1次分数変換と連分数について

中川仁

2012年10月1日

R. F. C. ウォルターズの本 [1] に述べられている円周率 π の無理数性の証明を紹介する．

1 1次分数変換

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ によって，複素数を成分とする2次行列 A で行列式の値が0でないもの全体のなす集合を表す．

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{C},\ \det A = ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は行列の積に関して群をなす．実際，$A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ とすれば，

$$\det(AB) = \det A \det B \neq 0, \qquad AB \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

である．また，単位行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は，任意の $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対して，$AI = IA = A$ を満たす．さらに，$A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対して，

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおけば，$\det A^{-1} = (ad-bc)^{-1} \neq 0$ であるから，$A^{-1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ であり，$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ を満たす．

定義 1.1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対して，**1次分数変換**

$$A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

を対応させる．

$$A(\infty)=\begin{cases}\dfrac{a}{c}, & c\neq 0,\\ \infty, & c=0,\end{cases}\qquad A\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty\ \ (c\neq 0)$$

とすることによって，$z\longmapsto A(z)$ はリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ のリーマン面としての自己同型である．r を 0 でない複素数とすれば,

$$(rA)(z)=\frac{raz+rb}{rcz+rd}=\frac{az+b}{cz+d}=A(z)$$

である．また，$I(z)=z$ である．

命題 1.2. $A,B\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ とすれば,

$$(AB)(z)=A(B(z)).$$

[証明] $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対して，$j(A,z)=cz+d$ とおくと,

$$A\begin{pmatrix}z\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}az+b\\ cz+d\end{pmatrix}=j(A,z)\begin{pmatrix}A(z)\\ 1\end{pmatrix}$$

であるから,

$$AB\begin{pmatrix}z\\ 1\end{pmatrix}=j(AB,z)\begin{pmatrix}(AB)(z)\\ 1\end{pmatrix}.$$

一方,

$$\begin{aligned}AB\begin{pmatrix}z\\ 1\end{pmatrix}&=Aj(B,z)\begin{pmatrix}B(z)\\ 1\end{pmatrix}=j(B,z)A\begin{pmatrix}B(z)\\ 1\end{pmatrix}\\ &=j(B,z)j(A,B(z))\begin{pmatrix}A(B(z))\\ 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

したがって，$(AB)(z)=A(B(z))$, $j(AB,z)=j(A,B(z))j(B,z)$. □

系 1.3. $A\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $w=A(z)$ ならば，$z=A^{-1}(w)$.

有限個あるいは無限個の 1 次分数変換の合成によって，多くのものを表すことができる．例えば,

$$A_k=\begin{pmatrix}1 & b_k\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad k=0,1,\ldots$$

として，$F_n(z)=(A_0A_1\cdots A_n)(z)$ とおけば，$A_k(z)=z+b_k$ であるから,

$$F_n(z)=z+b_0+b_1+\cdots+b_n,\quad F_n(0)=b_0+b_1+\cdots+b_n,\quad \lim_{n\to\infty}F_n(0)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n.$$

また,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a_k \neq 0 \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

として，$F_n(z) = (A_0 A_1 \cdots A_n)(z)$ とおけば，$A_k(z) = a_k z$ であるから,

$$F_n(z) = a_0 a_1 \cdots a_n z, \qquad F_n(1) = a_0 a_1 \cdots a_n, \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(1) = \prod_{n=0}^{\infty} a_n.$$

さらに,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_k \neq 0 \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

として，$F_n(z) = (A_0 A_1 \cdots A_n)(z)$ とおけば，$A_k(z) = a_k + \dfrac{b_k}{z}$ であるから,

$$F_n(z) = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{\ddots \, \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n + \cfrac{b_n}{z}}}}}} = a_0 + \frac{b_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{a_n} + \frac{b_n}{z},$$

$$F_n(\infty) = a_0 + \frac{b_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{a_n},$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\infty) = a_0 + \frac{b_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{a_n} + \cdots.$$

このようにして，一般の**有限連分数**，および**無限連分数**が得られる．特に，$b_k = 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ であるような連分数を**正則連分数**という.

2　行列の無限積の極限

定義 2.1. $A_0, A_1, A_2, \ldots$ を複素数を成分とする 2 次行列で,

$$A_0 A_1 A_2 \cdots A_n = \begin{pmatrix} p_n & r_n \\ q_n & s_n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1$$

とする．$n \to \infty$ とするとき，p_n/q_n と r_n/s_n が同じ極限値 α に収束するならば，α は行列の無限積の極限であるといい,

$$\alpha \sim \prod_{n=0}^{\infty} A_n$$

と表す.

$\alpha \sim \prod_{n=0}^{\infty} A_n$ のとき，1 次分数変換の合成

$$F_n(z) = (A_0 A_1 \cdots A_n)(z)$$

と α の関係を調べよう．

$$A_0 A_1 \cdots A_n = \begin{pmatrix} p_n & r_n \\ q_n & s_n \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\infty) = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_n} = \alpha$$

である．数列 $\{-s_n/q_n\}_{n=0}^{\infty}$ の密集点の集合を E とする．$z \in \mathbb{C} \setminus E$ とすれば，ある $\delta > 0$ と n_0 に対して，

$$\left| z + \frac{s_n}{q_n} \right| \geq \delta, \qquad \forall n \geq n_0$$

である．

$$F_n(z) - \frac{r_n}{s_n} = \frac{p_n z + r_n}{q_n z + s_n} - \frac{r_n}{s_n} = \frac{p_n s_n z + r_n s_n - q_n r_n z - r_n s_n}{s_n(q_n z + s_n)} = \frac{(p_n s_n - q_n r_n)z}{s_n(q_n z + s_n)}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} \left| F_n(z) - \frac{r_n}{s_n} \right| &= \frac{|(p_n s_n - q_n r_n)z|}{|s_n(q_n z + s_n)|} = \frac{\left| \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{r_n}{s_n} \right| |z|}{\left| z + \dfrac{s_n}{q_n} \right|} \\ &\leq \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{r_n}{s_n} \right| \cdot \frac{|z|}{\delta} \leq \left(\left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{r_n}{s_n} \right| \right) \frac{|z|}{\delta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |F_n(z) - \alpha| &= \left| F_n(z) - \frac{r_n}{s_n} + \frac{r_n}{s_n} - \alpha \right| \leq \left| F_n(z) - \frac{r_n}{s_n} \right| + \left| \frac{r_n}{s_n} - \alpha \right| \\ &\leq \left(\left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{r_n}{s_n} \right| \right) \frac{|z|}{\delta} + \left| \frac{r_n}{s_n} - \alpha \right|. \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = \alpha, \qquad \forall z \in (\mathbb{C} \setminus E) \cup \{0, \infty\}.$$

注意 2.2. $\alpha \sim \prod_{n=0}^{\infty} A_n$ かつ，c_n $(n = 0, 1, \ldots)$ が 0 でない複素数ならば，

$$\alpha \sim \prod_{n=0}^{\infty} c_n A_n.$$

注意 2.3. $\alpha \sim \prod_{n=0}^{\infty} A_n$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき，$c\alpha + d \neq 0$ ならば,

$$\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \sim A \prod_{n=0}^{\infty} A_n.$$

実際，$f_n(z) = (A_0 A_1 \cdots A_n)(z)$, $F_n(z) = (AA_0 A_1 \cdots A_n)(z)$ とおけば，$F_n(z) = A(f_n(z))$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\infty) = \lim_{n\to\infty} A(f_n(\infty)) = A(\lim_{n\to\infty} f_n(\infty)) = A(\alpha) = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d},$$
$$\lim_{n\to\infty} F_n(0) = \lim_{n\to\infty} A(f_n(0)) = A(\lim_{n\to\infty} f_n(0)) = A(\alpha) = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}.$$

補題 2.4. a, b, c, d を正の実数とすれば，$\dfrac{a+b}{c+d}$ は $\dfrac{a}{c}$ と $\dfrac{b}{d}$ の間にある.

[証明]　$\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$ としてよい．このとき，$ad - bc > 0$ である.

$$\frac{a}{c} - \frac{a+b}{c+d} = \frac{a(c+d) - c(a+b)}{c(c+d)} = \frac{ad - bc}{c(a+c)} > 0,$$
$$\frac{a+b}{c+d} - \frac{b}{d} = \frac{d(a+b) - b(c+d))}{d(c+d)} = \frac{ad - bc}{a(a+c)} > 0.$$

□

定理 2.5. a_k, b_k, c_k を正整数とし，$A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & 0 \end{pmatrix}$ とする $(k = 1, 2, \ldots)$．このとき，ある $\delta > 0$ について

$$a_k \geq (b_k c_k)^{1+\delta} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

が成り立つならば，行列の無限積 $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$ は極限 $\alpha > 1$ をもち，α は無理数である.

[証明]　$n \geq 1$ に対して,

$$A_1 A_2 \cdots A_n = \begin{pmatrix} p_n & r_n \\ q_n & s_n \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$\begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n p_{n-1} \\ b_n q_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 2$$

が成り立つ．実際，$n \geq 2$ のとき,

$$A_1 \cdots A_{n-1} A_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & r_{n-1} \\ q_{n-1} & s_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n p_{n-1} + c_n r_{n-1} & b_n p_{n-1} \\ a_n q_{n-1} + c_n s_{n-1} & b_n q_{n-1} \end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n p_{n-1} + c_n r_{n-1} \\ a_n q_{n-1} + c_n s_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n p_{n-1} \\ b_n q_{n-1} \end{pmatrix}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_{n+1} p_n + c_{n+1} r_n = a_{n+1} p_n + c_{n+1} b_n p_{n-1}, \\ q_{n+1} &= a_{n+1} q_n + c_{n+1} s_n = a_{n+1} q_n + c_{n+1} b_n q_{n-1}. \end{aligned}$$

これから，$n \to \infty$ のとき，$q_n \to \infty$ となることがわかる．さらに，

$$\begin{aligned} &p_1 = a_1 \geq (b_1 b_1)^{1+\delta} \geq b_1 b_1 \geq c_1 = q_1, \\ &p_2 = a_2 p_1 + c_2 r_1 = a_2 p_1 + c_2 b_1 \geq a_2 p_1 \geq a_2 c_1 = q_2 \end{aligned}$$

と上の漸化式から，$p_n \geq q_n$ である．また，

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1} p_n + c_{n+1} b_n p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + c_{n+1} b_n q_{n-1}},$$

$a_{n+1} > 0$, $c_{n+1} b_n > 0$ であるから，補題 2.4 より，p_{n+1}/q_{n+1} は p_n/q_n と p_{n-1}/q_{n-1} の間にある．もっと詳しくいえば，

$$\begin{aligned} b_2(p_2 q_1 - p_1 q_2) = \begin{vmatrix} p_2 & b_2 p_1 \\ q_2 & b_2 q_1 \end{vmatrix} &= \det(A_1 A_2) = \det(A_1)\det(A_2) \\ &= (-b_1 c_1)(-b_2 c_2) = b_1 c_1 b_2 c_2 > 0. \end{aligned}$$

したがって，$p_2/q_2 > p_1/q_1$ であるから，

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \cdots < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \cdots < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}.$$

さらに，$n > 2$ のとき，

$$q_n = a_n q_{n-1} + c_n b_{n-1} q_{n-2} > a_n q_{n-1} \geq b_n c_n q_{n-1} \geq c_n q_{n-1}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| &= \frac{|p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n|}{q_n q_{n-1}} = \frac{|\det(A_1 \cdots A_n)|}{b_n q_n q_{n-1}} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n |\det(A_k)|}{b_n q_n q_{n-1}} = \frac{\prod_{k=1}^n b_k c_k}{b_n q_n q_{n-1}} \\ &< \frac{b_1 c_1 \cdots b_{n-1} c_{n-1} b_n c_n}{b_n c_n q_{n-1}^2} = \frac{b_1 c_1 \cdots b_{n-1} c_{n-1}}{q_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

ある $K > 0$ について，$q_{n-1} > (K b_1 c_1 \cdots b_{n-1} c_{n-1})^{1+\delta}$ が成り立つことを示す．これがいえれば，$\sigma = \delta/(1+\delta)$ とおくとき，$1 - \sigma = 1/(1+\delta)$ であり，

$$q_{n-1}^{1-\sigma} = q_{n-1}^{1/(1+\delta)} > K b_1 c_1 \cdots b_{n-1} c_{n-1},$$

$n \to \infty$ のとき，

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{Kb_1c_1\cdots b_{n-1}c_{n-1}}{Kq_{n-1}^2} < \frac{q_{n-1}^{1-\sigma}}{Kq_{n-1}^2} = \frac{1}{Kq_{n-1}^{1+\sigma}} \to 0$$

となるから，$\dfrac{p_n}{q_n}$ はある実数 α に収束する．$\alpha > \dfrac{p_1}{q_1} \geq 1$ である．また，

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{Kq_{n-1}^{1+\sigma}}$$

が成り立つ．これから α は無理数であることがわかる．なぜならば，もし，α が有理数で $\alpha = k/l$ と表されるとすれば，既に示した大小関係によって有理数 p_n/q_n はすべて異なっているから，すべての n について $|kq_{n-1} - lp_{n-1}|$ は 0 でない整数であり，

$$1 \leq |kq_{n-1} - lp_{n-1}| = lq_{n-1}\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{lq_{n-1}}{Kq_{n-1}^{1+\sigma}} = \frac{l}{Kq_{n-1}^{\sigma}} \to 0 \ (n \to \infty)$$

となって矛盾である．最後に，数学的帰納法で

$$q_{n-1} > (Kb_1c_1\cdots b_{n-1}c_{n-1})^{1+\delta}$$

を示そう．まず，$n = 2$ のときは，$K < c_1^{-\sigma}b_1^{-1}$ にとれば，$Kb_1c_1 < c_1^{1-\sigma}$ より，

$$q_1 = c_1 = (c_1^{1-\sigma})^{1+\delta} > (Kb_1c_1)^{1+\delta}.$$

帰納法の仮定より，

$$q_{n-2} > (Kb_1c_1\cdots b_{n-2}c_{n-2})^{1+\delta}$$

であるから，

$$\begin{aligned} q_{n-1} &= a_{n-1}q_{n-2} + c_{n-1}b_{n-2}q_{n-3} \geq a_{n-1}q_{n-2} \\ &\geq (b_{n-1}c_{n-1})^{1+\delta}q_{n-2} > (Kb_1c_1\cdots b_{n-2}c_{n-2}b_{n-1}c_{n-1})^{1+\delta}. \end{aligned}$$

□

系 2.6. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ が正整数ならば，無限連分数

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2 + \cdots}$$

は 1 より大きな無理数に収束する．

[証明]　$b_k = c_k = 1$, $a_k \geq 1 = (b_kc_k)^{1+\delta}$ より，定理 2.5 を

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots$$

について適用すればよい．□

例 2.7. 無理数 α に対して，$\alpha_0 = \alpha$，$a_n = [\alpha_n]$, $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ によって，整数 a_n と無理数 α_n を定める．$a_n \geq 1$, $\alpha_n > 1$ $(\forall n \geq 1)$ である．そのとき,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +} \cdots + \frac{1}{a_n +}\frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

である.

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$\alpha = \frac{p_n\alpha_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1}}$$

であり，α は p_n/q_n と p_{n+1}/q_{n+1} の間にある．定理 2.5 より，p_n/q_n は収束する．その極限は α である．よって,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 +}\frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +} \cdots + \frac{1}{a_n +} \cdots.$$

これを無理数 α の**連分数展開**という.

例 2.8. a, b, c を正整数で，$a \geq (bc)^{1+1/2}$ となるものとする．定理 2.5 において，$a_k = a$, $b_k = b$, $c_k = c$, $\delta = 1/2$ とすれば,

$$a_k \geq (b_k c_k)^{1+\delta}$$

であるから，定理 2.5 より，ある無理数 $\alpha > 1$ が存在して,

$$\alpha \sim \prod_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．注意 2.3 より,

$$\alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha}, \qquad c\alpha^2 - a\alpha - b = 0.$$

$\alpha > 1$ より，$\alpha = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2c}$ である．例えば，$a = b = c = 1$ とすれば,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sim \prod_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これは,

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} = 1 + \frac{1}{1 +}\frac{1}{1 +}\frac{1}{1 +}\frac{1}{1 +} \cdots$$

を意味する．また，$a=3$, $b=2$, $c=1$ とすれば，同様にして，

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{3+\sqrt{17}}{2} = 3 + \frac{2}{3+}\frac{2}{3+}\frac{2}{3+}\cdots.$$

例 2.9. ある無理数 α が存在して，

$$\alpha \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．実際，定理 2.5 において，$a_k = k$, $b_k = 1$, $c_k = 2$, $\delta = 1/2$ とすれば，$k > 2$ のとき，

$$a_k = k > 2\sqrt{2} = 2^{1+\delta} = (b_k c_k)^{1+\delta}$$

が成り立つ．したがって，定理 2.5 より，ある無理数 $\beta > 1$ が存在して，

$$\beta \sim \prod_{k=3}^{\infty} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ であるから，注意 2.3 より，

$$\alpha = \frac{4\beta+1}{4\beta+2} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 2.10. $\alpha \sim \prod_{k=1}^{\infty} A_k$ であるとき，

$$\frac{1}{\alpha} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{\infty} A_k.$$

3 円周率の無理数性の証明

以下，$\coth(x/y)$ と $\cot(x/y)$ を行列の無限積の極限として表すことを目標とする．これによって，e の有理数乗と π が無理数であることが証明される．

補題 3.1. 2 項係数について，次の関係式が成り立つ．

$$\binom{n-1-k}{k+1} + \binom{n-1-k}{k} = \binom{n-k}{k+1},$$

$$\binom{n-1-k}{k+1}(n+1) + \binom{n-1-k}{k}(k+1) = \binom{n-k}{k+1}(n-k).$$

$m > n$ のとき，$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$, $\prod_{k=m}^{n} p_k = 1$ であるとする．

補題 3.2. a, b を複素数で，b/a は 0 以下の整数ではないとし，自然数 n に対して，

$$f_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} \prod_{r=k+1}^{n-k} (ra+b),$$

$$g_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-k-1}{k} \prod_{r=k+2}^{n-k} (ra+b)$$

とおく．ただし，$f_0 = 1$, $g_0 = 0$, $g_1 = 1$ とする．そのとき，$n \geq 1$ に対して，

$$f_{n+1} = ((n+1)a+b)f_n + f_{n-1},$$

$$g_{n+1} = ((n+1)a+b)g_n + g_{n-1}.$$

[証明]

$$\begin{aligned}
((n+1)a+b)f_n &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} ((n+1)a+b) \prod_{r=k+1}^{n-k} (ra+b) \\
&= ((n+1)a+b)\prod_{r=1}^{n}(ra+b) + \sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} ((n+1)a+b) \prod_{r=k+1}^{n-k} (ra+b) \\
&= \prod_{r=1}^{n+1}(ra+b) + \sum_{k'=0}^{[n/2]-1} \binom{n-k'-1}{k'+1} ((n+1)a+b) \prod_{r=k'+2}^{n-k'-1} (ra+b),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{n-1} &= \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-1-k}{k} \prod_{r=k+1}^{n-1-k} (ra+b) \\
&= \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-1-k}{k} ((k+1)a+b) \prod_{r=k+2}^{n-1-k} (ra+b).
\end{aligned}$$

補題 3.1 より，

$$\begin{aligned}
&((n+1)a+b)f_n + f_{n-1} \\
&= \prod_{r=1}^{n+1}(ra+b) + \sum_{k=0}^{[n/2]-1} \binom{n-k-1}{k+1} ((n+1)a+b) \prod_{r=k+2}^{n-k-1} (ra+b) \\
&+ \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-1-k}{k} ((k+1)a+b) \prod_{r=k+2}^{n-1-k} (ra+b) \\
&= \prod_{r=1}^{n+1}(ra+b) + \sum_{k=0}^{[n/2]-1} \binom{n-k}{k+1} ((n-k)a+b) \prod_{r=k+2}^{n-k-1} (ra+b) \\
&\quad + \sum_{[n/2]-1 < k \leq [(n-1)/2]} \binom{n-1-k}{k} \prod_{r=k+1}^{n-1-k} (ra+b).
\end{aligned}$$

右辺の第2項は

$$\sum_{k=0}^{[n/2]-1}\binom{n-k}{k+1}\prod_{r=k+2}^{n-k}(ra+b)=\sum_{k=1}^{[n/2]}\binom{n+1-k}{k}\prod_{r=k+1}^{n+1-k}(ra+b)$$

とかきなおせる．したがって，

$$\begin{aligned}((n+1)a+b)f_n+f_{n-1}&=\prod_{r=1}^{n+1}(ra+b)+\sum_{k=1}^{[n/2]}\binom{n+1-k}{k}\prod_{r=k+1}^{n+1-k}(ra+b)\\&\quad+\sum_{[n/2]-1<k\leq[(n-1)/2]}\binom{n-1-k}{k}\prod_{r=k+1}^{n-1-k}(ra+b).\end{aligned}$$

ここで，右辺の第1項は，第2項の和における $k=0$ の項に相当する．また，右辺の第3項は n が偶数のときは0であり，n が奇数のときは，1である．これは第2項の和における $[n/2]<k\leq[(n+1)/2]$ の項に相当する．したがって，

$$((n+1)a+b)f_n+f_{n-1}=\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}\binom{n+1-k}{k}\prod_{r=k+1}^{n+1-k}(ra+b)=f_{n+1}.$$

$f_n=f_n(a,b)$ とかけば，定義によって，

$$g_n=g_n(a,b)=f_{n-1}(a,a+b)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}g_{n+1}&=f_n(a,a+b)=(na+a+b)f_{n-1}(a,a+b)+f_{n-2}(a,a+b)\\&=((n+1)a+b)g_n(a,b)+g_{n-1}(a,b)=((n+1)a+b)g_n+g_{n-1}.\end{aligned}$$

□

補題 3.3. $f_n,\ g_n$ を補題3.2の通りとすれば，

$$\prod_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}ka+b & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_n & f_{n-1}\\ g_n & g_{n-1}\end{pmatrix}.$$

[証明]　$f_0=1,\ f_1=a+b,\ g_0=0,\ g_1=1$ であるから，$n=1$ のとき補題の主張は成り立っている．$n\geq 1$ として，

$$\prod_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}ka+b & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_n & f_{n-1}\\ g_n & g_{n-1}\end{pmatrix}$$

が成り立つとすれば，補題3.2より，

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\begin{pmatrix}ka+b & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}f_n & f_{n-1}\\ g_n & g_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(n+1)a+b & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}((n+1)a+b)f_n+f_{n-1} & f_n\\ ((n+1)a+b)g_n+g_{n-1} & g_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{n+1} & f_n\\ g_{n+1} & g_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

定理 3.4. a, b を複素数で，$a \neq 0$ かつ b/a は 0 以下の整数ではないとし，

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! a^k (a+b)(2a+b)\cdots(ka+b)},$$
$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! a^k (a+b)(2a+b)\cdots(ka+b)((k+1)a+b)}$$

とおく．このとき，$Q \neq 0$ ならば,

$$\frac{P}{Q} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} ka+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[証明]　$c = b/a$ とおけば,

$$a^k (a+b)(2a+b)\cdots(ka+b) = a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c).$$

$\Re(c) = c_0 + c_1$, $c_0 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq c_1 < 1$ とかき，$k_0 = \max(1, 1-c_0)$ とおく．$j \geq k_0$ ならば,

$$|j+c| \geq |\Re(j+c)| \geq k_0 + c_0 + c_1 \geq 1 - c_0 + c_0 + c_1 = 1 + c_1 \geq 1$$

であるから，$k \geq k_0$ のとき,

$$\begin{aligned} |a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c)| &= |a|^{2k} \Big(\prod_{j=1}^{k_0-1} |j+c| \Big) \Big(\prod_{j=k_0}^{k} |j+c| \Big) \\ &\geq |a|^{2k} \prod_{j=1}^{k_0-1} |j+c| = C|a|^{2k}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! |a^k (a+b)(2a+b)\cdots(ka+b)|} \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k! |a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k! |a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k! |a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} + \frac{1}{C} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k!} |a|^{-2k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k! |a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} + \frac{1}{C} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |a|^{-2k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k! |a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} + \frac{1}{C} e^{|a|^{-2}} < \infty. \end{aligned}$$

ゆえに，P は絶対収束する．$P = P(a,b)$ とかけば，

$$\begin{aligned}
P(a, a+b) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!a^k(a+a+b)(2a+a+b)\cdots(ka+a+b)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a+b}{k!a^k(a+b)(2a+b)(3a+b)\cdots(ka+b)((k+1)a+b)} \\
&= (a+b)Q.
\end{aligned}$$

よって，Q も絶対収束する．ここで，補題 3.3 より，

$$\prod_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} ka+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ g_n & g_{n-1} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．一方，f_n の定義を用いれば，

$$\begin{aligned}
&\frac{f_n}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)} \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} \frac{a^{n-2k}(k+1+c)\cdots(n-k+c)}{a^n(1+c)(2+c)\cdots(n+c)} \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c)(n-k+1+c)\cdots(n+c)} \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{2k-1}{n}\right)}{k!a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c)n^k\left(1-\frac{k-1}{n}+\frac{c}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{c}{n}\right)} \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{u_{n,k}}{k!a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c)}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$u_{n,k} = u_{n,k}(c) = \frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{2k-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{k-1}{n}+\frac{c}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}+\frac{c}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{c}{n}\right)}$$

とおいた．N を十分大きな正整数にとって，$n \geq N$ のとき，$|c|/n < \frac{1}{4}$ とする．

$$0 \leq j \leq k-1 \leq \left[\frac{n}{2}\right] - 1 < \frac{n}{2}$$

に対して，

$$0 \leq \frac{j}{n} < \frac{1}{2}, \quad 1 \geq 1 - \frac{j}{n} > \frac{1}{2}, \quad \left|1 - \frac{j}{n} + \frac{c}{n}\right| \geq \left|1 - \frac{j}{n}\right| - \left|\frac{c}{n}\right| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$|u_{n,k}| < \frac{1}{4^{-k}} = 2^{2k}.$$

したがって,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|u_{n,k}|}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|2/a|^{2k}}{k!|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} \\
&\le \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|2/a|^{2k}}{k!|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} + \frac{1}{C}e^{4/|a|^2} < \infty.
\end{aligned}$$

これと P が絶対収束することから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N_1 \ge N$ が存在して,

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{|u_{n,k}|}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} < \varepsilon,$$
$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} < \varepsilon$$

である．各 $0 \le k \le N_1$ に対して，$n \to \infty$ とすれば，$u_{n,k} \to 1$ である．よって，$N_2 \ge N_1$ が存在して，$n \ge N_2$ ならば，$|u_{n,k} - 1| < \varepsilon$ $(0 \le k \le N_1)$ が成り立つ．したがって，$n \ge N_2$ ならば,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f_n}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)} - P\right| \\
&\le \sum_{k=0}^{N_1} \frac{|u_{n,k}-1|}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} + \sum_{k=N_1+1}^{[n/2]} \frac{|u_{n,k}|}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} \\
&\quad + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} \\
&< \varepsilon \sum_{k=0}^{N_1} \frac{1}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} + \varepsilon + \varepsilon < (S+2)\varepsilon.
\end{aligned}$$

ここで,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|}$$

とおいた．ε は任意だから，これは

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)} = P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c)}$$

を意味する．同様に，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{g_n}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)}\\&=\frac{1}{a+b}\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n-1}(a,a+b)}{(a+a+b)(2a+a+b)\cdots((n-1)a+a+b)}\\&=\frac{1}{a+b}P(a,a+b)=Q\end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{g_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{f_n}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)}}{\dfrac{g_n}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)}}=\frac{P}{Q}$$

を得る． □

注意 3.5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(na+b)g_{n-1}}{g_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{g_{n-1}}{(a+b)(2a+b)\cdots((n-1)a+b)}}{\dfrac{g_n}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)}}=\frac{Q}{Q}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_{n-1}}{g_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(na+b)g_{n-1}}{g_n}\cdot\frac{1}{na+b}=1\cdot 0=0.$$

したがって，$E=\{0\}$ であり，$(\mathbb{C}\setminus E)\cup\{0,\infty\}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ であるから，

$$F_n(z)=\frac{f_nz+f_{n-1}}{g_nz+g_{n-1}}$$

とおくとき，

$$\lim_{n\to\infty}F_n(z)=\frac{P}{Q},\qquad \forall z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$$

が成り立つ．したがって，任意の $B\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}F_n(B(z))=\frac{P}{Q},\qquad \forall z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}.$$

$B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とかくとき，$B(\infty)=\dfrac{a}{c}$, $B(0)=\dfrac{b}{d}$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{af_n+cf_{n-1}}{ag_n+cg_{n-1}}=\frac{P}{Q},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{bf_n+df_{n-1}}{bg_n+dg_{n-1}}=\frac{P}{Q}.\tag{1}$$

系 3.6. 複素数 $x, y \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \sim \coth \frac{x}{y},$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & ix \\ ix & 0 \end{pmatrix} \sim \cot \frac{x}{y}.$$

[証明]　定理 3.4 において，$a = \dfrac{2y}{x}$, $b = \dfrac{-y}{x}$ とおけば，$\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ である．また，このとき,

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(2y/x)^{2k}(1-1/2)(2-1/2)\cdots(k-1/2)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k! 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-1)} \left(\frac{x}{y}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{x}{y}\right)^{2k} = \cosh \frac{x}{y}, \\
Q &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(2y/x)^{2k+1}(1-1/2)(2-1/2)\cdots(k-1/2)(k+1/2)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k! 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-1)(2k+1)} \left(\frac{x}{y}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{x}{y}\right)^{2k+1} \\
&= \sinh \frac{x}{y}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} ka+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \frac{P}{Q} = \frac{\cosh \dfrac{x}{y}}{\sinh \dfrac{x}{y}} = \coth \frac{x}{y}$$

が得られる．注意 2.2 より，左辺の各行列を x 倍してもよいから,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \sim \coth \frac{x}{y}$$

を得る．次に，x を ix で置き換えれば,

$$\coth \frac{ix}{y} = \frac{\cosh \dfrac{ix}{y}}{\sinh \dfrac{ix}{y}} = \frac{\cos \dfrac{x}{y}}{i \sin \dfrac{x}{y}} = \frac{1}{i} \cot \frac{x}{y}$$

であるから,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & ix \\ ix & 0 \end{pmatrix} \sim \coth \frac{ix}{y} = \frac{1}{i} \cot \frac{x}{y}.$$

よって，

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & ix \\ ix & 0 \end{pmatrix} \sim \cot\frac{x}{y}.$$

$\square$

例 3.7. 系 3.6 で，$x=1$ とすれば，

$$\coth\frac{1}{y} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

さらに，y が自然数のときは，この等式は連分数展開

$$\coth\frac{1}{y} = y + \frac{1}{3y+}\frac{1}{5y+}\frac{1}{7y+}\cdots.$$

を与えている．特に，$y=1$ として，

$$\coth 1 = 1 + \frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{7+}\cdots.$$

定理 3.8. 自然数 m, n に対して，$e^{m/n}$ は無理数である．

[証明]　定理 2.5 と系 3.6 によって，

$$\coth\frac{m}{n} = \frac{\cosh\frac{m}{n}}{\sinh\frac{m}{n}} = \frac{e^{2m/n}+1}{e^{2m/n}-1}$$

は無理数であり，したがって，$e^{2m/n}$ は無理数である．特に，$e^{m/n}$ は無理数である． $\square$

定理 3.9. $x, y \in \mathbb{C}^*$ に対して，

$$\cot\frac{x}{y} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (-1)^{k+1}(2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

[証明]　まず，$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{J} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき，行列の等式

$$J\bar{J} = I, \quad J\begin{pmatrix} a & ib \\ ib & 0 \end{pmatrix} J = -\begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{J}\begin{pmatrix} a & ib \\ ib & 0 \end{pmatrix} \bar{J} = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことに注意する．$A_k = \begin{pmatrix} (2k-1)y & ix \\ ix & 0 \end{pmatrix}$ とおけば，

$$
\begin{aligned}
J\left(\prod_{k=1}^{2n} A_k\right)J^{-1} &= J\left(\prod_{k=1}^{n} A_{2k-1}A_{2k}\right)J^{-1} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(JA_{2k-1}A_{2k}J^{-1}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(JA_{2k-1}JJ^{-1}A_{2k}J^{-1}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left\{(-1)\begin{pmatrix} (4k-3)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(4k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= (-1)^n\prod_{k=1}^{n}\left\{\begin{pmatrix} (-1)^{2k}(4k-3)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{2k+1}(4k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= (-1)^n\prod_{k=1}^{2n}\begin{pmatrix} (-1)^{k+1}(2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

同様に，

$$
\begin{aligned}
&J\left(\prod_{k=1}^{2n+1} A_k\right)J \\
&= J^2J^{-1}A_1J\left(\prod_{k=1}^{n} J^{-1}A_{2k}A_{2k+1}J\right) = JA_1J\left(\prod_{k=1}^{n} J^{-1}A_{2k}J^{-1}JA_{2k+1}J\right) \\
&= (-1)\begin{pmatrix} y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\prod_{k=1}^{n}\left\{(-1)\begin{pmatrix} -(4k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (4k+1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= (-1)^{n+1}\begin{pmatrix} y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\prod_{k=1}^{n}\left\{\begin{pmatrix} (-1)^{2k+1}(4k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{2k+2}(4k+1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= (-1)^{n+1}\prod_{k=1}^{2n+1}\begin{pmatrix} (-1)^{k+1}(2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

系 3.6 の第 2 式と注意 3.5 から，

$$
\cot\frac{x}{y} \sim \prod_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix} (-1)^{k+1}(2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}
$$

を得る． □

定理 3.10. 自然数 x, y に対して，

$$
\cot\frac{x}{y} \sim \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\prod_{k=2}^{\infty}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\right\}
$$

が成り立つ．したがって，任意の自然数 x, y について，$\tan\dfrac{x}{y}$ は無理数である．

[証明]　$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，次の等式が成り立つ．

$$T^2=I, \qquad S^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b & b \\ b & 0 \end{pmatrix}S,$$

$$S\begin{pmatrix} -a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}T=-U\begin{pmatrix} a-2b & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}S^{-1}=U\begin{pmatrix} a-2b & b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

これらを用いれば，$A_k=\begin{pmatrix} (-1)^{k+1}(2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき，

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2n+1} A_k &= A_1\prod_{k=1}^{n}(A_{2k}A_{2k+1}) = A_1S^{-1}S\left\{\prod_{k=1}^{n} A_{2k}A_{2k+1}\right\}S^{-1} \\
&= A_1S^{-1}\left\{\prod_{k=1}^{n} SA_{2k}TTA_{2k+1}S^{-1}\right\} \\
&= \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\prod_{k=1}^{n}\left\{S\begin{pmatrix} -(4k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}TT\begin{pmatrix} (4k+1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}S^{-1}\right\}S \\
&= \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\prod_{k=1}^{n}\left\{-U\begin{pmatrix} (4k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}U\begin{pmatrix} (4k+1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\right\}S \\
&= (-1)^n\begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\prod_{k=2}^{2n+1}\left\{U\begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\right\}S.
\end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2n} A_k &= \prod_{k=1}^{n}(A_{2k-1}A_{2k}) = TT^{-1}\left\{\prod_{k=1}^{n}(A_{2k-1}A_{2k})\right\}TT^{-1} \\
&= T\left\{\prod_{k=1}^{n}(T^{-1}A_{2k-1}A_{2k}T)\right\}T^{-1} = T\left\{\prod_{k=1}^{n}(TA_{2k-1}S^{-1}SA_{2k}T)\right\}T^{-1} \\
&= T\prod_{k=1}^{n}\left\{U\begin{pmatrix} (4k-3)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}(-U)\begin{pmatrix} (4k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\right\}T^{-1} \\
&= (-1)^nT\prod_{k=1}^{2n}\left\{U\begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\right\}T^{-1} \\
&= (-1)^nTU\begin{pmatrix} y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\prod_{k=2}^{2n}\left\{U\begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\right\}T^{-1} \\
&= (-1)^n\begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\prod_{k=2}^{2n}\left\{U\begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\right\}T^{-1}.
\end{aligned}$$

以上まとめると，

$$\left(\prod_{k=1}^{2n} A_k\right) T = (-1)^n \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{2n} \left\{ U \begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left(\prod_{k=1}^{2n+1} A_k\right) S^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{2n+1} \left\{ U \begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

定理 3.9 と注意 3.5 から，

$$\cot\frac{x}{y} \sim \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

これと定理 2.5 によって，$\tan\dfrac{x}{y} = 1/\cot(x/y)$ は無理数である． □

系 3.11. 円周率 π は無理数である．

[証明]　もし，π が有理数であるとすれば，$\pi/4$ も有理数であり，$\pi/4 = x/y$, x, y は互いに素な自然数，とかける．そのとき，定理 3.10 より，$\tan\pi/4 = \tan x/y$ は無理数となるが，$\tan\pi/4 = 1$ であるから，これは矛盾である．ゆえに，π は無理数である． □

例 3.12. 等式

$$\begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh x \\ \sinh x \end{pmatrix}$$

を用いれば，系 3.6 より，$x \in \mathbb{C}^*$ に対して，

$$e^{2x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (\coth x) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 2k-1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

また，

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 2k-1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \right\} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2k-1)+2x & 2k-1 \\ 2k-1 & (2k-1)-2x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-1-2x & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

(2) と注意 3.5 より，任意の $x \in \mathbb{C}^*$ に対して，

$$e^{2x} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-1-2x & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る．特に，$x = 1/2$ とすれば，

$$e \sim \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る．これは，e の連分数展開が

$$e = 2 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\cdots$$

であることを示している ($k = 1$ の部分から，最初の 2 がでる)．

例 3.13. 定理 3.10 において，$x = y = 1$ とすれば，

$$\cot 1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る．よって，

$$\tan 1 \sim \prod_{k=2}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る．これは $\tan 1$ の連分数展開が

$$\tan 1 = 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{7+}\cdots$$

であることを示している．

参考文献

[1] R. F. C. ウォルターズ, 算数からはじめよう！ 数論, 岩波書店, 2011.