リーマンのゼータ関数について

上越教育大学　中川仁

平成 28 年 9 月 26 日

リーマン予想とは「リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明な零点はすべて $\Re(s) = \dfrac{1}{2}$ という直線上にある」という主張である．有名な数学の未解決問題であるリーマン予想について，その意味をできるだけ正確にわかりやすく解説することを試みてみたい．

1　実変数関数としてのリーマンのゼータ関数

実数 $s > 1$ に対して**リーマンのゼータ関数** $\zeta(s)$ は次のように定義される．

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots . \tag{1}$$

ここで右辺の級数は $s > 1$ に対して収束する．実際，$s > 1$ ならば $2 \le n \le N$ に対して

$$n - 1 < x < n \text{ のとき} \quad \frac{1}{n^s} < \frac{1}{x^s} < \frac{1}{(n-1)^s}.$$

したがって

$$\frac{1}{n^s} < \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^s}\, dx < \frac{1}{(n-1)^s}.$$

これを $n = 2$ から $n = N$ まで加えれば (図 1 を参照)

$$\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{N^s} < \int_{1}^{N} \frac{1}{x^s}\, dx < \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{(N-1)^s}.$$

ここで

$$\int_{1}^{N} \frac{1}{x^s}\, dx = \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s} \right]_{1}^{N} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1}\frac{1}{N^{s-1}} < \frac{1}{s-1}$$

だから

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^s} < 1 + \int_{1}^{N} \frac{1}{x^s}\, dx < 1 + \frac{1}{s-1}. \tag{2}$$

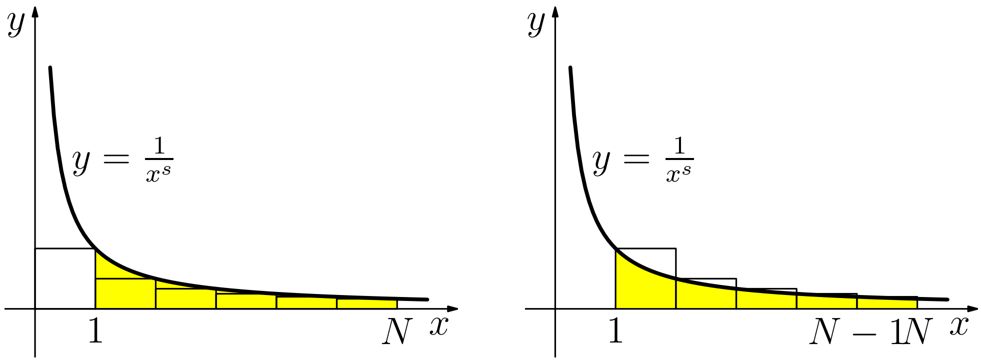

図 1　$\zeta(s)$ の収束

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は収束する．同様に

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^s} > \int_1^N x^{-s}\,dx = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1}\frac{1}{N^{s-1}}. \tag{3}$$

(2) および (3) で $N\to\infty$ とすれば

$$\frac{1}{s-1} \le \zeta(s) \le 1 + \frac{1}{s-1} \qquad (s>1),$$

したがって

$$0 \le (s-1)\zeta(s) - 1 \le (s-1) \qquad (s>1) \tag{4}$$

を得る．これから

$$\lim_{s\to 1+0}\zeta(s) = \infty, \qquad \lim_{s\to 1+0}(s-1)\zeta(s) = 1$$

を得る．

$s>1$ に対して，$N>1$ を自然数とし，N 以下の素数 p にわたる積

$$P_N(s) = \prod_{p\le N}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

を考える．$0<p^{-s}<1$ だから等比級数の公式により

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty}(p^{-s})^k = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots.$$

したがって，有限積 $P_N(s)$ を展開すれば素因数分解の一意性により

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} < P_N(s) = \sum_{n\text{ の各素因数}\le N}\frac{1}{n^s} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

ここで $N \to \infty$ とすれば

$$\lim_{N\to\infty} P_N(s) = \zeta(s)$$

を得る．以上によって次を得た．

命題 1.1 (オイラー積表示)．$s > 1$ に対して級数 (1) は収束する．さらに

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \qquad (s > 1)$$

が成り立つ．ここで右辺はすべての素数 p にわたる無限積を表す．これを**オイラー積表示**という．

命題 1.1 によってリーマンのゼータ関数と素数が結びつくことがわかる．例えば，もし素数が有限個しかないとするとオイラー積は有限個の素数についての積であり，$s \to 1+0$ としたときオイラー積は有限の値 $\prod_p (1-p^{-1})^{-1}$ に収束するが，これは $\zeta(s) \to \infty$ に矛盾する．よって素数は無数に存在することがわかる．

$\zeta(s)$ は級数 (1) によって $s > 1$ に対して定義された．$\zeta(s)$ の定義域を $s > 1$ よりも広げることはできないだろうか？

実は $s = 1$ を除いて，$s > 0$ まで拡張することが次のようにできる．

$s > 0$ に対して級数

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

は収束する．実際，部分和を $L_N = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ とすれば

$$\begin{aligned}
L_1 &= 1, \\
L_2 &= 1 - \frac{1}{2^s}, \\
L_{2N+2} &= L_{2N+1} - \frac{1}{(2N+2)^s} < L_{2N+1}, \\
L_{2N+1} &= L_{2N-1} - \frac{1}{(2N)^s} + \frac{1}{(2N+1)^s} < L_{2N-1}, \\
L_{2N+2} &= L_{2N}(s) + L_{2N+1} - \frac{1}{(2N+2)^s} > L_{2N}.
\end{aligned}$$

したがって

$$1 - \frac{1}{2^s} < L_4 < \cdots < L_{2N} < L_{2N+2} < L_{2N+1} < L_{2N-1} < \cdots < L_3 < L_1 = 1. \tag{5}$$

偶数番目の部分和 L_{2N} は上に有界で単調増加，奇数番目の部分和 L_{2N-1} は下に有界で単調減少だから，それぞれ収束し，$L_{2N} - L_{2N-1} = -\dfrac{1}{(2N)^s} \to 0\ (N \to \infty)$ だから

$$\lim_{N\to\infty} L_{2N} = \lim_{N\to\infty} L_{2N-1} = L(s)$$

である．

級数 $L(s)$ は $s > 0$ に対して収束した．よって $L(s)$ と $\zeta(s)$ ともに $s > 1$ に対して定義されているが，これらの間には次の簡単な関係式が成り立つ．

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = L(s) \quad (s > 1). \tag{6}$$

これは次のように差を計算すればわかる．

$$\begin{aligned}\zeta(s) - L(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= 2^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 2^{1-s}\zeta(s).\end{aligned}$$

(6) より

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} L(s) \tag{7}$$

は $s > 1$ でつねに成り立つ．この右辺の分子は $s > 0$ で定義されていて，分母は任意の実数 s に対して定義される．$s = 1$ のとき分母は 0 になるから，$s > 0$, $s \neq 1$ に対して右辺は意味を持つ．したがって (7) によって $\zeta(s)$ を $s > 0$, $s \neq 1$ に対して定義することができる．

命題 1.2. $s > 1$ のとき $\zeta(s) > 1 > 0$，$0 < s < 1$ のとき $\zeta(s) < 0$ である．

[証明]　$s > 1$ のとき $\zeta(s) > 1$ は明らか．$0 < s < 1$ のとき (5) より $L(s) > 0$ であり，$1 - 2^{1-s} < 0$ だから $\zeta(s) < 0$ である．　□

実は $\zeta(s)$ は 1 以外のすべての実数 s に対して定義される．これを一挙に示すのが関数等式である．

2　関数等式

リーマンゼータ関数の関数等式を述べるためにはガンマ関数が必要であり，関数等式を証明するためにはテータ関数が必要になる．まずこれらについて説明する．

2.1 ガンマ関数

ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は $s>0$ に対して積分

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt \tag{8}$$

によって定義される．この積分が収束することは次のように示される．$\varepsilon>0$ とすると $t>0$ のとき $t^{s-1}e^{-t}<t^{s-1}$ だから

$$\int_\varepsilon^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt<\int_\varepsilon^1 t^{s-1}\,dt=\left[\frac{1}{s}t^s\right]_\varepsilon^1=\frac{1}{s}-\frac{\varepsilon^s}{s}<\frac{1}{s}.$$

s を固定し $\varepsilon\to 0$ とすれば，この積分は上に有界で単調に増大するから

$$\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt$$

が存在する．次に e^t のテイラー展開は

$$e^t=\sum_{n=0}^\infty\frac{t^n}{n!}$$

であり，$t>0$ のときすべての項は正だから，任意の自然数 n に対して $e^t>\dfrac{t^n}{n!}$ が成り立つ．よって $e^{-t}<\dfrac{n!}{t^n}$ $(t>0)$ が成り立つ．s を固定して自然数 n を $n>s+1$ にとれば

$$t^{s-1}e^{-t}<t^{s-1}\frac{n!}{t^n}=\frac{n!}{t^{n+1-s}}\quad(t>0)$$

が成り立つ．したがって

$$\int_1^u t^{s-1}e^{-t}\,dt<\int_1^u\frac{n!}{t^{n+1-s}}\,dt=\left[\frac{n!}{(s-n)t^{n-s}}\right]_1^u=\frac{n!}{n-s}\left(1-\frac{1}{u^{n-s}}\right)<\frac{n!}{n-s}.$$

u が増大するとき，この積分も上に有界で単調に増大するから

$$\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt=\lim_{u\to\infty}\int_1^u t^{s-1}e^{-t}\,dt$$

が存在する．以上によって (8) が $s>0$ に対して意味をもつことがわかった．特に $s=1$ とおけば

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=\left[-e^{-t}\right]_0^\infty=1.$$

さらにガンマ関数は

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \qquad (s>0) \tag{9}$$

を満たす．実際，部分積分によって $s>0$ に対して

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}t^s\right]_0^\infty + s\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt = s\Gamma(s).$$

(9) を繰り返せば，自然数 n に対して $s>0$ のとき

$$\begin{aligned}\Gamma(s+n) &= (s+n-1)\Gamma(s+n-1)\\ &= (s+n-1)(s+n-2)\Gamma(s+n-2)\\ &= \cdots\cdots\\ &= (s+n-1)(s+n-2)\cdots(s+1)s\,\Gamma(s)\end{aligned} \tag{10}$$

が成り立つ．特に $s=1$ とおけば

$$\Gamma(n+1) = n!\,\Gamma(1) = n!,$$

したがって $\Gamma(n) = (n-1)!$ である．これからガンマ関数は自然数の集合上の関数 $n \mapsto (n-1)!$ を正の実数全体へ拡張したものであると考えられる．また (10) より

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+n-2)(s+n-1)}\Gamma(s+n)$$

と表せば，この右辺は $s>-n$ において $s=0,-1,\ldots,-(n-1)$ を除いたところで定義される．n は任意の自然数だからこれによって $\Gamma(s)$ は 0 以下の整数を除いたすべての実数 s に対して定義される．

2.2 テータ関数

最初にフーリエ展開とフーリエ変換について説明する．

関数 $f(x)$ がすべての実数 x に対して

$$f(x+1) = f(x)$$

を満たすとき，**周期 1** をもつという．三角関数 $\sin(2n\pi x)$, $\cos(2n\pi x)$ $(n=1,2,\ldots)$ は周期 1 を持つ関数の典型的な例である．いま，$f(x)$ を周期 1 をもつ連続関数とする．このときある条件の下で，a_n, b_n を定数として

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n\cos(2n\pi x) + \sum_{n=1}^\infty b_n\sin(2n\pi x) \tag{11}$$

と表せる．(11) を $f(x)$ の**フーリエ展開**と呼び，a_n, b_n を**フーリエ係数**と呼ぶ．簡単のために $f(x)$ は偶関数とする．すなわち $f(-x) = f(x)$ とする．このとき (11) において x に $-x$ を代入すれば

$$f(-x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n\pi x)$$

となるから

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi x)$$

を得る．この係数 a_n は次のようにして定まる．まず a_0 については

$$\int_0^1 \cos(2n\pi x)\,dx = \left[\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi x)\right]_0^1 = 0 \qquad (n \geq 1)$$

より

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi x)\right) \\ &= \int_0^1 a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 a_n \cos(2n\pi x)\,dx \\ &= a_0.\end{aligned}$$

他の係数については

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

より，$n, m \geq 1$ について，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos(2n\pi x)\cos(2m\pi x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 (\cos 2(n+m)\pi x + \cos 2(n-m)\pi x)\,dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\cos(2m\pi x)\,dx &= \int_0^1 \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi x)\right)\cos(2m\pi x)\,dx \\ &= \int_0^1 a_0 \cos(2m\pi x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 a_n \cos(2n\pi x)\cos(2m\pi x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}a_m.\end{aligned}$$

以上まとめると

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 f(x)\,dx, \\ a_m &= 2\int_0^1 f(x)\cos(2m\pi x)\,dx, \quad (m = 1, 2, \ldots).\end{aligned} \tag{12}$$

周期 1 をもつ連続な偶関数 $f(x)$ が C^1 級 (微分可能かつ導関数 $f'(x)$ が連続) ならば，(12) によって係数 a_n を定義したとき，級数

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi x)$$

は $f(x)$ に収束することが知られている．

関数 $f(x)$ の**フーリエ変換** $\mathscr{F}(f)(y)$ は次のように定義される．

$$\mathscr{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(-2\pi xy) + i\sin(-2\pi xy))\,dx. \tag{13}$$

ここで i は虚数単位である．いま関数 $|f(x)|$ は $|x| \to \infty$ のとき，急激に 0 に近づくとする．$f(x)$ が偶関数ならば $f(x)\sin(-2\pi xy)$ は奇関数であり，その積分は 0 になるから

$$\mathscr{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi xy)\,dx \tag{14}$$

である．とくに t を正の実数とし，

$$f(x) = e^{-\pi t x^2}$$

とおけば，$f(x)$ は偶関数であり $|x| \to \infty$ のとき，急激に 0 に近づく．よって $f(x)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2}\cos(2\pi xy)\,dx$$

である．右辺の被積分関数を y について微分すれば

$$\frac{d}{dy}e^{-\pi tx^2}\cos(2\pi xy) = (-2\pi x)e^{-\pi tx^2}\sin(2\pi xy)$$

であり

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|(-2\pi x)e^{-\pi tx^2}\sin(2\pi xy)\right|\,dx$$

は収束するから，微分と積分の順序を交換でき，$\mathscr{F}(f)(y)$ の導関数は部分積分によって

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\mathscr{F}(f)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}(-2\pi x)e^{-\pi tx^2}\sin(2\pi xy)\,dx = \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty}(-2\pi tx)e^{-\pi tx^2}\sin(2\pi xy)\,dx \\ &= \frac{1}{t}\left[e^{-\pi tx^2}\sin(2\pi xy)\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi tx^2}\cos(2\pi xy)(2\pi y)\,dx \\ &= -\frac{2\pi y}{t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi tx^2}\cos(2\pi xy)\,dx = -\frac{2\pi y}{t}\mathscr{F}(f)(y).\end{aligned}$$

よって

$$H(y) = e^{\pi t^{-1}y^2}\mathscr{F}(f)(y)$$

とおけば,

$$H'(y) = \frac{2\pi y}{t}e^{\pi t^{-1}y^2}\mathscr{F}(f)(y) - e^{\pi t^{-1}y^2}\frac{2\pi y}{t}\mathscr{F}(f)(y) = 0.$$

したがって $H(y) = C$, C は定数であり

$$\mathscr{F}(f)(y) = Ce^{-\pi t^{-1}y^2}$$

である．$y = 0$ とおけば

$$C = \mathscr{F}(f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi tx^2}\,dx = 2\int_0^{\infty}e^{-\pi tx^2}\,dx.$$

ここで $x = u/\sqrt{\pi t}$ とおけば

$$\begin{aligned}C &= \frac{2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-u^2}\,du, \\ \left(\int_0^{\infty}e^{-u^2}\,du\right)^2 &= \int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx\int_0^{\infty}e^{-y^2}\,dy = \iint_{x>0,\,y>0}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\infty}re^{-r^2}\,dr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{4}, \\ C &= \frac{2}{\sqrt{\pi t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

ゆえに $f(x)=e^{-\pi tx^2}$ $(t>0)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}(f)(y)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\pi t^{-1}y^2} \tag{15}$$

である．**テータ関数** $\theta(t)$ を

$$\theta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi tn^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi tn^2} \tag{16}$$

によって定義する．$f(x)=e^{-\pi tx^2}$ とおき

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+n)$$

とおけば，この和は一様絶対収束し $g(x)$ は明らかに周期 1 を持つ周期関数になる．$f(x)$ を $f'(x)$ で置き換えた和についても同様に一様絶対収束する．したがって $g(x)$ は微分可能であり

$$g'(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f'(x+n)$$

が成り立つ．帰納的に $g(x)$ は何回でも微分できることがわかる．よって $g(x)$ はフーリエ展開をもつ．また $f(x)$ は偶関数だから

$$g(-x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(-x+n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(-x-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(x+m)=g(x).$$

よって $g(x)$ も偶関数である．したがって $g(x)$ のフーリエ展開は

$$g(x)=a_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos(2\pi mx)$$

の形になる．(12) と (14) より

$$\begin{aligned}a_0&=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+n)\,dx\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1 f(x+n)\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\mathscr{F}(f)(0).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_m &= 2\int_0^1 g(x)\cos(2m\pi x)\,dx = 2\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)\cos(2m\pi x)\,dx \\
&= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1 f(x+n)\cos(2m\pi(x+n))\,dx \\
&= 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\cos(2m\pi x)\,dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi xm)\,dx = 2\mathscr{F}(f)(m) \quad (m \geq 1).
\end{aligned}
$$

$g(x)$ の定義から

$$
g(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = \theta(t) \tag{17}
$$

である．一方，$g(x)$ のフーリエ展開

$$
g(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2\pi mx) = \mathscr{F}(f)(0) + \sum_{m=1}^{\infty} 2\mathscr{F}(f)(m)\cos(2\pi mx)
$$

において，$x=0$ とおけば

$$
g(0) = \mathscr{F}(f)(0) + \sum_{m=1}^{\infty} 2\mathscr{F}(f)(m). \tag{18}
$$

(15) より，

$$
\mathscr{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \mathscr{F}(f)(m) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi t^{-1} m^2}
$$

だから

$$
g(0) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi t^{-1} m^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right). \tag{19}
$$

(17) と (19) より次を得る．

定理 2.1 (テータ関数の変換公式)**.**

$$
\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right).
$$

2.3 $\zeta(s)$ の関数等式

$$
\Psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2}
$$

とおけば $\theta(t)$ は
$$\theta(t) = 1 + 2\Psi(t)$$
と表せる．ガンマ関数の定義
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx \qquad (s > 0)$$
において，n を自然数とし $x = \pi n^2 t$ と変数変換すれば，$dx = \pi n^2\, dt$ だから
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty (\pi n^2 t)^{s-1} e^{-\pi n^2 t} \pi n^2\, dt = \pi^s n^{2s} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-\pi n^2 t}\, dt.$$
s を $s/2$ で置き換えて
$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 t}\, dt.$$
さらに両辺を $\pi^{\frac{s}{2}} n^s$ で割って
$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 t}\, dt.$$
これをすべての自然数 n について加えれば
$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 t}\, dt \\ &= \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}\, dt = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} \Psi(t)\, dt \end{aligned}$$
を得る．右辺の積分を $(0, 1]$ と $[1, \infty)$ の 2 つに分けて，$(0, 1]$ における積分において $t = 1/u$ と変数変換すれば
$$\int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1} \Psi(t)\, dt = \int_\infty^1 u^{-\frac{s}{2}+1} \Psi\left(\frac{1}{u}\right) (-u^{-2})\, du = \int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-1} \Psi\left(\frac{1}{u}\right) du.$$
ここで定理 2.1 より
$$1 + 2\Psi(u) = \theta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \theta\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{\sqrt{u}} \left(1 + 2\Psi\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$
よって
$$\Psi\left(\frac{1}{u}\right) = u^{\frac{1}{2}} \Psi(u) + \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}.$$

したがって $s>1$ に対して

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt + \int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt \\
&= \int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-1}\Psi\left(\frac{1}{u}\right)du + \int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt \\
&= \int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-1}\left(u^{\frac{1}{2}}\Psi(u) + \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right)du + \int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt \\
&= \int_1^\infty u^{\frac{1-s}{2}-1}\Psi(u)\,du + \frac{1}{2}\int_1^\infty u^{\frac{1-s}{2}-1}\,du - \frac{1}{2}\int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-1}\,du \\
&\quad + \int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

右辺の第 2 項，第 3 項の積分は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_1^\infty u^{\frac{1-s}{2}-1}\,du &= \left[\frac{1}{1-s}u^{\frac{1-s}{2}}\right]_1^\infty = \frac{1}{s-1}, \\
\frac{1}{2}\int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-1}\,du &= \left[\frac{1}{-s}u^{-\frac{s}{2}}\right]_1^\infty = \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_1^\infty (t^{\frac{1-s}{2}-1} + t^{\frac{s}{2}-1})\Psi(t)\,dt + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \\
&= \int_1^\infty (t^{\frac{1-s}{2}-1} + t^{\frac{s}{2}-1})\Psi(t)\,dt - \frac{1}{s(1-s)}.
\end{aligned}$$

以上によって $s>1$ に対して

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_1^\infty \left(t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}}\right)\Psi(t)\,\frac{dt}{t} - \frac{1}{s(1-s)} \tag{20}$$

が成り立つことが示された．この右辺の積分はすべての実数 s に対して収束して意味をもつ．さらに s を $1-s$ で置き換えても (20) の右辺は変わらない．以上によって次の定理を得る．

定理 2.2 (ゼータ関数の関数等式)**.**

$$\widehat{\zeta}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

とおけば，$\widehat{\zeta}(s) + \dfrac{1}{s(1-s)}$ はすべての実数 s に対して定義され，関数等式

$$\widehat{\zeta}(s) = \widehat{\zeta}(1-s)$$

を満たす.

ガンマ関数は次の等式を満たす.

(G1) $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-1}}\Gamma(s).$

(G2) $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}.$

このガンマ関数の等式を用いてゼータ関数の関数等式をかきなおす.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

この両辺に $(-s)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)$ をかければ

$$\pi^{-\frac{s}{2}}(-s)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}(-s)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

(G2) より

$$\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}$$

であり，(G1) より

$$(-s)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-s-1}}(-s)\Gamma(-s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-s-1}}\Gamma(1-s)$$

だから

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{2\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-s-1}}\Gamma(1-s)\zeta(1-s),$$

したがって

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\ \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\ \Gamma(1-s)\ \zeta(1-s). \tag{21}$$

この右辺は $s<0$ において定義される．また負の偶数 $s=-2k$ (k は自然数) において $\sin\frac{\pi s}{2}$ は 0 になるから，負の偶数は $\zeta(s)$ の零点である．これを $\zeta(s)$ の**自明な零点**という.

$s=0$ については，(21) の右辺で $s\to 0$ とすれば

$$\zeta(0)=-\pi^{-1}\Gamma(1)\frac{\pi}{2}\lim_{s\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\frac{\pi s}{2}}((1-s)-1)\zeta(1-s)=-\frac{1}{2}.$$

この等式と定理 2.2 によって $\zeta(s)$ は $s=1$ 以外のすべての実数 s に対して定義される.

さらに $\zeta(s)$ は 1 以外のすべての複素数 s に対して定義される．これを説明するために複素数の関数について復習する.

3　複素関数論の復習

定義 3.1. $D \subset \mathbb{C}$ を複素平面上の領域とし，$f(z)$ を D 上定義された複素変数 $z \in D$ の複素数値関数とする．$f(z)$ が $z_0 \in D$ において**微分可能**であるとは，極限値

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

が存在することである．この極限値を $f'(z_0)$ で表し，$f(z)$ の $z = z_0$ における**微分係数**という．D の各点で $f(z)$ が微分可能であるとき，各点 $z \in D$ に対して，$f'(z)$ を対応させることによって，$f(z)$ の**導関数** $f'(z)$ が得られる．$f(z)$ が D の各点で微分可能であり，導関数 $f'(z)$ が D で連続であるとき，$f(z)$ は D で**正則**であるという．

上の定義は実 1 変数の微分係数の定義と形式的には同じものである．しかし，複素平面上で z が z_0 に近づくときの近づき方は 2 次元的だから，どんな近づき方をしても 1 つの極限値に近づくということはかなり強い条件である．z および $f(z)$ を実部と虚部にわけて，$z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, x, y は実変数，$x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ とかき，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ は 2 変数 x, y の実数値関数とかく．

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a + bi \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

とかけば，$u(x, y)$, $v(x, y)$ は点 (x_0, y_0) において偏微分可能であり，偏微分係数は

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = a,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -b,\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = b,\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = a$$

となる．これから，u, v は**コーシー-リーマンの関係式**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{22}$$

を満たす．$f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ だから，$f'(z)$ が連続であることは偏導関数 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ および $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ が連続であることである．

定義 3.2. $D \subset \mathbb{C}$ を複素平面上の領域とし，$f(z)$ を D 上定義された正則関数とする．$z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とかく．C を D 内の区分的に滑らかな曲線

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad 0 \le t \le 1$$

とする．このとき，積分

$$\begin{aligned}
&\int_C (u(x,y)+iv(x,y))\,(dx+idy) \\
&= \int_0^1 \left(u(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} - v(x(t),y(t))\frac{dy}{dt} \right) dt \\
&+ i\int_0^1 \left(u(x(t),y(t))\frac{dy}{dt} + v(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} \right) dt
\end{aligned}$$

を $f(z)$ の**積分路** C に沿う**複素積分**といい

$$\int_C f(z)\,dz$$

で表す．

ベクトル解析におけるグリーンの定理は次のように述べられる．

定理 3.3 (グリーンの定理)．有界な領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ の境界は区分的に滑らかな有限個の単一閉曲線からなるとする．これらのすべてに D に関する正の向きを付けたものを ∂D とする．$P(x,y)$, $Q(x,y)$ を D の閉包 $\bar{D}$ において偏微分可能であり，偏導関数が連続であるような関数とする．このとき

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} (P\,dx + Q\,dy).$$

コーシー-リーマンの関係式 (22) とグリーンの定理から次の定理が導かれる．

定理 3.4 (コーシーの積分定理)．$f(z)$ が有界領域 $D \subset \mathbb{C}$ で正則で，D の閉包 $\bar{D}$ で連続であるとする．さらに D の境界 ∂D は有限個の互いに交わらない区分的に滑らかな単一閉曲線からなるとする．このとき

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$$

が成り立つ．

[証明]　複素積分の定義とグリーンの定理より

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f(z)\,dz &= \int_{\partial D} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial D} (u\,dy + v\,dx) \\
&= -\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.
\end{aligned}$$

コーシー-リーマンの関係式により右辺の被積分関数はいずれも 0 だからこの積分は 0 である． □

定理 3.5 (コーシーの積分公式)**.** D, $f(z)$ を定理 3.4 の通りとする．このとき D の内点 z に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

が成り立つ．

定理 3.6. D, $f(z)$ を定理 3.4 の通りとすると，$f(z)$ は複素関数として無限回微分可能であり，任意の $n \geq 0$ について，

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

が成り立つ．

定理 3.7. D を定理 3.4 の通りとし，$f(z)$ を D 上の正則関数，$c \in D$ とする．$R > 0$ を $\Delta_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - c| \leq R\} \subset D$ にとる．このとき $f(z)$ は Δ_R の内部で絶対収束するべき級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

に展開される．ここで

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\, d\zeta.$$

命題 3.8. $f(z)$ を領域 D 上の正則関数で恒等的に 0 ではないとする．$c \in D$ を $f(z)$ の零点とすれば，c の十分小さい近傍内には c 以外の $f(z)$ の零点は存在しない．

定理 3.9 (一致の定理)**.** 領域 D で正則な関数 $f(z)$, $g(z)$ が D 上の内部に集積点を持つ集合 E 上で $f(z) = g(z)$ を満たすならば，恒等的に $f(z) = g(z)$ である．

定義 3.10. D を領域，$c \in D$ とし，$\Delta_R \subset D$ を c を中心とする半径 R の閉円板とする．$D - \{c\}$ で正則な関数 $f(z)$ は，Δ_R の内部において絶対収束する級数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

に展開される．この級数を $f(z)$ の $z = c$ に関する**ローラン級数**という．また c を $f(z)$ の**孤立特異点**という．

ローラン展開における $z-c$ の負べきの項

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-c)^n$$

を孤立特異点 c における $f(z)$ の**主要部**という．また係数 a_{-1} を $f(z)$ の c における**留数**といい，$\mathrm{Res}_{s=c} f(z)$ で表す．

主要部には次の 3 つの場合がある．

(i) 主要部がない場合． $f(z)$ は $z=c$ でも正則になる．D で正則な関数 $f(z)$ が $z=c$ において $f(c)=0$ となるとき，c を $f(z)$ の**零点**という．$f(z)$ は恒等的には 0 でないとすると

$$f(z)=(z-c)^m(a_m+a_{m+1}(z-c)+a_{m+2}(z-c)^2+\cdots),\quad m\geq 1,\, a_m\neq 0$$

とかける．このとき $f(z)$ は $z=c$ で m 位の零点をもつという．

(ii) 主要部が有限項の場合．$0<|z-c|<R$ において

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-c)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n,\quad a_{-m}\neq 0$$

とかける．このとき c は $f(z)$ の m 位の**極**であるという．

(iii) 主要部が無限級数の場合．c は $f(z)$ の**真性特異点**であるという．

定理 3.11 (留数の定理)**.** $f(z)$ が D で有限個の孤立特異点 $c_1,\ldots,c_m$ を除いて正則であり，$\bar{D}$ で連続であるとする．このとき

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}_{z=c_j} f(z).$$

定義 3.12. 領域 $D\subset\mathbb{C}$ において，各点で $f(z)$ が正則であるかまたは極であるとき，$f(z)$ は D で**有理型関数**であるという．

4 複素関数としてのリーマンのゼータ関数

4.1 指数関数，ゼータ関数，ガンマ関数

べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\qquad(z=x+iy\in\mathbb{C})$$

は任意の複素数 z に対して絶対収束する．指数関数 e^z は複素関数として，このべき級数によって定義される．

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

このとき指数法則

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$$

が成り立つことが示される．特に $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とかけば

$$e^z = e^x e^{yi}.$$

ここで定義より

$$\begin{aligned} e^{yi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(yi)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(yi)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(yi)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} = \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

したがって

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad |e^z| = e^x \qquad (z = x + iy)$$

を得る．s を複素変数として，$s = \sigma + i\tau$ $(\sigma, \tau \in \mathbb{R})$ とかく．正の実数 t に対して，t^s を

$$t^s = e^{s \log t}$$

によって定義する．このとき

$$|t^s| = \left| e^{\sigma \log t + i\tau \log t} \right| = e^{\sigma \log t} = t^\sigma \qquad (s = \sigma + i\tau)$$

である．$\sigma_0 > 1$ を任意にとって $\sigma \geq \sigma_0$ とすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^s|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} = \zeta(\sigma_0)$$

は収束するから，リーマンのゼータ関数の定義式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

の右辺の級数は複素平面の領域 $\Re(s) = \sigma \geq \sigma_0$ において一様収束する．部分和

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} e^{-s \log n}$$

は指数関数の和だから正則である．したがってその一様収束極限として，$\zeta(s)$ は $\Re(s) > \sigma_0$ において正則である．$\sigma_0 > 1$ は任意だから，結局 $\zeta(s)$ は $\Re(s) > 1$ において正則である．

次にガンマ関数を複素関数としてみる．$s = \sigma + i\tau$ とし，$0 < \sigma_0 < \sigma_1$ を任意にとって $\sigma_0 \le \sigma \le \sigma_1$ とすれば，積分

$$\int_0^1 |t^{s-1}| e^{-t}\,dt = \int_0^1 t^{\sigma-1} e^{-t}\,dt \le \int_0^1 t^{\sigma_0-1} e^{-t}\,dt \le \int_0^\infty t^{\sigma_0-1} e^{-t}\,dt = \Gamma(\sigma_0),$$
$$\int_1^\infty |t^{s-1}| e^{-t}\,dt = \int_1^\infty t^{\sigma-1} e^{-t}\,dt \le \int_1^\infty t^{\sigma_1-1} e^{-t}\,dt \le \int_0^\infty t^{\sigma_1-1} e^{-t}\,dt = \Gamma(\sigma_1)$$

だから，ガンマ関数を定義する積分

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\,dt$$

は $\sigma_0 \le \Re(s) \le \sigma_1$ において一様収束する．有限区間での積分

$$\int_\epsilon^R t^{s-1} e^{-t}\,dt$$

は s の正則関数だから，その一様収束極限である

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\,dt$$

も $\sigma_0 < \Re(s) < \sigma_1$ における s の正則関数である．$\sigma_0 < \sigma_1$ は任意だから，結局 $\Gamma(s)$ は $\Re(s) > 0$ における正則関数である．n を自然数とすれば

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+n-2)(s+n-1)}\Gamma(s+n)$$

が成り立ち，$\Gamma(s)$ は $\Re(s) > -n$ における有理型関数で，$s = 0, -1, \ldots, -(n-1)$ を 1 位の極とする以外は，そこで正則である．n は任意の自然数だから，結局 $\Gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体で有理型関数であり，$s = 0, -1, -2, \ldots$ を 1 位の極とする以外は正則である．さらにガンマ関数の性質 (G2) より，整数でない実数 s に対して

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

が成り立つ．一致の定理により整数でない複素数 s に対してもこの等式が成り立つ．特にこの等式からガンマ関数 $\Gamma(s)$ は零点を持たない有理型関数であることがわかる．よって $1/\Gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則である．

リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ については，(20) の右辺の積分

$$\int_1^\infty \left(t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}}\right) \Psi(t)\, \frac{dt}{t}$$

は上と同様な議論によって，$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数である．したがって

$$\xi(s) = s(1-s)\widehat{\zeta}(s) = s(1-s)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{23}$$

とおけば，(20) より

$$\xi(s) = s(1-s)\int_1^\infty \left(t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}}\right) \Psi(t)\, \frac{dt}{t} - 1 \tag{24}$$

は $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数であり，関数等式

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

を満たす．

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{s(1-s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,\xi(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2(1-s)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)}\xi(s)$$

より，$\zeta(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体で有理型関数であり，$s=1$ 以外では正則である．

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$$

だから，$s=1$ において $\zeta(s)$ は 1 位の極をもちそこでの留数は 1 である．

またオイラー積表示

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

も $\Re(s) > 1$ で収束することがわかり，これから，$\Re(s) > 1$ において $\zeta(s)$ は零点をもたないことがわかる．$\Gamma(s)$ は零点を持たないから，$\xi(s)$ は $\Re(s) > 1$ において零点をもたない．関数等式 $\xi(s) = \xi(1-s)$ によって，$\xi(s)$ は $\Re(s) < 0$ においても零点をもたない．したがって $\xi(s)$ の零点はすべて $0 \le \Re(s) \le 1$ にある．

定理 4.1. $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ ならば $\zeta(1+it) \neq 0$ である．

[証明]　ある $t \in \mathbb{R}$ について $\zeta(1+ti) = 0$ として矛盾を導く．$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $\log z$ は一意には定まらないが $\Re(\log z)$ は一意に定まり，$\log|z|$ に等しいことに注意する．$|z| < 1$ ならば

$$\log(1-z) = -\sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k}$$

としてよい．$\Re(s)>1$ のとき

$$\begin{aligned}\log|\zeta(s)| &= \log\prod_p |1-p^{-s}|^{-1} = -\sum_p \log|1-p^{-s}| \\ &= \sum_p \Re(-\log(1-p^{-s})) = \Re\left(\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kp^{ks}}\right).\end{aligned}$$

したがって数列 $\{c_n\}_n$ を

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & n=p^k,\ p \text{ は素数}, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

によって定義すると，$c_n \geq 0$ であり

$$\log|\zeta(s)| = \Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}\right)$$

が成り立つ．$s=\sigma+ti$ ならば

$$\frac{c_n}{n^s} = \frac{c_n}{n^\sigma}n^{-it} = \frac{c_n}{n^\sigma}\big(\cos(t\log n) - i\sin(t\log n)\big).$$

よって

$$\log|\zeta(s)| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^\sigma}\cos(t\log n). \tag{25}$$

したがって cos の倍角公式より

$$\begin{aligned}&\log|\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+ti)^4\zeta(\sigma+2ti)| \\ &= 3\log|\zeta(\sigma)| + 4\log|\zeta(\sigma+ti)| + \log|\zeta(\sigma+2ti)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^\sigma}\big(3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)\big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^\sigma}2\big(1+\cos(t\log n)\big)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

これより $\sigma>1$ ならば

$$|\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+ti)^4\zeta(\sigma+2ti)| \geq 1$$

となる．したがって

$$|(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3\left|\frac{\zeta(\sigma+ti)}{\sigma-1}\right|^4|\zeta(\sigma+2ti)| \geq \frac{1}{\sigma-1} \tag{26}$$

となる．$\zeta(1+ti)=0$ だから，$(s-1)\zeta(s), \zeta(s+ti)/(s-1)$ は $s=1$ で正則である．したがって (26) の左辺の $\sigma\to 1$ とするときの極限は有限である．しかし右辺の $\sigma\to 1$ の極限は ∞ だから矛盾である． $\square$

$\Gamma(s/2)$ は 0 以下の偶数で 1 位の極をもつ以外は正則である．$\zeta(s)$ は負の偶数で 1 位の零点 (自明な零点) をもつから，これらが打ち消しあって $\xi(s)=s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ は負の偶数において正則で 0 でない値をとる．$s=1$ において $\Gamma(s/2)$ は正則で 0 でない値をとる．$\zeta(s)$ は $s=1$ を 1 位の極としてもつから $(1-s)\zeta(s)$ は $s=1$ で正則で 0 でない値をとる．よって $\xi(s)$ は $s=1$ において正則で 0 でない値をとる．$s=0$ において $\zeta(s)$ は正則で $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$ であり $\Gamma(s/2)$ は $s=0$ で 1 位の極をもつから $s\Gamma(s/2)$ は $s=0$ で正則で 0 でない値をとる．よって $\xi(s)$ は $s=0$ において正則で 0 でない値をとる．

以上により $\xi(s)$ の零点は $\zeta(s)$ の非自明な零点と一致することが示された．$\zeta(s)$ のオイラー積表示より $\Re(s)>1$ に対して $\zeta(s)\neq 0$ である．定理 4.1 より直線 $\Re(s)=1$ 上にも $\zeta(s)$ の零点はない．したがって $\Re(s)\geq 1$ には $\zeta(s)$ の零点はない．定理 2.2 の関数等式より $\Re(s)\leq 0$ に $\widehat{\zeta}(s)$ の零点はないから，$\Re(s)\leq 0$ における $\zeta(s)$ の零点は自明な零点である負の偶数だけである．ゆえに $\zeta(s)$ の非自明な零点はすべて帯領域 $0<\Re s<1$ にある．また命題 1.2 より，それらは実数ではないこともわかる．

$$\Theta = \sup_{\rho:\zeta(\rho)=0} \Re(\rho) \tag{27}$$

とおく．

予想 4.2 (リーマン予想)**.** リーマンゼータ関数のすべての非自明な零点の実部は $\frac{1}{2}$ である．これは次の等式が成り立つことを意味する．

$$\Theta = \frac{1}{2}.$$

$\Theta\leq 1$ は明らかであるが，$\Theta<1$ であることも証明されていない．

4.2 アダマールの積定理

定義 4.3. 複素平面全体で正則な関数を**整関数**という．$R>0$ に対して

$$M(R)=\max_{|z|\leq R}|f(z)|$$

とおく．最大値の原理より $M(R)=\max_{|z|=R}|f(z)|$ である．整関数 $f(z)$ の位数は

$$\rho = \limsup_{R\to\infty}\frac{\log\log M(R)}{\log R}$$

によって定義される．すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して，R が十分大きければ

$$\max_{|z|\le R} |f(z)| \le e^{R^{\rho+\varepsilon}}$$

が成り立つような ρ のうちで最小のものである．

定理 4.4 (アダマール)**.** 整関数 $f(z)$ の位数 ρ が有限であるとする．$z = 0$ を m_0 位の零点 ($f(0) \neq 0$ なら $m_0 = 0$ とする) とし，他の零点を $a_1, a_2, \ldots$ とし，その位数を $m_1, m_2, \ldots$ とする．このとき q ($\le \rho$) 次の多項式 $g(z)$ が存在して

$$f(z) = z^{m_0} \exp g(z) \prod_{n=1}^{\infty} E(z/a_n, p)^{m_n}$$

と表せる．ここで $p = [\rho]$ であり

$$E(z,0) = 1 - z, \quad E(z,p) = (1-z)\exp\left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) \quad (p \ge 1).$$

例 4.5. 定理 4.4 を整関数 $f(z) = \sin \pi z$ に適用してみる．$\sin \pi z$ の位数 ρ は

$$\rho = \limsup_{R\to\infty} \frac{\log\log M}{\log R} = 1$$

であることがわかる．また $\sin \pi z$ の零点は整数全体でありすべて位数 1 の零点であることがわかる．定理 4.4 より 1 次以下の多項式 $g(z)$ が存在して

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} E(z/n, 1)$$

が成り立つ．$E(z/n,1) = \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}$ である．$+n$ の項と $-n$ の項をまとめれば

$$E(z/n,1)E(-z/n,1) = \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} = 1 - \frac{z^2}{n^2}$$

となるから

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

この対数微分をとれば

$$\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

ここで $g'(z)$ は定数であり，上の等式の他の項はすべて z の奇関数だから，$g'(z)=0$ を得る．よって $g(z)$ は定数であり，$e^{g(z)}$ も定数 C である．よって

$$\sin \pi z = Cz \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

であり

$$C = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \pi x}{x} = \lim_{x \to 0} \pi \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \pi$$

である．ゆえに

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{28}$$

$\sin \pi z$ のテイラー展開は

$$\sin \pi z = \pi z - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \frac{\pi^5 z^5}{5!} - \frac{\pi^7 z^7}{7!} + \cdots$$

である．一方，(28) の右辺の積を展開すれば

$$\sin \pi z = \pi z \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2} + \sum_{m>n\geq 1} \frac{z^4}{m^2 n^2} + \cdots\right)$$

となる．よってこれらの z^3 の係数を比べて

$$-\frac{\pi^3}{3!} = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

を得る．またこれらの z^5 の係数を比べれば

$$\frac{\pi^5}{5!} = \pi \sum_{m>n\geq 1} \frac{1}{m^2 n^2}, \quad \sum_{m>n\geq 1} \frac{1}{m^2 n^2} = \frac{\pi^4}{120}$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned}
\zeta(2)^2 &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{m=n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2} + 2 \sum_{m>n\geq 1} \frac{1}{m^2 n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + 2 \sum_{m>n\geq 1} \frac{1}{m^2 n^2},
\end{aligned}$$

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(2)^2 - 2 \sum_{m>n\geq 1} \frac{1}{m^2 n^2} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 - 2\frac{\pi^4}{120}$$
$$= \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{60}\right)\pi^4 = \frac{5-3}{180}\pi^4 = \frac{\pi^4}{90}.$$

例 4.6. ガンマ関数の逆数 $1/\Gamma(z)$ は整関数であった．その位数は 1 であることがわかる．$1/\Gamma(z)$ の零点は 0 以下の整数の全体ですべて 1 位の零点である．よって $1/\Gamma(z)$ に定理 4.4 を適用すれば，1 次以下の多項式 $g(z)$ が存在して

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \tag{29}$$

が成り立つ．(29) の両辺を z で割って $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ を用いれば

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

を得る．ここで $z = 0$ とおけば

$$1 = e^{g(0)}1, \quad e^{g(0)} = 1$$

である．$g(z) = az + b$ とかけば，$e^b = 1$ となるから

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{az} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

である．ここで $z = 1$ とおけば

$$1 = e^a \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}.$$

両辺の対数をとれば

$$0 = a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right).$$

したがって

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log(N+1)\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N + \log\frac{N}{N+1}\right)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N\right) = \gamma.$$

上の極限によって定義される γ は**オイラーの定数**とよばれ，$\gamma = 0.57721\cdots$ である．以上により $1/\Gamma(z)$ の無限積展開

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}. \tag{30}$$

を得る．(30) と (28) から

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \frac{1}{(-z)\Gamma(z)\Gamma(-z)}\\ &= \frac{1}{(-z)}ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\times(-z)e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}\\ &= z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin\pi z}{\pi}\end{aligned}$$

を得る．

4.3　明示公式と素数定理

整関数 $\xi(s) = s(1-s)\widehat{\zeta}(s)$ の位数は 1 であることが示される．よって $\xi(s)$ に定理 4.4 を適用して次の定理が得られる．

定理 4.7. $\zeta(s)$ の完備化 $\xi(s)$ は次のような無限乗積表示をもつ．

$$\xi(s) = -e^{as}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}.$$

ここで ρ は $\zeta(s)$ の非自明な零点をうごく (重複度の分だけ同じものがあるとする) とする．また

$$a = \log 2\pi - \frac{\log\pi}{2} - 1 - \frac{\gamma}{2}$$

であり，γ はオイラーの定数である．

$\zeta(s)$ のオイラー積表示

$$\zeta(s) = \prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}} \qquad (\Re(s)>1)$$

の対数微分をとれば

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{p}\frac{(\log p)p^{-s}}{1-p^{-s}} = -\sum_{p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log p}{p^{ks}}.$$

したがって，$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k,\ p \text{ は素数，} k \text{ は自然数のとき，} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおけば

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \tag{31}$$

が成り立つ．この級数は $\Re(s) > 1$ で絶対収束する．実数 $x > 0$ に対して**フォン・マンゴルト関数** $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p,k \\ p^k \leq x}} \log p = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

によって定義する．

定理 4.8 (ペロンの公式)**.** 複素数列 a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を係数とするディリクレ級数

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

が $\Re(s) > 1$ で絶対収束すると仮定する．このとき $c > 1$ に対して次式が成り立つ．

$$\sum_{n \leq x}{}' a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} L(s) \frac{x^s}{s}\, ds + E(x, T),$$

$$|E(x, T)| \leq C \left(\sum_{\substack{\frac{x}{2} < n \leq 2x \\ n \neq x}} |a_n| \min\left\{ \frac{1}{T \left|\log \frac{x}{n}, 1\right|}, 1 \right\} + \frac{x^c}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c} \right).$$

ただし C は正の定数であり，$\sum{}'$ は x が整数のときに端点 $n = x$ については，a_n の代わりに $\frac{1}{2}a_n$ を加えることを意味する．

ペロンの公式を $L(s) = -\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, $c = 1 + \frac{1}{\log x}$ として適用することによって $\psi(x)$ の明示公式が得られる．

定理 4.9 (ψ の明示公式)**.** $x \geq 2$ かつ $T \geq 2$ とするとき次が成り立つ．ただし ρ は $\zeta(s)$ の非自明な零点，γ は ρ の虚部を表すものとする．

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi - \frac{\log(1 - x^{-2})}{2} + R(x, T). \tag{32}$$

ここである正の定数 C が存在して，誤差項 $R(x,T)$ は不等式

$$|R(x,T)| \leq C\left(\log x + \frac{x}{T}(\log xT)^2\right) \tag{33}$$

を満たす．

注意 4.10. ペロンの公式の積分を計算するときに，$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}$ の極として，$\zeta(s)$ の極である $s=1$ と $\zeta(s)$ の非自明な零点，$s=0$，および自明な零点が現れる．留数の定理を適用することによって，$s=1$ における留数から明示公式の右辺の第 1 項の x が，非自明な零点における留数から右辺の第 2 項が，$s=0$ における留数から右辺の第 3 項が，自明な零点における留数から右辺の第 4 項がでる．

関数 $f(x)$, $g(x)$ が

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

を満たすとき，

$$f(x) \sim g(x) \quad (x\to\infty)$$

とかくことにする．$\psi(x)$ の明示公式と非自明な零点の実部が 1 未満であること (定理 4.1) から

$$\psi(x) \sim x \quad (x\to\infty)$$

を示すことができる．

x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ とする．素数 p に対して $p^k \leq x$ を満たす自然数 k は丁度 $\left[\frac{\log x}{\log p}\right]$ 個あるから

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p,k\\ p^k\leq x}} \log p = \sum_{p\leq x}\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p \leq \sum_{p\leq x}\log x = (\log x)\pi(x).$$

したがって

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}} \geq \liminf_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

α を $0<\alpha<1$ を満たす実数とする．$x\geq 2$ に対して

$$\begin{aligned}\psi(x) &\geq \sum_{x^\alpha<p\leq x}\log p \geq \alpha\log x\sum_{x^\alpha<p\leq x}1\\ &= \alpha\log x(\pi(x)-\pi(x^\alpha)) \geq \alpha\log x(\pi(x)-x^\alpha).\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\psi(x)}{x} \geq \alpha \frac{\pi(x)}{x/\log x} - \alpha \frac{\log x}{x^{1-\alpha}}.$$

これから

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \alpha \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x}.$$

$$\frac{1}{\alpha} \geq \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x}.$$

$0 < \alpha < 1$ は任意だから

$$1 \geq \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x}.$$

以上により

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

定理 4.11 (素数定理)**.**

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty).$$

もし $\Theta < 1$ が示されたとすれば，$\psi(x)$ の明示公式における第 2 項について

$$\left| \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\leq T}} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\leq T}} \frac{x^{\Re(\rho)}}{|\rho|} \leq \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\leq T}} \frac{x^\Theta}{|\rho|} \leq C x^\Theta (\log T)^2$$

となる．Θ，すなわち $\zeta(s)$ の非自明な零点の実部の範囲がわかれば素数の個数の振る舞いをより正確に知ることができる．

参考文献

[1] 小山信也，素数とゼータ関数，共立出版，2015.

[2] 松本耕二，リーマンのゼータ関数，朝倉書店，2005.

[3] 中村亨，リーマン予想とはなにか，講談社 (ブルーバックス)，2015.

[4] 雪江明彦，整数論 3　解析的整数論への誘い，日本評論社，2014.