基礎線形代数学

平成26年度　前期

中川 仁

目標　線形代数は小学校の比例，中学校の１次関数，連立方程式，高校の平面のベクトルなどの発展であり，大学で学ぶ数学の最も重要な基礎になるものである．
「基礎線形代数学」では，線形代数について，ベクトルと行列に関する基本事項を解説する．ベクトルと行列の計算，行列式の計算，連立１次方程式の計算ができるようになることを目標とする．

目 次

$\emptyset$: 空集合.

$\mathbb{N}$: 自然数全体の集合.

$\mathbb{Z}$: 整数全体の集合.

$\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合.

$\mathbb{R}$: 実数全体の集合.

$\mathbb{C}$: 複素数全体の集合.

Aを集合とするとき，aがAの元であるとき，$a \in A$とかき，aがAの元でないとき，$a \notin A$とかく．

BがAの部分集合であるとき，$B \subset A$とかき，BがAの真部分集合である($B \subset A$かつ$B \neq A$)とき，$B \subsetneq A$とかく．A, Bを集合とするとき，Aの元で，かつBの元でもあるもの全体のなす集合を$A \cap B$で表す:

$$A \cap B = \{a | \, a \in A \text{ かつ } a \in B\}.$$

Aの元かまたはBの元であるもの全体のなす集合を$A \cup B$で表す:

$$A \cup B = \{a | \, a \in A \text{ または } a \in B\}.$$

例 0.1.

$$\{a \in \mathbb{R} | \, a^2 \leq 9\} \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

例 0.2.

$$\{x \in \mathbb{R} | \, x^2 > 1\} = \{x \in \mathbb{R} | \, x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} | \, x < -1\}.$$

例 0.3. $A = \{a \in \mathbb{R} | \, |a| \leq 2\}$, $B = \{b \in \mathbb{R} | \, -1 < b < 2\}$とすれば，$B \subsetneq A$である．

1　平面のベクトル

1.1　ベクトルの概念

平面上において，2点A，Bを結ぶ線分ABに，点Aから点Bにいたる向きをつけたものを**有向線分**といい，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す．Aを有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**始点**，Bを**終点**という．2つの有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ について，それらの長さが等しく，しかも同じ向きを持っているとき，同じ**ベクトル**を定めるという．有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の定めるベクトルを，同じ記号 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す．線分ABの長さをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**長さ**といい，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ で表す．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と長さが同じで向きが反対のベクトルを $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\boldsymbol{a}$ で表す．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

1.2　ベクトルの加法・減法

2つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ について，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる有向線分をとる．このとき，ベクトル $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を2つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の**和**と定義する:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

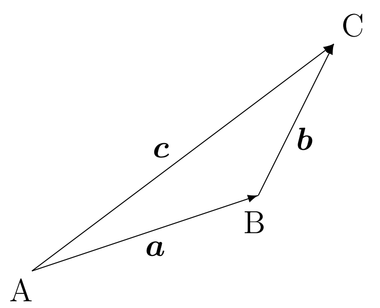
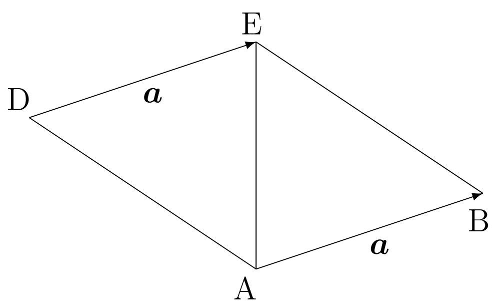


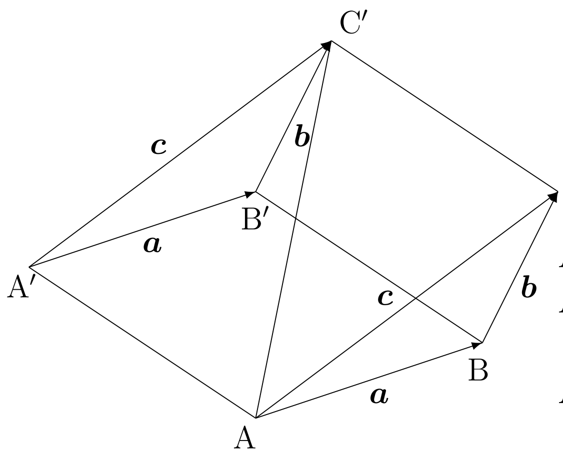
図 1: ベクトルの和



AB ∥ DE $\Longrightarrow$ ∠EAB = ∠AED (錯角)
AB = DE, AE は共通より，2辺挟角
△ABE ≡ △EDA
よって，BE = DA, ∠BEA = ∠DAE
ゆえに，AD ∥ BE, ABED は平行四辺形

図 2: 平行四辺形について

これは始点Aのとりかたによらない．

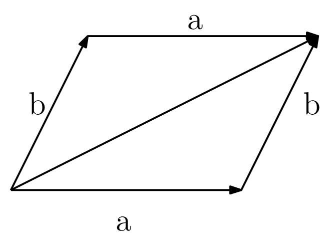


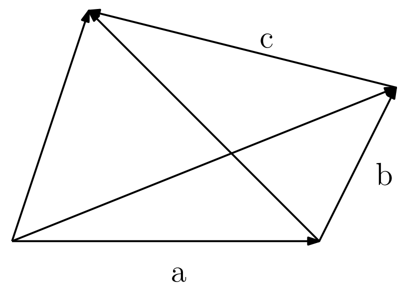
ABB′A′, BCC′B′ は平行四辺形
AA′ ∥ BB′ ∥ CC′, AA′ = BB′ = CC′
よって，ACC′A′ は平行四辺形
A′C′ = AC, A′C′ ∥ AC

図 3: 始点 A のとりかたによらない

ベクトルの加法について次の性質が成り立つ:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}, \\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \end{aligned}$$





$\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ を長さ 0 のベクトルと考え，**零ベクトル**といい，$\mathbf{0}$ で表す.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}+\mathbf{0} &= \boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) &= \mathbf{0}, \\ |\mathbf{0}| &= 0. \end{aligned}$$

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ について，その差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

によって定義する.

1.3　ベクトルの実数倍

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と実数 m に対して，$\boldsymbol{a}$ の m 倍 $m\boldsymbol{a}$ を，次のように定義する.

(1) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき:

(i) $m > 0$ ならば，$m\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで，長さが $m|\boldsymbol{a}|$ に等しいベクトル.

(ii) $m < 0$ ならば，$m\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と反対向きで，長さが $|m||\boldsymbol{a}|$ に等しいベクトル．すなわち，$m\boldsymbol{a} = -|m|\boldsymbol{a}$.

(iii) $m = 0$ ならば，$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

(2) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき: $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

ベクトルの実数倍について次の性質が成り立つ:

$$\begin{aligned} (mn)\boldsymbol{a} &= m(n\boldsymbol{a}), \\ (m+n)\boldsymbol{a} &= m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{a}, \\ m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

長さが 1 であるベクトルを**単位ベクトル**という．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき，

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルである.

1.4 座標系とベクトル

平面上に O を原点とする直交座標系をとる．そのとき，x 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$，y 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_2$ とする．x 軸，y 軸上にそれぞれ点 $\mathrm{E}_1(1,0)$，$\mathrm{E}_2(0,1)$ をとれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad |\boldsymbol{e}_1| = 1, \quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}_2 = \boldsymbol{e}_2, \quad |\boldsymbol{e}_2| = 1.$$

$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ x 軸方向の**基本ベクトル**，y 軸方向の**基本ベクトル**という．いま，与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

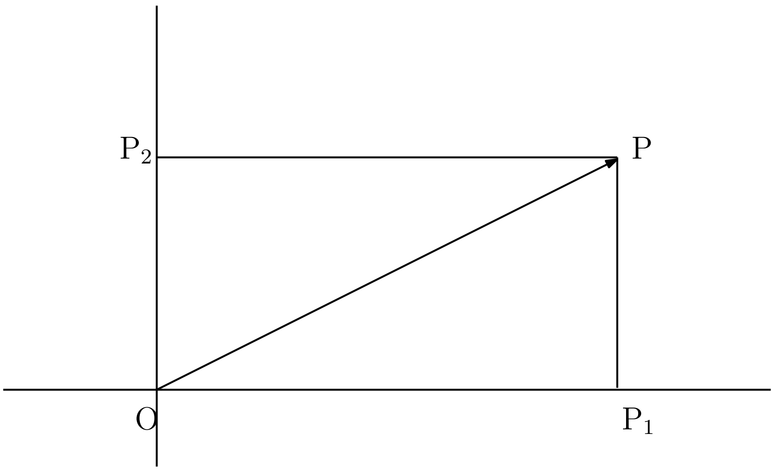
となる点 P が一意的にとれる．P から x 軸，y 軸におろした垂線をそれぞれ，PP_1，PP_2 とすれば，

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}_1 + \overrightarrow{\mathrm{OP}}_2$$

P の座標を (a_1, a_2) とすると，P_1，P_2 の座標は $(a_1, 0)$，$(0, a_2)$ である．ベクトルの実数倍の定義によって，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}}_1 &= a_1\overrightarrow{\mathrm{OE}}_1 = a_1\boldsymbol{e}_1, \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}_2 &= a_2\overrightarrow{\mathrm{OE}}_2 = a_2\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

と表せる.



よって，ベクトル $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$$

と表せる．a_1，a_2 をそれぞれ $\boldsymbol{a}$ の x **成分**，y **成分**という．また，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さは,

$$|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

ベクトル $\boldsymbol{a}$ を簡単に $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ とかく．すなわち,

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

この書き方をベクトル $\boldsymbol{a}$ の**成分表示**という．特に，基本ベクトル，零ベクトルを成分表示すれば,

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

また，2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

について,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2.$$

成分表示を用いてベクトルの演算を表せば次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}, \\
m \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ma_1 \\ ma_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2　数ベクトル

2.1　n 次元数ベクトル

n 個の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を順序づけて並べた組を n **次元数ベクトル**といい，実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をその**成分**という．特に，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を縦に並べた組

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を n **次元列ベクトル**といい，横に並べた組

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

を n **次元行ベクトル**という．列ベクトルと行ベクトルに本質的な違いはないが，行列の積との関係で以下，主に列ベクトルを考える．

n 次元列ベクトルの全体の集合を n **次元数ベクトル空間**といい，$\mathbb{R}^n$ で表す．数ベクトルを考察している場合，実数のことを**スカラー**という．

定義 2.1. 2 つの n 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対してその**和**とよぶ n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$，その**差**とよぶ n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ x_1-y_2 \\ \vdots \\ x_n-y_n \end{pmatrix}.$$

また，実数 k と n 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

に対して**スカラー倍**とよぶ n 次元列ベクトル $k\boldsymbol{x}$ を次のように定義する．

$$k\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}.$$

特に，$\boldsymbol{x}$ の -1 倍を $-\boldsymbol{x}$ で表す．また，すべての成分が 0 である n 次元列ベクトルを $\mathbf{0}$ で表し，n **次元零ベクトル**という．

ベクトルの演算法則 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ とスカラー h, k に対して，次が成立する．

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x};$$

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z});$$

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x};$$

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbf{0};$$

$$k(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = k\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{y};$$

$$(h + k)\boldsymbol{x} = h\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{x};$$

$$(hk)\boldsymbol{x} = h(k\boldsymbol{x});$$

$$1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

2.2　1 次結合

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in \mathbb{R}^n$ とスカラー $k_1, k_2, \ldots, k_r$ に対して，

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r$$

を数ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の **1 次結合**という．$\mathbb{R}^n$ において，次の n 個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \ \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を**基本ベクトル**という．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

すなわち，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ はその成分 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を係数として，1 次結合

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

としてかける．

練習問題 2.1. 次の計算をせよ．

$$(1)\quad 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

練習問題 2.2. ベクトル $\boldsymbol{x}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合として表せ．

$$(1)\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3　行列

3.1　行列の加法，スカラー倍

nm 個の実数 a_{ij}, $(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ を次のように並べたもの

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

を n 行 m 列の**行列**とよぶ．n 行 m 列の行列を簡単に $n \times m$ 行列または (n, m) 型行列とよぶこともある．n 行 n 列の行列を n 次行列とよぶ．

A, B を n 行 m 列の行列とする:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & a_{ij} & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \ldots & b_{ij} & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

このとき，$A + B$ を次のように定義する:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \ldots & a_{1m} + b_{1m} \\ \ldots & a_{ij} + b_{ij} & \ldots \\ a_{n1} + b_{n1} & \ldots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}.$$

k を実数とするとき，kA を次のように定義する:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & \ldots & ka_{1m} \\ \ldots & ka_{ij} & \ldots \\ ka_{n1} & \ldots & ka_{nm} \end{pmatrix}.$$

とくに，$(-1)A$ を $-A$ とかく．すべての成分が 0 であるような行列 O を**零行列**という:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

2 つの行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ は同じ型，すなわちどちらも n 行 m 列の行列であって，対応するすべての (i, j) 成分が等しいとき，A と B は等しいといい，$A = B$ とかく．次の演算法則が成立する: A, B, C を任意の n 行 m 列の行列，h, k を任意

の実数とするとき，

$$
\begin{aligned}
A+B &= B+A,\\
(A+B)+C &= A+(B+C),\\
A+O &= O+A=A,\\
A+(-A) &= (-A)+A=O,\\
h(A+B) &= hA+hB,\\
(h+k)A &= hA+kA,\\
(hk)A &= h(kA),\\
1A &= A.
\end{aligned}
$$

例 3.1. $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ とおくと，任意の $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ は

$$A=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}$$

と一意的にかける．

3.2 行列の乗法

n 行 m 列の行列

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1m}\\ \dots&a_{ik}&\dots\\ a_{n1}&\dots&a_{nm}\end{pmatrix}$$

と m 行 l 列の行列

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&\dots&b_{1l}\\ \dots&b_{kj}&\dots\\ b_{m1}&\dots&b_{ml}\end{pmatrix}.$$

に対して，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

を (i,j) 成分とする n 行 l 列の行列を AB と定義する:

$$AB=\begin{pmatrix}c_{11}&\dots&c_{1l}\\ \dots&c_{ij}&\dots\\ c_{n1}&\dots&c_{nl}\end{pmatrix}.$$

$C=AB$ の i 行 j 列の成分は，A の i 行 k 列の成分 $\times B$ の k 行 j 列の成分の積を $k=1$ から $k=m$ まで加えたものである．

レポート問題 1. 次の行列を計算せよ．

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2)
$$3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

A, B が n 次行列ならば AB, BA ともに定義されるが，$n \geq 2$ のとき，$AB = BA$ は一般には成立しない．

例 3.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \ BA = O.$$

命題 3.1. $A = (a_{ij})$，$B = (b_{st})$，$C = (c_{pq})$ をそれぞれ n 行 m 列，m 行 l 列，l 行 k 列の行列とする．このとき，

$$(AB)C = A(BC)$$

が成立する．

[証明]　AB の (i, t) 成分は

$$\sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{st}$$

だから,

$$
\begin{aligned}
(AB)C \text{ の } (i,q) \text{ 成分} &= \sum_{p=1}^{l}\left(\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sp}\right)c_{pq} \\
&= \sum_{p=1}^{l}\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sp}c_{pq} \\
&= \sum_{s=1}^{m}\sum_{p=1}^{l} a_{is}b_{sp}c_{pq} \\
&= \sum_{s=1}^{m} a_{is} \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{l} b_{sp}c_{pq}\right)}_{BC \text{ の } (s,q) \text{ 成分}} \\
&= A(BC) \text{ の } (i,q) \text{ 成分}
\end{aligned}
$$

これがすべての i, q について成立するので，$(AB)C = A(BC)$ が証明された． □

$A = (a_{ij})$ を n 行 m 列, $B = (b_{st}), C = (c_{st})$ を m 行 l 列，k を実数とする．このとき,

$$A(B+C) = AB + AC, \ \ k(AB) = (kA)B = A(kB).$$

が成立する．

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

によって，**クロネッカーのデルタ**と呼ばれる記号 δ_{ij} を導入する．このとき,

$$I_n = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

を n 次**単位行列**と呼ぶ．任意の n 次行列 A に対して,

$$AI_n = I_nA = A$$

が成立する．

例 3.3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とするとき，$AX = XA$ となるための必要十分条件を求めてみる．

$$AX = \begin{pmatrix} 3x+z & 3y+w \\ 5x+2z & 5y+2w \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} 3x+5y & x+2y \\ 3z+5w & z+2w \end{pmatrix}$$

より，

$$AX = XA \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + z &= 3x + 5y, \\ 3y + w &= x + 2y, \\ 5x + 2z &= 3z + 5w, \\ 5y + 2w &= z + 2w. \end{cases}$$

これを解けば，$z = 5y$, $w = x - y$ である．よって，

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ 5y & x - y \end{pmatrix} = (x - 3y)I + yA.$$

3.3 正則行列

a が 0 でない実数ならば，$b = 1/a$ は $ab = ba = 1$ をみたす．A が n 次行列のときは，$AB = BA = I_n$ となる n 次行列 B はどのようなときに存在するか調べよう．

例 3.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，$A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$AA' = O.$$

もし，$AB = BA = I_2$ となる 2 次行列 B が存在したとすると，上の両辺に左から B をかけて，

$$B(AA') = BO = O,$$

$$B(AA') = (BA)A' = I_2A' = A',$$

$A' = O$ となり，矛盾．したがって，このような B は存在しない．

定義 3.1. n 次行列 A に対して，

$$AB = BA = I_n \tag{3.1}$$

となる n 次行列 B が存在するとき，A は**正則**であるという．

$$AB = BA = I_n,\ \ AC = CA = I_n$$

とすると，

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B,$$

すなわち，等式 (3.1) を満たす行列 B はもし存在すれば唯一つである．この B を A の**逆行列**といい，$B = A^{-1}$ とかく．

命題 3.2. A, B を n 次正則行列とすると，AB も正則で,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成立する.

[証明]

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$
$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

定義から，$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. □

命題 3.3. A を n 次正則行列とすると，A^{-1} も正則で,

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

が成立する.

例 3.5.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ が正則} \iff ad - bc \neq 0.$$

[証明]　$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ が $AB = I_2$ を満たすとすると,

$$\begin{cases} ap + br = 1 & (1) \\ cp + dr = 0 & (2) \\ aq + bs = 0 & (3) \\ cq + ds = 1 & (4) \end{cases}$$

これから,

$$(ad - bc)p = d,\ (ad - bc)r = -c,$$
$$(ad - bc)q = -b,\ (ad - bc)s = a.$$

したがって，$ad - bc = 0$ ならば，$a = b = c = d = 0$ となり，連立方程式 (1)–(4) を満たす p, q, r, s は存在しない．すなわち，A は逆行列を持たない．もし，$ad - bc \neq 0$ ならば,

$$B = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおけば，$AB = I_2$ となる．さらに，$BA = I_2$ も確かめられる．よって，A は正則である. □

3.4　上三角行列の逆行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の形の行列を**上三角行列**という．

補題 3.4. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ を n 次の上三角行列，$a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$ とすると，上三角行列 $B = (b_{ij})$, $b_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$ で $AB = I_n$ をみたすものが存在する．

[証明]　n に関する帰納法による．$n = 1$ のときは明か．$n - 1$ のとき OK とする．

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

とおくと帰納法の仮定から，$n-1$ 次の上三角行列 $B' = (b_{ij})$ で，$A'B' = I_{n-1}$ をみたすものが存在する．

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n-1} & x_1 \\ & b_{22} & \dots & b_{2n-1} & x_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & b_{n-1n-1} & x_{n-1} \\ 0 & & & b_{nn} & x_n \end{pmatrix}$$

とおいて，$AB = I_n$ となるように $x_1, \dots, x_n$ を決めよう．

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ & & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & 1 \end{cases}$$

$a_{nn} \neq 0$ より，$x_n = a_{nn}^{-1}$．これを

$$a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = 0$$

に代入すれば，$a_{n-1n-1} \neq 0$ より，

$$x_{n-1} = -a_{n-1n}a_{nn}^{-1}a_{n-1n-1}^{-1}.$$

これを繰り返せば，求める $x_1, \dots, x_n$ が得られる． □

補題 3.5. n 次の上三角行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対して，n 次行列 $B = (b_{ij})$ で $AB = I_n$ をみたすものが存在すれば，$a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$.

[証明] n に関する帰納法で証明する．$n = 1$ のときは明か．$n - 1$ まで OK とする．

$$\begin{aligned} AB \text{の} (n,j) - \text{成分} &= \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kj} \\ &= a_{nn}b_{nj} = \delta_{nj} \end{aligned}$$

より，

$$a_{nn} \neq 0,\ b_{nj} = 0 \,(1 \leq j \leq n-1).$$

$1 \leq i, j \leq n-1$ に対して，

$$\begin{aligned} AB \text{の} (i,j) - \text{成分} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}b_{kj} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n-1n-1} \end{pmatrix},\ B' = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n-11} & \dots & b_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

とおけば，$A'B' = I_{n-1}$ であるから帰納法の仮定から，$a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n-1$. □

命題 3.6. 上三角行列 $A = (a_{ij})$ が正則であるための必要十分条件は，$a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$ である．

[証明] **十分性** 補題 3.4 より，上三角行列 B で $AB = I_n$ をみたすものが存在する．同様に，上三角行列 C で $BC = I_n$ をみたすものが存在する．このとき，

$$A = AI_n = A(BC) = (AB)C = I_nC = C.$$

したがって，$AB = BA = I_n$ となり，A は正則であり，$B = A^{-1}$ である．
必要性 補題 3.5. □

例 3.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める.

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと，$(A')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ だから，

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & \frac{1}{2} & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

とおいて，$AB = I_3$ とすると，

$$\begin{cases} x + 4y = 0, \\ 2y - z = 0, \\ 3z = 1 \end{cases}$$

これを解くと，

$$z = \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{6},\ x = -\frac{2}{3}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

レポート問題 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = I_3$$

とすると，

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ y + 4z = 0, \\ z = 1 \end{cases}$$

これを解くと，

$$z = 1,\ y = -4,\ x = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & p \\ & 1 & -4 & q \\ & & 1 & r \\ & & & s \end{pmatrix} = I_4$$

とすると，

$$\begin{cases} p + q + 2r + 3s = 0, \\ q + 4r + 5s = 0, \\ r + 6s = 0, \\ s = 1 \end{cases}$$

これを解くと

$$s = 1,\ r = -6,\ q = 19,\ p = -10.$$

したがって，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -10 \\ & 1 & -4 & 19 \\ & & 1 & -6 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5 転置行列

行列 A に対して，その行と列を入れ換えてできる行列を A の**転置行列**といい，${}^tA$ で表す．${}^tA$ の (i,j) 成分を a'_{ij} とすると，

$$a'_{ij} = a_{ji}$$

である．n 行 m 列の行列 $A = (a_{ij})$，m 行 l 列の行列 $B = (b_{st})$ に対して，$a'_{ij} = a_{ji}$, $b'_{st} = b_{ts}$ とおけば，${}^tA = (a'_{ij})$, ${}^tB = (b'_{st})$ である．したがって，

$$\begin{aligned} {}^t(AB) \text{ の } (i,j) - \text{成分} &= AB \text{ の } (j,i) - \text{成分} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{m} b'_{ik} a'_{kj} \\ &= {}^tB\,{}^tA \text{ の } (i,j) - \text{成分}. \end{aligned}$$

すなわち，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成立する．
今，A を n 次正則行列とする．${}^tI_n = I_n$ に注意すれば，

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

の転置行列をとって，

$$ {}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = I_n. $$

ここで，${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1})\,{}^tA$, ${}^t(A^{-1}A) = {}^tA\,{}^t(A^{-1})$ だから，

$$ {}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^tA\,{}^t(A^{-1}) = I_n. $$

すなわち，${}^tA$ は正則であり，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ が成立する．まとめると，

命題 3.7. n 行 m 列の行列 $A = (a_{ij})$，m 行 l 列の行列 $B = (b_{st})$ に対して，

$$ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA. $$

A を n 次正則行列とすると，${}^tA$ も正則であり，

$$ ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}). $$

4　連立１次方程式

4.1　解の存在

次の３つの連立１次方程式を考える．

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+3y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$$

第１の方程式は，唯一つの解 $x=3, y=-1$ を持ち，第２の方程式は，無限個の解 $x=1-2y, y$ は任意 を持ち，第３の方程式は，解を持たない．

一般の連立１次方程式

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=b_n \end{cases}$$

は行列を用いて次のように書き表すことができる．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

あるいは

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}+\cdots+x_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

したがって，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

とかける．$\boldsymbol{a}_j$, $(1\le j\le m)$ を A の列ベクトルとすると，

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}$$

ともかける．連立1次方程式 $(*)$ を解くことは，ベクトル $\boldsymbol{b}$ がベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の1次結合として表せるかどうか，表せるときは，1次結合の係数 $x_1, \ldots, x_m$ を求めることである．

4.2　行列の基本変形

連立1次方程式 $(*)$ を解くには，消去法による．消去法とは $(*)$ に対して次のような変形を繰り返し，簡単な連立1次方程式に帰着する方法である．

(I)　1つの方程式に0でない数をかける．

(II)　1つの方程式にある数をかけて他の方程式に加える．

(III)　2つの方程式を並べ換える．

連立1次方程式 $(*)$ に対して変形 (I)，(II)，(III) を行うことは，その**拡大係数行列**

$$(A, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

に対して次の3つの変形を行うことに相当する．

(I) 第 i 行を $c \neq 0$ 倍する．

(II) 第 i 行を $c \neq 0$ 倍して，第 j 行に加える．

(III) 第 i 行と第 j 行を入れ換える．

定義 4.1. 行番号が増えるにつれて，左側に連続して並ぶ0の個数が増えるような行列を**階段行列**という．

例 4.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

レポート問題 3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 9 & 4 \\ 1 & 8 & 27 & -8 \end{pmatrix}$ を基本変形によって階段行列に変形せよ．

命題 4.1. 任意の行列は基本変形により階段行列にできる．

[証明]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

を与えられた行列とする．次の 2 つの場合がある:

(i) 第 1 列の成分 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}$ の中に 0 でないものがある．

(ii) 第 1 列の成分 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}$ はすべて 0 である．

(i) の場合: $a_{11} \neq 0$ ならば，$A' = (a'_{ij}) = A$ とする．$a_{11} = 0$ ならば，$a_{i1} \neq 0$ となる $2 \leq i \leq n$ がある．このとき，A の第 1 行と第 i 行を入れ換えて得られる行列を $A' = (a'_{ij})$ とする．さらに，各 $2 \leq i \leq n$ に対して，

$$\text{第 1 行の} \left(-\frac{a'_{i1}}{a'_{11}}\right) \text{倍を第 } i \text{ 行に加える．}$$

こうして得られる行列は

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1m} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

(ii) の場合: 上に得られた行列で，$a'_{11} = 0$ の場合にあたる．
次に第 2 列に注目して，行列 A'' に同様な変形を繰り返せばよい． □

命題 4.2. 基本変形は正則行列を左からかけることによって得られる．したがって，任意の行列 A に対して，PA が階段行列になるような正則行列 P が存在する．

[証明]　行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

に (I)，(II)，(III) の基本変形を施すことはそれぞれ次のような行列を左から A にかけることにあたる．これらを**基本行列**という．

(I)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

(II) $(i < j)$　　$(i > j)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(III)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

これらの行列はすべて正則行列である．正則行列の積は正則行列だから結局，基本変形はある正則行列を左からかけることによって得られる． □

命題 4.3. 行列 A が基本変形を繰り返して B に移ったとすると，B に適当な基本変形を繰り返して A に移ることができる．

[証明]　前命題の証明に用いた，基本変形に対応する行列の逆行列は

(I)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & c^{-1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

(II) $(i < j)$ $\qquad$ $(i > j)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & -c & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & -c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(III)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

だから，これらも基本行列である． □

例 4.1 において，

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -3 & & 1 & \\ -4 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -2 & 1 & \\ & -3 & & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$(P_3 P_2 P_1)A = A', \quad A' \text{は階段行列}$$

である．

$$P = P_3P_2P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & -1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ 2 & -3 & & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3 連立 1 次方程式の解法

連立 1 次方程式

$$(*)\ \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に変形 (I)，(II)，(III) を繰り返し行って得られる連立 1 次方程式を

$$(**)\ \ C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$$

とする．このとき，

(i) 拡大係数行列 $(C, \boldsymbol{d})$ が階段行列となるようにできる．

(ii) $(C, \boldsymbol{d}) = P(A, \boldsymbol{b}) = (PA, P\boldsymbol{b})$ をみたす正則行列 P が存在する．

したがって，方程式 $(*)$ と $(**)$ とは同値である．すなわち，この 2 つの方程式の解の集合は一致する．

そこで，$(C, \boldsymbol{d})$ が次のような階段行列の場合に方程式 $(**)$ を解けばよい．

$$(C, \boldsymbol{d}) = \begin{pmatrix} c_{1j_1} & & * & & d_1 \\ & c_{2j_2} & & & d_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & c_{rj_r} & d_r \\ & & & & d_{r+1} \\ & & & & \end{pmatrix}, \ \ c_{1j_1} \cdots c_{rj_r} \neq 0.$$

したがって，方程式 $(**)$ が解を持つならば，$d_{r+1} = 0$ である．逆に，$d_{r+1} = 0$ とする．そのとき，未知数 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_r}$ を $y_1, \cdots, y_r$ とかき，残りの未知数を $y_{r+1}, \cdots, y_m$ とかく．このとき，方程式 $(**)$ は次のようになる．

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} c'_{11}y_1 + & c'_{12}y_2 + & \cdots + & c'_{1r}y_r + & c'_{1r+1}y_{r+1} + & \cdots + & c'_{1m}y_m & = & d_1 \\ & c'_{22}y_2 + & \cdots + & c'_{2r}y_r + & c'_{2r+1}y_{r+1} + & \cdots + & c'_{2m}y_m & = & d_2 \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ & & & c'_{rr}y_r + & c'_{rr+1}y_{r+1} + & \cdots + & c'_{rm}y_m & = & d_r \end{array} \right.$$

ここで，

$$c'_{11}c'_{22} \cdots c'_{rr} \neq 0.$$

$$\begin{cases} c'_{11}y_1 + & c'_{12}y_2 + & \cdots + & c'_{1r}y_r & = d_1 - & c'_{1r+1}y_{r+1} - & \cdots - & c'_{1m}y_m \\ & c'_{22}y_2 + & \cdots + & c'_{2r}y_r & = d_2 - & c'_{2r+1}y_{r+1} - & \cdots - & c'_{2m}y_m \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & & \\ & & & c'_{rr}y_r & = d_r - & c'_{rr+1}y_{r+1} - & \cdots - & c'_{rm}y_m \end{cases}$$

これは，$y_r, y_{r-1}, \ldots, y_2, y_1$ の順に解くことができ，

$$\begin{cases} y_1 & = & l_1 & + & u_{11}y_{r+1} & + & u_{12}y_{r+2} & + & \cdots & + & u_{1s}y_{1m} \\ y_2 & = & l_2 & + & u_{21}y_{r+1} & + & u_{22}y_{r+2} & + & \cdots & + & u_{2s}y_{1m} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ y_r & = & l_r & + & u_{r1}y_{r+1} & + & u_{r2}y_{r+2} & + & \cdots & + & u_{rs}y_{1m} \end{cases}$$

ここで，$s = m - r$ とおいた．$y_{r+1}, \cdots, y_m$ を任意定数 $k_1, \cdots, k_s$ でおきかえて，

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{u}_s = \begin{pmatrix} u_{1s} \\ u_{2s} \\ \vdots \\ u_{rs} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

とおくと，解 $\boldsymbol{y}$ は

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{u}_s$$

と表せる．

例 4.2. 次の連立１次方程式が解を持つように h, k の値を定めて，これを解け．

$$\begin{aligned} x + y + 2z - w &= 2 \\ 2x - 3y - z + w &= 1 \\ 4x - 11y - 7z + 5w &= h \\ x - 9y - 8z + 5w &= k \end{aligned}$$

拡大係数行列
$$A' = (A, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -11 & -7 & 5 & h \\ 1 & -9 & -8 & 5 & k \end{pmatrix}$$
に基本変形を繰り返して階段行列にする．
$$A' \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -15 & -15 & 9 & h-8 \\ 0 & -10 & -10 & 6 & k-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k+4 \end{pmatrix}$$
したがって，連立 1 次方程式が解を持つのは，$h = -1, k = -4$ のときである．この場合，上の連立 1 次方程式は
$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & - & w & = & 2 \\ & - & 5y & - & 5z & + & 3w & = & -3. \end{array} \right.$$
これから，
$$\begin{aligned} x + y &= 2 - 2z - w \\ -5y &= -3 + 5z - 3w \end{aligned}$$
これを x, y について解けば，
$$y = \frac{3}{5} - z + \frac{3}{5}w, \ \ x = \frac{7}{5} - z + \frac{2}{5}w.$$
$z = a, w = b$ とおくと，
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \text{ は任意}$$
となる．

練習問題 4.1. 次の連立 1 次方程式を解け．
$$\begin{aligned} x + y + 2z - w &= 10, \\ 2x - 3y - z + w &= 1, \\ 4x - 11y - 7z + 5w &= -17 \\ x - 9y - 8z + 5w &= -28. \end{aligned}$$

4.4　逆行列の計算

A を n 次正則行列とする．任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，連立方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

はただ一つの解 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ をを持つ．

基本変形を用いて，A^{-1} を求めよう．基本変形によって，A を階段行列 A' に変形する．そのとき，$A' = QA$, Q は正則行列である．A は正則行列であるから，$A' = QA$ も正則行列である．また，階段行列 A' は上三角行列である．上三角行列が正則であるための条件は対角成分がすべて 0 でないことであったから，結局，A' は次のような形をしている．

$$\begin{pmatrix} c_{11} & & & * \\ & c_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad c_{ii} \neq 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

この行列の第 i 行に c_{ii}^{-1} をかければ，

$$\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

となる．次に，第 n 行を何倍かして第 1 行，…，第 $n-1$ 行に加えれば，

$$\begin{pmatrix} 1 & & & * & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

となる．さらに，第 $n-1$ 行を何倍かして第 1 行，…，第 $n-2$ 行に加える．これを繰り返せば，単位行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

に到達する．したがって，正則行列 P が存在して，

$$PA = I,\ P = A^{-1}$$

である．したがって，

$$P(A,I) = (I,P).$$

すなわち，行列 (A,I) に基本変形を繰り返して，A が I に移ったとすると，この変形で I は $P = A^{-1}$ に移る．

例 4.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -15 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求める．

$$\begin{aligned}
(A,I) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -15 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -24 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -20 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -33 & 24 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 46 & -33 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -33 & 24 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

したがって，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 46 & -33 & 7 \\ -33 & 24 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

レポート問題 4. 次の行列 A の逆行列を基本変形によって求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 7 & 16 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[証明]

$$\begin{aligned}
(A, I_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 7 & 16 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -10 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 & 1 & -4 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 18 & -2 & 7 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 & 1 & -4 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

練習問題 4.2. 次の連立１次方程式を解け．

$$\begin{aligned}
3x + 6y + 5z + 7w &= 18 \\
3x + 6y + 4z + 8w &= 15 \\
x + 2y + z + 3w &= 4 \\
2x + 4y + 5z + 3w &= 17
\end{aligned}$$

拡大係数行列

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 & 18 \\ 3 & 6 & 4 & 8 & 15 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 17 \end{pmatrix}$$

に基本変形を繰り返して階段行列にする．

$$A' \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 8 & 15 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 18 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって，連立１次方程式は

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3w = 4 \\ \phantom{x + 2y + {}} z - w = 3. \end{cases}$$

これから，

$$\begin{aligned} x + z &= 4 - 2y - 3w, \\ z &= 3 + w. \end{aligned}$$

これを x, z について解けば，

$$z = 3 + w, \quad x = 4 - 2y - 3w - 3 - w = 1 - 2y - 4w.$$

$y = s, w = t$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2s - 4t \\ s \\ 3 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \text{ は任意}$$

となる．

5　行列式

5.1　置換

　n を自然数 n とし，n 個の文字 $1, 2, \cdots, n$ からなる集合を

$$M_n = \{1, 2, \cdots, n\}$$

とする．写像

$$\sigma : M_n \longrightarrow M_n$$

が全単射であるとき，σ を M_n の**置換**といい，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と表す．$\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ は互いに相異なり $1, 2, \cdots, n$ を並べ替えたものである．したがって，M_n の置換全体の集合を S_n とすると，S_n は $n!$ 個の元からなる．$\sigma(k) = k$ となる部分は省略してかくことにする．例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

とかく．$\sigma, \tau \in S_n$ のとき，合成写像 $\sigma\tau : M_n \longrightarrow M_n$ も全単射だから，$\sigma\tau \in S_n$ である．$\sigma\tau$ を σ と τ の積という．任意の $\rho, \sigma, \tau \in S_n$ に対して，結合法則

$$(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$$

が成立する．

例 5.1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

これからわかるように，$\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ は一般には異なる．

　恒等写像 $\epsilon : M_n \longrightarrow M_n$ を**単位置換**という．任意の $\sigma \in S_n$ に対して，

$$\epsilon\sigma = \sigma\epsilon = \sigma$$

が成立する．

$\sigma \in S_n$ に対して，写像 σ の逆写像 $\sigma^{-1} : M_n \longrightarrow M_n$ も全単射だから，$\sigma^{-1} \in S_n$ である．σ^{-1} を σ の**逆置換**という．

$$\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \epsilon$$

が成立する．

$i, j \in M_n, i \neq j$ に対して，$\sigma(i) = j, \sigma(j) = i, \sigma(k) = k\ (k \neq i, j)$ によって定まる $\sigma \in S_n$ を $(i\,j)$ とかく．これを**互換**という．

$$\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix} = (i\,j).$$

互換と同様に，$a_1, a_2, \ldots, a_r$ を M_n の相異なる元とするとき，

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_r & a_1 \end{pmatrix} = (a_1\,a_2\,\ldots\,a_{r-1}\,a_r)$$

とかく．このような置換を r-**サイクル**と呼ぶ．任意の置換は互いに共通の数字を含まないようなサイクルの積に表すことができる．例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,3\,5)(2\,4).$$

さらに，r-サイクルは次のように互換の積に表せる．

$$(a_1\,a_2\,\ldots\,a_{r-1}\,a_r) = (a_1\,a_2)(a_2\,a_3)\cdots(a_{r-2}\,a_{r-1})(a_{r-1}\,a_r).$$

例えば，$(1\,3\,5) = (1\,3)(3\,5)$ である．以上によって，次の命題を得る．

命題 5.1. 任意の置換は互換の積として表すことができる．

命題 5.2. S_n の任意の元は，互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-1\,n)$ の積として表せる．

[証明]　n に関する帰納法で証明する．$n = 2$ のときは明らかである．$n > 2$ として，S_{n-1} の任意の元は，互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-2\,n-1)$ の積として表せるとする．命題 5.1 より，任意の元は互換の積であるから，任意の互換 $(a\,b) \in S_n$ が互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-1\,n)$ の積として表せることを示せばよい．$1 \leq a < b \leq n-1$ ならば，$(a\,b) \in S_{n-1}$ であるから，帰納法の仮定によって，$(a\,b)$ は互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-1\,n)$ の積として表せる．$b = n$ のとき，互換 $(a\,n)$ は $(a\,n) = (a\,n-1)(n-1\,n)(a\,n-1)$ とかけ，$(a\,n-1)$ は $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-2\,n-1)$ の積としてかけるから，互換 $(a\,n)$ は互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-1\,n)$ の積として表せる．よって，$(a\,n)$ も互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-1\,n)$ の積として表せる．　□

例 5.2.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

を互換の積で表す.

$$\sigma_1 = (1\,2\,5)(3\,4) = (1\,2)(2\,5)(3\,4).$$

変数 $x_1, \cdots, x_n$ の多項式 P と置換 $\sigma \in S_n$ に対して，変数 $x_1, \cdots, x_n$ を，それぞれ $x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}$ で置き換えて得られる多項式を σP で表す．$\sigma, \tau \in S_n$ とすると，

$$\sigma(\tau x_i) = \sigma x_{\tau(i)} = x_{\sigma(\tau(i))} = (\sigma\tau)x_i$$

であるから，一般の多項式 P についても，

$$\sigma(\tau P) = (\sigma\tau)P$$

が成り立つ．今，Δ_n を次のような多項式とする.

$$\begin{array}{rcllll} \Delta_n & = & \prod_{i<j}(x_i - x_j) & & & \\ & = & (x_1 - x_2) & (x_1 - x_3) & \cdots & (x_1 - x_n) \\ & & & \times(x_2 - x_3) & & (x_2 - x_n) \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \times(x_{n-1} - x_n). \end{array}$$

$\Delta_2 = x_1 - x_2$, $\Delta_3 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ である.

$$\begin{array}{rcl} (1\,2)\Delta_3 & = & (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) = -\Delta_3, \\ (2\,3)\Delta_3 & = & (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) = -\Delta_3, \end{array}$$

であり，$(1\,3) = (1\,2)(2\,3)(1\,2)$ であるから，$(1\,3)\Delta_3 = (1\,2)(2\,3)(1\,2)\Delta_3 = (-1)^3\Delta_3 = -\Delta_3$ がわかる．一般に，Δ_n は，互換 $(i\,j)$ に対して，

$$(i\,j)\Delta_n = -\Delta_n$$

を満たすことが n に関する帰納法によって証明される.

命題 5.3. 1つの置換を互換の積で表すとき，偶数個の互換の積であるか奇数個の互換の積であるかは，与えられた置換によって定まる.

[証明]　σ を与えられた置換とする.

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s = \tau_1\tau_2\cdots\tau_t$$

σ_i, τ_j は互換，と書けたとする．このとき，

$$\begin{array}{rcl} \sigma\Delta & = & (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{s-1})(\sigma_s\Delta) \\ & = & -(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{s-1})\Delta \\ & = & \cdots\cdots = (-1)^s\Delta. \end{array}$$

同様に,

$$\begin{aligned}\tau\Delta &= (\tau_1\tau_2\cdots\tau_{t-1})(\tau_t\Delta) \\ &= -(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{t-1})\Delta \\ &= \cdots\cdots = (-1)^t\Delta.\end{aligned}$$

したがって,$(-1)^s = (-1)^t$ となり,s, t はともに偶数であるか,またはともに奇数である. $\square$

偶数個の互換の積として表せる置換を**偶置換**といい,奇数個の互換の積として表せる置換を**奇置換**という.単位置換は偶置換とする.置換 σ に対して,その**符号** $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \sigma\text{が偶置換のとき} \\ -1, & \sigma\text{が奇置換のとき} \end{cases}$$

と定義する.

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\sigma\tau) &= \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau), \\ \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) &= \mathrm{sgn}(\sigma)\end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 5.4. $S_n = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_N\}$ $(N = n!)$ とするとき,

(1) $\tau \in S_n$ ならば,$\{\sigma_1\tau, \cdots, \sigma_N\tau\} = S_n$.

(2) $\{\sigma_1^{-1}, \cdots, \sigma_N^{-1}\} = S_n$.

[証明] $\sigma_i\tau = \sigma_j\tau$ とすると,

$$(\sigma_i\tau)\tau^{-1} = (\sigma_j\tau)\tau^{-1}, \ \ \sigma_i\epsilon = \sigma_j\epsilon, \ \ \sigma_i = \sigma_j$$

したがって,$i = j$ となる.よって,$\sigma_1\tau, \cdots, \sigma_N\tau$ は相異なるから,これらのなす集合は S_n 全体と一致する.次に,$\sigma_i^{-1} = \sigma_j^{-1}$ とすると,

$$\sigma_j\sigma_i^{-1} = \sigma_j\sigma_j^{-1} = \epsilon,$$

$$(\sigma_j\sigma_i^{-1})\sigma_i = \epsilon\sigma_i = \sigma_i,$$

$$\sigma_j = \sigma_j\epsilon = \sigma_j(\sigma_i^{-1}\sigma_i) = \sigma_i.$$

したがって,$i = j$ となる.よって,$\sigma_1^{-1}, \cdots, \sigma_N^{-1}$ は相異なるから,これらのなす集合は S_n 全体と一致する. $\square$

5.2 行列式の定義

n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

に対して，和

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

を A の**行列式**とよび，

$$|A|, \ \det A, \ D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n), \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とかく．

例 5.3. $S_2 = \{\epsilon, (1\,2)\}$，$\mathrm{sgn}(\epsilon) = 1$，$\mathrm{sgn}((1\,2)) = -1$ だから，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

である．

レポート問題 5.

$$S_3 = \left\{ 1, (1\,2), (1\,3), (2\,3), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

について，各元の符号を求めよ．さらに，3 次行列 $A = (a_{ij})$ の行列式をその成分の多項式として表わせ．

5.3 行列式の基本的性質

行列式の性質の中で，記号 $D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ を用いて説明できるものから述べる．

命題 5.5. 行列式 $D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ は次の性質を持つ:

(1) $D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}'_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$
$\qquad + D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n).$

(2) $D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,c\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=cD(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$.

(3) $D(\boldsymbol{a}_{\tau(1)},\cdots,\boldsymbol{a}_{\tau(n)})=\mathrm{sgn}(\tau)D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n),\quad \tau\in S_n$.

系 5.6. ある $j\neq k$ に対して，$\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{a}_k$ ならば，$D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=0$ である．

系 5.7. $c\in\mathbb{R}$, $j\neq k$ ならば,

$$D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j+c\boldsymbol{a}_k,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n).$$

[証明]

$$\begin{aligned}
&D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j+\boldsymbol{a}'_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots(a_{\sigma(j)j}+a'_{\sigma(j)j})\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(j)j}\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&\quad+\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a'_{\sigma(j)j}\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&=D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)+D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}'_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,c\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots(ca_{\sigma(j)j})\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&=c\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(j)j}\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&=cD(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n).
\end{aligned}$$

$\tau\in S_n$ に対して，$\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{a}_{\tau(j)}$，$j=1,\ldots,n$ とおく．$b_{ij}=a_{i\tau(j)}$ である．補題 5.4 の (1) を用いれば,

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_{\tau(1)},\cdots,\boldsymbol{a}_{\tau(n)})&=D(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)b_{\sigma(1)1}\cdots b_{\sigma(n)n}\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)\tau(1)}\cdots a_{\sigma(n)\tau(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i)\tau(i)}\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma\tau^{-1}(j)j}\quad(\sigma\tau^{-1}=\sigma')\\
&=\sum_{\sigma'\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma'\tau)a_{\sigma'(1)1}\cdots a_{\sigma'(n)n}\\
&=\mathrm{sgn}(\tau)D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n).
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{a}_k$ ならば，$\tau=(j\,k)$ として，(3) を適用すると，$D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=0$ を得る．(1) と系 5.6 から，系 5.7 がでる． □

命題 5.8. 単位行列 $I = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ の行列式は 1 である．

[証明]

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \delta_{\sigma(1)1} \cdots \delta_{\sigma(n)n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる． □

命題 5.9.

$$|{}^tA| = |A|.$$

[証明] ${}^tA = (a'_{ij})$ とおくと，$a'_{ij} = a_{ji}$ であるから，

$$\begin{aligned} |{}^tA| &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a'_{\sigma(1)1} \cdots a'_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

かけ算の順序を入れ換えれば，

$$\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

だから，補題 5.4 より，

$$\begin{aligned} |{}^tA| &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\sigma' \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n)n} \\ &= |A| \end{aligned}$$

となる． □

レポート問題 6. 行列式の性質を用いて計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

注意 5.1. 命題 5.5 と命題 5.9 より，行についても命題 5.5 とと同様なことが成り立つ．

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

とするとき，

$$|A| = |{}^tA| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (A\text{ の第 1 行と第 2 行を交換した行列式})$$

5.4 行列式の展開

n 次の行列式は $n-1$ 次の行列式の和として表せることを示そう．n 次行列 $A = (a_{ij})$ から，その第 i 行と第 j 列をとり除いて得られる $n-1$ 次行列を A_{ij} とかく．このとき，

定理 5.10.

$$(1) \quad |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

$$(2) \quad |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

$n = 4$ とする．$i = 1$, $j = 4$ とする．

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{a}_4 = a_{14}\boldsymbol{e}_1 + a_{24}\boldsymbol{e}_2 + a_{34}\boldsymbol{e}_3 + a_{44}\boldsymbol{e}_4$ であるから，

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) &= a_{14} D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1) + a_{24} D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2) \\ &\quad + a_{34} D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_3) + a_{44} D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_4). \end{aligned}$$

ここで，第 4 項について，$a'_{i4} = 0,\ i = 1, 2, 3,\ a'_{44} = 1$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_4) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\sigma \in S_4} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a'_{\sigma(4)4} \\
&= \sum_{\sigma \in S_4, \sigma(4)=4} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \\
&= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A_{44}|.
\end{aligned}
$$

第 3 項についても，上の結果から

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_3) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = -|A_{34}|.
\end{aligned}
$$

第２項についても，同様に，

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = |A_{24}|.
\end{aligned}$$

第１項についても，同様に，

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = -|A_{14}|.
\end{aligned}$$

以上によって，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^5|A_{14}| + (-1)^6|A_{24}| + (-1)^7|A_{34}| + (-1)^8|A_{44}|$$

が示された．一般の場合も同様である．

定理 5.11.

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ik}|A_{ij}| = \delta_{kj}|A|.$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}|A_{ij}| = \delta_{ki}|A|.$$

[証明]　(1) $k = j$ の場合が前の定理である．$k \neq j$ の場合，右辺は 0 である．左辺は，$|A|$ において，第 j 列を第 k 列で置き換えて得られる行列式

$$D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overbrace{\boldsymbol{a}_k}^{j}, \cdots, \overbrace{\boldsymbol{a}_k}^{k}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

の第 j 列に関する展開だから，系 5.6 より 0 である．(2) は命題 5.9 と (1) からでる．　□

例 5.4. 行列式の展開を用いて計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 5.5. 行列式の性質を用いて計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

レポート問題 7. 行列式の展開を用いて計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

5.5 クラメールの公式

A が n 次正則行列のとき，任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して，連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

は唯一つの解 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ を持った．この $\boldsymbol{x}$ を行列式を用いて表す．

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n),$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

定理 5.12. クラメールの公式　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ならば，

$$D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = x_j|A|$$

となる．特に，$|A| \neq 0$ ならば，

$$x_j = \frac{1}{|A|}D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \ (j = 1, 2, \cdots, n).$$

[証明]　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ならば，

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

である．このとき，

$$\begin{aligned} & D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \\ = & \sum_{k=1}^{n} x_k D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \\ = & x_j|A| \end{aligned}$$

となる．　□

5.6 積の行列式

定理 5.13. A, B を n 次行列とすると，$|AB| = |A||B|$ が成り立つ．

[証明]　$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$, $B = (b_{ij})$ とすると，

$$AB = (\sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1 1}\boldsymbol{a}_{k_1}, \cdots, \sum_{k_n=1}^{n} b_{k_n n}\boldsymbol{a}_{k_n}).$$

したがって，

$$\begin{aligned} |AB| &= \sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{n} b_{k_1 1}\cdots b_{k_n n} D(\boldsymbol{a}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{k_n}) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} b_{\sigma(1)1}\cdots b_{\sigma(n)n} D(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1}\cdots b_{\sigma(n)n} D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= |A||B| \end{aligned}$$

となる． □

定理 5.14. A を n 次行列とするとき，

$$A \text{ が正則} \Longleftrightarrow |A| \neq 0$$

である．また，$|A| \neq 0$ であるとき，A の逆行列 A^{-1} は次の公式で与えられる．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}{}^t(\alpha_{ij}).$$

ここで，$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ である．α_{ij} を A における a_{ij} の**余因子**という．

[証明]　A が正則であるとする．このとき，

$$AA^{-1} = I.$$

したがって，

$$|A||A^{-1}| = 1.$$

ゆえに，$|A| \neq 0$. 逆に，$|A| \neq 0$ ならば，定理 5.11 より，

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\frac{\alpha_{ij}}{|A|} = \delta_{jk},\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{\alpha_{ij}}{|A|} = \delta_{ki}.$$

よって，

$$B = \frac{1}{|A|}{}^t(\alpha_{ij})$$

とおけば，

$$BA = I,\ AB = I.$$

すなわち，$B = A^{-1}$ である． □