割合は商によっても得られるというよりも、比較量÷基準量の「数(商)が割合である」(pp. 217-218, p. 267)として、割合を規定してしまうのである。ここでは、測定値という量の操作に基づく割合の意味づけから、商という数の操作による規定へ変更するという、ある種の形式的な拡張を見ることができる。

同種の二量の割合に基づく比較の場合も、3(2)で見たように、第 4 学年で扱われるゴム紐などでは、同じゴム紐の変化前と変化後のように、一様性や比例関係が想定しやすい場面が扱われていた。そのため、割合は伸び率といったそのゴム紐の質を表す指標としても解釈しやすく、割合で比較することの妥当性を納得しやすくなっていた。第 5 学年の学習では、一様性や比例関係を自然には想定しにくい場面も含まれるが、もしも 3(2)で見たような問題が残されているとすれば、比例関係を想定しやすい場面では基準量が異なる場合を割合により比較できたという経験をもとにして、そうした想定がしにくい場面でも、基準量が異なる場合は割合により比較することができるはずだと考えることになろう。つまり、納得しやすい場合をもとに、他の場合は形式的に拡張していくことになる。

単位量当たりの大きさで「均す」操作を行う際、確かに 4 枚のマットに 12 人の子どもがのっている場面であれば、それぞれのマットに 3 人がのるように「均す」ことは比較的しやすく、それをもとにマット 1 枚当たりにのっている人数を考えることもできる。しかしマット 4 枚に 2 人しかのっていない場合は、マット 2 枚ごとに 1 人のっていることを「1 枚当たり 0.5 人」と解釈する必要がある。さらにマット 4 枚に 3 人がのっている場合は、そうした解釈も難しくなる。4(1)で述べた問

題が残っているとすれば、「均す」操作がしやすい場面で単位量当たりの大きさの意味を学習し、またその値が等分除により求まることを納得した上で、「均す」操作が容易ではない場面でも、同様に等分除の商が「均す」操作の結果を表すはずだと考えることになろう。つまりここでも、ある種の形式的な拡張が行われることになる。

単位量当たりの大きさの直前に学習される平均の学習でも、同様の傾向が見られる。導入時には液量のように「均す」操作が行いやすく、その結果も目で見える場面が用いられる。しかしその後扱われるものの重さや回数などでは、「均す」操作を物理的には実行しにくく、結果もジュースの 1 杯分のように具体的に見えるとは限らない。そこではジュースの場面で学習したことをもとに、同様の計算により平均が求まることや得られた平均値の表すものを推測することになると考えられる。

このように、最初の学習では量の操作に基づき新たな考え方を納得できるように学習が展開されるが、途中からはそうした操作が遂行しにくい場面も含まれ、そのために、最初の学習で現れた除法の式やその商に基づき納得せざるを得ない状況になる可能性がある。本稿で見てきた問題点は、実際には量的な操作に基づいて納得がしにくい場面について、割合をどのように納得するかの問題に関わるものと言えよう。したがって、これらの問題点を考えることは、そうした形式的な拡張が、私たちの指導において暗黙的に行われていないかを検討することでもあると考えられる。

７．おわりに

同種にしろ異種にしろ子どもたちの割合の理解については問題があるとされ、全国学力・学習状況調査でもそれらの問題の正答率が十分なレベルにないことが繰り返し指摘されてきた。しかし本稿で見てきたように、子どもたちの理解の前に、私たち教師の側の理解にも曖昧な点が多く残されている。その曖昧さを減らし、低学年での乗法と除法の導入の段階から高学年での割合の学習までが整合した展開となるように指導を計画すること、あるいは暗黙的に行われがちな拡張をより明示的に行えるように指導体系を整備することが、教師側に求められていると言えよう。

一つの考え方としては単位量当たりの大きさについて 4(3)で取り上げた(b)の捉え方を採用することにした上で、乗法が「『基準にする大きさ(B)』の『割合(p)』に当たる大きさを求める操作」(文部科学省, 2018, p. 239)だという立場を徹底することである(布川, 2024)。この場合は、単位量に対応する外延量である単位量当たりの大きさを、新たな意味で用いる点を明確にして、それを理解してもらうことが一つの重要な点になる。あるいは学習のしやすさを考慮した上であえて低学年と高学年での乗法と除法の捉え方を変えるという選択肢もありうるが、その場合は、途中のどの段階でどのようにしてその転換を図るかも計画の中に含まれるべきである。

どのような展開を構想するにしろ、本稿で見てきたような諸問題については一定の解答が得られているべきであろう。またそれらの問題のように、私たち教師の割合の理解の中に他にも曖昧なままになっている部分がないかに常に注意を払うこと、そしてその私たちの理解の中の曖昧さが指導の曖昧さとなり、結果として子どもたちが理解しにくい指導につながる可能性を見逃さないことが、割合の理解をいっそう改善するためには必要であると考えられる。

註および引用・参考文献

1) 宮下(2008)は「1 と見る」が実際はかなり難しい考え方であることを、量と数の関係から示している。

2) 栗山と吉田 (2013)は、第 2 用法の文章題の

正答率が 70 %であった時に、第 1 用法と第 3 用法の正答率がそれぞれ 58 %と 60 %であったと報告している。これもあるいは、第 2 用法に相当する基準量の何倍かを構成する操作の方が、基本的であることを示唆しているとも考えられる。

3) これは 30 %を、100 人を元にした時の 30 人の割合などと捉えることに似ている。割合を人数により捉えるのである。

4) シュート数 8 回を元にした時の成功数 6 回の割合に関わり、両者の比例関係を想定して、それぞれを何倍かした場合でもうまさは同じと考えることがある(例えば、高橋ほか (2014))。今の割合 0.75 をシュートが成功する確率と考えた場合、このうまさのままで 100 回シュートした時に 75 回成功する確率は、二項分布をもとに計算すると約 9 %である。したがって、75 回入るとは限らないと考える子がいた場合、むしろその子の方が正しいとも言えよう。確かに期待値は 75 回となるので、(疲労などを考慮しなければ)75 回程度の成功は見込めるかもしれない。しかし単純に割合で考えた場合、例えば成功する確率が 0.75 でも 73 回や 77 回入ることも約 8 %の確率で生じるが、割合としては異なる値となる。8 回中 6 回成功したことと 100 回中 75 回成功したことを「同じうまさ」と考える時、どのような意味でそう言えるのかは自明ではない。

5) 山口(2007)はメスシリンダにどの程度の水が入っているかを%で表すことを割合単元の冒頭で取り上げているが、まだ割合の学習前であるにも関わらず、100 %を越える場合も含めて理解できていたとしている。これは、場面によっては「程度」による解釈が子どもたちにとっては理解しやすいことを示唆しているのかもしれない。

6) 合併では量の値の加法が成り立たない場合でも、異なる量のあわせ方によっては成り立つ場合もあろう。例えば速さの場合、ある速さで動いているものの上で、さらに別の速さで移動した場合、外から見える速さはそれぞれの速さの値の和として表される (Sonin, 2001) 。いわば「重ね合わせる (superimpose)」ことが可能な場合には、重ね合わせた後の量の値はそれぞれの量の値の和になる。

7) m はある時間に光が進む距離として定義されているので、距離を時間で表すことも可能かもしれないが、ここではそうした考え方はしないでおく。

8) もしも乗法を数の乗法として捉えるならば、算数で扱う正の有理数の範囲では乗法の交換法則を想定するであろうから、かけ算の順序は問題にならない。またそれにより、除法についても被除数を求めることと除数を求めることを区別する必要もないので、等分除と包含除の区別も意味をなさなくなる。

9) 乗法の意味の発展という際に、「いくつ分」が「倍」へと意味が拡張されるといった説明がなされることがある。しかしその場合も、乗法を「倍」の意味で捉えるとはどのようなことを指すのかが明確にされなければ意図的な設計はできないであろう。また乗法における被乗数と乗数の順序の問題が話題にされることもあるが、そのように乗法において量の性格を重視するのであれば、むしろ量どうしを乗ずることの意味やその場合の単位の整合性などに注意を払うべきであろう。

伊藤雅貴, 山下和之 (2020). 量計算の式に単位を含めるか. 山梨大学教育学部紀要, *31*, 215-224. https://doi.org/10.34429/00004965

栗山和広・吉田甫 (2013). 子どもの思考を基にした教授介入：割合概念について. 愛知教育大学研究報告教育科学編, *62*, 99-104. http://hdl.handle.net/10424/5041 (2024 年 2 月 24 日アクセス)

国際度量衡局 (2019). 国際単位系(SI)第 9 版

(産業技術総合研究所計量標準総合センター訳). 同センター. https://unit.aist.go.jp/nmij/public/report/si-brochure/pdf/SI_9th_日本語版_r.pdf (2024 年 2 月 24 日アクセス)

宮下英明 (2008). 「1 と見る」の数学. 日本数学教育学会誌, *90* (12), 25-29. https://doi.org/10.32296/jjsme.90.12_25

文部科学省 (2017). 小学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説算数編. 日本文教出版.

門間 祐. (2017). 割合の意味理解を意図した学習指導の研究：小学校第 6 学年の比例の学習場面に焦点を当てて. 山形大学大学院教育実践研究科年報, *8*, 250-253. https://yamagata.repo.nii.ac.jp/records/4171 （2024 年 2 月 24 日アクセス)

森川鉄朗, 西川保子 (1997). 科学教育における量の計算法について. 上越教育大学研究紀要, *17* (1), 365-375.

Nunokawa, K. (2012). Multi-relation strategy in students' use of a representation for proportional reasoning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *8* (4), 233-248. https://doi.org/10.12973/eurasia.2012.842a

布川和彦 (2021). 量から数への移行の観点からの自然数と分数の学習の比較. 上越教育大学研究紀要, *40* (2), 361-372. http://hdl.handle.net/10513/00008350 (2024 年 2 月 24 日アクセス)

布川和彦 (2022).「量分数」の再検討：「測定値としての分数」を視点として. 日本数学教育学会誌, *104* (2), 2-13. https://doi.org/10.32296/jjsme.104.2_2

布川和彦 (2024). 算数科における数と計算および数量関係の学習内容の整理. 上越教育大学教職大学院研究紀要, *11*, 195-205. http://hdl.handle.net/10513/0002000148 (2024 年 2 月 29 日アクセス)

Silverman, J. R. (2021). Exploring sustainability metrics in general chemistry using intensive and extensive properties of matter. *Journal of Chemical Education*, *98*, 2741-2745. https://doi.org/10.1021/acs.jchemed.1c00113

Simon, M. A. & Placa, N. (2012). Reasoning about intensive quantities in whole-number multiplication? A possible basis for ratio understanding. *For the Learning of Mathematics*, *32* (2), 35-41.

新堀 栄 (2000). 数学的道具としての概念形成を目指した教材構成に関する研究：「単位量あたりの大きさ」を例として. 上越数学教育研究, *15*, 61-74. http://hdl.handle.net/10513/2405 (2024 年 2 月 24 日アクセス)

Sonin, A. A. (2001). *The Physical Basis of Dimensional Analysis*. Department of Mechanical Engineering, MIT. https://web.mit.edu/2.25/www/pdf/DA_unified.pdf (2024 年 2 月 24 日アクセス)

杉山吉茂 (2008). わり算は包含除：割合の理解の素地として. 日本数学教育学会誌, *90* (2), 2-6. https://doi.org/10.32296/jjsme.90.2_2

杉山吉茂 (2012). 倍と割合：倍がわかれば、割合もわかる？ 算数授業研究, *83*, 4-7.

田端輝彦 (2003). 同種の量の割合の導入に関する一考察. 日本数学教育学会誌, *85* (12), 3-13. https://doi.org/10.32296/jjsme.85.12_3

高橋丈夫・田端輝彦・市川啓 (2014). 導入時における比例関係の顕在化に関する一考察：同じ割合の数対を作ることを通して. 日本数学教育学会誌, *96* (4), 4-15. https://doi.org/10.32296/jjsme.96.4_4

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). State University of New York Press.

山口 潤 (2007). 割合における児童の学習過程に関する研究：「割合のイメージを生かした表象」の効果. 上越数学教育研究, 22, 101-112. http://hdl.handle.net/10513/2509 (2024 年 2 月 24 日アクセス)