無限級数入門

上越教育大学　中川仁

2019 年 8 月 30 日 (金)〜9 月 27 日 (金)
毎週金曜日 19:00〜21:00
上越教育大学　人文棟 1 階 104 教室

目次

はじめに

数を無限に加えることによって様々な不思議な等式が得られることが知られている．例えば奇数の逆数にプラス，マイナスを交互につけて加えると円周率の (1/4) 倍になる．また有限個の数の足し算の場合と異なり，無限個の数の足し算は順序を変えると値も変わってしまう．本講座では数を無限に加える「無限級数」の基本的な性質について具体的な計算を通して解説する．

本講座の参考書として，小林昭七著「微分積分読本 1 変数」，裳華房，2000 年，を挙げておく．

1　無限等比級数

$|r| < 1$ のとき

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$$

とおけば

$$rS_n = r + r^2 + \cdots + r^n.$$

したがって

$$(1-r)S_n = 1 - r^2,$$

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r}.$$

$n \to \infty$ のとき $r^n \to 0$ だから S_n は $1/(1-r)$ に近づく．このことを次のように表す．

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}. \tag{1.1}$$

例えば $r = 1/3$ とすれば

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{3}{2}.$$

最初の 1 を除いた和は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{1}{2}.$$

これを 2 倍すれば

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots = 1.$$

図 1 はこの最後の等式を視覚的に説明したものである．

上の議論では $|r| < 1$ のとき $r^n \to 0$ $(n \to \infty)$ となることを使った．このことを証明してみよう．$1/|r| > 1$ だから $1/|r| = 1 + c$, $c > 0$ とかける．任意の自然数 n に対して

$$(1+c)^n \geq 1 + cn \tag{1.2}$$

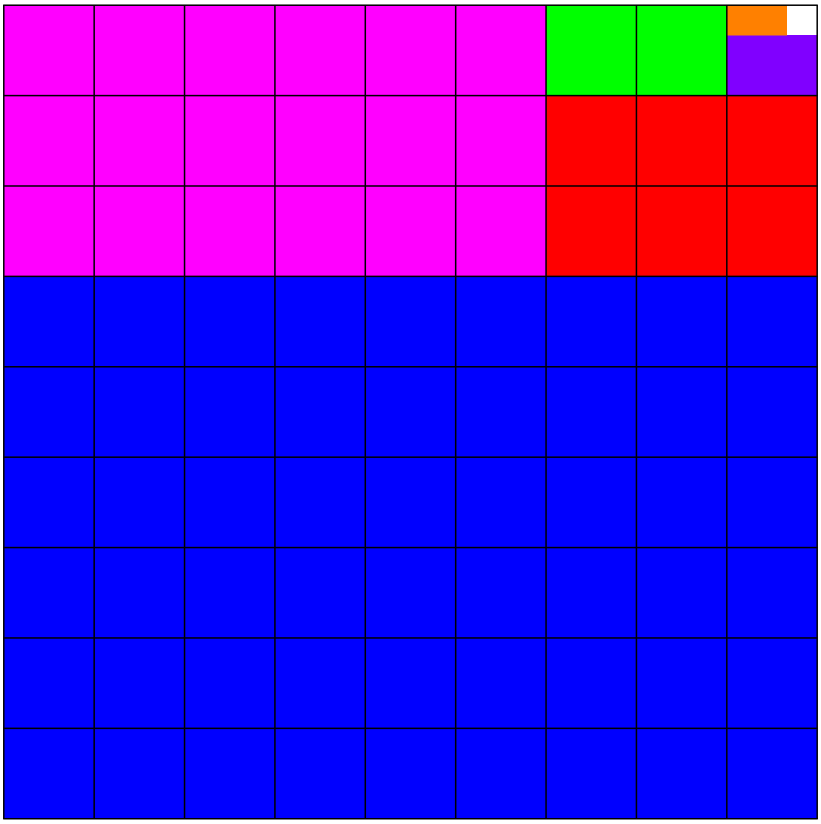

図 1　無限等比級数 $\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^k = 1$

が成り立つことを帰納法で証明する．$n=1$ のときこれは明らかである．$k \geq 1$ として $n=k$ のとき (1.2) が成り立つとすると，$n=k+1$ のとき

$$(1+c)^{k+1} = (1+c)^k(1+c) \geq (1+ck)(1+c) = 1+c(k+1)+c^2k \geq 1+c(k+1).$$

よって $n=k+1$ のときも (1.2) は成り立つ．

(1.2) より

$$\frac{1}{|r^n|} = \left(\frac{1}{|r|}\right)^n = (1+c)^n \geq 1+cn > cn.$$

したがって

$$0 < |r^n| < \frac{1}{cn}.$$

$n \to \infty$ とすれば $1/cn \to 0$ だから，上の不等式より $|r^n| \to 0$, $r^n \to 0$ を得る．

2　実数の連続性

定義 2.1. A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．ある実数 M が存在してすべての $x \in A$ に対して $x \leq M$ が成り立つとき，A は**上に有界**であるという．またこのような M を 1 つの A の**上界**とよぶ．同様にある実数 m が存在してすべての $x \in A$ に対して $x \geq m$ が成り立つとき，A は**下に有界**であるという．このような m を 1 つの A の**下界**とよぶ．A が上にも下にも有界であるとき，単に**有界**であるという．

定義 2.2. A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．A の上界の中の最小元があればそれを A の**上限**とよび $\sup A$ で表す．同様に A の下界の中の最大元があればそれを A の**下限**とよび $\inf A$ で表す．A が上に有界でないときは $\sup A = \infty$ とする．同様に A が下に有界でないときは $\inf A = -\infty$ とする．

実数の連続性. 上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合には上限が存在する．下に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合には下限が存在する．

定義 2.3. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に**収束する**とは，任意の (小さな) 正の数 $\varepsilon > 0$ に対して自然数 n_0 を十分大きくとれば，$n \geq n_0$ なるすべての自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つことをいう．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とかく．

また n を大きくしていくと a_n がいくらでも大きくなるとき $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $+\infty$ に**発散するといい**，$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とかく．正確に述べれば，任意の (大きな) 正の数 $M > 0$ に対して自然数 n_0 を十分大きくとれば，$n \geq n_0$ なるすべての自然数 n に対して $a_n > M$ が成り立つことをいう．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $-\infty$ に**発散する**ことも同様に定義される．

命題 2.4. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界で単調増加，または下に有界で単調減少ならば，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数 α に収束する．

[証明]　$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ とする．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界で単調増加とする．$M \in \mathbb{R}$ が存在して $a_n \leq M$ $(n = 1, 2, \dots)$ だから A は上に有界である．実数の連続性によって $\alpha = \sup A$ が存在する．α は A の 1 つの上界だからすべての n に対して $a_n \leq \alpha$ である．一方，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\alpha - \varepsilon$ は α より小さいから A の上界ではない．したがってある自然数 n_0 が存在して $a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$ である．$\{a_n\}$ は単調増加だから，任意の $n \geq n_0$ に対して $a_n \geq a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$ である．したがって

$$|a_n - \alpha| = \alpha - a_n < \varepsilon \qquad (n \geq n_0)$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示している．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界で単調減少である場合は，$\alpha = \inf A$ とおけば $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることが同様に示される． □

定義 2.5. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**コーシー列**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 n_0 を十分大きくとれば，$n, m \geq n_0$ なるすべての自然数 n, m に対して $|a_n - a_m| < \varepsilon$ が成り立つことをいう．

命題 2.6. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列ならばある実数 α に収束する．

[証明]　$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ をコーシー列とする．ある自然数 n_0 をとると任意の $n, m \geq n_0$ に対して $|a_n - a_m| \leq 1$ である．特に $m = n_0$ とすると，任意の $n \geq n_0$ に対して $|a_n - a_{n_0}| \leq 1$，したがって

$$a_{n_0} - 1 \leq a_n \leq a_{n_0} + 1$$

である．ゆえに各自然数 n に対して $\{a_m \,|\, m \geq n\}$ は有界だからその上限を b_n とする：$b_n = \sup\{a_m \,|\, m \geq n\}$．明らかに $b_{n+1} \leq b_n$ である．また $n \geq n_0$ ならば $a_{n_0} - 1 \leq a_n \leq b_n$ である．よって $\{b_n\}$ は下に有界で単調減少であり，命題 2.4 によってある実数 α に収束する．このとき $\{a_n\}$ も α に収束することを示す．$\varepsilon > 0$ とする．$\{a_n\}$ はコーシー列だからある自然数 n_1 に対して

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \qquad n, m \geq n_1$$

となる．$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ だから $n_2 \geq n_1$ なる自然数 n_2 で

$$|b_n - \alpha| < \varepsilon, \qquad n \geq n_2$$

となるものがとれる．任意の $n \geq n_2$ に対して $b_n = \sup\{a_m \,|\, m \geq n\}$ だからある $m_0 \geq n$ で

$$b_n - \varepsilon \leq a_{m_0} \leq b_n$$

となるものが存在する．このとき

$$|a_n - \alpha| = |a_n - a_{m_0}| + |a_{m_0} - b_n| + |b_n - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

これは $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示している． □

3　正項級数

定義 3.1. $u_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ とするとき，級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは，部分和

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \alpha$ を満たすことである．

また級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ が $+\infty$ に発散するとは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ となることである．

命題 3.2. 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ が収束すれば，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ である．

[証明]　$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ とおいて $n \to \infty$ のとき $s_n \to \alpha$ とすれば，$s_{n-1} \to \alpha$ だから，$a_n = s_n - s_{n-1} \to \alpha - \alpha = 0$ である．□

各項が非負実数 (0 以上の実数) からなる級数を**正項級数**と呼ぶ．まず正項級数の級数の収束の判定法をいくつか与える．それらは具体的に与えられた級数が収束するかを判定することに使われる．

補題 3.3 (優級数判定法)**.**

(i) 定数 $C > 0$ があって，すべての n について $0 \leq v_n \leq Cu_n$ が成り立つとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が収束すれば級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ も収束する．

(ii) 定数 $C > 0$ があって，すべての n について $0 \leq Cu_n \leq v_n$ が成り立つとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が発散すれば級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ も発散する．

[証明]　$s_n = u_1 + \cdots + u_n$, $t_n = v_1 + \cdots + v_n$ とおく．

(i) $\{s_n\}$ は単調増加だから，上に有界ならば命題 2.4 の証明でみたようにその上限 s に収束する．逆に $\{s_n\}$ が収束すれば上に有界であることは明らかである．$\{s_n\}$ が収束すれば有界だから $s_n \leq M$ となる実数 M がある．$t_n \leq Cs_n \leq CM$ だから $\{t_n\}$ も上に有界な単調増加数列であり，したがって収束する．

(ii) もし $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ が収束すれば $\{t_n\}$ は有界であり，したがって $t_n \leq M$ とすれば $Cs_n \leq t_n \leq M$, $s_n \leq M/C$ となって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ も収束することになってしまう．□

補題 3.4 (比率判定法)**.** $u_n, v_n > 0$ とし，N を自然数とする．すべての $n \geq N$ に対し

(i)
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

が成り立つ場合には，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ が収束すれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ も収束する．すべての $n \geq N$ に対し

(ii)
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

が成り立つ場合には，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ が発散すれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ も発散する．

[証明]　(i) の場合．$n > N$ に対して

$$v_n = \frac{v_{N+1}}{v_N} \frac{v_{N+2}}{v_{N+1}} \cdots \frac{v_n}{v_{n-1}} v_N \leq \frac{u_{N+1}}{u_N} \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} v_N = \frac{v_N}{u_N} u_n$$

だから，$C = v_N/u_N$ とおけば $v_n \leq Cu_n$ である．したがって補題 3.3 により $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ が収束すれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ も収束する．(ii) の場合も同様である．　□

補題 3.5 (コーシーの判定法)**.** $C > 0$ と $0 < r < 1$ に対し，$0 \leq v_n \leq Cr^n$ がある N より大きなすべての n に対して成り立てば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ は収束する．特に $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n^{1/n}$ が存在して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n^{1/n} < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ は収束する．

[証明]　$u_k = r^k$ とおけば $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ は収束するから，補題 3.3 により $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ も収束する．後半は $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n^{1/n} < 1$ とおく．$\rho < r < 1$ なる r をとる．十分大きな N をとれば，$n > N$ に対して $v_n^{1/n} < r$，したがって $v_n < r^n$ が成り立つから前半の結果により $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ は収束する．　□

補題 3.6 (ダランベールの判定法)**.** $v_n > 0$ で $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq r < 1$ がある N より大きなすべての n に対して成り立てば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ は収束する．

[証明]　$u_k = r^k$ とおけば $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ は収束し，$v_{n+1}/v_n \leq r = u_{n+1}/u_n$ だから，補題 3.4 により $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ も収束する．　□

定義 3.7. $u_k \in \mathbb{C}$ を項とする級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ が**絶対収束**するとは，級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ が収束することである．

命題 3.8. 絶対収束する級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ は収束する．

[証明]　$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ が a に収束するとする．その部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$ は単調増加数列だからすべての n に対して $S_n \le a$ である．実際，もし $S_m > a$ となる m があれば $a < S_m \le S_{m+1} \le \cdots$ となって S_n は a に収束しない．任意の $\varepsilon > 0$ に対して N を十分大きくとれば，すべての $n \ge N$ に対して $|S_n - a| < \varepsilon$ となるから，$a - \varepsilon < S_n \le a$ である．したがって部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ について，$m > n \ge N$ ならば $a - \varepsilon < S_n \le S_m \le a$ だから

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| = S_m - S_n < \varepsilon$$

である．よって $\{s_n\}$ はコーシー列である．したがって命題 2.6 により収束する．　□

定理 3.9 (ディリクレの定理)**.** 絶対収束する級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ に対して，その項を並べ替えて得られる級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u'_k$ も同じ和に収束する．

[証明]　$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $s'_n = \sum_{k=1}^{n} u'_k$ とする．$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ は絶対収束するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな N をとれば，$n \ge N$ について

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| < \varepsilon$$

となる．このとき M を十分大きくとれば $u'_1, u'_2, \ldots, u'_M$ は $u_1, u_2, \ldots, u_N$ をすべて含むようにできる．したがって $n \ge M$ ならば差 $s_n - s'_n$ の中には $u_1, u_2, \ldots, u_N$ の項はすべてなくなり

$$|s_n - s'_n| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} s_n$ を示している．　□

定理 3.10. $\alpha = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\beta = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに絶対収束するならば，すべての $a_p b_q$ $(p, q = 1, 2, \ldots)$ をとって任意の順序で並べた級数 $\sum c_n$ は絶対収束してその和は $\alpha\beta$ に等しい．

[証明]　$c_i = a_{p_i} b_{q_i}$ とし，$p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ の中で最大のものを N とすれば

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |c_i| &= \sum_{i=1}^{n} |a_{p_i}|\,|b_{q_i}| \\ &\leq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_N|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_N|) \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\right) < \infty\end{aligned}$$

である．ゆえに $\sum c_n$ は絶対収束する．次にその和が $\alpha\beta$ であることを示す．

$$t_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

とおいて，級数

$$t_1 + (t_2 - t_1) + \cdots + (t_n - t_{n-1}) + \cdots$$

を考える．

$$t_n - t_{n-1} = a_1 b_n + a_2 b_n + \cdots + a_{n-1} b_n + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$$

だから，この級数は $a_p b_q$ をすべてちょうど 1 回ずつ含み，級数 $\sum c_n$ の各項を並べ替えたものである．定理 3.9 より

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = t_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (t_k - t_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} t_n = \alpha\beta.$$

□

系 3.11. $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\beta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに絶対収束するならば，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \qquad c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$$

は絶対収束し，その和は $\alpha\beta$ に等しい．

4　交代級数

定理 4.1. 正の実数からなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調減少で $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たせば，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

は収束する．

[証明]　$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ とおく．奇数番目の部分和のなす数列 $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n} + a_{2n+1} < 0$$

だから単調減少である．また

$$s_{2n-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) \geq 0$$

だから，$\{s_{2n-1}\}$ は下に有界である．したがって命題 2.4 より $\{s_{2n-1}\}$ はある実数 α に収束する．偶数番目の部分和のなす数列 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$$

だから単調増加である．また

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

だから，$\{s_{2n}\}$ は上に有界である．したがって命題 2.4 より $\{s_{2n}\}$ はある実数 β に収束する．

$$s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n}$$

であり，$n \to \infty$ のとき，左辺は $\beta - \alpha$ に収束し，右辺は 0 に収束するから，$\beta - \alpha = 0$, $\beta = \alpha$ である．　□

定義 4.2. 収束するが絶対収束しない級数を**条件収束する**級数という．

定理 4.3. 条件収束する級数 $\sum a_n$ において，項の順序を適当にかえると級数の和が任意の実数に等しいようにできる．

[証明]　$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

とおく．さらに実数 x に対して

$$x^+ = \max(x, 0) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \qquad x^- = \max(-x, 0) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -x, & x \leq 0, \end{cases}$$

とく．$x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$ である．この記号を用いて

$$s_n^+ = \sum_{k=1}^{n} a_k^+, \qquad s_n^- = \sum_{k=1}^{n} a_k^-$$

とおけば，$s_n = s_n^+ - s_n^-$ である．$\sigma_n = s_n^+ + s_n^- = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ とおけば，$\sum a_n$ は条件収束するから

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$$

である．したがって

$$\lim_{n\to\infty} s_n^+ = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\sigma_n + s_n) = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} s_n^- = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\sigma_n - s_n) = \infty$$

である．

α を任意の実数とする．例えば $\alpha > 0$ とする．$s_n^+ \to \infty$ だからある番号 n があって $s_n^+ > \alpha$ となる．そのような n で最小のものを i_1 とする．

$$\alpha < a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{i_1}^+.$$

$s_n^- \to \infty$ だからある番号 n があって $s_n^- > s_{i_1}^+ - \alpha$ となる．そのような n で最小のものを j_1 とする．

$$a_1^+ + \cdots + a_{i_1}^+ - \alpha < a_1^- + \cdots + a_{j_1}^-.$$

すなわち

$$a_1^+ + \cdots + a_{i_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{j_1}^- < \alpha.$$

同様にして

$$a_1^+ + \cdots + a_{i_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{j_1}^- + a_{i_1+1}^+ + \cdots + a_n^+ > \alpha$$

となる最小の $n > i_1$ を i_2 として，

$$a_1^+ + \cdots + a_{i_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{j_1}^- + a_{i_1+1}^+ + \cdots + a_{i_2}^+ - a_{j_1+1}^- - \cdots - a_n^- < \alpha$$

となる最小の $n > j_1$ を j_2 とする．この操作を繰り返していけば 1 つの級数

$$a_1^+ + \cdots + a_{i_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{j_1}^- + a_{i_1+1}^+ + \cdots + a_{i_2}^+ - a_{j_1+1}^- - \cdots - a_{j_2}^- + \cdots \tag{4.1}$$

が得られる．この級数の第 n 項を b_n とする．$\sum a_n$ の各項 a_n は，$a_n > 0$ ならば a_n^+，$a_n < 0$ ならば $-a_n^-$ として (4.1) に必ず含まれる．したがって $\sum b_n$ は $\sum a_n$ の項の順序をかえた級数である．$s'_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ とする．もし $\alpha < s'_n$ ならば，s'_n に含まれる最後の正の項を b_m $(m \leq n)$ とするとき，上の定め方により

$$s'_{m-1} < \alpha < s'_m = s'_{m-1} + b_m, \qquad \alpha < s'_n \leq \cdots \leq s'_m$$

となっているから，$s'_n - \alpha < b_m$ である．またもし $s'_n < \alpha$ ならば，s'_n に含まれる最後の負の項を b_m $(m \leq n)$ とするとき，上の定め方により

$$s'_{m-1} + b_m = s'_m < \alpha < s'_{m-1}, \qquad s'_m \leq \cdots \leq s'_n < \alpha$$

となっているから，$\alpha - s'_n < |b_m|$ である．いずれの場合も $\sum a_n$ が絶対収束していないことから n を大きくとれば m も大きくなり，$a_n \to 0$ だから $b_m \to 0$ となる．よって $\lim_{n\to\infty} |s'_n - \alpha| = 0$，すなわち $\sum b_n = \alpha$ を得る． □

例 4.4. $a_n = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ とすれば，これは定理 4.1 の仮定を満たすから，級数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

は収束する．この級数の項を並べ替えて，正の項を 2 つ，負の項を 1 つの順にしたものを T とする．

$$T = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

同様に正の項を 1 つ，負の項を 2 つの順にしたものを U とする．

$$U = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots .$$

S の項を 4 つずつまとめたときの n 番目を b_n，T の項を 3 つずつまとめたときの n 番目を c_n，U の項を 3 つずつまとめたときの n 番目を d_n とすると

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}, \\ c_n &= \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}, \\ d_n &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} c_n - b_n &= \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right), \\ b_n - d_n &= \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{2}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}. \end{aligned}$$

したがって $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とおけば

$$
\begin{aligned}
T_N &= \sum_{n=1}^{N} c_n = \sum_{n=1}^{N}(c_n - b_n) + \sum_{n=1}^{N} b_n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) \\
&= \frac{1}{2}S_{2N} + S_{4N}, \\
T &= \lim_{N\to\infty} T_N = \frac{1}{2}S + S = \frac{3}{2}S > S.
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
U_N &= \sum_{n=1}^{N} d_n = \sum_{n=1}^{N} b_n - \sum_{n=1}^{N}(b_n - d_n) \\
&= S_{4N} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)} \\
&= \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2}{5\cdot 6\cdot 7} + \frac{2}{9\cdot 10\cdot 11} + \cdots + \frac{2}{(4N-3)(4N-2)(4N-1)} \\
&\leq \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{2}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots + \frac{2}{(4N-3)(4N-2)(4N-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{4N-3} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{4N-3}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{(4N-2)(4N-1)} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

したがって $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}$ は収束する．よって

$$
U = \lim_{N\to\infty} U_N = S - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)} < S
$$

である．

5　べき級数

x を変数とし，数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{5.1}$$

を考える．このような級数を x の**べき級数**とよぶ．

定理 5.1. 正の実数 R, C が存在して，すべての $n \geq 0$ に対して

$$|a_n| R^n \leq C \tag{5.2}$$

が成り立つとする．このとき (5.1) のべき級数 $f(x)$ は $|x| < R$ において絶対収束する．さらに $f(x)$ は微分できる．$f(x)$ を形式的に微分して得られるべき級数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

も $|x| < R$ において絶対収束して，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $g(x)$ に等しい．

[証明]　$|x| < R$ ならば，(5.2) よりすべての $n \geq 0$ に対して

$$|a_n x^n| = |a_n| R^n \left(\frac{|x|}{R} \right)^n \leq C \left(\frac{|x|}{R} \right)^n$$

が成り立つから，コーシーの判定法 (補題 3.5) より

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

は収束する．すなわちべき級数 $f(x)$ は絶対収束する．命題 3.8 より $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束する．

$f(x)$ を形式的に微分して得られるべき級数を $g(x)$ とする．

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots .$$

$0 < R_1 < R$ を任意にとれば，$0 < R_1/R < 1$ だから (1.2) より任意の自然数 n に対して

$$\left(\frac{R_1}{R}\right)^n < \frac{1}{cn}$$

である．ここで $c = R/R_1 - 1 > 0$ とおいた．したがって

$$\begin{aligned}|na_n|R_1^{n-1} &= n|a_n|R^n \left(\frac{R_1}{R}\right)^n \frac{1}{R_1} \\ &\le nC \left(\frac{R_1}{R}\right)^n \frac{1}{R_1} < nC\frac{1}{cn}\frac{1}{R_1} = \frac{C}{cR_1} = \frac{C}{R - R_1}.\end{aligned}$$

よってべき級数 $g(x)$ は $|x| < R_1$ ならば絶対収束する．$0 < R_1 < R$ は任意にとれたから，結局，べき級数 $g(x)$ は $|x| < R$ ならば絶対収束する．このとき $-R < x < R$ において $f(x)$ は x の関数として微分でき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $g(x)$ に等しいことが知られている (積分と一様収束についての結果を用いる)． □

例 5.2. 自然数 n に対して 1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す．

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1.$$

また $0! = 1$ であるとする．このときべき級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

を考える．R を任意の正の実数とする．$u_n = R^n/n!$ とおけば

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{R^n} = \frac{R}{n+1}$$

である．自然数 N を $N \ge 2R$ にとれば，すべての $n \ge N$ に対して

$$\frac{R}{n+1} \le \frac{R}{2R+1} < \frac{1}{2} < 1$$

となるから，ダランベールの判定法 (補題 3.6) により正項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$$

は収束する．したがって命題 3.2 より $\dfrac{R^n}{n!}$ は $n \to \infty$ のとき 0 に収束するから，ある正数 C が存在して，$R^n/n! \le C$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ である．すなわち (5.2) が成り立つ．したがってべき級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

は $|x| < R$ で絶対収束する．R は任意の正数だから，結局 $f(x)$ はすべての実数 x に対して絶対収束する．$f(x)$ を形式的に微分して得られるべき級数は

$$1 + \frac{2}{2!}x + \frac{3}{3!}x^2 + \cdots + \frac{n}{n!}x^{n-1} + \cdots = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots$$

であり，これは $f(x)$ と全く同じものである．したがって $f(x)$ は実数全体で微分でき，$f'(x) = f(x)$ を満たす．このべき級数 $f(x)$ を $\exp(x)$ で表す．

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots .$$

例 5.2 で導入した関数 $\exp(x)$ の性質を調べるために必要となる微分に関する基本事項を証明しておく．

命題 5.3. (1) $f(x), g(x)$ が $a < x < b$ において微分できる関数であるとする．このとき次が成り立つ．

(i) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

(ii) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(iii) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

(2) $g(x)$ が $a < x < b$ で微分できる関数で $c < g(x) < d$ $(a < x < b)$ を満たし，$f(x)$ が $c < x < d$ で微分できる関数であるとき，$h(x) = f(g(x))$ は $a < x < b$ で微分でき，その導関数は

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

で与えられる．特に α, β を定数として $g(x) = \alpha x + \beta$ とすれば

$$h'(x) = f'(\alpha x + \beta)\alpha$$

である．

[証明] (1) $a < x_1 < b$ とする．

(i)

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h) + g(x_1+h) - f(x_1) - g(x_1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} + \frac{g(x_1+h) - g(x_1)}{h} \right) \\
&= f'(x_1) + g'(x_1).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)g(x_1+h)-f(x_1)g(x_1)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x_1+h)-f(x_1)\}g(x_1+h)+f(x_1)\{g(x_1+h)-g(x_1)\}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}g(x_1+h)+f(x_1)\frac{g(x_1+h)-g(x_1)}{h}\right)\\
&=f'(x_1)g(x_1)+f(x_1)g'(x_1).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x_1+h)}{g(x_1+h)}-\frac{f(x_1)}{g(x_1)}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{g(x_1+h)}+\frac{f(x_1)}{g(x_1+h)}-\frac{f(x_1)}{g(x_1)}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\frac{1}{g(x_1+h)}-\frac{f(x_1)}{g(x_1+h)g(x_1)}\frac{g(x_1+h)-g(x_1)}{h}\right)\\
&=f'(x_1)\frac{1}{g(x_1)}-\frac{f(x_1)}{g(x_1)^2}g'(x_1)=\frac{f'(x_1)g(x_1)-f(x_1)g'(x_1)}{g(x_1)^2}.
\end{aligned}$$

(2) $g(x_1+h)-g(x_1)=k$ とおけば，$g(x_1+h)=g(x_1)+k$ であり，$h\to 0$ のとき $k\to 0$ だから

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_1+h))-f(g(x_1))}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_1+h))-f(g(x_1))}{g(x_1+h)-g(x_1)}\frac{g(x_1+h)-g(x_1)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_1)+k))-f(g(x_1))}{k)}\frac{g(x_1+h)-g(x_1)}{h}\\
&=f'(g(x_1))g'(x_1).
\end{aligned}$$

□

命題 5.4. $f(x)$ は $a<x<b$ で微分できる関数であるとする．このとき $f'(x)$ が恒等的に 0 ならば $f(x)$ は定数である．また $a<x<b$ で $f'(x)>0$ ならば $f(x)$ は単調増加であり，$a<x<b$ で $f'(x)<0$ ならば $f(x)$ は単調減少である．

[証明]　$a<x_1<x_2<b$ なる x_1, x_2 を任意にとる．$a<x<b$ において $f'(x)=0$ であるとすれば

$$f(x_2)-f(x_1)=[f(x)]_{x_1}^{x_2}=\int_{x_1}^{x_2}f'(x)\,dx=0.$$

すなわち $f(x_2)=f(x_1)$ である．ゆえに $f(x)$ は定数である．

$a < x < b$ において $f'(x) > 0$ であるとすれば

$$f(x_2) - f(x_1) = [f(x)]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx > 0.$$

すなわち $f(x_2) > f(x_1)$ である．よって $f(x)$ は単調増加である．

$a < x < b$ において $f'(x) < 0$ であるとすれば

$$f(x_2) - f(x_1) = [f(x)]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx < 0.$$

すなわち $f(x_2) < f(x_1)$ である．よって $f(x)$ は単調減少である． □

$\exp(x)$ は次のような性質をもつ．

命題 5.5 (指数関数の性質)**.** (1) $(\exp(x))' = \exp(x)$.

(2) $\exp(x)\exp(-x) = 1$．特にすべての実数 x に対して $\exp(x) > 0$.

(3) $\exp(x)$ は単調増加であり，実数全体から正の実数全体への 1 対 1 対応を与える．

(4) 任意の実数 x_1, x_2 に対して $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$.

[証明] (1) は例 5.2 でみた．

(2) 命題 5.3 の (2) により

$$(\exp(-x))' = \exp(-x)(-1) = -\exp(-x).$$

これと命題 5.3 の (1)-(ii) により $g(x) = \exp(x)\exp(-x)$ とおけば

$$g'(x) = (\exp(x))'\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' = \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0.$$

命題 5.4 より $g(x)$ は定数である．$g(0) = \exp(0)\exp(0) = 1$ だから $g(x) = 1$ である．$x > 0$ のときは明らかに $\exp(x) > 1$ だから $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ は 0 と 1 の間の正の数である．

(3) $\exp(x)$ の定義より $x_2 > x_1 \geq 0$ ならば $\exp(x_2) > \exp(x_1)$ である．(2) より

$$\exp(-x_2) = \frac{1}{\exp(x_2)} < \frac{1}{\exp(x_1)} = \exp(-x_1)$$

である．したがって実数全体で $\exp(x)$ は単調増加である．さらに $x > 0$ のとき $\exp(x) > 1 + x$ だから $x \to +\infty$ のとき $\exp(x) \to +\infty$ である．また $x \to +\infty$ のとき $\exp(-x) = 1/\exp(x) \to 0$ である．よって $\exp(x)$ は実数全体から正の実数全体への 1 対 1 対応を与える．

(4) $h(x)=\exp(x+x_1)\exp(-x)$ とおけば

$$h'(x)=\exp(x+x_1)\exp(-x)+\exp(x+x_1)\exp(-x)(-1)=0.$$

よって $h(x)$ は定数である．したがって $h(x)=h(0)=\exp(x_1)$ である．

$$\exp(x+x_1)\exp(-x)=\exp(x_1).$$

$\exp(-x)=1/\exp(x)$ だから，$\exp(x+x_1)=\exp(x_1)\exp(x)$ である． □

定数 e を

$$e=\exp(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \tag{5.3}$$

によって定義する．e は**ネピアの定数**とよばれる．命題 5.5 の (3) より自然数 n に対して

$$\exp(n)=\exp(1)^n=e^n$$

である．さらに命題 5.5 の (2) より $\exp(-n)=\exp(n)^{-1}=(e^n)^{-1}=e^{-n}$ である．$\exp(0)=1$ だから，結局すべての整数 n に対して $\exp(n)=e^n$ である．さらに m,n が互いに素な整数で $m>0$ であるとき

$$\exp\left(\frac{n}{m}\right)^m=\exp\left(\frac{n}{m}m\right)=\exp(n)=e^n$$

だから

$$\exp\left(\frac{n}{m}\right)=(e^n)^{\frac{1}{m}}=e^{\frac{n}{m}}$$

である．したがって x が有理数ならば $\exp(x)=e^x$ である．そこで x が実数のときも $\exp(x)=e^x$ とかく．$\exp(x)=e^x$ を，e を底とする**指数関数**とよぶ．

命題 5.6. e は無理数である．

[証明]

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

だから，$e>2$ である．$n\geq 2$ のとき $n!=n(n-1)\cdots 2\geq 2^{n-1}$ である．したがって

$$e<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1+2=3.$$

よって $2 < e < 3$ である．もし e が有理数であるとすれば，$e = b/a$, a, b は互いに素な自然数，$a > 1$ である．このとき

$$
\begin{aligned}
0 < a!e - \sum_{n=0}^{a} \frac{a!}{n!} = \sum_{n=a+1}^{\infty} \frac{a!}{n!} &= \sum_{n=a+1}^{\infty} \frac{1}{(a+1)(a+2)\cdots n} \\
&< \sum_{n=a+1}^{\infty} \frac{1}{(a+1)^{n-a}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+1}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{a+1}} = \frac{1}{a} < 1.
\end{aligned}
$$

$a!e - \sum_{n=0}^{a} \dfrac{a!}{n!}$ は 0 より大きく 1 より小さいが，$e = b/a$ としたからこれは整数となり矛盾である． □

例 5.7. 実数 $a > 0$ に対して

$$L(a) = \int_1^a \frac{1}{x}\, dx$$

とおく．$L(1) = 0$ である．また $0 < a < 1$ ならば

$$L(a) = -\int_a^1 \frac{1}{x}\, dx < 0$$

である．$h > 0$ を小さくとれば

$$L(a+h) - L(a) = \int_a^{a+h} \frac{1}{x}\, dx$$

であり，$a \leq x \leq a+h$ において $\dfrac{1}{a+h} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{a}$ だから

$$\frac{h}{a+h} \leq L(a+h) - L(a) \leq \frac{h}{a}, \quad \frac{1}{a+h} \leq \frac{L(a+h)-L(a)}{h} \leq \frac{1}{a},$$
$$\lim_{h \to +0} \frac{L(a+h)-L(a)}{h} = \frac{1}{a}.$$

同様に

$$\lim_{h \to -0} \frac{L(a+h)-L(a)}{h} = \frac{1}{a}.$$

したがって

$$\lim_{h \to 0} \frac{L(a+h)-L(a)}{h} = \frac{1}{a}.$$

すなわち関数 $L(x)$ の $x = a$ での微分係数 $L'(a)$ は $1/a$ である．a に対して $L(a)$ を対応させる関数を $L(x)$，a に対して $L'(a)$ を対応させる関数を $L'(x)$ とかけば，$L'(x) = \dfrac{1}{x}$ である．

命題 5.8 (対数関数の性質 1)**.** (1) $x > 0$ で定義された関数 $L(x)$ は微分でき

$$L'(x) = \frac{1}{x}$$

を満たす．

(2) 実数 x と正の実数 y に対して

$$e^x = y \Longleftrightarrow x = L(y).$$

特に $L(e) = 1$ である．

(3) $L(x)$ は単調増加であり，正の実数全体から実数全体への 1 対 1 対応を与える．

(4) $y_1 > 0,\ y_2 > 0$ に対して

$$L(y_1 y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

[証明] (1) は例 5.7 で示した．

(2) $g(x) = L(\exp(x)) - x$ とおく．命題 5.3 の (1)-(i) と (2) により

$$g'(x) = L'(\exp(x))(\exp(x))' - 1 = \frac{1}{\exp(x)}\exp(x) - 1 = 1 - 1 = 0$$

である．命題 5.4 より $g(x)$ は定数である．$g(0) = L(\exp(0)) - 0 = L(1) = 0$ である．よって $g(x) = 0,\ L(\exp(x)) = x$ である．命題 5.5 の (3) より $\exp(x)$ は実数全体から正の実数全体への 1 対 1 対応を与えるから，任意の正の実数 y に対して $\exp(x) = y$ となる実数 x がただ 1 つ定まる．このとき

$$\exp(L(y)) = \exp(L(\exp(x))) = \exp(x) = y$$

である．以上により $y = \exp(x)$ ならば $L(y) = L(\exp(x)) = x$ であり，逆に $x = L(y)$ ならば $\exp(x) = \exp(L(y)) = y$ である．

(3) $x_2 > x_1 > 0$ とする．$y_1 = L(x_1),\ y_2 = L(x_2)$ とおく．(2) より $x_1 = \exp(y_1)$, $x_2 = \exp(y_2)$ である．もし $y_1 \geq y_2$ ならば $\exp(x)$ は単調増加だから

$$x_1 = \exp(y_1) \geq \exp(y_2) = x_2$$

となって，$x_1 < x_2$ に矛盾する．ゆえに $y_1 < y_2$ である．よって $L(x)$ は単調増加である．命題 5.5 の (3) より，$x \mapsto \exp(x)$ は実数全体から正の実数全体への 1 対 1 対応を与得る．

(2) より $y \mapsto L(y)$ はその逆対応だから，正の実数全体から実数全体への 1 対 1 対応を与える．

(4) 2 つの正の実数 y_1, y_2 に対して $x_1 = L(y_1)$, $x_2 = L(y_2)$ とおけば $y_1 = \exp(x_1)$, $y_2 = \exp(x_2)$ である．命題 5.5 の (4) より

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2) = y_1 y_2$$

となるから

$$L(y_1 y_2) = x_1 + x_2 = L(y_1) + L(y_2)$$

である． □

正の実数 x に対して $L(x) = \log x$ とかき，これを x の**自然対数**とよぶ．また $\log x$ を e を底とする**対数関数**とよぶ．

対数関数をべき級数で表すことを考える．そのためにもう 1 つ別の関数 $l(x)$ を導入する．

例 5.9. べき級数

$$l(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots$$

を考える．$\left| \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq |x|^k$ だから，$|x| < 1$ において $l(x)$ は絶対収束する．よって $l(x)$ は $-1 < x < 1$ において微分できる関数であり，その導関数 $l'(x)$ は

$$l'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$$

で与えられる．

命題 5.10 (対数関数の性質 2)**.** 例 5.9 の $l(x)$ と例 5.7 の $L(x) = \log(x)$ の間には

$$l(x) = \log(1+x) \qquad (-1 < x \leq 1)$$

という関係式が成り立つ．特に $x = 1$ とすれば

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots = \log 2$$

が成り立つ．

[証明]　$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ だから，$-1 < x < 1$ において命題 5.3 の (2) より

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}(1+x)' = \frac{1}{1+x} = l'(x)$$

である．したがって $\log(1+x) - l(x)$ の導関数は 0 であり，命題 5.4 より $\log(1+x) - l(x)$ は定数である．$x = 0$ とすれば $\log 1 = 0$, $l(0) = 0$ だから，$\log(1+x) - l(x) = 0$, $\log(1+x) = l(x)$ $(-1 < x < 1)$ である．

$0 \leq x \leq 1$ において

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k = \frac{1 + (-1)^{n-1}x^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{1+x}$$

である．この両辺を 0 から 1 まで積分すれば

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx. \tag{5.4}$$

この左辺は

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k\right) dx &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^1 x^k\, dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left[\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

一方，$(L(1+x))' = L'(1+x)$ だから (5.4) の右辺の第 1 項の積分は

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = [L(1+x)]_0^1 = L(2) - L(1) = \log 2$$

である．また $0 \leq x \leq 1$ だから

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

である．したがって (5.4) の右辺の第 2 項の積分は

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

であり，これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．したがって

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2 + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$$

であり，この両辺で $n \to \infty$ とすれば

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots = \log 2$$

を得る． □

例 5.11. 実数 x に対してべき級数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots,$$

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

を考える．$C(x)$, $S(x)$ とも任意の実数 x に対して絶対収束する．実際，$C(x)$ の x^n の係数の絶対値は n が奇数なら 0 で n が偶数ならば $1/n!$ である．$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ はすべての実数 x に対して絶対収束するから補題 3.3 により $C(x)$ もすべての実数 x に対して絶対収束する．$S(x)$ についても同様である．

定義から明らかに

$$S(-x) = -S(x), \qquad C(-x) = C(x)$$

が成り立つ．また $S(0) = 0$, $C(0) = 1$ である．

$S(x)$ を形式的に微分して得られるべき級数は $C(x)$ である．定理 5.1 より $S(x)$ は微分できて，$S'(x) = C(x)$ である．同様に $C(x)$ を形式的に微分して得られるべき級数は $-S(x)$ であり，定理 5.1 より $C(x)$ は微分できて，$C'(x) = -S(x)$ である．

$f(x) = C(x)^2 + S(x)^2$ とおけば

$$f'(x) = 2C(x)C'(x) + 2S(x)S'(x) = -2C(x)S(x) + 2S(x)C(x) = 0$$

である．命題 5.4 より $f(x)$ は定数である．$f(0) = C(0)^2 + S(0)^2 = 1^2 + 0^2 = 1$ だから $f(x) = 1$ である．すなわちすべての実数 x に対して

$$C(x)^2 + S(x)^2 = 1$$

が成り立つ．これから

$$-1 \leq C(x) \leq 1, \qquad -1 \leq S(x) \leq 1$$

を得る．$C(x)$ は $x = 0$ で最大値 1 をとる．$S'(x) = C(x)$ であり $S'(0) = C(0) = 1 > 0$ だから $x = 0$ の近くでは $S(x)$ は増加関数である．したがって $x > 0$ が十分小さければ $S(x) > S(0) = 0$ である．

2 つの実数 x, y に対して $C(x+y)$, $S(x+y)$ を $C(x)$, $S(x)$, $C(y)$, $S(y)$ を用いて表すことができる．これらは絶対収束するべき級数で表されている．まず 2 項定理により

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}$$

となることを注意しておく．定義より

$$\begin{aligned}
S(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+y)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} x^k y^{2n+1-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2k)!(2n+1-2k)!} x^{2k} y^{2n+1-2k} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2k+1)!(2n-2k)!} x^{2k+1} y^{2n-2k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \frac{(-1)^l}{(2l)!} y^{2l} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} y^{2l+1} \\
&= S(x)C(y) + C(x)S(y).
\end{aligned}$$

最後の等式は系 3.11 を用いた．同様に

$$\begin{aligned}
C(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+y)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} x^k y^{2n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2k)!(2n-2k)!} x^{2k} y^{2n-2k} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n}{(2k+1)!(2n-2k-1)!} x^{2k+1} y^{2n-2k-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \frac{(-1)^l}{(2l)!} y^{2l} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k+l=n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} y^{2l+1} \\
&= C(x)C(y) - S(x)S(y).
\end{aligned}$$

最後の等式は系 3.11 を用いた．以上により次の**加法定理**が成り立つことが示された．

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y), \tag{5.5}$$

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y). \tag{5.6}$$

特に $y = x$ とすれば **2 倍公式**

$$S(2x) = 2S(x)C(x), \tag{5.7}$$

$$C(2x) = C(x)^2 - S(x)^2 = 2C(x)^2 - 1 \tag{5.8}$$

を得る．

$0 < x \leq 2$ において，$S(x) > 0$ である．実際，$0 < x \leq 2$ ならば $x^2 \leq 4 < 6$ だから $n = 2m,\ m \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3} &= \frac{1}{(4m+1)!}x^{4m+1} - \frac{1}{(4m+3)!}x^{4m+3} \\
&= \frac{x^{4m+1}}{(4m+3)!}\left((4m+2)(4m+3) - x^2\right) \\
&\geq \frac{x^{4m+1}}{(4m+3)!}(6 - x^2) > 0.
\end{aligned}$$

したがって

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} > 0 \qquad (0 < x \leq 2).$$

$0 < x \leq 2$ において $C'(x) = -S(x) < 0$ だから，そこで $C(x)$ は単調減少である．$0 < x \leq 2$ ならば $x^2 \leq 4 < 12$ だから $n = 2m+1,\ m \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2} &= -\frac{1}{(4m+2)!}x^{4m+2} + \frac{1}{(4m+4)!}x^{4m+4} \\
&= -\frac{x^{4m+2}}{(4m+4)!}\left((4m+3)(4m+4) - x^2\right) \\
&\leq -\frac{x^{4m+2}}{(4m+4)!}(12 - x^2) < 0.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
C(2) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{(4m+2)!}2^{4m+2} + \frac{1}{(4m+4)!}2^{4m+4}\right) \\
&= -\frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{(4m+2)!}2^{4m+2} + \frac{1}{(4m+4)!}2^{4m+4}\right) < -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$C(0) = 1,\ C(2) = -\dfrac{1}{3} < 0$ であり，$C(x)$ は $0 \leq x \leq 2$ で単調減少だから，正の実数 a で，$0 < a < 2,\ C(a) = 0$ となるものがただ 1 つ存在する．$C(a)^2 + S(a)^2 = 1$ より

$S(a)^2 = 1$ であるが，$S(a) > 0$ だから $S(a) = 1$ である．この a を用いて $\pi = 2a$ と定義する．

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

である．2 倍公式 (5.7), (5.8) より

$$S(\pi) = S(2a) = 2S(a)C(a) = 0, \qquad C(\pi) = C(2a) = 2C(a)^2 - 1 = -1.$$

また $0 < x < \pi = 2a$ のとき，$0 < x/2 < a$ だから $C(x/2) > 0$, $S(x/2) > 0$ である．2 倍公式 (5.7) より

$$S(x) = 2S\left(\frac{x}{2}\right)C\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

である．したがって $S(b) = 0$ となる最小の正の数を b とすれば，$b = 2a = \pi$ である．

さらに (5.5), (5.6) より

$$\begin{aligned} S(x+\pi) &= S(x)C(\pi) + C(x)S(\pi) = -S(x), \\ C(x+\pi) &= C(x)C(\pi) - S(x)S(\pi) = -C(x), \\ S(x+2\pi) &= -S(x+\pi) = S(x), \\ C(x+2\pi) &= -C(x+\pi) = C(x). \end{aligned}$$

また

$$S\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right)C(x) + C\left(\frac{\pi}{2}\right)S(x) = C(x).$$

x を $-x$ で置き換えれば，$C(-x) = C(x)$ だから

$$S\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = C(x)$$

を得る．

ここで定数 π の意味を考えよう．$0 < t < \pi$ のとき，$S(t) > 0$ であり，$C'(t) = -S(t) < 0$ だから $C(t)$ は単調減少である．したがって t が 0 から π までうごくとき，$C(t)$ は $C(0) = 1$ から $C(\pi) = -1$ まで単調にうごく．また $\pi < t < 2\pi$ のときは $S(t) = -S(t-\pi) < 0$ であり，$C(t) = -C(t-\pi)$ だから $C(t)$ は -1 から 1 まで単調にうごく．つねに $C(t)^2 + S(t)^2 = 1$ だから，t が 0 から 2π までうごくとき，点 $(C(t), S(t))$ は単位円を正の向きにちょうど 1 周する．

単位円の面積は π であることを証明しよう．単位円の 1/4 の面積について

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

であることを証明すればよい．そのために $-1 \le y \le 1$ に対して

$$M(y) = \int_0^y \sqrt{1-u^2}\,du$$

と定義する．y の関数 $M(y)$ は微分でき，その導関数は

$$M'(y) = \sqrt{1-y^2}$$

である ($L(x)$ のときと同様)．したがって命題 5.3 の (2) より，$-\pi/2 \le t \le \pi/2$ とするとき，変数 t の関数 $M(S(t))$ は微分でき，$C(2t) = 2C(t)^2 - 1$ に注意すればその導関数は次のようになる．

$$(M(S(t)))' = M'(S(t))S'(t) = \sqrt{1-S(t)^2}C(t) = C(t)^2 = \frac{1}{2}C(2t) + \frac{1}{2}.$$

ここで

$$\left(\frac{1}{4}S(2t) + \frac{1}{2}t\right)' = \frac{1}{4}S'(2t)\cdot 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}C(2t) + \frac{1}{2}$$

だから，$M(S(t)) - (1/4)S(2t) - (1/2)t$ の導関数は恒等的に 0 である．したがって $M(S(t)) - (1/4)S(2t) - (1/2)t$ は定数である．$t = 0$ とすればこの定数は 0 であることがわかる．したがって

$$M(S(t)) = \frac{1}{4}S(2t) + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}S(t)C(t) + \frac{1}{2}t \tag{5.9}$$

が成り立つ．ここで $t = \pi/2$ を代入すれば $S(\pi/2) = 1,\ S(\pi) = 0$ だから

$$M(1) = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{\pi}{4}$$

を得る．$x = C(t),\ y = S(t)\ (0 \le t \le \pi/2)$ とおけば (5.9) は

$$\frac{1}{2}t = M(y) - \frac{1}{2}xy = \int_0^y \sqrt{1-u^2}\,du - \frac{1}{2}xy$$

とかける．この右辺は単位円上の 2 点 $(1,0)$ と $(C(t), S(t))$ を結ぶ弧に対応する扇形の面積だからそれが $(1/2)t$ に等しいことを示している (図 2)．

$-\pi/2 < x < \pi/2$ ならば $0 < \pi/2 - x < \pi$ だから $C(x) = S(\pi/2 - x) > 0$ である．したがって $-\pi/2 < x < \pi/2$ において

$$T(x) = \frac{S(x)}{C(x)}$$

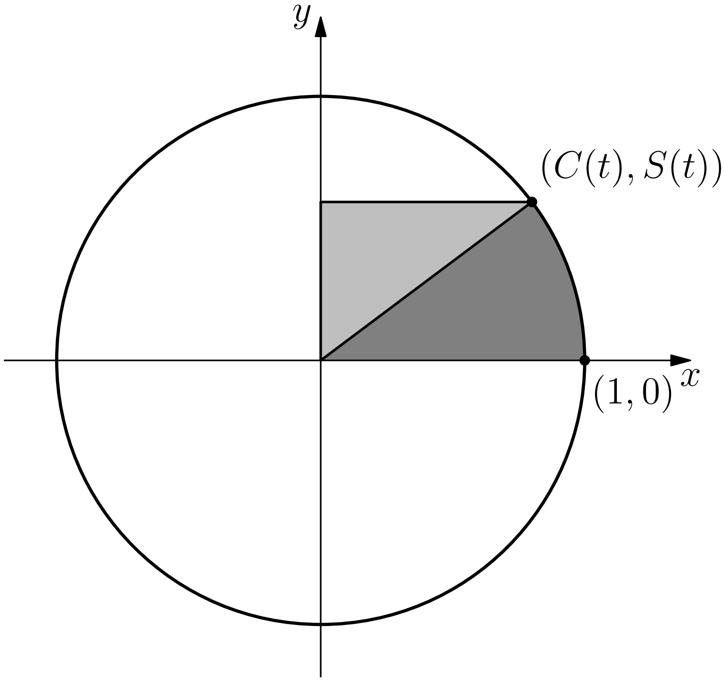

図 2　扇形の面積

が定義される．$T(x)$ も微分でき，その導関数は

$$T'(x) = \frac{1}{C(x)^2} = 1 + T(x)^2 \tag{5.10}$$

で与えられる．実際，命題 5.3 の (1)-(iii) より

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{S'(x)C(x) - S(x)C'(x)}{C(x)^2} = \frac{C(x)^2 + S(x)^2}{C(x)^2} = \frac{1}{C(x)^2} \\ &= 1 + \frac{S(x)^2}{C(x)^2} = 1 + T(x)^2. \end{aligned}$$

実数 x に対して $A(x)$ を

$$A(x) = \int_0^x \frac{1}{1+u^2}\, du$$

によって定義する．$A(x)$ は微分でき，その導関数は

$$A'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

で与えられる．命題 5.3 の (2) により，$-\pi/2 < x < \pi/2$ において定義される関数 $A(T(x))$ も微分でき，その導関数は

$$(A(T(x)))' = A'(T(x))T'(x) = \frac{1}{1+T(x)^2}(1+T(x)^2) = 1$$

である．したがって $A(T(x))-x$ の導関数は恒等的に 0 になる．命題 5.4 によって $A(T(x))-x$ は定数であるが，$A(T(0))-0=A(0)=0$ だから $A(T(x))-x$ は恒等的に 0 であり，$A(T(x))=x$ である．$S(\pi/2-x)=C(x)$ だから $x=\pi/4$ とすれば $T(\pi/4)=S(\pi/4)/C(\pi/4)=1$ を得る．したがって

$$\frac{\pi}{4}=A(T(\pi/4))=A(1)=\int_0^1\frac{1}{1+u^2}\,du \tag{5.11}$$

を得る．

命題 5.10 で $\log 2$ を級数で表したときと同様に，$\pi/4$ を級数で表すことができる．$-1\leq x\leq 1$ において

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k=\frac{1+(-1)^{n-1}x^n}{1+x}=\frac{1}{1+x}+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1+x}$$

であった．ここで x を x^2 で置き換えれば

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{2k}=\frac{1}{1+x^2}+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{1+x^2}$$

を得る．この両辺を 0 から 1 まで積分すれば

$$\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{2k}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx+(-1)^{n-1}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx. \tag{5.12}$$

この左辺は

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{2k}\right)dx&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\right]_0^1\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.\end{aligned}$$

一方，$A'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ だから (5.12) の右辺の第 1 項の積分は

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=[A(x)]_0^1=A(1)-A(0)=\frac{\pi}{4}$$

である．また $0\leq x\leq 1$ だから

$$0\leq\frac{x^{2n}}{1+x^2}\leq x^{2n}$$

である．したがって (5.12) の右辺の第 2 項の積分は

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 x^{2n}\,dx = \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

であり，これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．したがって

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

であり，この両辺で $n \to \infty$ とすれば

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

を得る．この公式は 17 世紀後半にライプニッツとグレゴリーによって独立に見出され，グレゴリー-ライプニッツ級数と呼ばれる．これは 15 世紀のインドの数学者マーダヴァがライプニッツより 300 年ほど前に発見していたものでることからマーダヴァ-ライプニッツ級数と呼ばれることもある．

$S(x)$ を $\sin x$，$C(x)$ を $\cos x$，$T(x)$ を $\tan x$ とかく．また $A(x)$ を $\arctan x$ とかく．$(\sin x)^n$ を $\sin^n x$，$(\cos x)^n$ を $\cos^n x$ とかく．

さらに

$$\begin{aligned}\left(x\sqrt{1-x^2}\right)' &= \sqrt{1-x^2} + x\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \sqrt{1-x^2} + x\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \\ &= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 2\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du - \int_0^y \left(u\sqrt{1-u^2}\right)'\,du \\ = 2M(y) - \left[u\sqrt{1-u^2}\right]_0^y = 2M(y) - y\sqrt{1-y^2}.\end{aligned}$$

したがって

$$\arcsin(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

と定義すれば，(5.9) より

$$\arcsin(\sin t) = t \tag{5.13}$$

を得る．

一般に次の定理が成り立つ．

定理 5.12 (テイラーの定理)．$a > 0$ として，$-a < x < a$ において定義された関数 $f(x)$ が $n+1$ 階までの導関数 $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n+1)}(x)$ が存在して連続ならば，$-a < x < a$ に対して

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$
$$R_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

が成り立つ．

[証明]　$-a < b < a$ とする．

$$f(b) - f(0) = [f'(t)]_0^b = \int_0^b f'(t)\,dt$$

である．ここで

$$((b-t)f'(t))' = -f'(t) + (b-t)f''(t)$$

だから

$$\begin{aligned} f(b) - f(0) &= \int_0^b f'(t)\,dt = -\int_0^b ((b-t)f'(t))'\,dt + \int_0^b (b-t)f''(t)\,dt \\ &= -\left[(b-t)f'(t)\right]_0^b + \int_0^b (b-t)f''(t)\,dt \\ &= f'(0)b + \int_0^b (b-t)f''(t)\,dt. \end{aligned}$$

$1 \leq k \leq n-1$ として

$$f(b) - f(0) - f'(0)b - \cdots - \frac{f^{(k)}(0)}{k!}b^k = \int_0^b \frac{(b-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)$$

が成り立つとすれば

$$\left(\frac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(t)\right)' = -\frac{(b-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t) + \frac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+2)}(t)$$

だから

$$\begin{aligned}
&f(b) - f(0) - f'(0)b - \cdots - \frac{f^{(k)}(0)}{k!}b^k \\
&= \int_0^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \\
&= -\int_0^b \left(\frac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t) \right)' dt + \int_0^b \frac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(t)\, dt \\
&= -\left[\frac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t) \right]_0^b + \int_0^b \frac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(t)\, dt \\
&= \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} b^{k+1} + \int_0^b \frac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(t)\, dt.
\end{aligned}$$

したがって帰納法により

$$f(b) - f(0) - f'(0)b - \cdots - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}b^n = \int_0^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$$

が成り立つ．b を x とかきなおせば定理の等式を得る． □

α を任意の実数として，$-1 < x < 1$ において定義された関数 $f(x) = (1+x)^\alpha$ を考える．

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}
\end{aligned}$$

である．したがって

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

である．以下 $\alpha = -1/2$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(k)}(0)}{k!} &= \frac{-\dfrac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2^k k!} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, \\
\frac{f^{(n)}(x)}{n!} &= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(1+x)^{-\frac{1}{2}-n}.
\end{aligned}$$

ここで

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1,$$
$$(2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2$$

である．$0<r<1$ となる r を固定して，$-r\le x\le r$ において考える．定理 5.12 より

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x)\\
&= 1-\frac{1}{2}x+\frac{3!!}{4!!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+R_{n+1}(x),\\
R_{n+1}(x) &= \int_0^x (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{2(2n)!!}(1+t)^{-\frac{1}{2}-n-1}(x-t)^n\,dt\\
&= (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{2(2n)!!}\int_0^x\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n(1+t)^{-\frac{1}{2}-1}\,dt.
\end{aligned}$$

$x>0$ の場合には $0\le t\le x\le r<1$ だから

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right|\le\frac{|x|}{1}\le r.$$

$x<0$ の場合には $-1<-r\le x\le t\le 0$ だから

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right|\le\frac{|-r-t|}{1-|t|}=\frac{r-|t|}{1-|t|}\le\frac{r(1-|t|)+|t|(r-1)}{1-|t|}\le r.$$

したがって

$$\begin{aligned}
|R_{n+1}(x)| &\le \frac{(2n+1)!!}{2(2n)!!}\left|\int_0^x r^n(1+t)^{-\frac{1}{2}-1}\,dt\right|\\
&= \frac{(2n+1)!!}{2(2n)!!}r^n\left|\left[-2(1+t)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^x\right|\le\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}r^n(1-r)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

ここで $\widetilde{R}_{n+1}=\dfrac{(2n+1)!!}{(2n)!!}r^n(1-r)^{-\frac{1}{2}}$ とおけば

$$\left|\widetilde{R}_{n+1}\right|\le(2n+1)r^n(1-r)^{-\frac{1}{2}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

である．したがって

$$\left|(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k\right|=|R_{n+1}(x)|\le\widetilde{R}_{n+1}\to 0\quad(n\to 0).$$

すなわち $-r<x<r$ において

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k \tag{5.14}$$

が成り立つ．$0<r<1$ は任意だから (5.14) は $-1<x<1$ において成り立つ．(5.14) で $x=-1/2$ とおけば

$$\sqrt{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!2^k}=1+\frac{1}{4}+\frac{3}{32}+\frac{5}{128}+\frac{35}{2048}+\cdots$$

を得る．$x=-1/4,\ 1/8$ を代入すれば $2\sqrt{3}/3,\ 2\sqrt{2}/3$ の級数表示を得る．

$\arcsin(x)$ をべき級数で表すことを考える．

$$(\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

である．$-1<x<1$ のとき $-1<-x^2\le 0$ だから (5.14) で x を $-x^2$ で置き換えれば

$$(\arcsin(x))'=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k} \tag{5.15}$$

を得る．この右辺を項別に積分して得られるべき級数

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!}x^{2k+1}$$

を考えれば，$g(x)$ は $-1<x<1$ において微分できる関数であり，その導関数は

$$g'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}=(\arcsin(x))'$$

である．したがって $\arcsin(x)-g(x)$ は定数であるが，$\arcsin(0)-g(0)=0$ だから $\arcsin(x)-g(x)=0$, $\arcsin(x)=g(x)$ である．よって $\arcsin(x)$ の $-1<x<1$ におけるべき級数表示

$$\arcsin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!}x^{2k+1} \tag{5.16}$$

を得る．

$$\arcsin(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\frac{35}{1152}x^9+\cdots$$

だから，$x = 1/2$ を代入して右辺の第 5 項までの和を計算すれば $\arcsin 1/2 = \pi/6$ の近似値として

$$0.523585$$

を得る．これを 6 倍すれば円周率 π の近似値

$$3.14151$$

を得る．江戸時代中期の和算家松永良弼（まつながよしすけ）は，彼の代表的な著書「方円算経」（1739 年）においてこの $\arcsin(x)$ のべき級数展開を用いて円周率 π を小数点以下第 51 位まで算出した (49 位まで正しい).

6 バーゼル問題

バーゼル問題は級数の問題の一つで，平方数の逆数すべての和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

はいくつかという問題である．1644 年にピエトロ・メンゴリによって提起され，1735 年にレオンハルト・オイラーによって解かれた．バーゼルはオイラーの故郷である．

整数 $n \geq 0$ に対して，積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx$$

を考える．$I_0 = \dfrac{\pi}{2}$,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$n \geq 2$ ならば部分積分により

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[-\cos x (\sin x)^{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\sin x)^{n-2}(\cos x)^2 \, dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \left(1 - (\sin x)^2\right) dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

よって $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ である．したがって

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{(2m)(2m-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}, \tag{6.1}$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1} = \frac{(2m)(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} I_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}. \tag{6.2}$$

$-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-1 < \sin t < 1$ だから (5.13) と (5.16) より

$$t = \arcsin(\sin t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} (\sin t)^{2k+1}$$

が成り立つ．$0 < a < \pi/2$ として上の等式の両辺を 0 から a まで積分すれば

$$\int_0^a t\,dt = \int_0^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} (\sin t)^{2k+1}\,dt \tag{6.3}$$

を得る．(6.3) の左辺は

$$\int_0^a t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^a = \frac{1}{2}a^2$$

である．$0 < a < \pi/2$ より，$0 \le t \le a$ に対して $0 \le \sin t \le \sin a < 1$ である．自然数 N に対して

$$\begin{aligned}
0 < t - \sum_{k=0}^{N} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!}(\sin t)^{2k+1} &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!}(\sin t)^{2k+1} \\
&\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!}(\sin a)^{2k+1} \le \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}(\sin a)^{2k+1} \\
&\le \frac{(\sin a)^{2N+3}}{2N+3} \sum_{k=N+1}^{\infty} (\sin a)^{2(k-N-1)} = \frac{(\sin a)^{2N+3}}{2N+3} \sum_{j=0}^{\infty} (\sin a)^{2j} \\
&= \frac{(\sin a)^{2N+3}}{2N+3} \frac{1}{1-(\sin a)^2}.
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して，N を (a と ε に応じて) 十分大きくとれば

$$\frac{(\sin a)^{2N+3}}{2N+3} \frac{1}{1-(\sin a)^2} < \varepsilon$$

が成り立つようにできる．このとき $0 \le t \le a$ において

$$0 < t - \sum_{k=0}^{N} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!}(\sin t)^{2k+1} < \varepsilon$$

が成り立つから，これを 0 から a まで積分して

$$0 < \frac{1}{2}a^2 - \sum_{k=0}^{N} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} \int_0^a (\sin t)^{2k+1}\,dt < \varepsilon a$$

を得る．これは

$$\frac{1}{2}a^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} \int_0^a (\sin t)^{2k+1}\,dt \tag{6.4}$$

が成り立つことを示している．ここで左辺は $\frac{1}{2}(\pi/2)^2 = \frac{\pi^2}{8}$ 以下だから

$$\frac{\pi^2}{8} \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} \int_0^a (\sin t)^{2k+1}\,dt$$

である．n を自然数とすれば $0 \leq t \leq a$ に対してすべての項は 0 以上の値をとるから

$$\frac{\pi^2}{8} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} \int_0^a (\sin t)^{2k+1}\,dt$$

である．ここで $a \to \frac{\pi}{2}$ とすれば

$$\frac{\pi^2}{8} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2k+1}\,dt$$

を得る．(6.2) より

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2k+1}\,dt = \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{1}{(2k+1)^2}$$

だから

$$\frac{\pi^2}{8} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

を得る．n は任意の自然数だから

$$\frac{\pi^2}{8} \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

が成り立つ．一方，(6.4) の右辺の各積分の上端 a を $\pi/2$ で置き換えれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a^2 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2k+1}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\end{aligned}$$

を得る．これが任意の $a < \pi/2$ について成り立つから，$a \to \pi/2$ とすれば

$$\frac{\pi^2}{8} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

を得る．以上により

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

が証明された．

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

次のような別証明も知られている (大浦拓哉氏による)．$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ だから

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}}\right) = \frac{2}{3}$$

である．また $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対して

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

が成り立つ．この 2 つの等式を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{8}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{8}}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{8}}\right).
\end{aligned}$$

これを繰り返せば

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4^n}\left(\frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2^{n+1}}}\right) \tag{6.5}$$

となることが予想される．これが正しいと仮定すれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2^{n+1}}} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2^{n+2}}} + \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{k\pi}{2^{n+2}}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2^{n+2}}} + \frac{1}{\sin^2\dfrac{(2^{n+1}-k)\pi}{2^{n+2}}}\right)\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} &= \frac{1}{4^n}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2^{n+2}}} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\dfrac{(2^{n+1}-k)\pi}{2^{n+2}}}\right) \\ &= \frac{1}{4^{n+1}}\left(\frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2^{n+2}}}\right).\end{aligned}$$

これは $n+1$ に対する (6.5) が成り立つことを示している．帰納法によりすべての自然数 n に対して (6.5) が成り立つ．(6.5) において $\theta_k = k\pi/2^{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1)$ とおけば，(6.6) より $\sin\theta_k < \theta_k < \tan\theta_k$ である．したがって

$$\frac{1}{\sin^2\theta_k} > \frac{1}{\theta_k^2} > \frac{1}{\tan^2\theta_k} = \frac{1}{\sin^2\theta_k} - 1$$

が成り立つ．よって k についての和をとれば

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\theta_k} &> \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{\theta_k^2} > \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\theta_k} - (2^n-1), \\ \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\theta_k} &> \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{\theta_k^2} > \frac{1}{4^n}\frac{1}{\sin^2\theta_k} - \frac{1}{4^n}(2^n-1), \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 4^n} &> \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2} > \frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 4^n} - \frac{2^n-1}{4^n}.\end{aligned}$$

ここで $n \to \infty$ とすれば $\dfrac{2}{3\cdot 4^n} \to 0$, $\dfrac{2^n-1}{4^n} \to 0$ だから

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{2}{3}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

を得る．

$$\sin x < x < \tan x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \tag{6.6}$$

が成り立つことを証明しておく．$f(x) = x - \sin x$, $g(x) = \tan x - x$ とおく．$0 < x < \pi/2$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \cos x > 0, \\ g'(x) &= 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x > 0 \end{aligned}$$

だから，$f(x)$, $g(x)$ は $0 \leq x < \pi/2$ で単調増加である．よって $f(x) > f(0) = 0$, $g(x) > g(0) = 0$ であり，(6.6) が成り立つ．

バーゼル問題についてオイラーは次のように考えた．まず $\sin x$ のべき級数表示

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

の両辺を x で割って

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots$$

を得る．この関数は $x = \pm n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で零点をもつ (値が 0 になる) から，無限積表示

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

が成り立つと考え，これを証明した．この無限積を展開して x^2 の係数をみれば

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right).$$

よって

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

さらにオイラーは $x^4, x^6, \ldots$ の係数を比較することによって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} &= \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}, \\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} &= \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

を得た．

A　円周率が無理数であることの証明

命題 A.1. 円周率 π は無理数である．

[証明]　(Niven[3] による証明)

π は有理数であると仮定して矛盾を導く．$\pi = a/b$, a, b は互いに素な自然数とかく．n を自然数とする (あとで十分大きいものとする).

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

とおく．$f(x)$ は x の $2n$ 次多項式であり，$n!f(x) = x^n(a-bx)^n$ は整数係数の多項式である．$F(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

とおく．ここで $f^{(j)}(x)$ は $f(x)$ の j 階導関数である．

$n!f(x)$ の各係数は整数であり，また n 次よりも小さい項の係数はすべて 0 だから $f^{(j)}(0)$ はすべて整数である．実際，a_j $(j = n, n+1. \ldots, 2n)$ を整数として

$$n!f(x) = a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{2n}x^{2n}$$

とかける．$f(0) = 0$ は明らかである．$1 \leq j < n$ のとき

$$n!f^{(j)}(x) = n(n-1)\cdots(n-j+1)a_n x^{n-j} + \cdots + 2n(2n-1)\cdots(2n-j+1)a_{2n}x^{2n-j}$$

だから，$f^{(j)}(0) = 0$ である．$j = n$ のときは

$$n!f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n\cdots 2a_{n+1}x + \cdots + 2n(2n-1)\cdots(n+1)a_{2n}x^n$$

だから，$f^{(n)}(0) = a_n$ である．$n+1 \leq j \leq 2n$ のときは

$$n!f^{(j)}(x) = j(j-1)\cdots 1a_j + (j+1)j\cdots 2a_{j+1}x + \cdots + 2n(2n-1)\cdots(2n-j+1)x^{2n-j}$$

より $n!f^{(j)}(0) = j!$，したがって

$$f^{(j)}(0) = \frac{j!}{n!} = \frac{j!}{(j-n)!j!}(j-n)!$$

となり，これは整数である．

また $\pi = a/b$ より $a = b\pi$ だから

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = \frac{x^n(b\pi - bx)^n}{n!} = \frac{b^n}{n!}x^n(\pi - x)^n$$

だから

$$f(\pi - x) = \frac{b^n}{n!}(\pi - x)^n(\pi - (\pi - x))^n = \frac{b^n}{n!}(\pi - x)^n x^n = f(x)$$

である．したがってこの両辺を j 回微分すれば

$$(-1)^j f^{(j)}(\pi - x) = f^{(j)}(x)$$

を得る．よって $f^{(j)}(\pi) = (-1)^j f^{(j)}(0)$ は整数である $(0 \le j \le 2n)$．したがって $\pm f^{(j)}(0)$ の和である $F(0)$, $\pm f^{(j)}(\pi)$ の和である $F(\pi)$ も整数である．$f(x)$ は $2n$ 次式だから $f^{(2n+2)}(x) = 0$ である．よって $F(x)$ の定義より

$$\begin{aligned} F''(x) + F(x) &= f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - f^{(8)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n+2)}(x) \\ &\quad + f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \\ &= f(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x) = f(x) \end{aligned}$$

である．したがって

$$\begin{aligned} (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' &= F''(x)\sin x + F'(x)\cos x - F'(x)\cos x + F(x)\sin x \\ &= F''(x)\sin x + F(x)\sin x = (F''(x) + F(x))\sin x \\ &= f(x)\sin x. \end{aligned}$$

よって

$$\text{(A.1)} \qquad \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi = F(\pi) + F(0)$$

を得る．$F(0)$, $F(\pi)$ は整数だから (A.1) の右辺は整数である．しかし，$0 < x < \pi = a/b$ のとき，$0 < a - bx < a$ だから $(a - bx)^n < a^n$，したがって

$$0 < f(x)\sin x = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

である．これから (A.1) の左辺は

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx < \frac{(\pi a)^n}{n!}\pi$$

となる．n を十分大きくとればこの右辺は 1 より小さくなるので，積分 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx$ は 0 と 1 の間の値になる．これは (A.1) の右辺が整数であることに矛盾する． □

参考文献

[1] 小林昭七，微分積分読本 1 変数，裳華房，2000

[2] 大浦拓哉，バーゼル問題の簡単な解法,
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ ooura/BaselProof_j.pdf

[3] I. Niven, A simple proof that pi is irrational, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 509