上越数学教育研究，第 40 号，上越教育大学数学教室，2025 年，pp. 1-14

分数の学習におけるディスコース
－テンプレート駆動を視点とした小学校第 3 学年の学習の考察－

布川　和彦
上越教育大学

１．はじめに

今井ほか (2022)の調査では、分数についても小学生の理解を調べている。「同じ大きさのまるいケーキ」の 1/2 と 1/3 ではどちらが「たくさん」食べることができるかを問うた際には 3 年生、4 年生、5 年生の正答率がそれぞれ 41.5 %、59.7 %、78.5 %であったのに対し、1/2 と 1/3 のどちらの方が「大きい」かを問うた際にはそれぞれ 17.6 %、22.4 %、49.7 %であったとされる(p. 111)[1)]。ここから同じ 1/2 と 1/3 の大小比較であっても、ケーキを切るという場面を伴い、量の多さとして問われる場合と、純粋に数の大きさとして問われる場合とでは、児童の反応が異なることが伺える。特に量の場面では 3 年生や 4 年生の下位の児童でも 22.4 %と 28.3 %の正答率であるのに対し、数の場面ではそれぞれ 6.1 %と 6.5 %に留まっており、下位の児童にとってはその理解がかなり難しいことが示唆される。

他方で 0.2 と 1/2 の大小判断では 3 年生でも正答率が 73.2 %となっており、5 年生では 82.6 %と 8 割を越えている。ただし小数との比較であっても 1/2 と 0.7 の比較では正答率は 3 年生 31.0 %、4 年生 50.7 %、5 年生 54.4 %であり、0.5 と 1/3 の比較ではそれぞれ 23.9 %、39.6 %、42.3 %に下がっている。

わが国の算数の学習では、その学習の系統から、分数 *a*/*b* が「除法との直接的なつながり」を持ち、除法を通じて　「より強力な意味の生成元」(Sfard, 2000, p. 76)になるとは言いがたい。だとすれば、”*a*/*b*”という数字は、それが指し示す対象を持たない空の状態から始まり、徐々にそこに意味が満たされていくという Sfard (2000)が示す別の過程をたどる可能性が高いと考えられる。分数の源泉が操作や割合にある(布川, 2022, 2024a)とすれば、その過程も容易なものではないことが予想される。

そこで本稿は、こうした移行を可能にするとされる Sfard (2000)のテンプレート駆動の考え方に着目し、その視点からわが国の分数の初期の学習を検討することで、移行がより適切に生じるための方向性を探究することを目的とする。

なお本稿では、テンプレート駆動としての使用から対象媒介的な(object-mediated)記号の使用につなげるという Sfard (2000)の考え方を参照し、「記号表現 (signifier) が記号内容 (signified)に先立つ」(p. 53)、つまり新たな記号表現は対応する記号内容がなくても導入が可能であり、後になって徐々に記号内容が構築され続けると考えていく。したがって、記号表現を強調するときは”1/2”のように引用符を付けて表すが、学習者がそこに必ずしも教師と同じ記号内容を見ているとは限らない。

２．テンプレート駆動と対象媒介的

今井ほか(2022)の調査結果を見ると、少なくとも分数の記号表現”*a*/*b*”が導入された時点では、児童が「その背後にある抽象的な対象を持っていることは期待できない」(Sfard, 2000, p. 57)。この場合の対象としては、ある

種の数が想定されるが、上の状態でも児童はその記号表現を使用することになる。Sfard (2000)が例えば、負の数も最初は単に数直線上の点の名前として提示される(p. 55)と指摘していることを参照すると、初期の時点での”*a*/*b*”の使用の仕方もテンプレート駆動(templates-driven)だと考えられる[2)]。すなわち、数直線の 0 より右側の点の名前が数を表すので左側にある点の名前も何らかの数を表すのであろうと学習者が推測するように、文や図式の数字のあった場所(スロット)に”*a*/*b*”という記号表現を用いることで、それも数字と同様の記号内容を表すのだろうと学習者が推測することになる。教師と同様に、記号表現が記号内容を表すかのような対象媒介的な対話が学習者も可能になるのは、もっと後のことになる(p. 58)。

対象媒介的という場合、対象が必ずしも存在しているとは言いきれないが、それでも、あたかも何らかの存在するモノ(entity)を見ているかのように数学の表現記号を用いるのである。これにより、数学という VR (virtual reality)に AR (actual reality)の主要な特性を与えることができるとされる(p. 41)。AR では多くの場合、語が示すモノを対話者が共有できている(taken-as-shared; Cobb et al., 1992)と想定しており、それによりコミュニケーションがスムーズに行われるが、対象媒介的であれば VR でも同様の効果が期待できる。

対象が構成される過程は社会的相互作用により刺激され、形成される。「対象媒介的な使用への最終的な移行は、生徒の他者との交流により可能となる」(p. 55)とし、その他者には教師、同級生、親、教科書著者が含まれるとしている。ここから、テンプレートの数が入るべきスロットに新たな記号表現が入れられ、あたかも数であるかのように皆で使っている中で、その記号表現が表す対象として何らかの数が存在するかのように思われ、対象媒介的な使用へ移行するのだと考えられる。

例えば表現記号”5”が数 5 を表すとして扱われている場合、典型的な数が用いられる一群の文で、”5”の入ったスロットを新たな表現記号で置き換えると、それが空のシンボル(empty symbols)であっても、数 5 が現れる他の文や数 5 に対する操作を想起すれば、その記号表現に対する操作もおよその見当がつく(p. 63)。記号内容を伴うとは限らない記号表現に対するディスコース的操作が、まだ存在しないモノを対話者が操作している、かのように見えるディスコース的活動を可能にする(p. 49)。記号表現”–2”などが学習者にとって抽象的対象としての負の数となるのも、算術のテンプレートにおける配置から出発する過程に拠るのだとされる(p. 64)。

テンプレート駆動によって記号表現を使用し、それに対する他者からのフィードバックを受けるという社会的相互作用を繰り返す中で、次第に対象媒介的な使用として学習者にも感じられるようになり、記号表現が徐々に意味で満たされていくのだと考えられる。

Sfard (2000)は数学的ディスコースとその対象は相互構成的であるとし、したがって数学的対象に対する必要性も、ディスコース的活動が創り出すと述べている(p. 47)。数といった数学的対象の必要性は、ディスコースの参加者が対象媒介的に記号表現を使えるようにすることから生じるが、記号表現が記号内容である対象を示しているという感触は逆に、参加者間で対象に関してコミュニケーションを行うというディスコース的活動により支持される。このことが、初学者に対しては学習のパラドクス(Sfard, 2008, p. 40)を生じさせるのだと考えられる。

３．数の学習と２つのディスコース

Sfard (2000)は、新たな記号表現を使う際に用いることのできる古いテンプレートは、様々な種類のディスコースから来るとしている(p. 64)。記号表現”*a*/*b*”を数のスロットに入

れることのできるテンプレートは、分数の学習以前に数を利用した文や式が現れるディスコースから得られるので、そうしたディスコースとして少なくとも２つのものが考えられる。

(1) 数値化された量のディスコース

量の比較における直接比較や間接比較を想起すると、数値化する前でも量に対して操作をしたり、それをもとに推論することができる。例えば、田村(1978)は、量が満たすべき性質を次のような公理として規定している；(1) 2つの量は等しいか、どちらかが大きいかの何れかが成り立つ；(2)ある量が第一の量より大きく第二の量より小さければ第一の量は第二の量より小さい；(3) 2つの量をたすことができ、結果も1つの量となる；(4) 量の加法では交換法則、結合法則が成り立つ；(5) 量にある量をたすと大きくなる；(6) 小さい方の量にある量をたして大きい量と等しくできる；(7) 量は何等分かにすることができる；(8) 小さい方の量を何個かたしあわせて大きい方の量よりも大きくできる。長さや液量について、私たちは日常的な経験を通して、これらを当然のことと考えているし、その際、数値化しなくても上の性質を考えることができる。また、個数などモノの多さについても(7)以外は同様であろう。

他方で、小学校第1学年で任意単位による測定を学習する以前でも、日常的に長さや重さ、液量などの普遍単位は広く用いられており、量を数値と単位の組み合わせにより捉えることも普通に行われる。個数なども、多さの数値化と考えることができる。分数や小数の学習以前は、個数の場合だけでなく、長さや液量についても、数値化は自然数により行われる。特に、学習者にとって馴染みがあるという点で考えると、自然数により数値化された量に関する文は、数を入れるスロットを含むテンプレートとして利用されうる。

実際、Sfard (2000)も”2/3”や”17”という記号表現は物理的量の比喩を伴い、比喩がARとVRの双方での記号表現の使用を制御すると指摘している(p. 87)。さらにARは数学の意味の源泉として大変重要であり、場合によっては替えがきかない(p. 90)とも述べている。分数の学習においては、測定値を用いながら量を扱う現実場面をARとして想定できよう。

(2) 数のディスコース

小学校ではモノの多さを基に10までの自然数を学習することから始め、より程度の高い多さも10や100のまとまりに対応する数で表せるようにする。大小比較も数に対応するモノの多さに応じて決められる。さらに四則演算についても、モノに対する操作とその結果を観察し、記述することにより、算術の基本的事実(fact)や演算に関わるきまりなどを定式化している。こうした学習は、量を数値化できるように数の範囲を拡張したり、量に対する事実や操作と整合するように数の事実や操作を決めたりしていると見ることができる。

しかし実際には、全ての数がそのように扱われているわけではない。20以下の自然数は確かに、１つ１つ実際の多さと対応しながら導入される。しかし、第1学年で21から100までの数を学習する際には、例えば「10が8こと1が2こで82」としてのみ言及され、モノの個数が示されない数も多い。つまり既に知っている数から直接新たな数が構成される。

そう考えると、算数における数の学習では、量に整合するように数を構成する局面と、既に確立された数を組み合わせて数を構成する局面があることになる。これは大小比較や四則演算でも同様であろう。

以上のことに鑑み、本稿では数値化せずに量について行うコミュニケーションを量のディスコースQD (Quantities Discourse)、測定値を用いて量について行うコミュニケーションを数値化された量のディスコースQQD (Quantified Quantities Discourse)、そして数自体について行うコミュニケーションを数のディスコースND (Number Discourse)と呼ぶこ

とにする[3]。

(3) ２つのディスコースとメタ規則

ある文に対してそれが正しいとして承認する方法も、複数考えられる。Sfard (2007)は、数の学習において数の規則に対する支持のメタ規則(meta-rule)として、２通りのものをあげている(p. 584)。一つはそこでの数の規則が「具体的なモデルにより満足されていなければならない」というものであり、もう一つは数の規則が「公理と呼ばれる他の対象レベルの規則の所定の集まりと整合しなければならない」というものである。「公理」とあるが、取り上げられている事例では乗数が 1 減ると積は被乗数分だけ減るというきまりが想定されているので、これは数に関わり既に確立されたきまりと考えることができよう。Sfard (2007)は負の数の学習では、支持のメタ規則が前者から後者に変容するとしているが、上で見てきたことからすると、少なくともわが国の算数の学習においては、自然数の学習において、上述の２つの支持のメタ規則が併用されていると見ることができる。

つまり、数値化された量に対して QD での操作を施し、そのプロセスや結果を QQD で記述できるように、ND での数の関係を決めるという場合も考えられる。他方で、ND において既に確立され共有された数についての事実やきまりを用いて、新たな数を構成したり、数の間の関係や演算の仕方を確立することも可能であろう。

例えば、ND で 10 までの数しか存在していない状態で、数 10 の 3 倍を ND での操作として考え、その結果を”30”と表して数と考えることは、ND の中で既知の数から新たな数を構成したことになる。一方、ブロック 10 個のまとまりを 3 個併せた時の多さも数値化できるように「30 個」と表すことにして、「30 個」の数のスロットに現れる”30”も数と考えていくことは、QQD を拡張することを通して ND を拡張することになる。

後者の場合、数字や数詞は最初、ブロックの集まりを形容したり限定したりといった役割として導入されるが、やがて名詞のようになり、何らかの対象を示すかのように扱われ

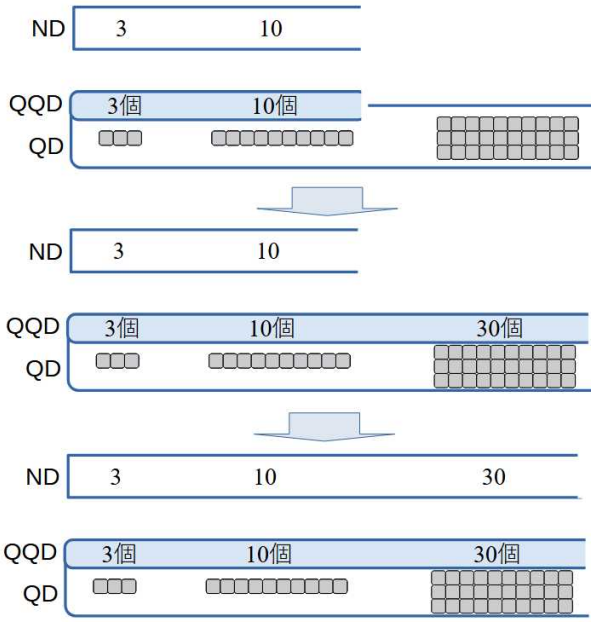

図１：QQD の拡張を経由した ND の拡張

ると想定される(有安, 2022; ワイルダー, 1980)。自然数は「数えるという操作から生まれ」、数の大きさは数えるものに対応した印をつける「行為の多さを反映する」(Giusti, 1999, p. 53)が、後に量を探究する道具から「研究の対象」へと変容する(p. 51)のだと考えられる。

４．第 3 学年の分数の学習内容の構成

本節では、小学校第 3 学年での分数の学習について、各学習内容に対する教科書での扱われ方を、上述の視点を用いて検討する。

(1) 新たな数の導入

第 3 学年では 1 m 未満の長さを「1/3 m」などと表すことを学習する。これは「2 m」という QQD からのテンプレートで、数 2 のスロットに入れるという形で表現記号”1/3”を使用している。この使用により、”1/3”も数 2 と同様の対象を指すのかも知れないと、学習者も推測することができる[4]。

これは、量を何等分かするというQDでの操作により構成できる長さについて、NDには適当な数がないので、とりあえずQQDでのテンプレートを利用してその表現方法を取り決めたものと考えられる。その際、数の入る単位mの前のスロットに、QDでの「3等分して、その1こ分を取り出す」というプロセスを反映した”1/3”という記号表現を入れている。

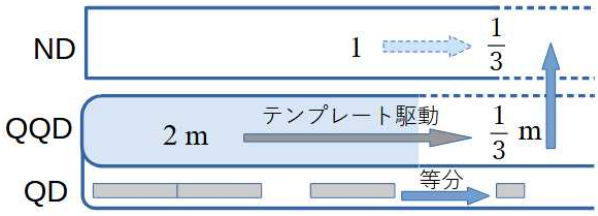

図２：QQDの拡張による分数の導入

Sfard (2000)は、新たな記号表現の導入が「前のディスコースのプロセスをテーマ化しそれらを数学的会話の焦点とするのを助け」(p. 53)、新たなディスコースの形成の触媒として働くとしている。そこでは「以前は単に実行されるだけであった数学的プロセスがモノ化された研究の対象となる」(p. 53)が、プロセスであった場所に名詞を用いることはそれを促す(p. 68)とされる。上述のQDでの「3等分して、その1こ分を取り出す」というプロセスを”1/3”という記号表現で表し、さらにこれが何かを指す名詞のように用いることは数1/3という対象についてのコミュニケーションが行われるかのような新たなディスコースの形成を促すと考えられる。

ただし「1 mを3等分した1つ分の長さを1/3 mという」とする説明については、単純にテンプレート駆動とは言えない。単位mを用いて長さを表すには「1 mのいくつ分か」を考えると、長さの学習では説明していた。「1 mの2つ分の長さを2 mという」はこの例であり、QQDからのテンプレートとなる。しかし数2のスロットに記号表現”1/3”を形式的に入れて、「1/3つ分」としても上で見た「1/3 m」の説明にはならない。

上の文の「2つ分」のスロットに「3等分した1こ分」というフレーズを形式的に入れることも考えられるが、その場合、学習者が「3等分した1こ分」を「2つ分」に当たるものとして受け入れるかが問題になる。「1 mを3等分した1こ分」だから「1/3 m」という説明が、「1 mの2つ分」だから「2 m」として、基準の長さの個数を数えて数値化するというQQDの規則に従っているように見えるかは、自明とは言いがたい。

「1 mの1/3の長さを1/3 mという」と説明する教科書もあるが、テンプレートの形だけに着目すると、「2つ分」と「1/3」とでは形が異なっている。「1/3倍」を未習の段階では「2つ分」を「2倍」と読みかえてから数2のスロットに”1/3”を入れることもできない。逆に「1 mの1/3の長さ」を直接導くテンプレートになりうる「1 mの2の長さ」といった文はそれまでに用いられていない。

以上より、分数を導入する部分での分数の記号表現の使用は、長さ自体の表現だけを見ると数を示唆する使用になっているが、QQDでのその表現の説明まで含めて考えると、必ずしも自然とは言いがたく、”1/3”などの記号表現が数を表していると学習者が推測しにくいこと、”1/3 m”がどのような長さかを学習者が理解するのが難しいことを、テンプレート駆動の観点からは見出すことができる。

(2) 分子が1でない分数の導入

単位分数の導入に続けて、「1/3 mの2つ分の長さを2/3 mという」などとして、分子が1でない分数が導入される[5)]。この場合も「2/3 m」という表現だけを見ると、記号表現”2/3”が数2などと同様の対象を表すと学習者は推測しやすいが、「1 mの2つ分の長さを2 mという」という文を用いたテンプレート駆動による記号表現”2/3”の使用として見ると、”1/3 m”が”1 m”に当たるものとして学習者が認めているかが問題になる。また基準の長さを数えて長さを数値化するというQQD

の規則から考えると、1 m でないものを基準とすることは規則に合わないとも言える[6]。

この場合も教科書によっては「1 m の 2/3 の長さを 2/3 m という」と説明しており、この使用の時は、(1)で述べたように、「2 つ分」のスロットに記号表現”2/3”を入れることが、学習者に受容されるかが問題となる。

分子が 1 でない分数が導入された後に、そこまで現れた分数を用いて「分数」の用語が導入される：「1/3 や 3/4、4/5 のような数を分数という」。ここでは「1/3 や 3/4、4/5 のような数」として「1/3 や 3/4、4/5」が数であることは前提の上で、それらの種類の名前を説明している。つまり、”1/3”、”3/4”、”4/5”といった記号表現が数という対象を表すという前提である。上で見てきたようないくつかのテンプレート駆動による使用を経た上で、これらの記号表現がこの段階で既に対象媒介的となっており、学習者と教師でそれらの記号内容が共有されていると見なせることが期待されていることになる。

なお、分数の学習以前に、ND の中で新たな数を構成することも経験されている。例えば「10 が 3 こで 30」という文を、学習者は既に経験している。この文をテンプレートと見なし、数 10 のスロットに記号表現”1/4”、数 30 のスロットに”3/4”を代入し、「1/4 が 3 こで 3/4」として”1/4”と”3/4”を使用することもできる。この文が受容されるには”1/4”を数 10 に当たるものとして学習者が認めている必要はあるが、そうした形で分子が 1 でない分数を導入することもできる。しかし教科書ではこうした ND 内での導入ではなく、QQD の拡張という点から数を導入するという方法を選択していることになる。

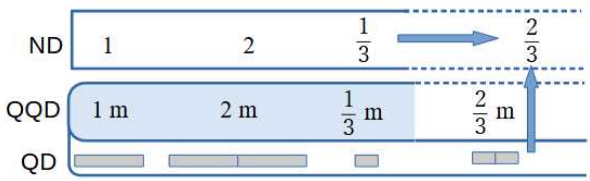

図３：数を構成する 2 つの道筋

(3) 数の相等関係

教科書では、1/5 m の 3 つ分や 1/6 L の 5 つ分などを考えた後に、1/5 m の 5 つ分や 1/6 L の 6 つ分を構成する QD の操作を考え、その結果が 1 m や 1 L と等しくなるという QQD のナラティブとしてまとめる。次にそれを ND のナラティブに翻訳し、「5/5 や 6/6 のように、分母と分子が同じ数のときは 1 と等しくなります」と説明している。さらにそのことを等式により「5/5＝1」や「6/6＝1」としても示している。

しかし、この学習以前に、2 つの数が「等しい」とする文が現れていないとすると、上の ND のナラティブは記号表現”5/5”や”6/6”のテンプレート駆動による使用ということにはならない。自然数の学習においては、2 つの自然数が「等しくなる」という文が現れることは期待できない。小数の学習では「0.1 が 10 個分で 1 になる」、つまり 0.9 の次は 1 であることは扱われるが、”5/5”のように、0.1 の 10 個分である数を表す”1”とは別の独自の記号表現はないので、そうした数を「数学的会話の焦点とする」(Sfard, 2000, p. 53)ことができない。したがって、2 が 10 個分で 20 に「なる」のと同じ意味で「0.1 が 10 個分で 1 になる」ことは話題にできても、0.1 の 10 個分である数が 1 と「等しい」ことを話題にすることはできない。

これは「5/5＝1」や「6/6＝1」という等式の場合も同様である。0.1 の 10 個分である数を表す記号表現がないのでそれが 1 と「等しい」ことを「＝1」の等式として表すことはできない。また自然数については、不等号の導入時にそれとの対比で「3＝3」といった式は現れるものの、両辺に異なる数字が入った等式は現れていないであろう。したがって、「5/5＝1」といった式は、テンプレート駆動による記号表現”5/5”の使用とは想定できない。

上の説明も等式もテンプレート駆動による使用とは言えないとすると、この説明や等式

を通して、”5/5”といった記号表現が数を表すのであろうと学習者が推測することはできない。むしろ、説明や等式は対象媒介的な使用という想定で、記号表現”5/5”が数 1 と「等しい」とか「＝1」となりうるような記号内容を持つことを、学習者がこの時点で既に理解している(Hofweber (2005)の p. 195 参照)と期待されていることになる。

仮にそうした想定が可能であるとしても、こうした説明や等式に ND のナラティブとして過去に出会っていないとすれば、この時の「等しい」や等号が記号内容に関わるどのような関係を指すのかを推測することも難しい可能性がある。

それ以前の学習でも 1 km＝1000 m や 0.1 L＝10 dL など、等号の両辺のスロットに量が入った式は現れている。したがって「5/5 m＝1 m」であれば、1/5 m の長さを 5 つ合わせた長さがちょうど 1 m になるという QQD でのナラティブとして解釈できる。またその正しさは、実際に 1/5 m の長さを 5 つ合わせるという QD での操作を行った結果が、1 m と表される長さと等しくなるかを直接比較により調べたり、5 等分したものを 5 つ合わせるので元に戻ると QD における推論を行ったりすることで確認できる。しかし ND からテンプレートとして用いることのできる文や等式が得られないとすると、ND のナラティブとしてどのように解釈すべきかを学習者は推測できないことになる。

一つの可能性は、数の規則は「具体的なモデルにより満足されていなければならない」というメタ規則に従うとして、QQD での事実である「5/5 m＝1 m」に従うように「5/5＝1」と「決める」と解釈するものである。

それでも、この規則が何を意味するのかは明確ではない。最も単純には、”5/5”という記号表現が現れた際には、これを”1”という記号表現で置き換えてもよいという、記号運用上の規則を述べたものと解釈することであろう。しかし記号表現”5/5”の何らかの記号内容を想定するとすると、記号内容に基づいて解釈する必要が出てくる。例えば、”5/5”と”1”は見た目は異なるが同じ記号内容を表すという意味に解釈することが考えられる[7]。ただし、”5/5”と”1”に共通する対象が何かは「捉えにくい(elusive)モノである」(Sfard, 2000, p. 38)との指摘もある。

”5/5”に分数として独自の記号内容を想定するとすれば、”5/5”の記号内容と”1”の記号内容が等しいという解釈になるが、今度はそれら 2 つの記号内容が「等しい」とはどのような意味かが問われることになる[8]。2 つの数の「大きさが等しい」という意味だと解釈することもできようが、そうなると今度は”5/5”と”1”それぞれの「大きさ」とは何で、それらが等しいことはどのように確認できるかが問題となってくる。

以上より、”5/5”が 1 と等しいという説明や等式は、テンプレート駆動による使用と見ることはできないが、しかし対象媒介的として想定しても、学習者にとってその意味を推測することは容易ではないと考えられる[9]。

第 3 学年では「1/10＝0.1」という式も現れるが、ここでの記号表現”1/10”の使用も、同様の理由でテンプレート駆動とは言えない。”1/10”が”0.1”の書き替えであるとの理解であれば可能かもしれないが、この使用を通して”1/10”が”0.1”とは別な独自の数であると学習者が推測することは期待しにくい。

また分数と小数の関連づけとして、同じ数直線の上に 1/10、2/10、･･･と 0.1、0.2、･･･をとったものを提示するが、同じ位置に 2 つの数が表示された数直線を学習者が経験していないとすると、数直線についても同様の問題が生じうると考えられる。数直線も一種のテンプレートと考える(Sfard (2000) の p. 55 参照)と、今の数直線もテンプレート駆動による”1/10”の使用とは考えづらいことになる。また、2 つの異なる数が同じ位置にあること

が何を意味するのかも、明確ではない可能性があろう。

Sfard (2000)は関数について、文字式やグラフを指して「これが２次関数です」とする言い方が、「これが２次関数の式(グラフ)です」「この式(グラフ)は２次関数を表しています」とする言い方へ変わることは、式やグラフが何らかの対象を表すものへと変容したことを示すとしている(p. 78)。同様に考えると”5/5”と”1”が「同じ数を表している」と言うことは、これらの数字が何らかの対象を表す状態へ変容することになる。ただし、算数ではこのような説明は通常行わないであろうし、数の場合にはこの変容が難しいと Sfard (2000)が指摘している(p. 78)ことにも注意する必要があろう。

(4) 数の大小比較

第３学年では 3/5 m と 4/5 m ではどちらが「長いか」について考える。(2)で見たように 3/5 m が 1/5 m の３つ分、4/5 m が４つ分であることから、学習者は QQD のナラティブとして「4/5 m の方が 3/5 m より長い」や「1/5 m だけ長い」が正しいと判断が可能である。教科書によってはこれを「3/5 m<4/5 m」と不等号を用いて表している。不等号の両辺のスロットに量が入った式は、それまでの量の学習では、第２学年のかさで少し扱われる程度で、ほとんど用いられていないが、より長い、より多いを不等号を用いて表す方法として、学習者にとっては受容しやすいと考えられる。

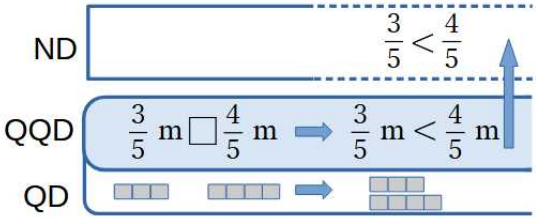

図４：２数の大小の判断

さらにこうした長さや液量の判断を基に、「3/5<4/5」といった ND における数の大小比較についてのナラティブも現れる。第２学年で不等号を学習して以降、「3<4」のように不等号の両辺のスロットに数が入った式は用いられてきている。したがって、「3/5<4/5」のように不等号の両辺のスロットに記号表現”3/5”、”4/5”を入れる使用は、テンプレート駆動となり得て、両辺のスロットで使用されることが、これらの記号表現が数３や４と同様の対象を指すのであろうと学習者が推測することを可能にすると期待できる。

ただし、第１学年後半から第３学年における自然数の学習では、数の大小を判断するためのルーチンとして、数の系列でどちらが後に来るか、あるいは数直線でどちらが右側にあるかを確かめることや、２位数や３位数の上の位から順に１桁の数の大小を比べることが用いられていた。しかし 2/5、3/5、4/5 などを自然数のように数の系列として並べることが行われていないと、ND の中での同様の判断の仕方は難しくなる。数直線で示される場合に長さの単位 m が付けられいる場合は、長さである 2/5 m、3/5 m、4/5 m の長短の比較となる。したがって、自然数の数直線とは異なり、数を直接比較するのでなく、QQD での長さの長短を ND での数の大小に読み替えることが継続していることになる。

分数ではむしろ、この読み替えが期待されているように見える。これは、第１学年で 10 までの数を学習したときに、数の大小をその数に対応するブロック等の多寡により判断し、QQD での判断を基に ND での数の大小を決めた判断に類似していると言える。つまり数の大小に関わる ND での規則が具体的モデルに当たる QQD での事実を満たすようにするというメタ規則(Sfard, 2007, p. 584 参照)が適用され続けている。

なお、第３学年における数直線に関しては、単位 m 等が付されていることに加え、学習に現れる分数が必ずしも、同一の数直線の上に表示されないという点でも、自然数や小数の学習における数直線の使用とは異なっている。

自然数の学習では、各学習において現れる数はすべて 1 本の数直線の上に位置づけられるので、それを基に大小を比較することができた。このことは、第 3 学年での小数の学習でも同様となっている。しかし分数では、学習に現れた数および既習の自然数を全て 1 本の数直線に表すことは行われない。(3)で言及した数直線も分母が 10 の分数と小数だけが表示されているのにすぎない。

この点においても、分数での数直線での利用はテンプレート駆動とは必ずしも言えず、少なくとも、学習した数を「数直線上で整列した 1 つの系列」として捉えることにはつながらないと考えられる。学習した数を「数直線上で整列した 1 つの系列」として捉えることが、児童なりの数の全順序集合のイメージとなり、逆にその集合の要素として見なすことが、大小比較の判断を支えるだけでなく、そもそもそれぞれの数字を数として理解することに寄与していたとするならば、分数においてはそうした理解の促進が、テンプレート駆動としては期待できないことになる。

(5) 分数の加法と減法

1＋2＝3 や 7－5＝2 といった自然数の加法と減法の式を ND からのテンプレートとして用い、上の式の数のスロットに分数を入れた式は、”2/5”などのテンプレート駆動の使用と考えることができる。したがって、こうした使用により、 ”2/5”などが数 2 などと同様の対象を指すのであろうと学習者が推測することを可能にすると期待できる。また、教科書では量の合併や減少の場面を用いているが、これらは第 1 学年で加法や減法を初めて学習した際にも用いられたので、”＋”や”＝”が表すものも推測することができよう。

加法の説明では「1/5 L の 2 つ分」「1/5 L の 3 つ分だから 3/5 L」といった文が用いられる。これは分子が 1 でない分数の導入にも現れていたので、QQD のナラティブとして学習者に受容されていることが期待できる。また、長さやかさの学習において加法・減法を行った際に、「1 cm が 4 つと 3 つだから」といった推論を行っている教科書もあり、その場合は、「1/5 L の 1 つ分と 2 つ分で 3 つ分だから 3/5 L」といった説明も、”1/5”や”3/5”のなどのテンプレート駆動による使用と考えられる。そしてここでも、ND での数の操作の規則が QQD での事実を満たすようにするというメタ規則に従うことで、「1/5 L＋2/5 L＝3/5 L」という QQD での事実をもとに、「1/5＋2/5＝3/5」という ND のナラティブが生成されることになる。

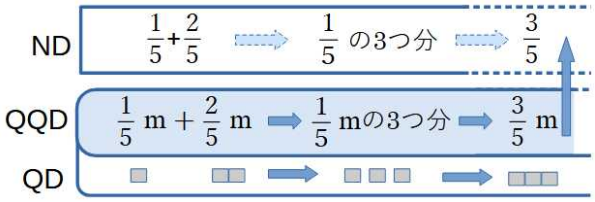

図５：加法の計算の説明

ただし(2)で述べたのと同様に、L により液量を表現する場合、1 L のいくつ分で表すという QQD の規則からは少し外れている。

他方で、QQD での加法・減法では自然数の加法・減法の結果や筆算を主に利用し、単位量の個数を数えることが明示的に行われていない場合、上の説明を学習者が受容できるためには、”1/5 L”を第 1 学年の加法・減法で用いたブロックと同様のものとして捉えることが必要となるかもしれない。

「1/5 の 3 こ分」という説明の場合は、まず分子が 1 でない分数の導入の際に、「1/5 の 3 つ分を 3/5 という」といった ND での分数の既定が明示的に行われていたかが問題となる。それがない場合は、QQD から ND への翻訳が学習者自身により既に行われ、学習者も記号表現”3/5”を対象媒介的に使用でき、その記号内容を「1/5 の 3 つ分の数」として捉えていることが必要となる。

ある数のいくつ分かにより和や差を説明する文は、小数の学習での「0.1 のいくつ分になるか」として現れているが、自然数の加法

や減法でも、10 のまとまりの個数を数えたり、1 万などを一つ分として考えたりして和や差を求めるという考え方には表れている。したがって、”1/5”の個数により和や差を正当化する ND のナラティブやそれにより和や差を求める ND のルーチンが学習者に受容されるかは、学習者にとって”1/5”が 10 や 1 万のように ND の対象として「一つ分」と見なせるようになっているかに拠ることになる。

なお、自然数や小数の加法・減法の学習では、最終的に筆算の形でまとめられ、その実行が ND でのルーチンとして機能していた。またその際には、位ごとの計算をするという考え方が基本的に採用されていた。位の部分を各単位に読み替えることで、筆算は長さや液量の学習でも利用されており、いわば ND のルーチンが QQD へ翻訳された形になっていた(布川, 2021a)。一方で分数の場合には、いわゆる筆算の形にまとめられることはなく、位という考えにより計算を説明することも行われない。つまり ND では最も標準的なルーチンが、分数についてはルーチンとはならない。また 1–3/5 で 1 を 5/5 と直す部分を自然数の減法における繰り下がりと対応させて受容できるかは、上述の「5/5＝1」をどのように解釈していたかに拠る。ND を分数を含むように拡張した時に、筆算のルーチンの部分ではそれ以前の数の学習との連続性が保たれないことになる[10)]。

５．分数を含むディスコースの生成と問題点

(1) テンプレート駆動の適切性

「1/3 m」や「3/4 <2/4」「1/5＋2/5」といった分数の記号表現の使用に関しては、これらの文の数のスロットに自然数が入った表現が以前の学習で用いられており、テンプレート駆動と考えることができ、それを基にして学習者は”1/3”等も自然数と同様の記号内容を持つのであろうと推測することが可能であった。

ただし、その際に現れる説明の文を吟味すると、必ずしもテンプレート駆動による分数の記号表現の使用とは言えない場合も含まれていた。「1 m を 3 等分した 1 こ分の長さ」、「1 m の 1/3 の長さ」、「1/3 m の 2 こ分の長さ」といった文は QQD の規則やそれに基づく文に正確に合致しているとは言えなかった。大小判断では、ND での判断を行うためには、記号表現の対象媒介的な使用がこの段階で既に必要であった。また ND における大小比較のためのルーチンが適用しづらいという問題も見られた。加法と減法についても、ND での説明には単位分数を 10 や 100 と同程度に対象媒介的に使用することが必要であり、また筆算という ND のルーチンはそもそも分数では使用しにくいという問題が見られた。

これらを考慮した場合、上述の説明が十分に機能しているかに注意を向ける必要が出てくる。例えば、”1/3 m”や”2/3 m”が表す記号内容を、教科書の説明により学習者が適切に捉えることができているのかが問題となる。2 m を 3 等分した 1 個分の長さを 1/3 m と考える子どもの存在も、そもそも”1/3 m”の記号内容が誤って捉えられていることによる可能性もある。

説明に際して、分数の記号表現の対象媒介的な使用を想定する場合は、単元の中でそれを促す手立てが準備され、必要な時点で対象媒介的な使用になると期待できるかの検討が必要となろう。

(2) ND のナラティブとしての曖昧性

上述のメタ規則に従い、QQD の拡張やそこでの量に関する事実に基づいて、ND を拡張したり数の相互関係や大小判断、演算結果を決めるという場合は、ND でのナラティブは QQD でのナラティブにより正当化されるというよりは、むしろ「そのように決める」ことになろう。

しかし実際には、QQD でのナラティブに続けて特に説明もなく、対応する ND のナラティブが ND の事実であるかのように提示さ

れていた。それによりQQDとNDとの関係が曖昧となり、分数はNDをどのように拡張したのかも曖昧になる可能性がある。冒頭で見た今井ほか(2022)の調査結果は、この曖昧さを反映しているとも考えられる。

例えば「2の2倍は4」「1の2倍は2」という文の最初のスロットに”1/2”という記号表現を入れた「1/2の2倍は1」という内発的な(endogenous)テンプレート駆動による使用を中心として分数の初期の学習を進めることもできよう。しかし現行の指導ではむしろ、量に関わるQQDのナラティブに依拠した外発的な(exogenous)テンプレート駆動の使用を中心に分数の初期の学習は進められている。いわば「ARとVRの間の家族的類似性」(Sfard, 2000, p. 65)に基づいてNDというVRを構築しようとしている。

その際、QQDとNDとの関係をあえて曖昧なままにしておくのか、それともNDを独立したディスコースとして学習者に提示するのか、するとすればどのタイミングと想定するのかなどが問題となる。今井ほか(2022)の調査結果とも関わり、そうした問題を検討する必要があると考えられる。

(3) NDにおける分数の規定

5(2)の曖昧性と関わり、分数が「どのような数であるか」をNDの中で説明することも考えられる。例えば探究する対象となるには、ある程度の一般性を持った“定義”により規定される必要があり、それにより「自律的な存在を得る」(Giusti, 1999, p. 42)とすると、分数が「自律的な存在を得」て、対象媒介的な探究や対話が成り立つためには、分数を算数なりに定義することも考えられる。

また数詞は他の対象を説明する形で導入され(Hofweber, 2005)、そこからある種の対象とされる捉え方に移行するともされる(有安, 2022; ワイルダー, 1980)。ただしそうした対象としての数はある「理論」に相対的なものである(須長, 2000)とすれば、我々が学習者に参加してほしいNDが明確となるよう、NDの中で他の数との関係に基づいて分数を説明する必要があるとも言えよう。それは、量などの具体的なモデルの観察から単純に抜き出すこととは、異なる捉え方でもある(Tall et al., 2000)。NDの中で分数を定義することが算数でも可能なのかどうか、それを採り入れるのかどうかが問題となる。つまり1/3や3/4などが「どのような数なのか」を、学習者に明確にするのかどうかの問題である。

例えば1/527は1/17＋1/31の和を理解する上で必要な分数であるが、多くの学習者が8527を量を通してではなく、1000や100、10のいくつ分によりNDの中で直接的に構成する形で出会っているであろうように、単位分数1/527についても、量を経由せずNDの中で構成することが期待されるかもしれない。だとすれば、学習者がNDの中で新たな分数を量に拠らずに構成できる程度に、NDに参加できるようになることも必要となろう。

(4) テンプレート駆動が利用できない場合

数の相等性は分数を自然数と関連づける重要な学習内容であるが、テンプレート駆動による使用とはなっておらず、したがってその効果も期待しづらい。簡単な等式であり、教師にとっては当然の事実であるが、実際は、以前の学習にテンプレートとして使える文がないこと、対象媒介的な使用をするとしても記号表現や等号の表す記号内容がそれほど明確ではないことが見出された。

分数を含むようにNDを拡張するという点で決定的に重要な等式であることを考えると、この式が何を意味しているのかの検討と、それを学習者に理解してもらえるための手立ての準備が必要となる。

また、等式の解釈によっては、1つの数を記号内容とする多くの記号表現が存在することになるが、これは自然数とは全く異なる特徴である。「5/5＝1」といった等式や「大きさの同じ数」に関わる新たなナラティブが含

まれるディスコースになるという意味では、分数の導入により ND は単に拡張とされたと言うよりも、新たなディスコースに生まれ変わるとも言える。正の自然数のディスコースから正の有理数のディスコースへの変容である。

自然数では数字をカードに一つずつ書いたものを系列として順に並べる活動がしばしば見られ、これが数直線への移行を支えているように見える。数字をカードに書いて並べた表現も視覚的媒介物(Sfard, 2008)であり、テンプレートになりうると考えるならば、分数でもテンプレート駆動による同様の提示を、単位 m などの伴わない数直線への移行を支える手立てとして利用することも考えられる。しかし 4(4)で述べたように、現れる分数全てを系列としては並べにくいことから、分数ではこの表現を利用しにくいことになる。

対応するテンプレートが以前のディスコースに見出せないとすると、新たなナラティブが生成されることになる。逆に以前のテンプレートが使いにくいとすると、それに関わるナラティブは生成できないことになる。ND を分数を含むよう拡張すると、こうした意味で、全く新たなディスコースが生じると考えることもできる。この点から分数の学習の難しさを検討することも必要であると言えよう。

(5) テンプレート駆動の可能性

自然数の学習では、計算のきまりを利用し工夫して計算するという文脈で、暗算が行われることがある。その工夫を行うことは、一種の数学的推論であり「ナンバー・トーク (number talks)」(Woods, 2022)とも呼ばれる。他方で分数に関しては、第 3 学年の加法・減法はもちろん、その後の学習でも、分子や分母についての比較的小さい自然数の四則演算を行うだけなので、こうしたナンバー・トークを行う機会が少ない。

暗算までいかなくても、例えば小学校第 1 学年で自然数を学び始めた直後には、数の分解・合成が扱われる。この際、「7 は 3 と 4」のように、数どうしを関係付けることになる。確かに学習の際はブロックを QD において操作し、その結果を記述するという形をとるが、しかし観察結果は QQD での個数ではなく、上の例のように数の間の関係として、つまり ND での事実として記述される(布川, 2021b)。

この「7 は 3 と 4」という文は、3 つの数のスロットに分数を入れて使用するためのテンプレートとして利用可能である。特に和が 1 になる「1 は 2/5 と 3/5」といったテンプレート駆動の使用は、数 10 の分解・合成に対応するものと考えることもできるし、分数を自然数と関係付けるという点で、ND において必要な学習とも考えられる。特に「数の関係網 (network of number relationships)」を構成することが数を対象として捉えることの本質であるとの指摘(Gravemeijer & Bruin-Muurling, 2019)を踏まえると、数の学習にとって本質的に重要な活動とも言えよう。しかし、分数の学習では、そうしたテンプレート駆動による分数の分解・合成での使用は明確には行われていないように見える。

4(2)でも触れたが、分子が 1 でない分数を ND の中で定義しようとすると、単位分数を 10 と同程度には数として捉え、それを 1 つ分としてそのいくつ分かを考える必要がある。10 を 1 つ分と捉えることは必ずしも容易ではない(Cobb & Wheatley, 1988)が、加法や減法に加え、新たな数の構成など様々な場面で 10 の個数を考える機会のあることが、その捉え方を促していると考えられる(布川, 2024b)。だとすると、単位分数に関しても同様の経験が意図的に準備される必要があることになる。10 や 100 の個数に言及した文を用いて分数の記号表現をテンプレート駆動により使用してみるなど、単位分数を数えることが自然に思える程度に、対象媒介的に使えるようになる機会が保証されているかが問題となる。

６．おわりに

新たな数を学習する際、一つの拠り所は既習の数についての知識であろう。自然数の使われ方との類似性を吟味するという点で、本稿で行ってきたような、テンプレート駆動による使用と見なせるかを確認することは、学習者から分数も自然数と同様の数であると感得してもらうためにも必要である。さらに自然数の QQD での使用と ND での使用との関係や前者から後者の移行を確認することは、分数を ND において明確に位置づけるための手立てを考える(布川, 2021b)上でも役立つと期待される。

本稿ではテンプレート駆動と対象媒介的な使用とを視点としたが、Sfard (2008)の述べる受動的使用からルーチン駆動、フレーズ駆動を経て対象駆動へと至る過程(pp. 181-182)では、変容をさらに詳細に捉えようとしている。そうした視点も援用することで、分数が空の記号表現から記号内容と一体化した記号へと移行する過程をていねいに検討することも必要となろう。

註および引用・参考文献

1) 本稿では紙幅の関係から、$\frac{a}{b}$を a/b のように表すことにする。
2) Sfard (2008)がフレーズ駆動と呼ぶ語の使用の仕方は、テンプレート駆動よりも自由度が高くなり、個人の裁量によって他者から聞いたことのない文でも、語を含むフレーズを使用できる状態と考えられる。文章題において分数で答えよと言われればできるのに、多段階の問題の途中結果を分数で表して後で使うことはできない(布川, 2023a)子どもは、こうした自由度が低い状態に留まっている可能性もあろう。
3) 本来であれば Discourse on Quantities から DQ などとすべきであろうが、本稿では各ディスコースを明確にするため Q や QQ、N を前に出し、QD、QQD、ND と呼んでおく。
4) 我々は”1/3”を既に数字として利用しているので当然のように感じるが、仮に同じ長さを”サズアン m”と表現すると知っただけだとしても、「サズアンとサズアンをたす」と言えても「サズアンは甘い」とは言えなそうであるという判断はできる(Sfard, 2000, pp. 60-61)。
5) これについても 4)の「サズアン」を用いて、「サズアン m の 2 つ分の長さをサズドウ m という」としても、当該の量を表現し、コミュニケーションすることはできよう。
6) 「3 m の 2 つ分は 6 m」という時は、3 m も 6 m も既に 1 m を基準として数値化され、わかっていることが前提となっている。
7) 例えば”さん”と”three”は記号表現としては異なるが、それらの記号内容は通常、同じモノと想定されている。 $1=0.\dot{9}$ では、大人でも違和感を持つ人もあろう。
8) 数学者がよく行うような有理数の構成をすれば、この等号も同値関係として解釈できよう。すなわち、自然数の順序対について (a, b) と (c, d)が同値であることを $ad=bc$ で定義するとともに、自然数 n を$(n, 1)$として順序対の集合に埋め込めば、(5, 5)〜(1, 1)となるので、これを 5/5=1 の表す内容と解釈するのである。ただ、これが算数の学習で採用できる解釈でないことは当然であろう。
9) 逆にこれを 1/5 の定義として分数を導入してしまうことも考えられる(布川, 2023b)。
10) この点については、分数の学習は、第 6 学年で除法も乗法の形に表すと学習することで、むしろ文字式の学習に接続していると見ることもできよう。

有安和人 (2022). 数学における唯名論への反論. 哲学(関西大学), *40*, 1-21.

Cobb, P. & Wheatley, G. (1988). Children’s initial understandings of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *10* (3), 1-28.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics

classroom situations. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 99-122.

Giusti, E. (1999). 数はどこから来たのか：数学の対象の本性に関する仮説 (斎藤憲訳). 共立出版. (原著は 1999 年)

Gravemeijer, K., & Bruin-Muurling, G. (2019). Fostering process-object transitions and a deeper understanding in the domain of number. *Quadrante*, *28* (2), 6-31.

Hofweber, T. (2005). Number determiners, numbers, and arithmetic. *The Philosophical Review, 114* (2), 179-225.

今井むつみ, 楠見孝, 村杉伸一郎, 中石ゆうこ, 永田良太, 西川一二, 渡部倫子 (2022). 算数文章題が解けない子どもたち：ことば・思考の力と学力不振. 岩波書店.

布川和彦 (2021a). 分数学習のための基本枠組みの試論：変換としての分数とそのカプセル化. 上越数学教育研究, 36, 1-16. http://hdl.handle.net/10513/00008476 (2025 年 2 月 26 日アクセス)

布川和彦 (2021b). 量から数への移行の観点からの自然数と分数の学習の比較. 上越教育大学研究紀要, *40* (2), 361-372. http://hdl.handle.net/10513/00008350 (2025 年 2 月 26 日アクセス)

布川和彦 (2022).「量分数」の再検討：「測定値としての分数」を視点として. 日本数学教育学会誌, *104* (2), 2-13. https://doi.org/10.32296/jjsme.104.2_2

布川和彦 (2023a). 分数が明示されない文章題における小学 6 年生の解決の様相. 上越数学教育研究, *38*, 1-10. http://hdl.handle.net/10513/00008583 (2025 年 2 月 27 日アクセス)

布川和彦 (2023b). 数としての分数導入への試論. 上越教育大学研究紀要, 43, 107-116. http://hdl.handle.net/10513/0002000014 (2025 年 2 月 26 日アクセス)

布川和彦 (2024a). 算数科における数と計算および数量関係の学習内容の整理. 上越教育大学教職大学院研究紀要, *11*, 195-205. http://hdl.handle.net/10513/0002000148 (2025 年 2 月 26 日アクセス)

布川和彦 (2024b). 小学校算数科における二面性の問題. 上越教育大学研究紀要, 44, 125-135. http://hdl.handle.net/10513/0002000277 (2025 年 2 月 26 日アクセス)

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, *16* (4), 567–615. https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

須長一幸 (2000). フレーゲ算術と構造主義. 科学基礎論研究, *28* (1), 9-14.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E. & Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior, 18* (2), 223-241.

田村二郎 (1978). 量と数の理論. 日本評論社.

ワイルダー, R. L. (1980). 数学の文化人類学 (好田順治訳). 海鳴社. (原著は 1968 年)

Woods, D. M. (2022). Number talks: Engaging students in mathematical reasoning. In P. M. Jenlink (Ed.), *Mathematics as the Science of Patterns: Making the Invisible Visible to Students through Teaching* (pp. 205-228). Information Age Publishing.