隣接 3 項間の漸化式

上越教育大学　中川仁

令和 2 年 9 月 25 日

1　隣接 3 項間の漸化式

実数 a $(\neq 0)$, b を定数として，数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ が漸化式

(1.1) $$p_n = bp_{n-1} + ap_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

を満たすとする．このとき一般項 p_n を p_0, p_1 を用いて表してみよう．2 次方程式

(1.2) $$x^2 - bx - a = 0$$

の 2 根を α, β とする．$\alpha + \beta = b$, $\alpha\beta = -a$ である．$a \neq 0$ としたから $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ である．

$\alpha \neq \beta$ のとき．漸化式 (1.1) より

$$\begin{aligned} p_n &= (\alpha + \beta)p_{n-1} - \alpha\beta p_{n-2}, \\ p_n - \alpha p_{n-1} &= \beta(p_{n-1} - \alpha p_{n-2}), \\ p_n - \beta p_{n-1} &= \alpha(p_{n-1} - \beta p_{n-2}). \end{aligned}$$

したがって $p_n - \alpha p_{n-1}$ は公比 β の等比数列，$p_n - \beta p_{n-1}$ は公比 α の等比数列である．よって

$$\begin{aligned} p_n - \beta p_{n-1} &= \alpha^{n-1}(p_1 - \beta p_0), \\ p_n - \alpha p_{n-1} &= \beta^{n-1}(p_1 - \alpha p_0). \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)p_{n-1} &= \alpha^{n-1}(p_1 - \beta p_0) - \beta^{n-1}(p_1 - \alpha p_0), \\ p_{n-1} &= \frac{p_1 - \beta p_0}{\alpha - \beta}\alpha^{n-1} - \frac{p_1 - \alpha p_0}{\alpha - \beta}\beta^{n-1}. \end{aligned}$$

$A = (p_1 - \beta p_0)/(\alpha - \beta)$, $B = (p_1 - \alpha p_0)/(\alpha - \beta)$ とおいて，$n-1$ を n で置き換えれば

$$p_n = A\alpha^n - B\beta^n$$

と表せる．特に，$|\alpha| > |\beta|$ と仮定すると，$A \neq 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A\alpha^{n+1} - B\beta^{n+1}}{A\alpha^n - B\beta^n} = \alpha,$$

$A = 0$, $B \neq 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-B\beta^{n+1}}{-B\beta^n} = \beta.$$

$\alpha = \beta$ のとき．上と同様にして

$$p_n - \alpha p_{n-1} = \alpha^{n-1}(p_1 - \alpha p_0)$$

を得る．両辺を α^n で割れば

$$\frac{p_n}{\alpha^n} - \frac{p_{n-1}}{\alpha^{n-1}} = \frac{p_1}{\alpha} - p_0.$$

これは $\dfrac{p_n}{\alpha^n}$ が公差 $\dfrac{p_1}{\alpha} - p_0$ の等差数列であることを示している．したがって

$$\frac{p_n}{\alpha^n} = n\left(\frac{p_1}{\alpha} - p_0\right) + p_0.$$

よって

$$p_n = n\alpha^n\left(\frac{p_1}{\alpha} - p_0\right) + p_0\alpha^n.$$

$A = p_1/\alpha - p_0$, $B = p_0$ とおくと

$$p_n = An\alpha^n + B\alpha^n.$$

$A \neq 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n+1)\alpha^{n+1} + B\alpha^{n+1}}{An\alpha^n + B\alpha^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n+1)\alpha + B\alpha}{An + B} = \alpha.$$

$A = 0$, $B \neq 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{B\alpha^{n+1}}{B\alpha^n} = \alpha.$$

例 1.1. $a = b = 1$, $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ のとき，漸化式

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

によって定まる数列 $\{p_n\}$ を**フィボナッチ数列**という．このとき 2 次方程式 (1.2) は

$$x^2 - x - 1 = 0$$

だから，この根は $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ である．したがって一般項は

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

で与えられる．これから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

となることがわかる．$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398\cdots$ は**黄金比**とよばれる無理数である．

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

表 1　フィボナッチ数列

次に a_n, b_n が定数ではないが，周期 $k \geq 2$ をもつ場合に漸化式

$$(1.3) \qquad p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}, \quad n \geq 1, \qquad a_{n+k} = a_n \neq 0,\ b_{n+k} = b_n$$

を考えてみる．ただし p_{-1} は $p_1 = b_1 p_0 + a_1 p_{-1}$ が成り立つように定めるとする．

例えば，$k = 2$ として，n が偶数のとき $b_n = b_2$, $a_n = a_2$ で，n が奇数のとき $b_n = b_1$, $a_n = a_1$ であるとする．$q_n = p_{n-1}$, $n \geq 0$ とおけば，$q_{n-1} = p_{n-2}$ だから漸化式 (1.3) は

$$p_n = b_n p_{n-1} + a_n q_{n-1}, \quad n \geq 1$$

となる．したがってベクトルと行列を用いて

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1$$

と表される．$\boldsymbol{v}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$, $A_n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば，これは

$$\boldsymbol{v}_n = A_n \boldsymbol{v}_{n-1}, \qquad n \geq 1 \tag{1.4}$$

と表せる．したがって

$$\boldsymbol{v}_n = A_n A_{n-1} \cdots A_3 A_2 A_1 \boldsymbol{v}_0$$

を得る．周期性から $A_{2j} = A_2$, $A_{2j-1} = A_1$, $j = 1, 2, \ldots$ だから

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{2n} &= A_{2n} A_{2n-1} A_{2n-2} \cdots A_3 A_2 A_1 \boldsymbol{v}_0 \\ &= (A_2 A_1)^n \boldsymbol{v}_0, \qquad n \geq 1, \\ \boldsymbol{v}_{2n+1} &= A_{2n+1} A_{2n} A_{2n-1} A_{2n-2} \cdots A_3 A_2 A_1 \boldsymbol{v}_0 \\ &= A_1 (A_2 A_1)^n \boldsymbol{v}_0, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

2 次行列

$$B = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} b_2 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 b_2 + a_2 & a_1 b_2 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

とおいて，B の固有値，固有ベクトルを求めて B を対角化または三角化して B^n を計算すればよい．周期 k が 3 以上でも同様である．

例 1.2. $a_n = 1$ $n = 1, 2, \ldots$ として，$n \geq 1$ が奇数のとき $b_n = 1$，$n \geq 2$ が偶数のとき $b_n = 2$ とする．このとき漸化式

$$p_n = b_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n \geq 1$$

で定義される数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を p_0, p_1 で表してみよう．$p_1 = b_1 p_0 + p_{-1}$, $b_1 = 1$ より $p_{-1} = p_1 - p_0$ である．

$$A_{2j-1} = A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{2j} = A_2 = \begin{pmatrix} b_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって

$$B = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

B の固有方程式 (特性方程式) は

$$|xE - B| = \begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)(x-1) - 2 = x^2 - 4x + 1 = 0$$

である．これを解けば $x = 2 \pm \sqrt{3}$ である．$\alpha = 2 + \sqrt{3}$, $\beta = 2 - \sqrt{3}$ とおく．B の固有値 α の固有ベクトルとして

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を解いて，$y = 1$, $x = \alpha - 1 = 1 + \sqrt{3}$ がとれる．$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} \beta - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{v}'$ は B の固有値 β の固有ベクトルである．

$$P = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \beta - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \beta \\ -1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

このとき

$$BP = B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = (B\boldsymbol{v}, B\boldsymbol{v}') = (\alpha\boldsymbol{v}, \beta\boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となるから，$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ である．この両辺を n 乗すれば

$$P^{-1}B^nP = (P^{-1}BP)^n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\begin{aligned}
B^n &= P(P^{-1}B^nP)P^{-1} = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \beta - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \beta \\ -1 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} (\alpha - 1)\alpha^n & (\beta - 1)\beta^n \\ \alpha^n & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \beta \\ -1 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} (\alpha - 1)\alpha^n - (\beta - 1)\beta^n & -(\alpha - 1)(\beta - 1)(\alpha^n - \beta^n) \\ \alpha^n - \beta^n & (1 - \beta)\alpha^n + (\alpha - 1)\beta^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ここで $x^2-4x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$, $\alpha\beta=1$ だから

$$\begin{aligned}(\alpha-1)(\beta-1)&=(1-\alpha)(1-\beta)=1-4+1=-2,\\(1-\beta)\alpha^n+(\alpha-1)\beta^n&=\alpha^n-\beta\alpha^n+\alpha\beta^n-\beta^n\\&=\alpha^n-\beta^n-\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})\\&=\alpha^n-\beta^n-(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})\\&=(\alpha-1)\alpha^{n-1}-(\beta-1)\beta^{n-1}.\end{aligned}$$

したがって

$$B^n=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}(\alpha-1)\alpha^n-(\beta-1)\beta^n & 2(\alpha^n-\beta^n)\\ \alpha^n-\beta^n & (\alpha-1)\alpha^{n-1}-(\beta-1)\beta^{n-1}\end{pmatrix}.$$

これから

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}p_{2n}\\ p_{2n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{2n}\\ q_{2n}\end{pmatrix}=\boldsymbol{v}_{2n}=B^n\boldsymbol{v}_0=B^n\begin{pmatrix}p_0\\ p_{-1}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}(\alpha-1)\alpha^n-(\beta-1)\beta^n & 2(\alpha^n-\beta^n)\\ \alpha^n-\beta^n & (\alpha-1)\alpha^{n-1}-(\beta-1)\beta^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0\\ p_1-p_0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}\{(\alpha-1)\alpha^n-(\beta-1)\beta^n\}p_0+2(\alpha^n-\beta^n)(p_1-p_0)\\ (\alpha^n-\beta^n)p_0+\{(\alpha-1)\alpha^{n-1}-(\beta-1)\beta^{n-1}\}(p_1-p_0)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

初期値として $p_0=p_1=1$ にとれば

$$p_{2n}=\frac{(\alpha-1)\alpha^n-(\beta-1)\beta^n}{\alpha-\beta},\quad p_{2n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}.$$

特に $\alpha>1>\beta>0$ だから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{p_{2n}}{p_{2n-1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha-1)\alpha^n-(\beta-1)\beta^n}{\alpha^n-\beta^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha-1)-(\beta-1)(\beta/\alpha)^n}{1-(\beta/\alpha)^n}=\alpha-1=1+\sqrt{3},\\\lim_{n\to\infty}\frac{p_{2n+1}}{p_{2n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-1)\alpha^n-(\beta-1)\beta^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-\beta(\beta/\alpha)^n}{(\alpha-1)-(\beta-1)(\beta/\alpha)^n}\\&=\frac{\alpha}{\alpha-1}=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

2　正則連分数

隣接3項間の漸化式は連分数の理論の中に現れることを説明する．

実数 x に対して

$$m \leq x < m+1$$

を満たす整数 m を $[x]$ で表す．$[x]$ を**ガウス記号**という．例えば $[\sqrt{3}]=1$, $[-3.14]=-4$ である．

実数 γ に対して，$\gamma_0=\gamma$ として

$$b_j=[\gamma_j], \qquad \gamma_{j+1}=\frac{1}{\gamma_j-b_j} \qquad (j=0,1,\dots) \tag{2.1}$$

によって整数 $b_0, b_1, \dots$ と実数 $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ を定めることができる．$n \geq 1$ に対して b_n は正整数であることを注意しておく．γ が有理数ならば，あるところで $\gamma_n=b_n$ となってそこで計算が終わり

$$\gamma=b_0+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{\ddots\ \cfrac{1}{b_{n-1}+\cfrac{1}{b_n}}}}}$$

となる．この右辺を記号 $[b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n]$ で表す．γ が無理数であれば，$\gamma_1, \gamma_2, \dots$ も無理数であり，常に $0<\gamma_j-b_j<1$ となる．したがってこの計算は無限に続けることができる．

$$\gamma_j=b_j+\frac{1}{\gamma_{j+1}} \tag{2.2}$$

だから

$$\gamma=b_0+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{\ddots\ \cfrac{1}{b_{n-1}+\cfrac{1}{\gamma_n}}}}} \tag{2.3}$$

である．この右辺も記号 $[b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, \gamma_n]$ で表す．定義より $\gamma_j > 1$, $b_j \geq 1$ $(j = 1, 2, \dots)$ である．

連分数 $[b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n]$ を通常の分数の形に書き直すときに，隣接 3 項間の漸化式が現れることを説明しよう．そのために行列に対応する 1 次分数変換を導入する．

2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc \neq 0$ に対して，**1 次分数変換** $A(x)$ を

$$A(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

によって定義する．単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対しては，$E(x) = x$ である．もう一つ行列 $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, $ps - qr \neq 0$ をとって，1 次分数変換の合成変換 $A(B(x))$ を計算すると，$B(x) = \dfrac{px + q}{rx + s}$ だから

$$\begin{aligned} A(B(x)) &= A\left(\frac{px + q}{rx + s}\right) = \frac{a\dfrac{px + q}{rx + s} + b}{c\dfrac{px + q}{rx + s} + d} \\ &= \frac{a(px + q) + b(rx + s)}{c(px + q) + d(rx + s)} = \frac{(ap + br)x + aq + bs}{(cp + dr)x + cq + ds}. \end{aligned}$$

一方,

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

だから

$$A(B(x)) = (AB)(x) \tag{2.4}$$

が成り立つ．さて，γ の連分数展開における等式 (2.2) は 1 次分数変換を使うと

$$\gamma_j = b_j + \frac{1}{\gamma_{j+1}} = \frac{b_j \gamma_{j+1} + 1}{\gamma_{j+1}} = A_j(\gamma_{j+1}), \qquad A_j = \begin{pmatrix} b_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表される．したがってこれを繰り返して，(2.4) を用いれば

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_0 &= A_0(\gamma_1) = A_0(A_1(\gamma_2)) = (A_0 A_1)(\gamma_2) \\ &= (A_0 A_1)(A_2(\gamma_3)) = (A_0 A_1 A_2)(\gamma_3) \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (A_0 A_1 A_2 \cdots A_n)(\gamma_{n+1}). \end{aligned}$$

すなわち $B_n = A_0 A_1 A_2 \cdots A_n$ とおけば

$$\gamma = B_n(\gamma_{n+1}) \tag{2.5}$$

と表せる．よって行列の積 $B_n = A_0 A_1 A_2 \cdots A_n$ を計算すればよい．

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 b_1 + 1 & b_0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

であり，$A_0 A_1$ の第 2 列は A_0 の第 1 列である．これから

$$B_n = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

の形であると予想される．これが成り立つとすれば

$$B_{n+1} = B_n A_{n+1} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+1} p_n + p_{n-1} & p_n \\ b_{n+1} q_n + q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$$

となり，$n+1$ のときも正しい．帰納法によってすべての n に対して B_n は (2.7) の形である．さらに p_n, q_n は漸化式

$$p_{n+1} = b_{n+1} p_n + p_{n-1}, \qquad q_{n+1} = b_{n+1} q_n + q_{n-1}$$

を満たすこともわかった．(2.6) より $p_0 = b_0$, $p_1 = b_0 b_1 + 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = b_1$ であり，$\{p_n\}$, $\{q_n\}$ は漸化式

$$\begin{cases} p_n &= b_n p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad n \geq 2, \\ q_n &= b_n q_{n-1} + q_{n-2}, \qquad n \geq 2, \end{cases} \tag{2.8}$$

を満たす．明らかに q_n は正の整数であり，$q_n > q_{n-1}$ $(n \geq 2)$ である．

$\det A_j = \det \begin{pmatrix} b_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ であり，$B_n = A_0 A_1 \cdots A_n$ だから，この両辺の行列式をとれば

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \det B_n = (-1)^{n+1} \tag{2.9}$$

を得る．これから p_n, q_n は互いに素であり，p_n/q_n は既約分数であることがわかる．また

$$B_n(x) = \frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}}$$

であり，(2.3) と (2.5) で n を $n-1$ で置き換えたものから

$$\gamma = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \gamma_n] = B_{n-1}(\gamma_n) = \frac{p_{n-1}\gamma_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\gamma_n + q_{n-2}} \tag{2.10}$$

である．一方，

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, x] = B_{n-1}(x) \tag{2.11}$$

が成り立つ．実際，$n=1$ のとき，$[b_0, x] = b_0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{b_0 x + 1}{x} = A_0(x) = B_0(x)$ でありこれは成り立っている．$n \geq 1$ として (2.11) が成り立つとすると

$$\begin{aligned}[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n, x] &= \left[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n + \frac{1}{x}\right] = B_{n-1}\left(b_n + \frac{1}{x}\right) \\ &= B_{n-1}(A_n(x)) = (B_{n-1}A_n)(x) = B_n(x).\end{aligned}$$

よって (2.11) は $n+1$ のときも成り立つ．ゆえに帰納法によってすべての n について (2.11) が成り立つ．特に (2.11) において $x = b_n$ とおけば

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n] = B_{n-1}(b_n) = \frac{p_{n-1}b_n + p_{n-2}}{q_{n-1}b_n + q_{n-1}} = \frac{p_n}{q_n} \tag{2.12}$$

を得る．ここで最後の等号は漸化式 (2.8) による．

(2.9) に類似した等式

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n b_n, \qquad n \geq 2 \tag{2.13}$$

も成り立つ．実際，漸化式 (2.8) と (2.9) より

$$\begin{aligned}p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (b_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(b_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= b_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = b_n (-1)^n.\end{aligned}$$

(2.13) より

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n}{q_n q_{n-2}} = \frac{(-1)^n b_n}{q_n q_{n-2}}$$

であり，$n \geq 2$ のとき $q_n q_{n-2}$ および b_n は正だから，右辺は n が偶数ならば正であり，奇数ならば負である．したがって $\{p_{2n}/q_{2n}\}$ は単調増加であり，$\{p_{2n+1}/q_{2n+1}\}$ は単調減少である．また (2.9) より

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = \frac{p_{2n} q_{2n-1} - p_{2n-1} q_{2n}}{q_{2n} q_{2n-1}} = \frac{(-1)^{2n+1}}{q_{2n} q_{2n-1}} < 0.$$

したがって不等式

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

が成り立つ．(2.12) と (2.10) の n を $n+1$ で置き換えたものとの差をとれば

$$\begin{aligned}\frac{p_n}{q_n}-\gamma &= \frac{p_n}{q_n}-\frac{p_n\gamma_{n+1}+p_{n-1}}{q_n\gamma_{n+1}+q_{n-1}}=\frac{p_n(q_n\gamma_{n+1}+q_{n-1})-q_n(p_n\gamma_{n+1}+p_{n-1})}{q_n(q_n\gamma_{n+1}+q_{n-1})}\\ &=\frac{p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n}{q_n(q_n\gamma_{n+1}+q_{n-1})}=\frac{(-1)^{n+1}}{q_n(q_n\gamma_{n+1}+q_{n-1})}.\end{aligned}$$

ここで $\gamma_{n+1}\geq[\gamma_{n+1}]=b_{n+1}$ だから $q_n\gamma_{n+1}+q_{n-1}>q_nb_{n+1}+q_{n-1}=q_{n+1}$ である．したがって

$$\left|\frac{p_n}{q_n}-\gamma\right|\leq\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{q_n^2} \tag{2.14}$$

が成り立つ．$n\to\infty$ のとき $q_n\to\infty$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\gamma \tag{2.15}$$

が成り立つ．そこで

$$\gamma=[b_0,b_1,b_2,\cdots]$$

とかいて，これを無理数 γ の**連分数展開**とよぶ.

例 2.1. 黄金比 $\gamma=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の連分数展開を計算してみよう．$\gamma_0=\gamma$ とすると

$$b_0=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]=1,\qquad \gamma_1=\frac{1}{\gamma_0-b_0}=\frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

だから，これを繰り返して $b_n=1$, $\gamma_n=\gamma$ $(n=1,2,\dots)$ となる．したがって黄金比の連分数展開は

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=[1,1,1,\cdots]$$

となる．漸化式 (2.8) は

$$\begin{aligned}p_n&=p_{n-1}+p_{n-2},\\ q_n&=q_{n-1}+q_{n-2},\end{aligned}$$

であり，$p_0=b_0=1$, $p_1=b_0b_1+1=2$, $q_0=1$, $q_1=b_1=1$ だから，次の表を得る．$q_n=p_{n-1}$, $n\geq1$ であり，$\{p_n\}$, $\{q_n\}$ はフィボナッチ数列をずらしたものである．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_n}{p_{n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
q_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

表 2　黄金比の近似分数

同様に

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \cdots],$$
$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots],$$
$$\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \cdots].$$

一般に整数係数の 2 次方程式の解であるような無理数を **2 次無理数**とよぶ．2 次無理数の連分数展開は上の例のようにあるところから循環する連分数になり，逆にそのような連分数展開をもつ無理数は 2 次無理数であることが知られている．これらについては (2.8) は周期的な係数 b_n をもつ漸化式である．

自然対数の底 $e = 2.71828182\cdots$ は次のような規則的な連分数展開をもつことが知られている．

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, \cdots]$$

3　一般連分数

前節で扱った連分数を**正則連分数**という．これをもっと一般化して次のような連分数を**一般連分数**とよぶ.

(3.1)
$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{\ddots + \cfrac{\ddots}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}}$$
$$a_i \neq 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

この式を次のようにも表す：

(3.2)
$$\mathop{\mathbb{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1}{b_1} {+} \frac{a_2}{b_2} {+} \cdots {+} \frac{a_n}{b_n}.$$

(3.1) において a_i, b_i は複素数体 $\mathbb{C}$ に属するものとする．このとき上の式の値は $\mathbb{C}$ の四則によって全体を通分することによって確定する．ただし $a/0 = \infty$ $(a \neq 0)$ として値が ∞ になる場合を許し，$a/\infty = 0$ $(a \in \mathbb{C})$ とする．

一般に分数の分子・分母に 0 でない同一の値をかけても分数の値は変わらないことから，一般連分数に次のような変換を行ってもその値は変わらないことがわかる：

$$
\begin{aligned}
&b_1 \mapsto \lambda_1 b_1, \quad a_1 \mapsto \lambda_1 a_1,\\
&b_2 \mapsto \lambda_2 b_2, \quad a_2 \mapsto \lambda_1 \lambda_2 a_2,\\
&\quad\cdots\\
&b_n \mapsto \lambda_n b_n, \quad a_n \mapsto \lambda_{n-1} \lambda_n a_n.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

ここで $\lambda_i \neq 0$ は $\mathbb{C}$ の任意の元をとることができる．したがってこのような変換によって任意の一般連分数は

$$a_i = 1 \quad (\forall i \geq 1)$$

を満たす正則連分数 (通常の連分数) と同値であることがわかる．

一般連分数においては，有限項の場合でも同じ値をもつ連分数表示が無数に存在する．すると正則連分数では成り立っていたことも一般連分数では成り立たなくなる性質もある．

隣接 3 項間の漸化式は一般連分数の理論の中にも正則連分数のときと同様に現れる．正則連分数のときと同様に 1 次分数変換を用いて (3.1) の値を通常の分数で表す．今度は各 $j = 1, 2, \ldots$ に対して $A_j = \begin{pmatrix} 0 & a_j \\ 1 & b_j \end{pmatrix}$ とおく．この行列 A_j に対応する 1 次分数変換は $A_j(x) = \dfrac{a_j}{b_j + x}$ である．$B_n = A_1 A_2 \cdots A_n$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_1}{b_1 + x} = A_1(x) = B_1(x),\\
&\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + x}} = \frac{a_1}{b_1 + A_2(x)} = A_1(A_2(x)) = (A_1 A_2)(x) = B_2(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{\ddots + \cfrac{\ddots}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n + x}}}}} = B_{n-1}(A_n(x)) = (B_{n-1} A_n)(x) = B_n(x).
\end{aligned}
$$

$B_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば，$B_0(x) = x$ である．$p_{-1} = 1$, $p_0 = 0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$ とおく．B_n は

$$B_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

の形である．実際，$B_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{-1} & p_0 \\ q_{-1} & q_0 \end{pmatrix}$ だから $n = 0$ のときは正しい．$n \geq 0$ として (3.4) が成り立つとすれば

$$B_{n+1} = B_n A_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ 1 & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & a_{n+1}p_{n-1} + b_{n+1}p_n \\ q_n & a_{n+1}q_{n-1} + b_{n+1}q_n \end{pmatrix}.$$

したがって $p_{n+1} = b_{n+1}p_n + a_{n+1}p_{n-1}$, $q_{n+1} = b_{n+1}q_n + a_{n+1}q_{n-1}$ とおけば $n+1$ のときも正しい．帰納法によってすべての $n \geq 0$ について B_n は (3.4) の形である．さらに p_n, q_n は次の隣接 3 項間漸化式を満たすこともわかった.

$$\begin{cases} p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}, & n \geq 1, \\ q_n = b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2}, & n \geq 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

ここで初期値は

$$p_{-1} = 1, \quad p_0 = 0, \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1 \tag{3.6}$$

であった.

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a_n}{b_n + x} = B_n(x) = \frac{p_{n-1}x + p_n}{q_{n-1}x + q_n}$$

で $x = 0$ とおけば

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{p_n}{q_n} \tag{3.7}$$

を得る．$\det A_j = \det \begin{pmatrix} 0 & a_j \\ 1 & b_j \end{pmatrix} = -a_j$ であり，$B_n = A_1 A_2 \cdots A_n$ だから，この両辺の行列式をとれば

$$p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n \tag{3.8}$$

を得る．この両辺を $-q_n q_{n-1}$ で割れば

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{q_n q_{n-1}}. \tag{3.9}$$

以上においては有限個の項からなる一般連分数について述べたが，無限個の項からなる連分数の値を定めるために

$$\alpha = \mathop{\mathbb{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha \tag{3.10}$$

と定める．ただし p_n/q_n は与えられた連分数表示の第 $n+1$ 項以降を除いた近似分数 (3.7) とする．

一般連分数を使って円周率 π を表す公式

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\cfrac{5^2}{11+\ddots}}}}}}$$

が知られている．この公式は

$$\frac{4}{\pi} - 1 = \mathop{\mathbb{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n+1}$$

と同値であり，この連分数の第 n 近似分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ は隣接 3 項間の漸化式

$$\begin{cases} p_n = (2n+1)p_{n-1} + n^2 p_{n-2}, \quad n \geq 1, \qquad p_{-1} = 1,\ p_0 = 0, \\ q_n = (2n+1)q_{n-1} + n^2 q_{n-2}, \quad n \geq 1, \qquad q_{-1} = 0,\ q_0 = 1 \end{cases}$$

によって計算される．計算結果は表 3 のようになる．

4　ポアンカレの定理

一般連分数 (3.1) を通常の分数 $\dfrac{p_n}{q_n}$ で表す式 (3.7) において，$\{p_n\}$, $\{q_n\}$ は隣接 3 項間の漸化式 (3.5) によって計算された．この漸化式で，a, b を定数としてすべての n について $a_n = a$, $b_n = b$ である場合が，最初に扱った漸化式 (1.1) である．またすべての n について $a_n = 1$ で $b_n \in \mathbb{Z}$, $b_n \geq 1$ $(n \geq 1)$ となる場合が正則連分数である．

n を大きくしたとき a_n, b_n がそれぞれ a, b に収束すると仮定する．この条件のもとで数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ が漸化式

$$p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

n	a_n	b_n	p_n	q_n	$4q_n/(p_n+q_n)$
1	1	3	1	3	3.0000000000
2	4	5	5	19	3.1666666666
3	9	7	44	160	3.1372549019
4	16	9	476	1744	3.1423423423
5	25	11	6336	23184	3.1414634146
6	36	13	99504	364176	3.1416149068
7	49	15	1803024	6598656	3.1415888250
8	64	17	37019664	135484416	3.1415933118
9	81	19	849418560	3108695040	3.1415925404
10	100	21	21539756160	78831037440	3.1415926730

表 3　一般連分数による円周率 π の計算

によって定義されるとき，$\{p_n\}$ についてなにかいえないだろうか.

定理 4.1 (ポアンカレ). 複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \mu$ を満たすとし，複素数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ は漸化式

$$p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

を満たす，恒等的に 0 でない数列とする．さらに 2 次方程式

$$x^2 - \mu x - \lambda = 0$$

の 2 根 β', β'' は $|\beta'| > |\beta''|$ を満たすとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

が存在して，それは β' または β'' に等しい.

以下，ポアンカレの定理を証明するために補題を 2 つ準備する.

補題 4.2. 複素数係数の 2 次方程式

$$x^2 - \mu x - \lambda = 0$$

の 2 根が異なる絶対値をもつためには

$$\mu^2 + 4\lambda \neq 0, \quad \frac{\mu^2}{\mu^2 + 4\lambda} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

であることが必要十分である．

[証明]　この 2 次方程式の 2 根が異なるとすれば，判別式 $\mu^2+4\lambda\neq 0$ である．$\gamma\in\mathbb{C}$ を $\mu^2+4\lambda$ の平方根の 1 つとして $\nu=\mu/\gamma$ とおく．このときこの 2 次方程式の 2 根は

$$\frac{\mu+\gamma}{2}=\frac{(\nu+1)\gamma}{2},\qquad \frac{\mu-\gamma}{2}=\frac{(\nu-1)\gamma}{2}$$

で与えられる．それらの絶対値は

$$\frac{|\nu+1||\gamma|}{2},\quad \frac{|\nu-1||\gamma|}{2}$$

だから，これらが等しいのは $|\nu+1|=|\nu-1|$ が成り立つときである．これは ν が 1 と -1 から等距離にあることを意味するから，1 と -1 を結ぶ線分の垂直 2 等分線である虚軸上にあるとき，すなわち ν が純虚数のときである．ν が純虚数であるのは

$$\nu^2=\frac{\mu^2}{\gamma^2}=\frac{\mu^2}{\mu^2+4\lambda}$$

が 0 以下の実数であるときである．逆に $\mu^2+4\lambda\neq 0$ かつ $\mu^2/(\mu^2+4\lambda)$ が 0 以下の実数ならば 2 根の絶対値は等しい．　$\square$

補題 4.3. $\mathbb{C}^2$ の開集合 G を

$$G=\{(\mu,\lambda)\in\mathbb{C}^2 \mid \mu^2+4\lambda\neq 0,\ \mu^2/(\mu^2+4\lambda)\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\}$$

によって定義する．このとき $(\mu,\lambda)\in G$ に対して 2 次方程式

$$x^2-\mu x-\lambda=0$$

の 2 根を $\beta',\beta'',|\beta'|>|\beta''|$ とすれば，β',β'' はそれぞれ (μ,λ) の連続関数である．

[証明]　$(\mu_1,\lambda_1)\in G$ を固定する．$x^2-\mu_1x-\lambda_1=0$ の 2 根を $\beta_1',\beta_1'',|\beta_1'|>|\beta_1''|$ とする．$(\mu,\lambda)\in G$ に対して，$x^2-\mu x-\lambda=0$ の 2 根を $\beta',\beta'',|\beta'|>|\beta''|$ とする．このとき $\beta'+\beta''=\mu$, $\beta_1'+\beta_1''=\mu_1$ だから

$$\begin{aligned}|\beta_1'-\beta''|+|\beta'-\beta_1''|&=|\beta_1'-\beta''|+|(\mu-\beta'')-(\mu_1-\beta_1')|\\&=|\beta_1'-\beta''|+|\beta_1'-\beta''+\mu-\mu_1|\\&\leq|\beta_1'-\beta''|+|\beta_1'-\beta''|+|\mu-\mu_1|\\&=2|\beta_1'-\beta''|+|\mu-\mu_1|.\end{aligned}$$

また

$$
\begin{aligned}
|\beta_1' - \beta''| + |\beta' - \beta_1''| &\geq |\beta_1'| - |\beta''| + |\beta'| - |\beta_1''| \\
&= |\beta_1'| - |\beta_1''| + |\beta'| - |\beta''| \geq |\beta_1'| - |\beta_1''|.
\end{aligned}
$$

したがって $|\mu - \mu_1| < (|\beta_1'| - |\beta_1''|)/2$ ならば

$$
2|\beta_1' - \beta''| \geq |\beta_1'| - |\beta_1''| - |\mu - \mu_1| \geq \frac{|\beta_1'| - |\beta_1''|}{2}. \tag{4.1}
$$

一方，β', β'' は 2 次方程式 $x^2 - \mu x - \lambda = 0$ の 2 根だから

$$
(x - \beta')(x - \beta'') = x^2 - \mu x - \lambda
$$

である．これに $x = \beta_1'$ を代入すれば

$$
(\beta_1' - \beta')(\beta_1' - \beta'') = (\beta_1')^2 - \mu\beta_1' - \lambda
$$

を得る．ここで

$$
(\beta_1')^2 - \mu_1\beta_1' - \lambda_1 = 0, \quad (\beta_1')^2 = \mu_1\beta_1' + \lambda_1
$$

だから

$$
\begin{aligned}
&(\beta_1' - \beta')(\beta_1' - \beta'') = \beta_1'(\mu_1 - \mu) + \lambda_1 - \lambda, \\
&|\beta_1' - \beta'| \cdot |\beta_1' - \beta''| = |\beta_1'(\mu_1 - \mu) + \lambda_1 - \lambda| \leq |\beta_1'||\mu - \mu_1| + |\lambda - \lambda_1| \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

である．(4.1) と (4.2) より $|\mu - \mu_1| < (|\beta_1'| - |\beta_1''|)/2$ ならば

$$
|\beta' - \beta_1'| \leq \frac{|\beta_1'||\mu - \mu_1| + |\lambda - \lambda_1|}{|\beta_1' - \beta''|} \leq 4\frac{|\beta_1'||\mu - \mu_1| + |\lambda - \lambda_1|}{|\beta_1'| - |\beta_1''|}.
$$

これは β' が (μ, λ) の連続関数であることを示している．

$$
\begin{aligned}
|\beta'' - \beta_1''| &= |(\mu - \beta') - (\mu_1 - \beta_1')| = |\mu - \mu_1 + \beta_1' - \beta'| \\
&\leq |\mu - \mu_1| + |\beta' - \beta_1'|
\end{aligned}
$$

だから，β'' も (μ, λ) の連続関数である． □

[定理 4.1 の証明] 仮定より 2 次方程式

$$
x^2 - \mu x - \lambda = 0
$$

の 2 根 β', β'' は $|\beta'| > |\beta''|$ である．したがって $\mu^2 + 4\lambda \neq 0$ であり $\nu = \dfrac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 4\lambda}}$ とおけば補題 4.3 より $\nu^2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ であり $n \to \infty$ のとき $a_n \to \lambda$, $b_n \to \mu$ だから

$$
\lim_{n\to\infty}(b_n^2 + 4a_n) = \mu^2 + 4\lambda \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{b_n^2 + 4a_n} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 4\lambda} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]
$$

である．したがって 2 次方程式

$$x^2 - b_n x - a_n = 0$$

の 2 根を α'_n, α''_n, $|\alpha'_n| \geq |\alpha''_n|$ とするとき，自然数 n_0 が存在して $n \geq n_0$ ならば $b_n^2/(b_n^2 + 4a_n) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ となり $|\alpha'_n| > |\alpha''_n|$ が成り立つ．このとき補題 4.3 より $\lim_{n\to\infty} \alpha'_n = \beta'$, $\lim_{n\to\infty} \alpha''_n = \beta''$ である．$b_n = \alpha'_n + \alpha''_n$, $a_n = -\alpha'_n \alpha''_n$ だから p_n の漸化式は

$$p_n = (\alpha'_n + \alpha''_n) p_{n-1} - \alpha'_n \alpha''_n p_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

とかける．これをかきなおせば

$$\begin{aligned} p_n - \alpha''_n p_{n-1} &= \alpha'_n (p_{n-1} - \alpha''_n p_{n-2}), \\ p_n - \alpha'_n p_{n-1} &= \alpha''_n (p_{n-1} - \alpha'_n p_{n-2}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} u_n &= p_{n-1} - \alpha''_n p_{n-2} \\ v_n &= p_{n-1} - \alpha'_n p_{n-2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

とおけば

$$\begin{aligned} p_{n-1} &= \frac{1}{\alpha'_n - \alpha''_n} (\alpha'_n u_n - \alpha''_n v_n), \\ p_{n-2} &= \frac{1}{\alpha'_n - \alpha''_n} (u_n - v_n). \end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.3), (4.4), (4.5) より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_n - \alpha''_{n+1} p_{n-1} \\ p_n - \alpha'_{n+1} p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n - \alpha''_n p_{n-1} \\ p_n - \alpha'_n p_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\alpha''_n - \alpha''_{n+1}) p_{n-1} \\ (\alpha'_n - \alpha'_{n+1}) p_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha'_n (p_{n-1} - \alpha''_n p_{n-2}) \\ \alpha''_n (p_{n-1} - \alpha'_n p_{n-2}) \end{pmatrix} + p_{n-1} \begin{pmatrix} \alpha''_n - \alpha''_{n+1} \\ \alpha'_n - \alpha'_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha'_n u_n \\ \alpha''_n v_n \end{pmatrix} + \frac{\alpha'_n u_n - \alpha''_n v_n}{\alpha'_n - \alpha''_n} \begin{pmatrix} \alpha''_n - \alpha''_{n+1} \\ \alpha'_n - \alpha'_{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \alpha'_n u_n + \frac{\alpha'_n (\alpha''_n - \alpha''_{n+1})}{\alpha'_n - \alpha''_n} u_n - \frac{\alpha''_n (\alpha''_n - \alpha''_{n+1})}{\alpha'_n - \alpha''_n} v_n, \\ v_{n+1} &= \alpha''_n v_n + \frac{\alpha'_n (\alpha'_n - \alpha'_{n+1})}{\alpha'_n - \alpha''_n} u_n - \frac{\alpha''_n (\alpha'_n - \alpha'_{n+1})}{\alpha'_n - \alpha''_n} v_n \end{aligned}$$

となる．そこで

$$
\begin{aligned}
d_n' &= \alpha_n' - \beta' + \frac{\alpha_n'(\alpha_n'' - \alpha_{n+1}'')}{\alpha_n' - \alpha_n''}, & e_n' &= -\frac{\alpha_n''(\alpha_n'' - \alpha_{n+1}'')}{\alpha_n' - \alpha_n''}, \\
d_n'' &= \frac{\alpha_n'(\alpha_n' - \alpha_{n+1}')}{\alpha_n' - \alpha_n''}, & e_n'' &= \alpha_n'' - \beta'' - \frac{\alpha_n''(\alpha_n' - \alpha_{n+1}')}{\alpha_n' - \alpha_n''}
\end{aligned}
$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= \beta' u_n + d_n' u_n + e_n' v_n, \\
v_{n+1} &= \beta'' v_n + d_n'' u_n + e_n'' v_n
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

が成り立つ．$n \to \infty$ のとき $\alpha_n' \to \beta'$, $\alpha_n'' \to \beta''$, $|\beta'| > |\beta''|$ だから d_n', e_n', d_n'', e_n'' はすべて 0 に収束する．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}' &= \{n \in \mathbb{N} \,|\, |u_n| \geq |v_n|\}, \\
\mathcal{N}'' &= \{n \in \mathbb{N} \,|\, |u_n| < |v_n|\}
\end{aligned}
$$

とおく．$\mathbb{N} = \mathcal{N}' \cup \mathcal{N}''$ だから $\mathcal{N}'$ または $\mathcal{N}''$ の少なくとも一方は無限集合である．以下，$\mathcal{N}'$ が無限集合のときと有限集合のときにわけて証明する．

$\underline{\mathcal{N}' \text{ が無限集合のとき}}$．(4.6) より

$$
\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \beta' + d_n' + e_n' \frac{v_n}{u_n}, \\
\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} &= \frac{v_{n+1}}{u_n} \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\beta'' \frac{v_n}{u_n} + d_n'' + e_n'' \frac{v_n}{u_n}\right) \frac{u_n}{u_{n+1}}
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
f_n &= d_n' + e_n' \frac{v_n}{u_n}, \\
g_n &= d_n'' + e_n'' \frac{v_n}{u_n}
\end{aligned}
$$

とおけば

$$
\frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta' + f_n, \tag{4.7}
$$

$$
\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{\beta''}{\beta' + f_n} \frac{v_n}{u_n} + \frac{g_n}{\beta' + f_n} \tag{4.8}
$$

を得る．$n \in \mathcal{N}'$ で $n \to \infty$ とすれば d_n', e_n', d_n'', e_n'' は 0 に収束し，$|v_n|/|u_n| \leq 1$ だから f_n, g_n も 0 に収束する．$|\beta''|/|\beta'| < 1$ だから $\eta > 0$ を $|\beta''|/|\beta'| + \eta < 1$ を満た

す任意の正数とする．$n \in \mathcal{N}'$ で $n \to \infty$ とすれば，$\beta''/(\beta' + f_n) \to \beta''/\beta'$ であり，$g_n/(\beta' + f_n) \to 0$ だから，$n \in \mathcal{N}'$ が十分大ならば

$$\left|\frac{\beta''}{\beta' + f_n}\right| < \frac{|\beta''|}{|\beta'|} + \frac{\eta}{2}, \qquad \left|\frac{g_n}{\beta' + f_n}\right| < \frac{\eta}{2}$$

が成り立つ．また $|v_n|/|u_n| \leq 1$ も成り立つから (4.8) より

$$\left|\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}\right| \leq \left|\frac{\beta''}{\beta' + f_n}\right| \frac{|v_n|}{|u_n|} + \left|\frac{g_n}{\beta' + f_n}\right| < \frac{|\beta''|}{|\beta'|} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \frac{|\beta''|}{|\beta'|} + \eta < 1$$

が成り立つ．したがって $n + 1 \in \mathcal{N}'$ である．ゆえに $\mathcal{N}'$ は十分大きなすべての自然数を含む．よって (4.7) より

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta' \tag{4.9}$$

を得る．次に

$$\lim_{n \to \infty} \frac{v_n}{u_n} = 0 \tag{4.10}$$

を示す．これが成り立たないとして矛盾を導けばよい．(4.10) が成り立たないとすると，ある正数 $M > 0$ が存在して，無数の自然数 n に対して

$$\frac{|v_n|}{|u_n|} \geq M$$

が成り立つことになる．このような自然数 n の値全体のなす集合を $\mathcal{M}$ とする：

$$\mathcal{M} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, |v_n|/|u_n| \geq M\}.$$

$n \in \mathcal{M}$ ならば

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{\beta''}{\beta' + f_n}\frac{v_n}{u_n} + \frac{g_n}{\beta' + f_n} = \left(\frac{\beta''}{\beta} + h_n\right)\frac{v_n}{u_n}$$

とかける．ここで

$$h_n = \frac{\beta''}{\beta' + f_n} - \frac{\beta''}{\beta'} + \frac{g_n}{\beta' + f_n}\frac{u_n}{v_n}$$

とおいた．$n \in \mathcal{M}$ より

$$\begin{aligned} |h_n| &\leq \left|\frac{\beta''}{\beta' + f_n} - \frac{\beta''}{\beta'}\right| + \frac{|g_n|}{|\beta' + f_n|}\frac{|u_n|}{|v_n|} \\ &\leq \left|\frac{\beta''}{\beta' + f_n} - \frac{\beta''}{\beta'}\right| + \frac{|g_n|}{|\beta' + f_n|}\frac{1}{M}. \end{aligned}$$

$n \in \mathcal{M}$ で $n \to \infty$ とすれば，上の式の右辺は 0 に近づくから $h_n \to 0$ である．したがって $\delta > 0$ を $\dfrac{|\beta''|}{|\beta'|} + \delta < 1$ にとるとき，$n_0 \in \mathcal{M}$ が存在して，$n \in \mathcal{M}$, $n \geq n_0$ ならば $\left|\dfrac{\beta''}{\beta'} + h_n\right| \leq \dfrac{|\beta''|}{|\beta'|} + \delta < 1$ となり

$$\frac{|v_{n+1}|}{|u_{n+1}|} = \left|\frac{\beta''}{\beta} + h_n\right| \frac{|v_n|}{|u_n|} \leq \left(\frac{|\beta''|}{|\beta'|} + \delta\right) \frac{|v_n|}{|u_n|}$$

となる．$j = 0, \ldots, m-1$ について $n + j \in \mathcal{M}$ であるとすると上の不等式から

$$\frac{|v_{n+m}|}{|u_{n+m}|} \leq \left(\frac{|\beta''|}{|\beta'|} + \delta\right)^m \frac{|v_n|}{|u_n|}$$

が成り立つ．m が大きければこの右辺は M より小さくなり，$\dfrac{|v_{n+m}|}{|u_{n+m}|} < M$ となるから $n + m \notin \mathcal{M}$ となる．これが各 $n \in \mathcal{M}$, $n \geq n_0$ について成り立つ．したがって $\mathcal{M}$ が無限集合であることから $\mathbb{N} \setminus \mathcal{M}$ も無限集合になる．しかし $n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{M}$，すなわち $|v_n|/|u_n| < M$ のとき，n が十分大ならば $n \in \mathcal{N}'$ だから (4.8) より

$$\begin{aligned}
\frac{|v_{n+1}|}{|u_{n+1}|} &\leq \frac{|\beta''|}{|\beta' + f_n|} \frac{|v_n|}{|u_n|} + \frac{|g_n|}{|\beta' + f_n|} \\
&\leq \frac{|\beta''|}{|\beta' + f_n|} M + \frac{|g_n|}{|\beta' + f_n|}
\end{aligned}$$

となる．$n \to \infty$ のとき f_n, g_n は 0 に収束し，$|\beta''|/|\beta'| < 1$ だから $n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{M}$ が十分大ならば，上の不等式から $|v_{n+1}|/|u_{n+1}| < M$ が成り立つ．したがってあるところから先の自然数はすべて $\mathbb{N} \setminus \mathcal{M}$ に属することになる．これは $\mathcal{M}$ が無限集合であることに矛盾する．ゆえに (4.10) が成り立つことが証明された．(4.5) と (4.10) より

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha'_n u_n - \alpha''_n v_n}{u_n - v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha'_n - \alpha''_n (v_n/u_n)}{1 - (v_n/u_n)} \\
&= \frac{\beta' - \beta'' \cdot 0}{1 - 0} = \beta'
\end{aligned}$$

を得る．

<u>$\mathcal{N}'$ が有限集合のとき</u>．$\mathcal{N}''$ はある自然数から先のすべての自然数を含む．(4.6) より

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \beta'' + d''_n \frac{u_n}{v_n} + e''_n, \\
\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} &= \frac{u_{n+1}}{v_n} \cdot \frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(\beta' \frac{u_n}{v_n} + d'_n \frac{u_n}{v_n} + e'_n\right) \frac{v_n}{v_{n+1}}
\end{aligned}$$

となる．よって

$$f'_n = d''_n \frac{u_n}{v_n} + e''_n,$$
$$g'_n = d'_n \frac{u_n}{v_n} + e'_n$$

とおけば

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \beta'' + f'_n, \tag{4.11}$$

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{\beta'}{\beta'' + f'_n} \cdot \frac{u_n}{v_n} + \frac{g'_n}{\beta'' + f'_n} \tag{4.12}$$

を得る．n が十分大ならば $n \in \mathcal{N}''$，したがって $|u_n|/|v_n| < 1$ である．$n \to \infty$ とすれば d'_n, e'_n, d''_n, e''_n は 0 に収束し，$|u_n|/|v_n| < 1$ だから f'_n, g'_n も 0 に収束する．したがって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \beta'' \tag{4.13}$$

である．次に

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \tag{4.14}$$

を示す．これが成り立たないとして矛盾を導けばよい．(4.14) が成り立たないとすると，ある正数 $L > 0$ が存在して，無数の自然数 n に対して

$$\frac{|u_n|}{|v_n|} \geq L$$

が成り立つことになる．このような自然数 n の値全体のなす集合を $\mathcal{L}$ とする：

$$\mathcal{L} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, |u_n|/|v_n| \geq L\}.$$

$n \in \mathcal{L}$ ならば (4.12) より

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{\beta'}{\beta'' + f'_n} \cdot \frac{u_n}{v_n} + \frac{g'_n}{\beta'' + f'_n} = \left(\frac{\beta'}{\beta''} + h'_n\right) \frac{u_n}{v_n}$$

とかける．ここで

$$h'_n = \frac{\beta'}{\beta'' + f'_n} - \frac{\beta'}{\beta''} + \frac{g'_n}{\beta'' + f'_n} \frac{v_n}{u_n}$$

とおいた．$n \in \mathcal{L}$ より

$$\begin{aligned} |h'_n| &\leq \left|\frac{\beta'}{\beta'' + f'_n} - \frac{\beta'}{\beta''}\right| + \frac{|g'_n|}{|\beta'' + f'_n|} \frac{|v_n|}{|u_n|} \\ &\leq \left|\frac{\beta'}{\beta'' + f'_n} - \frac{\beta'}{\beta''}\right| + \frac{|g'_n|}{|\beta'' + f'_n|} \frac{1}{L}. \end{aligned}$$

$n \in \mathcal{L}$ で $n \to \infty$ とすれば，上の式の右辺は 0 に近づくから $h'_n \to 0$ である．したがって $\delta > 0$ を $|\beta'|/|\beta''| > 1 + \delta$ にとるとき，$n_1 \in \mathcal{L}$ が存在して，$n \in \mathcal{L}$, $n \geq n_1$ ならば $|\beta'/\beta'' + h'_n| \geq |\beta'|/|\beta''| - \delta > 1$ となり

$$\frac{|u_{n+1}|}{|v_{n+1}|} = \left|\frac{\beta'}{\beta''} + h'_n\right| \frac{|u_n|}{|v_n|} \geq \left(\frac{|\beta'|}{|\beta''|} - \delta\right) \frac{|u_n|}{|v_n|} > \frac{|u_n|}{|v_n|} \geq L$$

となる．よって $n+1 \in \mathcal{L}$ である．したがって $\mathcal{L}$ は n_1 以上のすべての自然数を含むことになる．$n \geq n_1$ とすれば $n + j \in \mathcal{L}$ $(j = 0, 1, \ldots)$ であり

$$\frac{|u_{n+j}|}{|v_{n+j}|} \geq \left(\frac{|\beta'|}{|\beta''|} - \delta\right)^j \frac{|u_n|}{|v_n|} > \left(\frac{|\beta'|}{|\beta''|} - \delta\right)^j L$$

が成り立つ．ある自然数 j_1 が存在して

$$\left(\frac{|\beta'|}{|\beta''|} - \delta\right)^{j_1} L > 1$$

となるから，すべての $j \geq j_1$ に対して $|u_{n+j}|/|v_{n+j}| > 1$ となる．これは

$$\mathcal{N}' = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n| \geq |v_n|\}$$

が有限集合であるとしたことに矛盾する．ゆえに (4.14) が成り立つことが証明された．(4.5) と (4.14) より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha'_n u_n - \alpha''_n v_n}{u_n - v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha'_n (u_n/v_n) - \alpha''_n}{u_n/v_n - 1} \\ &= \frac{\beta' \cdot 0 - \beta''}{0 - 1} = \beta''\end{aligned}$$

を得る． □