

等周不等式について

中川仁

上越教育大学

2022年9月30日

等周問題

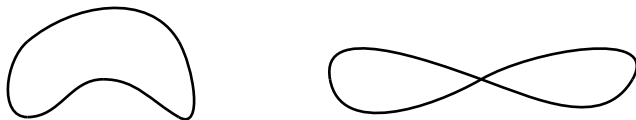


図 1: 単純閉曲線 (左) と単純でない閉曲線 (右)

等周問題とは「与えられたひもで平面上に最大の面積を囲め」という問題である．数学的に正確にいうと次のようになる．

与えられた長さ l の単純閉曲線 C で最大の面積を囲むものを求めよ．

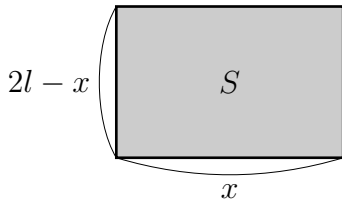
閉曲線：始点と終点が一致している曲線，

単純：途中で自分自身に交わらない．

答えは円になることが予想されるが，それを正確に証明することが問題である．

長方形 (2 次関数)

周囲の長さが一定の長方形で最大の面積をもつものは何か？



周囲の長さを $4l$ ，長方形の横の長さを x
⇒ 縦の長さは $2l - x$ ，面積 S は

$$S = x(2l - x) = 2lx - x^2 = l^2 - (l - x)^2 \leq l^2.$$

よって S は $x = l$ のとき，すなわち正方形のとき最大値 l^2 をとる．

長方形 (相加相乗平均の不等式)

縦の長さ $2l - x$ を y とおけば

$$x + y = 2l, \quad S = xy.$$

相加相乗平均の不等式により

$$S = xy \leq \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 = l^2, \quad \text{等号が成立} \iff x = y = l.$$

相加相乗平均の不等式は

「周囲の長さが一定の長方形の中では正方形が最大の面積をもつ」という幾何学的な意味をもっている。

三角形 (1 辺を固定して考える)

周囲の長さ $2l$ の三角形で最大の面積をもつものは正三角形である。

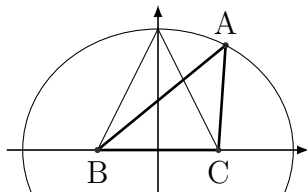


図 2: 底辺を固定した三角形

まず底辺の長さ $BC = a$ と他の二辺の和 $AC + AB = b + c = d$ が与えられた $\triangle ABC$ を考える．頂点 A は点 B, C を焦点とする楕円上にある．その面積が最大になるのは高さが最大になるときで，それは図 2 からわかるように $AB = AC$ の二等辺三角形のときである．

二等辺三角形の底辺を変化させる

上記のことから、周の長さが $2l$ (一定) であるような三角形 ABC で面積が最大のものは $AB = AC$ の二等辺三角形である。二等辺三角形でなければならない。

底辺が a で他の二辺が $l - a/2$ の二等辺三角形の高さは

$\sqrt{\left(l - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - la}$ であるから面積は

$$S = \frac{1}{2}a\sqrt{l^2 - la} = \frac{1}{2}\sqrt{l^2a^2 - la^3}.$$

$f(x) = l^2x^2 - lx^3$ とおけば

$$f'(x) = 2l^2x - 3lx^2 = lx(2l - 3x) = 0 \implies x = 0, 2l/3.$$

$f(x)$ は $x = 2l/3$ で極大値。それは $0 \leq x \leq l$ における最大値。よって $\triangle ABC$ の面積が最大になるのは一辺の長さ $2l/3$ の正三角形のときである。

三角形 (ヘロンの公式)

三辺の長さが a, b, c の三角形の面積を S , 周の長さを $2l$ とする.
 $2l = a + b + c$ である. ヘロンの公式により

$$S^2 = l(l-a)(l-b)(l-c).$$

三角形の一辺の長さは他の二辺の長さの和より小さいことから,
 $a < b + c$, $2a < a + b + c = 2l$, $a < l$ となる. 同様に $b < l$, $c < l$.
この等式と相加相乗平均の不等式より

$$\frac{(l-a) + (l-b) + (l-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(l-a)(l-b)(l-c)} = \left(\frac{S^2}{l}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{l}{3} \geq \left(\frac{S^2}{l}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{l^3}{27} \geq \frac{S^2}{l}, \quad S \leq \frac{l^2}{3\sqrt{3}}.$$

ここで

$$\text{等号が成立} \iff l-a = l-b = l-c \iff a = b = c = \frac{2l}{3}.$$

Steiner の対称化 1

単純閉曲線 C で囲まれた領域を D とする。
 D の任意の 2 点を結ぶ線分が D に含まれる
とき D は**凸である**という。 D が凸でなければ
図 3 のように凹の部分曲線を線分で置き換
えれば周囲の長さは短くなり囲む面積は大き
くなる。変形後の図形を適当に拡大して周の
長さが元の C の周の長さと同じにできて D
より大きい面積を囲むことができる。

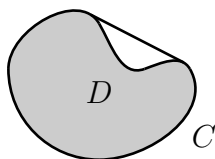


図 3: 凸でない領域

したがって以下の議論では D は凸として差し支えない。

Steiner の対称化 2

C を与えられた長さ l をもつ単純閉曲線とする.
 C が円でなければ周の長さを変えずに面積を大きくすることができることを示す. 曲線 C 上に 1 点 x をとり, x から C 上を周の長さの半分だけうごいた点を y , x と y を結ぶ線分を E とする. x と y を境にし, C は同じ長さの曲線 C_1 と C_2 に分けられる (図 4). C で囲まれた領域 D も E によって領域 D_1 と D_2 に分けられる. そのとき D_1 の面積 $|D_1|$ と D_2 の面積 $|D_2|$ が等しくないとして, 例えば $|D_1| > |D_2|$ であるとすると, E を軸として C_1 と対称な曲線を C'_2 として C_2 を C'_2 で置き換えることによって, 周囲の長さを変えずに囲む面積を大きくできる (図 4). よって以下, $|D_1| = |D_2|$ であるとする.

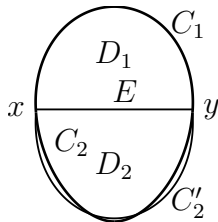


図 4: 周の二等分

Steiner の対称化 3

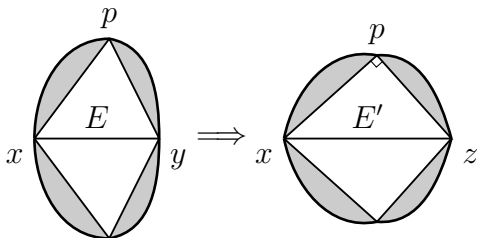


図 5: 板と蝶番で作ったものを変形する

C_1 が半円 $\iff C_1$ 上のすべての点 p に対し $\angle xpy$ が直角
 C_1 が E を直径とする半円でない $\implies \exists p \in C_1, \angle xpy \neq$ 直角.
図 5 の陰影の部分は板でつくり, p のところを蝶番でつないで自由
にうごくようにしておく. y を適当な場所 z にうごかして
 $\angle xpz =$ 直角にする. このときの線分 xz を E' で表す.

Steiner の対称化 4

陰影の部分は板 \implies \cdot 弧 \widehat{ppy} と弧 \widehat{xpz} の長さは等しい。
 \cdot 陰影の部分の面積にも変化はない。

$\triangle xpy$ と $\triangle xpz$ の面積を比べる. それらを $|\triangle xpy|$, $|\triangle xpz|$ で表す.
 $\triangle xpz$ は底辺 xp , 高さ pz の直角三角形,
 $\triangle xpy$ は底辺 xp , 高さは py より小さい ($\because \angle xpy \neq \text{直角}$), $py = pz$

$$\begin{aligned} \implies |\triangle xpz| &= \frac{1}{2}xp \cdot pz \\ |\triangle xpy| &< \frac{1}{2}xp \cdot py = \frac{1}{2}xp \cdot pz = |\triangle xpz| \end{aligned}$$

したがって, はじめに与えられた周の長さを変えずに領域の面積を増やすことができた.

すなわち, C が円でなければ周囲の長さを変えずに面積を大きくすることができる.

等周不等式

C : 単純閉曲線, l : C の長さ, D : C で囲まれる領域, S : D の面積とすると, 次の**等周不等式**が成り立つ.

$$(2.1) \quad 4\pi S \leq l^2.$$

- C が半径 r の円 $\implies 4\pi S = 4\pi^2 r^2 = (2\pi r)^2 = l^2$ (等号成立).
 - C が円でないとすると Steiner の対称化により周の長さが同じ l で S より大きな面積 S' を囲む単純閉曲線 C' が得られる.
- C' に対する等周不等式により

$$4\pi S < 4\pi S' \leq l^2$$

となる. よって C については $4\pi S < l^2$ となる. したがって等周不等式で等号が成立するのは円の場合に限ることが示され, 等周問題の答えは円であることが完全に証明されたことになる.

以下, 小林 [3] にしたがって C. Crone (1904) と G. Frobenius (1915) による証明を紹介する.

等周不等式の証明 1

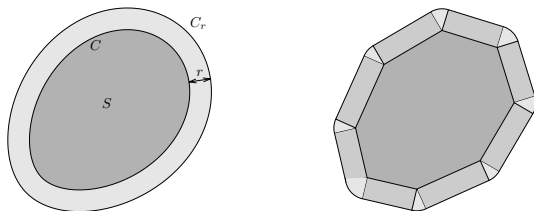


図 6: C を r だけ外に膨らませた曲線, 多角形による近似

C, l, D, S はこれまで通り. D は凸としてよい. $r > 0$,
 C_r : C を r だけ外に膨らませた曲線, D_r : C_r で囲まれる領域.

D_r : D のある点からの距離が r 以下の点の集合.

l_r : C_r の長さ, S_r : D_r の面積, とすれば次の等式が成り立つ.

$$(2.2) \quad l_r = l + 2\pi r,$$

$$(2.3) \quad S_r = S + lr + \pi r^2. \quad (\text{高次元 Steiner 公式})$$

等周不等式の証明 2

C は多角形で近似できるから (2.2) と (2.3) を C が多角形の場合に証明すればよい (図 6 の右).

この場合, C_r は多角形 C の各辺を直角の方向に外側に r だけ平行移動し, 隙間は半径 r の円弧でつないだもの.

C_r の線分の部分は全部合わせて C と同じ長さの l ,

円弧の部分を平行移動して集めると半径 r の円 \implies 長さ $2\pi r$.

\therefore n 角形 C の各頂点 P_i における円弧の中心角を θ_i とすれば

$$\implies P_i \text{ における内角} = 2\pi - \pi/2 - \pi/2 - \theta_i = \pi - \theta_i.$$

n 角形の内角の和は $(n-2)\pi$ だから $\sum_i (\pi - \theta_i) = (n-2)\pi$.

$$\therefore \sum_i \theta_i = 2\pi.$$

よって $l_r = l + 2\pi r$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{長方形の部分の面積は全部で } lr \\ \text{扇形の部分の面積は全部で } \pi r^2 \end{array} \right\} \implies S_r = S + lr + \pi r^2.$$

等周不等式の証明 3

ここで次節で述べる **Brunn-Minkowski の不等式** (定理 3.1) を,
 $n = 2$, $A = D$, $B =$ 単位円板 として用いれば

$$\sqrt{S_r} \geq \sqrt{S} + \sqrt{\pi r^2}$$

が成り立つ. これと (2.3) から

$$\begin{aligned} S + lr + \pi r^2 = S_r &\geq \left(\sqrt{S} + \sqrt{\pi r^2} \right)^2 = S + 2\sqrt{\pi S} r + \pi r^2, \\ lr &\geq 2\sqrt{\pi S} r, \quad l^2 \geq 4\pi S \end{aligned}$$

となって, 等周不等式 $4\pi S \leq l^2$ を得る.

等周不等式の証明 4

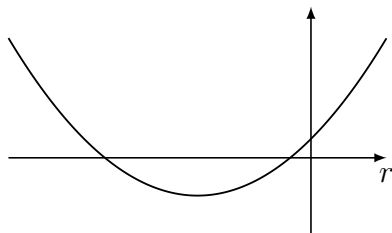


図 7: r の 2 次関数 $\pi r^2 + lr + S$ のグラフ

(2.3) を r を変数とする 2 次式と考える. $r > 0$ に対しては S_r が D_r の面積であるから $\pi r^2 + lr + S > 0$ である. またこの 2 次式の判別式は $l^2 - 4\pi S$ である. したがって等周不等式 $l^2 \geq 4\pi S$ を証明するためには r の 2 次関数 $\pi r^2 + lr + S$ のグラフが図 7 のようになること, すなわち適当な $r < 0$ に対して $\pi r^2 + lr + S \leq 0$ となることを示せばよい.

等周不等式の証明 5

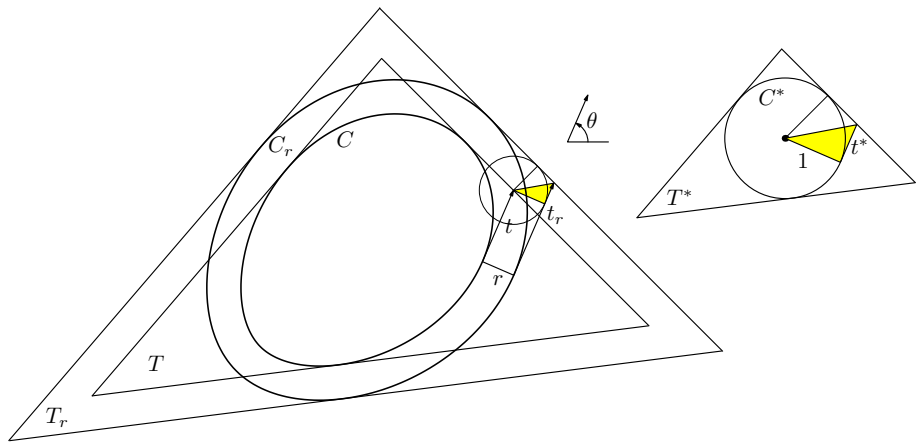


図 8: C に外接する三角形 T と C_r に外接する三角形 T_r

等周不等式の証明 6

T : C に外接する三角形

T_r : C_r に外接する三角形

T^* : 単位円 C^* に外接し, T と相似な三角形

を対応する辺がそれぞれ平行になるようにかく (図 8).

$|T_r|$: T_r の面積, $|T^*|$: T^* の面積, a : T の内接円の半径.

T_r の内接円の半径 = $a + r$ (図 9).

T_r は T^* と相似, 内接円の半径の比が $(a + r) : 1$

$\implies T_r$ は T^* を $(a + r)$ 倍に拡大したものの, したがって

$$(2.4) \quad |T_r| = (a + r)^2 |T^*|$$

となる.

等周不等式の証明 7

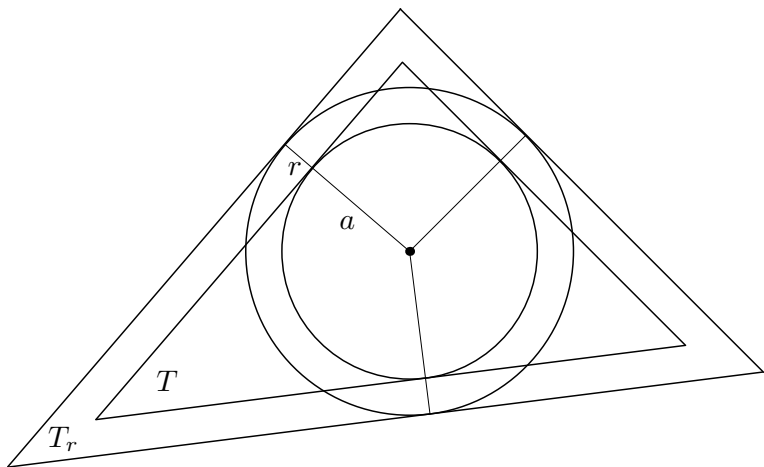


図 9: T の内接円の半径 a と T_r の内接円の半径 $a + r$

等周不等式の証明 8

θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の関数 $t = t(\theta)$, $t_r = t_r(\theta)$, $t^* = t^*(\theta)$ を次のように定義する. 角 θ の方向ベクトルを平行移動して C に正の方向で接するところまでうごかす. そのベクトルを伸縮して先端が T の辺に到達するようにして, その長さを $t(\theta)$ と定義する. $t_r(\theta)$, $t^*(\theta)$ も同様に定義する. 図 8 から関係

$$(2.5) \quad t_r(\theta) = t(\theta) + rt^*(\theta)$$

が成り立つことがわかる.

\therefore 図 8 の 2 つの黄色い直角三角形は相似である.

$$\implies 1 : r = t^* : (t_r - t), \quad t_r - t = rt^*. \quad \therefore t_r = t + r * t^*.$$

等周不等式の証明 9

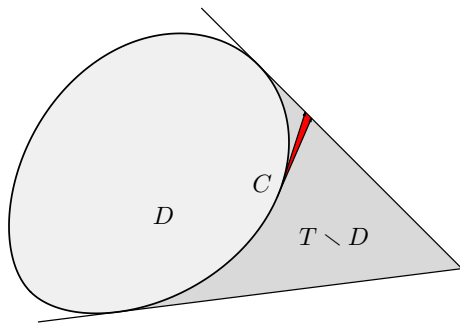


図 10: 三角形領域 T から領域 D を除いた領域

等周不等式の証明 10

三角形領域 T から領域 D を除いた領域 (3つの部分に分かれる) の面積を計算する (図 10). θ が $\theta + \Delta\theta$ までうごいたとき, 長さ $t(\theta)$ の接線の一部と長さ $t(\theta + \Delta\theta)$ の接線の一部とによってできる図形を考える (図 10 の赤の部分).

これは $\Delta\theta$ が小さいと半径が $t(\theta)$ で角度が $\Delta\theta$ の扇形に近いからその面積は大体 $\frac{1}{2}t(\theta)^2\Delta\theta$ (他の頂点についても同様).

$$|T \setminus D| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t(\theta)^2 d\theta,$$

$$(2.6) \quad S = |T| - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t(\theta)^2 d\theta.$$

等周不等式の証明 11

全く同様にして

$$(2.7) \quad S_r = |T_r| - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t_r(\theta)^2 d\theta.$$

(2.2) より $S_r = \pi r^2 + lr + S$, (2.4) と (2.5) を (2.7) の右辺に代入し

$$(2.8) \quad S_r \pi r^2 + lr + S = (r+a)^2 |T^*| - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (t(\theta) + rt^*(\theta))^2 d\theta.$$

$(t(\theta) + rt^*(\theta))^2$ を展開し項別に積分すれば, 右辺も r の 2 次多項式.
両辺とも r の 2 次の多項式だから

すべての $r \geq 0$ に対して成立 \implies すべての r について成立.

特に $r = -a$ とおけば (2.8) の右辺は 0 以下. これで

$\pi r^2 + lr + S \leq 0$ となる $r < 0$ の存在が示された.

Brunn-Minkowski の不等式

$A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対して, その **Minkowski 和** $A + B$ を

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

によって定義する. いま, A, B を有界閉集合とする. このとき $A + B$ も有界閉集合である.

$A \subset \mathbb{R}^n$ のルベーグ測度を $\mu(A)$ で表す. 次の定理が成り立つ.

定理 3.1 (Brunn-Minkowski の不等式)

\mathbb{R}^n の有界閉集合 A, B に対して

$$(3.1) \quad \sqrt[n]{\mu(A + B)} \geq \sqrt[n]{\mu(A)} + \sqrt[n]{\mu(B)}.$$

等周不等式の証明 3 に戻る

凸体

\mathbb{R}^n の 2 点 x, y を結ぶ閉線分を $[x, y]$ で表す.

$$[x, y] = \{(1 - \alpha)x + \alpha y \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

\mathbb{R}^n の部分集合 A が

$$x, y \in A \implies [x, y] \subset A$$

を満たすとき, A は**凸集合**であるという. 凸集合 A がコンパクトであるとき, すなわち有界閉集合であるとき, A を**凸体**という.

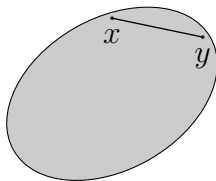


図 11: 凸体の例

超多面体

\mathcal{K}^n : \mathbb{R}^n の凸体全体のなす集合

$B(r)$: 原点 0 を中心とする半径 r の閉球

$$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}.$$

ここで $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

\mathbb{R}^n の有限個の点 v_0, v_1, \dots, v_m の 1 次結合で

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i v_i \quad (\alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1)$$

の形のものを v_0, v_1, \dots, v_m の凸結合という. $\text{conv}\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ によって v_0, v_1, \dots, v_m の凸結合の全体を表す. $\text{conv}\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ は凸集合かつ有界閉集合となり, したがって凸体である.

$P = \text{conv}\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ と表せるような凸体 P を**超多面体**とよぶ.

\mathcal{P}^n : \mathbb{R}^n の超多面体の全体のなす集合.

任意の凸体 $K \in \mathcal{K}^n$ は超多面体 $P \in \mathcal{P}^n$ によって近似される.

凸体の体積と表面積

超多面体 $P \in \mathcal{P}^n$ の体積 $V(P)$ と表面積 $F(P)$ は n に関して帰納的に定義される. $K \in \mathcal{K}^n$ を凸体とする. K の体積と表面積は K に収束する超多面体の列 $\{P_j\}$ を用いて

$$V(K) = \lim_{j \rightarrow \infty} V(P_j), \quad F(K) = \lim_{j \rightarrow \infty} F(P_j)$$

によって定義される. $V(K)$ は K のルベグ測度 $\mu(K)$ と一致する.

$K, L \in \mathcal{K}^n$ を凸体とする. $\alpha > 0$ に対して

$K + \alpha L = \{a + \alpha b \mid a \in K, b \in L\}$ も凸体である. このとき体積 $V(K + \alpha L)$ は α の n 次多項式になることが**混合体積**という概念を用いて示される. ([mixedvolume.pdf](#))

Steiner の公式

凸体 K と閉球 $B(\varepsilon) = \varepsilon B(1)$ の Minkowski 和 $K + B(\varepsilon)$ の体積 $V(K + \varepsilon B(1))$ は ε の n 次多項式であり, その定数項は $V(K)$, ε の 1 次の係数は K の表面積 $F(K)$ になる. したがって次の **Steiner の公式** が成り立つ.

$$(3.2) \quad F(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{V(K + B(\varepsilon)) - V(K)}{\varepsilon}.$$

$n = 2$ の場合, 単純閉曲線 C で囲まれた領域 D とし, C を $r > 0$ だけ外に膨らませた凸閉曲線を C_r , C_r で囲まれた領域を D_r とする. $K = D$, $K + B(r) = D_r$ であり, D_r の面積が r の 2 次式 (2.3) で与えられること, (2.3) の r の係数が C の周の長さ l であった. 上に述べたことはこのことを一般化したものである. また $K = B(1)$ とすれば $V((1 + \varepsilon)B(1)) = (1 + \varepsilon)^n V(B(1))$ であるから (3.2) より $F(B(1)) = nV(B(1))$ を得る.

Minkowski の不等式

Brunn-Minkowski の不等式 (定理 3.1) から次の Minkowski の不等式が得られる.

定理 3.6 (Minkowski の不等式)

$K, L \in \mathcal{K}^n$ を n 次元の凸体とし

$$V(K + tL) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i t^i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

とかく. このとき, $a_0 = V(K)$, $a_n = V(L)$ であり, さらに

$$a_1^n \geq V(K)^{n-1} V(L)$$

が成り立つ.

凹関数

関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が任意の $x, y \in [a, b]$ と任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \geq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

を満たすとき、 f は**凹関数**であるという。

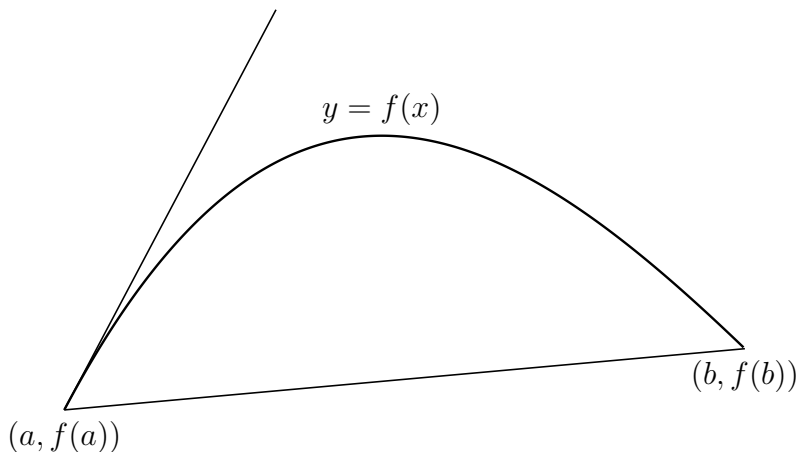
補題 3.7

関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が凹関数ならば

$$f^+(a) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成り立つ。

凹関数のグラフと右側微分係数



Minkowski の不等式の証明 1

[定理 3.6 の証明] $t \rightarrow 0$ とすれば $V(K) = a_0$ を得る.

$V(K + tL) = t^n V(t^{-1}K + L)$ であるから

$$V(t^{-1}K + L) = a_n + na_{n-1}t^{-1} + \cdots + a_0t^{-n}$$

において $t \rightarrow \infty$ とすれば, $V(L) = a_n$ を得る. 関数 $f(t) = V(K + tL)^{\frac{1}{n}}$ ($t \in [0, 1]$) は凹関数である. 実際, $x, y, \alpha \in [0, 1]$ とすると定理 3.1 により

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= V(K + [\alpha x + (1 - \alpha)y]L)^{\frac{1}{n}} \\ &= V(\alpha(K + xL) + (1 - \alpha)(K + yL))^{\frac{1}{n}} \\ &\geq \alpha V(K + xL)^{\frac{1}{n}} + (1 - \alpha)V(K + yL)^{\frac{1}{n}} = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \end{aligned}$$

したがって補題 3.7 より

$$f^+(0) \geq f(1) - f(0) = V(K + L)^{\frac{1}{n}} - V(K)^{\frac{1}{n}}.$$

Minkowski の不等式の証明 2

$$f^+(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{V(K + \varepsilon L)^{\frac{1}{n}} - V(K)^{\frac{1}{n}}}{\varepsilon}.$$

ここで $V(K + \varepsilon L) = V(K) + na_1\varepsilon + \cdots + V(L)\varepsilon^n$.

したがって $f^+(0) = \frac{1}{n}V(K)^{\frac{1}{n}-1}na_1 = V(K)^{\frac{1}{n}-1}a_1$.

よって $V(K)^{\frac{1}{n}-1}a_1 \geq V(K + L)^{\frac{1}{n}} - V(K)^{\frac{1}{n}}$ を得る. 定理 3.1 を $\alpha = 1/2$ として用いれば

$$V(K + L)^{\frac{1}{n}} = 2V\left(\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}L\right)^{\frac{1}{n}} \geq V(K)^{\frac{1}{n}} + V(L)^{\frac{1}{n}},$$

$$V(K)^{\frac{1}{n}-1}a_1 \geq V(K + L)^{\frac{1}{n}} - V(K)^{\frac{1}{n}} \geq V(L)^{\frac{1}{n}},$$

$a_1 \geq V(K)^{1-\frac{1}{n}}V(L)^{\frac{1}{n}}$, $a_1^n \geq V(K)^{n-1}V(L)$ を得る.



等周不等式 1

系 3.8 (等周不等式)

$K \in \mathcal{K}^n$ を n 次元の凸体とする. このとき

$$\left(\frac{F(K)}{F(B(1))} \right)^n \geq \left(\frac{V(K)}{V(B(1))} \right)^{n-1}.$$

[証明] 定理 3.6 において $L = B(1)$ とおけば

$$a_1^n \geq V(K)^{n-1} V(B(1)).$$

ここで Steiner の公式 (3.2) より $na_1 = F(K)$ である. よって $F(B(1)) = nV(B(1))$ よりこれは次のようにかきなおせる.

$$\frac{F(K)^n}{F(B(1))^n} = \frac{n^n a_1^n}{n^n V(B(1))^n} \geq \frac{V(K)^{n-1}}{V(B(1))^{n-1}}.$$

等周不等式 2

等周不等式は与えられた表面積をもつすべての n 次元凸体の中で n 次元球は体積が最大であることを主張している。

注意 3.9

定理 3.6 の Minkowski の不等式において等号が成立するためには、 K と L が相似であることが必要十分であることが証明される ([1, Chapter 3])。したがって等周不等式において等号が成立するのは K が $B(1)$ と相似のとき、そのときに限る。 K が $B(1)$ と相似であることは K が球であることと同じである。

平均幅

\mathbb{R}^3 の凸体 K について, その体積を $V(K)$, 表面積を $F(K)$, 平均幅を $b(K)$ とする. 次の不等式が成り立つ.

$$F(K)^2 \geq 6\pi b(K)V(K).$$

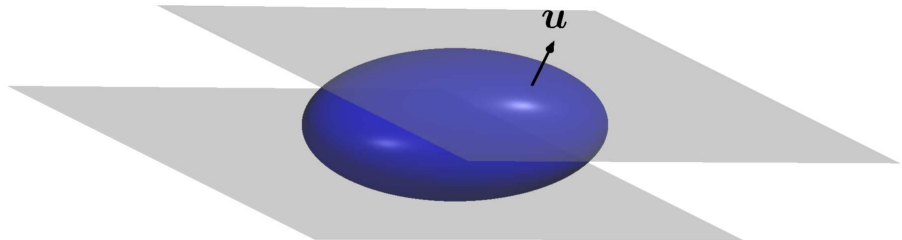
$$\pi b(K)^2 \geq F(K).$$

ここで平均幅 $b(K)$ は, 単位法線ベクトル \mathbf{u} をもつ 2 つの平面によって挟まれる K の幅を $b_K(\mathbf{u})$ とするとき

$$b(K) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} b_K(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

によって定義される.

$$b_K(\mathbf{u})$$



参考文献

-  D. Hua, W. Weil, Lectures on Convex Geometry, Springer, 2020.
-  伊藤清三, ルベーク積分入門 (新装版), 裳華房, 2017.
-  小林昭七, 円の数学, 裳華房, 1999.
-  吉田耕作, 測度と積分, 岩波書店, 1976.