代数学演習

– 楕円関数論入門 –

中川 仁

2011 年度後期

レムニスケートの弧長を求める積分の逆関数はどんな関数になるだろうか．この講義では，楕円関数に関する基本的な性質を解説する．

記号

$\mathbb{Z}$:有理整数環，$\mathbb{Q}$:有理数全体の集合，$\mathbb{R}$:実数全体の集合，$\mathbb{C}$:複素数全体の集合．

目 次

1 円弧の長さ

単位円 $x^2+y^2=1$ の 2 点 $A=(1,0)$ と $P_1=(x_1,y_1)$ を結ぶ円弧の長さを θ_1 とする．ただし，P は第 1 象限にあるとする．$x=\sqrt{1-y^2}$ より，

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}(-2y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}=-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=1+\frac{y^2}{1-y^2}=\frac{1}{1-y^2},$$

したがって，

$$\theta_1=\int_0^{y_1}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_0^{y_1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

文字を書き直せば，$A=(1,0)$ から $P=(x,y)$ までの円弧の長さ $\theta=\ell(y)$ は

$$\theta=\ell(y)=\int_0^{y}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt. \tag{1.1}$$

この積分で表せる関数 $\theta = \ell(y)$ の逆関数として，$0 \leq \theta \leq \pi/2$ において，$y = \sin\theta$ は定義される．これを $\sin\theta$ の定義とすれば，逆関数の微分の公式から，

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad \frac{d}{d\theta}\sin\theta = \frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{\dfrac{d\theta}{dy}} = \sqrt{1-y^2}$$

となる．したがって，$\cos\theta$ を

$$\cos\theta = \frac{d}{d\theta}\sin\theta$$

によって定義すれば，

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}, \qquad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

である．このように，円弧の長さを表す積分 (1.1) の逆関数として，三角関数 $\sin\theta$ が得られ，その導関数として $\cos\theta$ が得られ，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ が成り立つことが自然に得られる．

点 P が点 A を出発して円周上を反時計回りに動きくときの，A から P までの円弧の長さを θ とすれば，点 P の座標 (x, y) は θ をパラメータとして，$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ と表すことができる．A から $(-1, 0)$ までの半円の長さとして，円周率 π を積分

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

によって定義すれば，$\cos\theta, \sin\theta$ は周期 2π を持つ周期関数であることがわかる．

円以外の曲線でも，弧の長さの積分の逆関数として，よい関数が得られないだろうか．

2　レムニスケートの弧長

2 定点からの距離の積が一定である点の軌跡を求めよう．$a > 0$ とし，$A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$ を定点とする．点 P と点 A の距離 PA と点 P と点 A' の距離 PA' の積が一定値 c^2 $(c > 0)$ であるとする．$P = (x, y)$ とすると，

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\sqrt{(x+a)^2+y^2} = c^2.$$

両辺を平方して，

$$(x^2+y^2+a^2-2ax)(x^2+y^2+a^2+2ax) = c^4,$$

$$(x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = c^4.$$

これがちょうど原点 $O=(0,0)$ を通るとすると，$c=a$ であり，方程式は，

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$$

になる．これを極座標で表してみる．$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと，

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

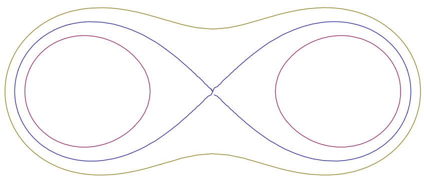
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ であるから，

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

ここで，簡単のために，$a=1/\sqrt{2}$ とおく．極座標による方程式は

$$r^2 = \cos 2\theta \tag{2.1}$$

となる．この曲線を**レムニスケート**という．



レムニスケート上の 2 点 $O=(0,0)$ と $P_1=(x_1,y_1)$ の間の弧の長さを L とする．P_1 は第一象限にあるとする．$r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ とおく．$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r^2=\cos 2\theta$ であるから，θ は r の関数であり，したがって，x,y も r の関数である．よって，L は r_1 の関数であるので，$L=L(r_1)$ とかく．

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dr} &= \cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}, & \frac{dy}{dr} &= \sin\theta - r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}, \\
2r\frac{dr}{d\theta} &= -2\sin 2\theta, & \frac{d\theta}{dr} &= \frac{1}{\frac{dr}{d\theta}} = -\frac{r}{\sin 2\theta}.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 &= \left(\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + \left(\sin\theta - r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}\right)^2 \\
&= 1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 = 1 + \frac{r^4}{\sin^2 2\theta} = 1 + \frac{r^4}{1-r^4} = \frac{1}{1-r^4},
\end{aligned}$$

$$L(r_1) = \int_0^{r_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2}\,dr = \int_0^{r_1}\frac{1}{\sqrt{1-r^4}}\,dr.$$

文字を書き直せば，$O = (0,0)$ と $P = (x,y)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, の間の弧の長さ $u = L(r)$ は次の積分によって表される．

$$u = L(r) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt. \tag{2.2}$$

定数 ϖ を

$$\varpi = 2L(1) = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$$

によって定義する．点 P が原点 O を出発してレムニスケートの第 1 象限の部分を動き，レムニスケートに沿って第 4 象限，第 2 象限，第 3 象限を通って原点 O に戻るとき，O からの弧長 u は 0 から，$\varpi/2$, ϖ, $3\varpi/2$, 2ϖ と増大する．これを逆向きにたどるとき，弧長 u は 0 から，$-\varpi/2$, $-\varpi$, $-3\varpi/2$, -2ϖ と減少すると考える．このように弧長 u をパラメータとして，レムニスケート上の点 P を表すことができる．

OP の長さ r は P が第 1，4 象限にあるとき，正であるとし，P が第 2，3 象限にあるとき，負であると考える．このように符号を付けた r は u の関数として定まるから，それを，$r = \mathrm{sn}(u)$ で表す．

u と $u+2\varpi$ はレムニスケート上の同じ点を与えるので，$\mathrm{sn}(u)$ は周期 2ϖ をもつ周期関数になる．さらに，次が成り立つ．

$$\mathrm{sn}(-u) = -\,\mathrm{sn}(u), \tag{2.3}$$

$$\mathrm{sn}(\varpi - u) = \mathrm{sn}(u). \tag{2.4}$$

実際，u と $-u$ は原点 O に関して対称なレムニスケート上の点を与えるので，(2.3) が成り立つ．u と $\varpi - u$ は x 軸に関して対称なレムニスケート上の点を与えるので，(2.4) が成り立つ．

r が -1 から 1 まで動くとき，$u = L(r)$ は $-\varpi/2$ から $\varpi/2$ まで単調に増加する．よって，$u = L(r)$ の逆関数として，$r = \mathrm{sn}(u)$, $-\varpi/2 \le u \le \varpi/2$ で単調に増加する．u が $\varpi/2$ から ϖ まで動くとき，および，u が $-\varpi$ から $-\varpi/2$ まで動くときは，$r = \mathrm{sn}(u)$ は単調に減少する．したがって，$\mathrm{sn}(u)$, $\mathrm{sn}'(u) = \frac{d}{du}\mathrm{sn}(u)$ の符号をまとめると，次の表になる．

	$-\varpi$		$-\varpi/2$		0		$\varpi/2$		ϖ
sn	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	0
sn$'$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1

また，$-\varpi/2 < u < \varpi/2$ において，$r = \mathrm{sn}(u)$ は単調増加であるから，

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$$

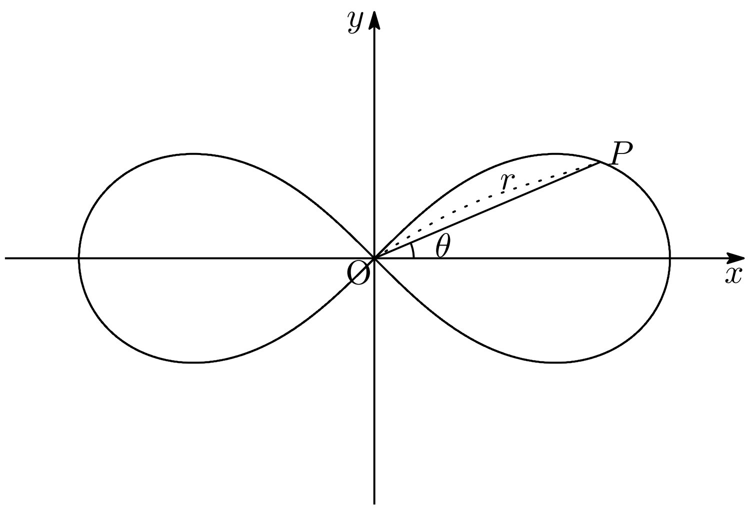


図 1: 曲線 $r^2 = \cos 2\theta$

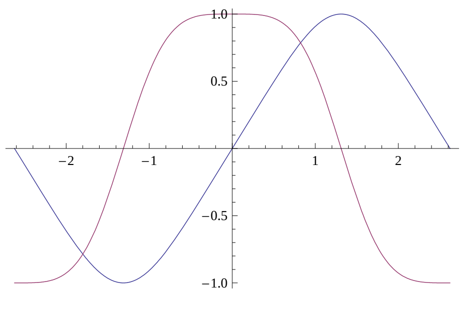


図 2: $\mathrm{sn}(u), \mathrm{sn}'(u)$ のグラフ

より，逆関数の微分の公式から，導関数 $\mathrm{sn}'(u)$ は，

$$\mathrm{sn}'(u) = \frac{d}{du}\,\mathrm{sn}(u) = \frac{dr}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dr}} = \sqrt{1-r^4} = \sqrt{1-\mathrm{sn}^4(u)}$$

である．$-\varpi/2 < u < \varpi/2$ のとき，$\mathrm{sn}(\varpi - u) = \mathrm{sn}(u)$ であるから，

$$-\,\mathrm{sn}'(\varpi-u) = \mathrm{sn}'(u) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^4(u)} = \sqrt{1-\mathrm{sn}^4(\varpi-u)},$$

$\mathrm{sn}'(\varpi-u) = -\sqrt{1-\mathrm{sn}^4(\varpi-u)}$ である．すなわち，

$$\mathrm{sn}'(u) = -\sqrt{1-\mathrm{sn}^4(u)}, \qquad \frac{\varpi}{2} < u < \frac{3\varpi}{2}.$$

したがって，任意の実数 u に対して，

$$\mathrm{sn}'(u)^2 = 1 - \mathrm{sn}^4(u) \tag{2.5}$$

が成り立つ．これを微分すれば，

$$2\,\mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}''(u) = -4\,\mathrm{sn}^3(u)\,\mathrm{sn}'(u).$$

したがって，第 2 次導関数について

$$\mathrm{sn}''(u) = -2\,\mathrm{sn}^3(u) \tag{2.6}$$

を得る．

$\mathrm{sn}(u)$ たちは三角関数と同様に加法定理を満たすことを示そう．アーベルによる証明を紹介する．

補題 2.1. $g(u,v)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の微分可能な関数とする．そのとき，$\mathbb{R}^2$ 上で $g(u,v) = g(u+v,0)$ が成り立つための必要十分条件は，$\mathbb{R}^2$ 上で $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial g}{\partial v}$ が成り立つことである．

[証明]　まず，

$$h(x,y) = g(x+y, x-y)$$

とおくと，

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y,x-y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x+y,x-y).$$

したがって，$\mathbb{R}^2$ 上で $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial g}{\partial v}$ が成り立つとすれば，$\mathbb{R}^2$ 上で

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 0$$

が成り立つ．したがって，任意の実数 a, b, c に対して，

$$0 = \int_b^c \frac{\partial h}{\partial y}(a,t)\,dt = [h(a,t)]_b^c = h(a,c) - h(a,b),$$

$h(a,b) = h(a,c)$ である．よって，任意の $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$c = a = (u+v)/2$, $b = (u-v)/2$ とおけば，$h(a,b) = g(a+b, a-b) = g(u,v)$, $h(a,c) = g(a+c, a-c) = g(2a, 0) = g(u+v, 0)$ であるから，$g(u,v) = g(u+v,0)$ を得る．逆に，$g(u,v) = g(u+v,0)$ が $\mathbb{R}^2$ 上で成り立つとすれば，

$$h(x,y) = g(x+y, x-y) = g(2x, 0),$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, x-y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x+y, x-y) = 0$$

が任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ について成り立つ．$x = (u+v)/2$, $y = (u-v)/2$ とおけば，

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial v}(u,v).$$

□

命題 2.2 (加法定理)**.** 任意の実数 u, v に対して，

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(v) + \mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}(v)}{1 + \mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v)}$$

が成り立つ．

[証明]

$$g(u,v) = \frac{\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(v) + \mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}(v)}{1 + \mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v)}$$

とおくと，$g(u,v)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の微分可能な関数である．(2.5), (2.6) より，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}'(v) + \mathrm{sn}''(u)\,\mathrm{sn}(v)}{1 + \mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v)} \\
&\quad - \frac{2\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}^2(v)(\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(v) + \mathrm{sn}(v)\,\mathrm{sn}'(u))}{(1 + \mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v))^2} \\
&= \frac{\mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}'(v) - 2\,\mathrm{sn}^3(u)\,\mathrm{sn}(v)}{1 + \mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v)} \\
&\quad - \frac{2\,\mathrm{sn}(u)^2\,\mathrm{sn}^2(v)\,\mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}'(v) + 2\,\mathrm{sn}(u)(1 - \mathrm{sn}^4(u))\,\mathrm{sn}^3(v))}{(1 + \mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v))^2} \\
&= \frac{(1 - \mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v))\,\mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}'(v) - 2\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}(v)(\mathrm{sn}^2(u) + \mathrm{sn}^2(v))}{(1 + \mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v))^2}.
\end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}''(v)+\mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}'(v)}{1+\mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v)}\\ &\quad -\frac{2\,\mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}(v)\,\mathrm{sn}'(v)(\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(v)+\mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}(v))}{(1+\mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v))^2}\\ &= \frac{(1-\mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v))\,\mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}'(v)-2\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}(v)(\mathrm{sn}^2(u)+\mathrm{sn}^2(v))}{(1+\mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v))^2}.\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{\partial g}{\partial u}=\dfrac{\partial g}{\partial v}$ である．補題2.1 より，$g(u,v)=g(u+v,0)$ である．$\mathrm{sn}'(0)=1$, $\mathrm{sn}(0)=0$ より，$g(u+v,0)=\mathrm{sn}(u+v)$ である．ゆえに,

$$\mathrm{sn}(u+v)=g(u+v,0)=g(u,v)=\frac{\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(v)+\mathrm{sn}(v)\,\mathrm{sn}'(u)}{1+\mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v)}.$$

□

系 2.3. 次が成り立つ.

(1)
$$\mathrm{sn}(u-v)=\frac{\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(v)-\mathrm{sn}'(u)\,\mathrm{sn}(v)}{1+\mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v)}. \tag{2.7}$$

(2)
$$\mathrm{sn}(u+v)+\mathrm{sn}(u-v)=\frac{2\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(v)}{1+\mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v)}. \tag{2.8}$$

(3)
$$\mathrm{sn}(2u)=\frac{2\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(u)}{1+\mathrm{sn}^4(u)}. \tag{2.9}$$

(4)
$$\mathrm{sn}\left(\frac{\varpi}{2}-u\right)=\frac{\mathrm{sn}'(u)}{1+\mathrm{sn}^2(u)}. \tag{2.10}$$

[証明]　$\mathrm{sn}(-u)=-\mathrm{sn}(u)$ より，$-\mathrm{sn}'(-u)=-\mathrm{sn}'(u)$, $\mathrm{sn}'(-u)=\mathrm{sn}'(u)$ である．よって，加法定理で，v を $-v$ で置き換えれば，$\mathrm{sn}(-v)=-\mathrm{sn}(v)$, $\mathrm{sn}'(-v)=\mathrm{sn}'(v)$ であるから,

$$\mathrm{sn}(u-v)=\frac{\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(v)-\mathrm{sn}(v)\,\mathrm{sn}'(u)}{1+\mathrm{sn}^2(u)\,\mathrm{sn}^2(v)}$$

を得る．これと加法定理の和をとれば，(2) を得る．加法定理で，$v=u$ とおけば，(3) を得る．(1) で，u に $\varpi/2$ を，v に $-u$ を代入すれば，$\mathrm{sn}(\varpi/2)=1$, $\mathrm{sn}'(\varpi/2)=0$ であるから,

$$\mathrm{sn}\left(\frac{\varpi}{2}-u\right)=\frac{\mathrm{sn}'(u)}{1+\mathrm{sn}^2(u)}.$$

□

例 2.4. (2.10) において，$u = \varpi/4$ とおけば，$\varpi/2 - u = u$ であるから，$r = \operatorname{sn}(\varpi/4)$ は

$$r = \frac{\sqrt{1-r^4}}{1+r^2}, \quad r^2(1+r^2)^2 = 1 - r^4, \quad r^6 + 3r^4 + r^2 - 1 = 0$$
$$(r^2+1)(r^4+2r^2-1) = 0$$

を満たす．この方程式の実根は，$r = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$ である．したがって，$\operatorname{sn}(\varpi/4) = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ である．

系 2.5 (3 倍公式)**.**

$$\operatorname{sn}(3u) = \frac{\operatorname{sn}(u)(3 - 6\operatorname{sn}^4(u) - \operatorname{sn}^8(u))}{1 + 6\operatorname{sn}^4(u) - 3\operatorname{sn}^8(u)}.$$

[証明]　(2.8) において，u に $2u$ を，v に u を代入すれば，

$$\operatorname{sn}(2u+u) + \operatorname{sn}(2u-u) = \frac{2\operatorname{sn}(2u)\operatorname{sn}'(u)}{1 + \operatorname{sn}^2(2u)\operatorname{sn}^2(u)}.$$

2 倍公式 (系 2.3 の (3)) より，

$$\operatorname{sn}(2u) = \frac{2\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}'(u)}{1+\operatorname{sn}^4(u)}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}(3u) &= \frac{2\operatorname{sn}(2u)\operatorname{sn}'(u)}{1 + \operatorname{sn}^2(2u)\operatorname{sn}^2(u)} - \operatorname{sn}(u) \\
&= \frac{2\dfrac{2\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}'(u)}{1+\operatorname{sn}^4(u)}\operatorname{sn}'(u)}{1 + \dfrac{4\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{sn}'(u)^2}{(1+\operatorname{sn}^4(u))^2}\operatorname{sn}^2(u)} - \operatorname{sn}(u) \\
&= \frac{4\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}'(u)^2(1+\operatorname{sn}^4(u))}{(1+\operatorname{sn}^4(u))^2 + 4\operatorname{sn}^4(u)\operatorname{sn}'(u)^2} - \operatorname{sn}(u) \\
&= \frac{4\operatorname{sn}(u)(1-\operatorname{sn}^4(u))(1+\operatorname{sn}^4(u))}{(1+\operatorname{sn}^4(u))^2 + 4\operatorname{sn}^4(u)(1-\operatorname{sn}^4(u))} - \operatorname{sn}(u) \\
&= \frac{\operatorname{sn}(u)(4 - 4\operatorname{sn}^8(u))}{1 + 6\operatorname{sn}^4(u) - 3\operatorname{sn}^8(u)} - \operatorname{sn}(u) \\
&= \frac{\operatorname{sn}(u)(3 - 6\operatorname{sn}^4(u) - \operatorname{sn}^8(u))}{1 + 6\operatorname{sn}^4(u) - 3\operatorname{sn}^8(u)}.
\end{aligned}$$

□

例 2.6. 系 2.5 において，$u = \varpi/3$ とおけば，$3u = \varpi$, $\operatorname{sn}(\varpi) = 0$ であるから，$r = \operatorname{sn}(\varpi/3)$ は

$$3 - 6r^4 - r^8 = 0, \quad r^8 + 6r^4 - 3 = 0$$

を満たす．この方程式の実根は，$r = \pm\sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}$ である．したがって，$\operatorname{sn}(\varpi/3) = \sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}$ である．

n 倍公式はどんな形になるだろうか.

定理 2.7. n を自然数とすると，互いに素な多項式 $P_n(x), Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が存在して，n が奇数のとき，

$$\mathrm{sn}(nu) = \mathrm{sn}(u)\frac{P_n(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_n(\mathrm{sn}^4(u))},$$

n が偶数のとき，

$$\mathrm{sn}(nu) = \mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(u)\frac{P_n(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_n(\mathrm{sn}^4(u))}$$

が成り立つ．さらに，$Q_n(0) = 1$ が成り立つ.

[証明]　$n = 1$ のときは，$P_1(x) = Q_1(x) = 1$ とおき，$n = 2$ のときは，$P_2(x) = 2$, $Q_2(x) = 1 + x$ とおけばよい．$n - 1$ と n について定理の主張が正しいとすると，(2.8) より，

$$\mathrm{sn}(nu + u) = \frac{2\,\mathrm{sn}(nu)\,\mathrm{sn}'(u)}{1 + \mathrm{sn}^2(nu)\,\mathrm{sn}^2(u)} - \mathrm{sn}(nu - u)$$

であるから，n が偶数ならば，$n - 1$ は奇数であるから，帰納法の仮定により，

$$\mathrm{sn}(nu) = \mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(u)\frac{P_n(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_n(\mathrm{sn}^4(u))},$$
$$\mathrm{sn}((n-1)u) = \mathrm{sn}(u)\frac{P_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}((n+1)u) &= \frac{2\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(u)\dfrac{P_n(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_n(\mathrm{sn}^4(u))}\,\mathrm{sn}'(u)}{1 + \mathrm{sn}(u)^2\,\mathrm{sn}'(u)^2\dfrac{P_n(\mathrm{sn}^4(u))^2}{Q_n(\mathrm{sn}^4(u))^2}\,\mathrm{sn}^2(u)} - \mathrm{sn}(u)\frac{P_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))} \\
&= \frac{2\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(u)^2 P_n(\mathrm{sn}^4(u))Q_n(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_n(\mathrm{sn}^4(u))^2 + \mathrm{sn}(u)^4\,\mathrm{sn}'(u)^2 P_n(\mathrm{sn}^4(u))^2} - \mathrm{sn}(u)\frac{P_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))} \\
&= \frac{2\,\mathrm{sn}(u)(1 - \mathrm{sn}^4(u))P_n(\mathrm{sn}^4(u))Q_n(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_n(\mathrm{sn}^4(u))^2 + \mathrm{sn}(u)^4(1 - \mathrm{sn}^4(u))P_n(\mathrm{sn}^4(u))^2} - \mathrm{sn}(u)\frac{P_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))} \\
&= \mathrm{sn}(u)\frac{P_{n+1}(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_{n+1}(\mathrm{sn}^4(u))}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(x) &= Q_{n-1}(x)\left\{Q_n(x)^2 + x(1-x)P_n(x)^2\right\}, \\
P_{n+1}(x) &= 2(1-x)P_n(x)Q_n(x)Q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)\left\{Q_n(x)^2 + x(1-x)P_n(x)^2\right\}
\end{aligned}$$

とおいた．$Q_{n-1}(0) = Q_n(0) = 1$ より，$Q_{n+1}(0) = 1$ がわかる.

n が奇数ならば，$n-1$ は偶数であるから，帰納法の仮定により，

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(nu) &= \mathrm{sn}(u)\frac{P_n(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_n(\mathrm{sn}^4(u))},\\
\mathrm{sn}((n-1)u) &= \mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(u)\frac{P_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))}
\end{aligned}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}((n+1)u) &= \frac{2\,\mathrm{sn}(u)\dfrac{P_n(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_n(\mathrm{sn}^4(u))}\,\mathrm{sn}'(u)}{1+\mathrm{sn}(u)^2\dfrac{P_n(\mathrm{sn}^4(u))^2}{Q_n(\mathrm{sn}^4(u))^2}\,\mathrm{sn}^2(u)} - \mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(u)\frac{P_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))}\\
&= \frac{2\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(u)P_n(\mathrm{sn}^4(u))Q_n(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_n(\mathrm{sn}^4(u))^2+\mathrm{sn}(u)^4P_n(\mathrm{sn}^4(u))^2} - \mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(u)\frac{P_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_{n-1}(\mathrm{sn}^4(u))}\\
&= \mathrm{sn}(u)\,\mathrm{sn}'(u)\frac{P_{n+1}(\mathrm{sn}^4(u))}{Q_{n+1}(\mathrm{sn}^4(u))}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(x) &= Q_{n-1}(x)\left\{Q_n(x)^2+xP_n(x)^2\right\},\\
P_{n+1}(x) &= 2P_n(x)Q_n(x)Q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)\left\{Q_n(x)^2+xP_n(x)^2\right\}
\end{aligned}$$

とおいた．$Q_{n-1}(0)=Q_n(0)=1$ より，$Q_{n+1}(0)=1$ がわかる．

$Q_{n+1}(x)$, $P_{n+1}(x)$ をそれらの最大公約因子で割って，それらが $\mathbb{Z}[x]$ で互いに素であるとしてよい． こうしても，$Q_{n+1}(0)=\pm 1$ であるから，必要ならば，-1 倍することによって，$Q_{n+1}(0)=1$ にできる． □

例 2.8. $P_1(x)=Q_1(x)=1$, $P_2(x)=2$, $Q_2(x)=1+x$ である．定理 2.7 の証明における漸化式，n が偶数のとき，

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(x) &= Q_{n-1}(x)\left\{Q_n(x)^2+x(1-x)P_n(x)^2\right\},\\
P_{n+1}(x) &= 2(1-x)P_n(x)Q_n(x)Q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)\left\{Q_n(x)^2+x(1-x)P_n(x)^2\right\},
\end{aligned}$$

n が奇数のとき，

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(x) &= Q_{n-1}(x)\left\{Q_n(x)^2+xP_n(x)^2\right\},\\
P_{n+1}(x) &= 2P_n(x)Q_n(x)Q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)\left\{Q_n(x)^2+xP_n(x)^2\right\}
\end{aligned}$$

によって，

$$\begin{aligned}
Q_3(x) &= Q_1(x)\left\{Q_2(x)^2+x(1-x)P_2(x)^2\right\} = (1+x)^2+4x(1-x)\\
&= 1+6x-3x^2,\\
P_3(x) &= 2(1-x)P_2(x)Q_2(x)Q_1(x) - P_1(x)\left\{Q_2(x)^2+x(1-x)P_2(x)^2\right\}\\
&= 2(1-x)2(1+x) - \left\{(1+x)^2+4x(1-x)\right\}\\
&= 4-4x^2-(1+6x-3x^2) = 3-6x-x^2.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&Q_2(x)\left\{Q_3(x)^2+xP_3(x)^2\right\}\\
&=(1+x)\left\{(1+6x-3x^2)^2+x(3-6x-x^2)^2\right\}\\
&=(1+x)^2(1+20x-26x^2+20x^3+x^4),\\
&2P_3(x)Q_3(x)Q_2(x)-P_2(x)\left\{Q_3(x)^2+xP_3(x)^2\right\}\\
&=2(3-6x-x^2)(1+6x-3x^2)(1+x)-2\left\{(1+6x-3x^2)^2+x(3-6x-x^2)^2\right\}\\
&=4(1+x)^3(1-6x+x^2).
\end{aligned}
$$

最大公約因子 $(1+x)^2$ で割って，

$$
\begin{aligned}
Q_4(x)&=1+20x-26x^2+20x^3+x^4,\\
P_4(x)&=4(1+x)(1-6x+x^2).
\end{aligned}
$$

同様に，

$$
\begin{aligned}
Q_5(x)&=(1-2x+5x^2)(1+52x-26x^2-12x^3+x^4),\\
P_5(x)&=(5-2x+x^2)(1-12x-26x^2+52x^3+x^4).
\end{aligned}
$$

3 複素関数論の復習

定義 3.1. $D\subset\mathbb{C}$ を複素平面上の領域とし，$f(z)$ を D 上定義された複素変数 $z\in D$ の複素数値関数とする．$f(z)$ が $z_0\in D$ において**微分可能**であるとは，極限値

$$
\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}
$$

が存在することである．この極限値を $f'(z_0)$ で表し，$f(z)$ の $z=z_0$ における**微分係数**という．D の各点で $f(z)$ が微分可能であるとき，各点 $z\in D$ に対して，$f'(z)$ を対応させることによって，$f(z)$ の**導関数** $f'(z)$ が得られる．$f(z)$ が D の各点で微分可能であり，導関数 $f'(z)$ が D で連続であるとき，$f(z)$ は D で**正則**であるという．

$f(z)$ は $z_0\in D$ において微分可能であるとし，

$$
\alpha=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}
$$

とおく．このとき，

$$
\varepsilon(z,z_0)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\alpha, & z\neq z_0,\\ 0, & z=z_0\end{cases}
$$

とおけば,

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z, z_0), \tag{3.1}$$
$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0 \tag{3.2}$$

である．今，実部と虚部に分けて，$z = x+iy$, $z_0 = x_0+iy_0$, x, y は実変数，$x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ とかく．同様に，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ は 2 変数 x, y の実数値関数とかく．さらに，$\alpha = a + ib$, $\varepsilon(z, z_0) = \varepsilon_1(x, y, x_0, y_0) + i\varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)$ とかく．そのとき，(3.1), (3.2) をかきなおせば,

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u(x_0, y_0) + (a + \varepsilon_1(x, y, x_0, y_0))(x - x_0) - (b + \varepsilon_2(x, y, x_0, y_0))(y - y_0),\\
v(x, y) &= v(x_0, y_0) + (b + \varepsilon_2(x, y, x_0, y_0))(x - x_0) + (a + \varepsilon_1(x, y, x_0, y_0))(y - y_0),\\
&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_j(x, y, x_0, y_0) = 0, \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

これは，$u(x, y)$, $v(x, y)$ が点 (x_0, y_0) において全微分可能であることを示している．したがって，$u(x, y)$, $v(x, y)$ は点 (x_0, y_0) において偏微分可能であり，偏微分係数は

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = a,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -b,\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = b,\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = a$$

となる．これから，u, v は**コーシー–リーマンの関係式**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.3}$$

を満たす．$f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ であるから，$f'(z)$ が連続であることは，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ および，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ が連続であることである．

逆に，u, v が D において偏微分可能であり，偏導関数たちが D で連続であり，コーシー–リーマンの関係式を満たすとする．$(x_0, y_0) \in D$ とし，$a = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$, $b = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$ とする．そのとき，点 $(x, y) \in D$ を (x_0, y_0) の十分近くの点とし，$h = x - x_0$, $k = y - y_0$ とおく．

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= u(x_0 + ht, y_0 + kt),\\
\psi(t) &= v(x_0 + ht, y_0 + kt), \qquad 0 \le t \le 1
\end{aligned}$$

とおくと，平均値の定理によって，$0 < \theta, \eta < 1$ が存在して,

$$\begin{aligned}
u(x, y) - u(x_0, y_0) &= \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta),\\
v(x, y) - v(x_0, y_0) &= \psi(1) - \psi(0) = \psi'(\eta)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\varphi'(\theta) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + h\theta, y_0 + k\theta)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + h\theta, y_0 + k\theta)k, \\
\psi'(\eta) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0 + h\eta, y_0 + k\eta)h + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + h\eta, y_0 + k\eta)k.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + h\theta, y_0 + k\theta) - a, \\
\varepsilon_1' &= \frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + h\theta, y_0 + k\theta) + b, \\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0 + h\eta, y_0 + k\eta) - b, \\
\varepsilon_2' &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 + h\eta, y_0 + k\eta) - a,
\end{aligned}
$$

とおけば, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ は (x_0, y_0) で連続であるから, $(h, k) \to (0, 0)$ のとき, $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_1' \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_2' \to 0$ である.

$$
\begin{aligned}
u(x, y) - u(x_0, y_0) &= (a + \varepsilon_1)h + (-b + \varepsilon_1')k, \\
v(x, y) - v(x_0, y_0) &= (b + \varepsilon_2)h + (a + \varepsilon_2')k
\end{aligned}
$$

より, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\alpha = a + bi$ とおけば,

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (a + \varepsilon_1)h + (-b + \varepsilon_1')k \\
&\quad + i(b + \varepsilon_2)h + i(a + \varepsilon_2')k \\
&= f(z_0) + (a + bi)(h + ik) + (\varepsilon_1 h + \varepsilon_1' k) + i(\varepsilon_2 h + \varepsilon_2' k) \\
&= f(z_0) + \alpha(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\varepsilon = \frac{(\varepsilon_1 h + \varepsilon_1' k) + i(\varepsilon_2 h + \varepsilon_2' k)}{h + ik}
$$

とおいた.

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon| &= \frac{|(\varepsilon_1 h + \varepsilon_1' k) + i(\varepsilon_2 h + \varepsilon_2' k)|}{|h + ik|} \\
&\leq \frac{|\varepsilon_1 h + \varepsilon_1' k| + |\varepsilon_2 h + \varepsilon_2' k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
&\leq \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + (\varepsilon_1')^2}\sqrt{h^2 + k^2} + \sqrt{\varepsilon_2^2 + (\varepsilon_2')^2}\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
&= \sqrt{\varepsilon_1^2 + (\varepsilon_1')^2} + \sqrt{\varepsilon_2^2 + (\varepsilon_2')^2} \to 0 \quad ((h, k) \to (0, 0)).
\end{aligned}
$$

ゆえに，$f(z)$ は $z=z_0$ において微分可能であり，

$$f'(z_0)=\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

である．z_0 は D の任意の点であるから，$f(z)$ は D で正則である．
以上によって，次の命題が示された．

命題 3.2. $f(z)$ が D で正則であるための必要十分条件は，$f(z)$ の実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ が D で偏微分可能であり，偏導関数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ が D で連続で，コーシー–リーマンの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすことである．

定理 3.3 (コーシーの積分定理)**.** $f(z)$ が有界領域 D で正則で，D の閉包 $\bar{D}$ で連続であるとする．さらに，D の境界 ∂D は有限個の互いに交わらない区分的に滑らかな単一閉曲線からなるとする．そのとき，境界 ∂D に沿う複素積分について，

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz=0$$

が成り立つ．

[証明]　複素積分の定義と Green の定理より，

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f(z)\,dz &= \int_{\partial D}(u\,dx-v\,dy)+i\int_{\partial D}(u\,dy+v\,dx)\\ &= -\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy+i\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.\end{aligned}$$

コーシー–リーマンの関係式により，右辺の被積分関数はいずれも 0 であるから，この積分は 0 である．□

定理 3.4 (コーシーの積分公式)**.** $D,\ f(z)$ を定理 3.3 の通りとする．このとき，D の内点 z に対して，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

が成り立つ．

[証明]　$r>0$ を十分小さくとって，$\Delta_r=\{\zeta\in\mathbb{C}\,|\,|\zeta-z|\le r\}\subset D$ となるようにする．$E=D-\Delta_r$ とする．そのとき，E 上の正則関数 $\varphi(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ に定理 3.3 を適用すれば，

$$\int_{\partial E}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0.$$

ここで，∂E は ∂D を正の向きにまわったものと $\partial\Delta_r$ を負の向きにまわったものと合わせたものであるから，

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

を得る．上の式の値が $2\pi i f(z)$ であることを示せばよい．$\partial\Delta_r$ をパラメータ表示する．$z = x + iy$ として，

$$\zeta = x(\theta) + iy(\theta), \quad x(\theta) = x + r\cos\theta,\ y(\theta) = y + r\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

そのとき，

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \left(\frac{dx}{d\theta} + i\frac{dy}{d\theta}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} (-r\sin\theta + ir\cos\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - 2\pi i f(z) = \int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

とかける．任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$r > 0$ を十分小さくとれば，任意の $\zeta \in \Delta_r$ に対して，

$$|f(\zeta) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

となるようにできる．したがって，

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| &\le \int_{\partial\Delta_r} \left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\right| |d\zeta| \\
&\le \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2\pi r} r\,d\theta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから，r によらない積分の値は

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - 2\pi i f(z) = \int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - 2\pi i f(z) = 0$$

でなければならない．以上によって，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

が示された． □

次に，正則関数は何回でも微分できて，その高階導関数も連続である．

定理 3.5. $D,\ f(z)$ を定理3.3の通りとすると，$f(z)$ は複素関数として無限回微分可能であり，任意の $n \geq 0$ について，

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

が成り立つ．

定理 3.6. D を定理3.3の通りとし，$f(z)$ を D 上の正則関数，$c \in D$ とする．$R > 0$ を $\Delta_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - c| \leq R\} \subset D$ にとる．そのとき，$f(z)$ は Δ_R の内部で絶対収束するべき級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

に展開される．ここで，

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\,d\zeta.$$

[証明]　$0 < r < R$ とする．$|z - c| < r$ に対して，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

$\zeta \in \partial\Delta_R,\ |z - c| < r$ のとき，$\left|\dfrac{z - c}{\zeta - c}\right| < \dfrac{r}{R} < 1$ であるから，

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c)\left(1 - \dfrac{z - c}{\zeta - c}\right)} = \frac{1}{\zeta - c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - c}{\zeta - c}\right)^n.$$

この級数は，$\zeta \in \partial\Delta_R$ について一様収束している．したがって，積分と和の順序が交換でき，

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \Delta_R} \frac{1}{\zeta - c}\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\left(\frac{z - c}{\zeta - c}\right)^n d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(z - c)^n \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\,d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \\
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.
\end{aligned}$$

□

命題 3.7. $f(z)$ を領域 D 上の正則関数で恒等的に 0 ではないとする．$c \in D$ を $f(z)$ の零点とすれば，c の十分小さい近傍内には c 以外の $f(z)$ の零点は存在しない．

[証明]　定理 3.6 より，$r > 0$ を十分小さくとれば，$|z-c| < r$ において，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

と Taylor 展開される．$a_0 = f(c) = 0$ である．$f(z)$ は恒等的には 0 でないから，$a_n = 0,\ n = 0, \ldots, m-1,\ a_m \neq 0$ となる $m \geq 1$ が存在する．そのとき，

$$g(z) = a_m + a_{m+1}(z-c) + \cdots = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-c)^{n-m}$$

とおけば，これは，$|z-c| < r$ において絶対収束し，$g(z)$ はそこで正則である．また，$f(z) = (z-c)^m g(z)$ である．$g(c) = a_m \neq 0$ であり，$g(z)$ は $z = c$ で連続であるから，$0 < \delta < r$ を十分小さくとれば，$|z-c| < \delta$ において，$|g(z) - a_m| < |a_m|/2$ にできる．したがって，$|g(z)| \geq |a_m| - |g(z) - a_m| > |a_m|/2$ である．よって，$0 < |z-c| < \delta$ のとき，$f(z) = (z-c)^m g(z) \neq 0$ である．□

定理 3.8 (一致の定理)**.** 領域 D で正則な関数 $f(z),\ g(z)$ が D 上の内部に集積点を持つ集合 E 上で $f(z) = g(z)$ を満たすならば，恒等的に $f(z) = g(z)$ である．

[証明]　$F(z) = f(z) - g(z)$ として，$c \in D$ を E の集積点とする．$c_n \in E,\ c_n \neq c,\ \lim_{n\to\infty} c_n = c$ となる複素数の列をとる．$F(c_n) = f(c_n) - g(c_n) = 0$ であるから，$F(z)$ が恒等的に 0 でないとすれば，命題 3.7 に矛盾する．□

例 3.9. $z = x + iy$ に対して，$u(x,y) = e^x \cos y,\ v(x,y) = e^x \sin y$,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

とおく．

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x \cos y \end{aligned}$$

であるから，コーシー–リーマンの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立っている．ゆえに，$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数である．一方，べき級数

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots$$

はすべての複素数 z に対して収束し，$\mathbb{C}$ 上の正則関数になる．さらに，$y=0$ とすれば，任意の実数 x に対して，

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x=f(x)$$

であるから，一致の定理によって，$g(z)=f(z)$ である．すなわち，$z=x+iy$ に対して，

$$e^x\cos y+ie^x\sin y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

が成り立つ．この関数を e^z と表す．

$$e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots$$

において，z を $-z$ で置き換えれば，

$$e^{-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n=1-z+\frac{1}{2!}z^2-\frac{1}{3!}z^3+\cdots.$$

これから，

$$\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\frac{1}{6!}z^6+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n},$$

$$\frac{1}{2i}(e^z-e^{-z})=\frac{1}{i}\left(z+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\frac{1}{7!}z^7+\cdots\right)=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$$

ここで，$x=0$ とすれば，任意の実数 y に対して，

$$\frac{1}{2}(e^{iy}+e^{-iy})=1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4-\frac{1}{6!}y^6+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n},$$

$$\frac{1}{2i}(e^{iy}-e^{-iy})=y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\frac{1}{7!}y^7+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1}.$$

これはそれぞれ，$\cos y$, $\sin y$ のテイラー展開になっている．このことから，複素数 z に対して，

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),\qquad \sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$$

によって，$\cos z$, $\sin z$ を定義することができる．

定理 3.10 (Liouville の定理)**.** $f(z)$ を全複素平面上で正則な関数で，有界であるとする．そのとき，$f(z)$ は定数である．

[証明]　任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，$|f(z)| \leq M$ であるとする．$R > 0$ とすれば，定理 3.6 より，$|z| < R$ において，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

である．ここで，$\Delta_R = \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta| \leq R\}$ とすれば，

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta$$

である．したがって，

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \Delta_R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}} \, |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi R^{n+1}} 2\pi R = \frac{M}{R^n}.$$

$R > 0$ は任意だから，$R \to \infty$ として，$a_n = 0, n \geq 1$ を得る．そのとき，$f(z) = a_0$ である．　□

D を領域，$c \in D$ とし，$\Delta_R \subset D$ を c を中心とする半径 R の閉円板とする．

命題 3.11. $D - \{c\}$ で正則な関数 $f(z)$ は，Δ_R の内部において絶対収束する級数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

に展開される．ここで，

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} \, d\zeta \quad (0 < r < R).$$

[証明]　$0 < |z - c| < R$ なる z をとる．$\varepsilon, \varepsilon' > 0, r, r' > 0$ を $0 < \varepsilon < \varepsilon' \leq |z - c| \leq r' < r < R$ にとる．$g(\zeta) = \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ とおけば，$g(\zeta)$ は $\zeta \in D - \{c, z\}$ において正則である．定理 3.6 より，$\zeta = z$ のある近傍において，

$$f(\zeta) = f(z) + b_1(\zeta - z) + b_2(\zeta - z)^2 + \cdots$$

と Taylor 展開される．したがって，

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = b_1 + b_2(\zeta - z) + \cdots$$

は $\zeta = z$ の近傍で絶対収束し，ζ の正則関数である．ゆえに，$g(\zeta)$ は $\zeta \in D - \{c\}$ において正則である．$g(\zeta)$ は $\{\zeta \in D \,|\, \varepsilon \leq |\zeta - c| \leq r\}$ を含む領域で正則であるから，定理 3.3 より，$\Delta_r = \{\zeta \,|\, |\zeta - c| \leq r\}, \Delta_\varepsilon = \{\zeta \,|\, |\zeta - c| \leq \varepsilon\}$ とおけば，

$$\int_{\partial(\Delta_r - \Delta_\varepsilon)} g(\zeta) \, d\zeta = 0.$$

すなわち，
$$\int_{\partial\Delta_r} g(\zeta)\,d\zeta = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} g(\zeta)\,d\zeta.$$
一方，定数 1 について，定理 3.4 を用いれば，
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r} \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta = 1.$$
また，$1/(\zeta - z)$ は Δ_ε を含む領域で正則であるから，定理 3.3 より，
$$\int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta = 0.$$
以上によって，
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r} g(\zeta)\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r} \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z) \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon} g(\zeta)\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.
\end{aligned}$$
これから，
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$
この右辺の第 1 の積分において，
$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}$$
は $\zeta \in \partial\Delta_r$ に対して，一様に絶対収束するから，積分と和の順序を交換でき，
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\,d\zeta.$$
第 2 の積分において，
$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^n}{(z - c)^{n+1}}$$

は$\zeta \in \partial\Delta_\varepsilon$に対して，一様に絶対収束するから，積分と和の順序を交換でき，

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-1}(z-c)^{-n-1}, \quad a_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}(\zeta - c)^n f(\zeta)\,d\zeta.$$

□

定義 3.12. 命題 3.11 の級数を $f(z)$ の $z = c$ に関する **Laurent 級数**という．また，c を $f(z)$ の**孤立特異点**という．Laurent 展開における $z - c$ の負べきの項

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-c)^n$$

を孤立特異点 c における $f(z)$ の**主要部**という．主要部には次の 3 つの場合がある．

(i) 主要部がない場合． $f(z)$ は $z = c$ でも正則になる．D で正則な関数 $f(z)$ が $z = c$ において $f(c) = 0$ となるとき，c を $f(z)$ の**零点**という．そのとき，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$$

とすると，$a_0 = f(c) = 0$ である．$f(z)$ は恒等的には 0 でないとすると，$a_1, a_2, \ldots$ のうち 0 でない最初の係数を a_m とすれば,

$$f(z) = (z-c)^m(a_m + a_{m+1}(z-c) + a_{m+2}(z-c)^2 + \cdots), \quad a_m \neq 0.$$

このとき，m を $f(z)$ の m 位の零点という．

$$f(z) - (z-c)^m g(z)$$

とかけば，$g(z) = a_m + a_{m+1}(z-c) + a_{m+2}(z-c)^2 + \cdots$ は c の十分小さい近傍では，$g(z) \neq 0$ である．

(ii) 主要部が有限項の場合．$0 < |z - c| < R$ において，

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-c)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \quad a_{-m} \neq 0$$

とかける．このとき，c を $f(z)$ の m 位の**極**という．明らかに，

$$g(z) = (z-c)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-c) + a_{-m+2}(z-c)^2 + \cdots$$

は $|z - c| < R$ で正則な関数であり，$g(c) = a_{-m} \neq 0$ であるから，c の十分小さい近傍において $g(z) \neq 0$ である．

(iii) 主要部が無限級数の場合．c を $f(z)$ の**真性特異点**という．

係数 a_{-1} を $f(z)$ の c における**留数**といい，$\mathrm{Res}_{z=c}[f(z)]$ で表す．命題 3.11 より，$r>0$ を十分小さくとれば，c を中心とする半径 r の閉円板 Δ_r について，

$$\int_{\partial\Delta_r} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i\ \mathrm{Res}_{z=c}[f(z)].$$

定理 3.13 (留数の定理)．$f(z)$ が D で有限個の孤立特異点 $c_1,\ldots,c_m$ を除いて正則であり，$\bar{D}$ で連続であるとする．そのとき，

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{z=c_j}[f(z)].$$

[証明]　$r>0$ を十分小さくとって，c_j を中心とする半径 r の閉円板を $\Delta_r(c_j)$ とすると，$E = D - \cup_{j=1}^{m}\Delta_r(c_j)$ において $f(z)$ は正則であり，$\bar{E} = \bar{D} - \cup_{j=1}^{m}\Delta_r(c_j)^o$ で連続である．定理 3.3 より，

$$\int_{\partial E} f(z)\,dz = 0$$

である．$\partial E = \partial D - \cup_{j=1}^{m}\partial\Delta_r(c_j)$ であるから，

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m}\int_{\partial\Delta_r(c_j)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{z=c_j}[f(z)].$$

□

定理 3.14 (偏角の原理)．$f(z)$ をある領域 $D \subset \mathbb{C}$ における有理型関数とし，C を反時計回りに向きづけされた D 内の単純閉曲線とする．C 上には $f(z)$ の零点も極もないとする．$a_1,\ldots,a_m$ を C の内部にある $f(z)$ の零点の全体とし，零点 a_j の位数を μ_j とする．$b_1,\ldots,b_n$ を C の内部にある $f(z)$ の極の全体とし，極 b_k の位数を ν_k とする．そのとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{n}\mu_j - \sum_{k=1}^{n}\nu_k$$

が成り立つ．

[証明]　$g(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ とおく．$a \in D$ の近傍で，

$$f(z) = (z-a)^{\mu}h(z), \qquad h(z)\ \text{は正則，}\ h(a) \neq 0$$

とかける．そのとき，

$$g(z) = \frac{\mu(z-a)^{\mu-1}h(z) + (z-a)^{\mu}h'(z)}{(z-a)^{\mu}h(z)} = \frac{\mu}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

であり，$z=a$ において $\dfrac{h'(z)}{h(z)}$ は正則であるから，$z=a$ は $g(z)$ の位数 1 の極であり，そこでの留数は μ である．したがって，$g(z)$ の C の内部における極は，$a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n$ であり，$\mathrm{Res}_{z=a_j}[g(z)]=\mu_j$, $\mathrm{Res}_{z=b_k}[g(z)]=-\nu_k$ である．留数の定理 (定理 3.13) により，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\,dz=\sum_{j=1}^m \mu_j-\sum_{k=1}^n \nu_k.$$

□

定義 3.15. $f(z)$ が $\mathbb{C}$ 上の**有理型関数**であるとは，$\mathbb{C}$ の各点 c の近傍 U_c において，$f(z)=g_c(z)/h_c(z)$, $g_c(z)$, $h_c(z)$ は U_c 上の正則関数で，$h_c(z)\neq 0$ と表せることである．このとき，$f(z)$ の特異点は高々極であり，それ以外では正則である．

4　複素関数としてのレムニスケート関数

4.1　2 重周期関数

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x)^{-1/2}=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-1/2-n}$$

より，$1/\sqrt{1-x}$ のテイラー展開は

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n.$$

$x=t^4$ を代入して，

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{4n}.$$

$|r|<1$ として，これを 0 から r まで積分すれば，

$$\begin{aligned}u=L(r)&=\int_0^r\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(4n+1)2^{2n}(n!)^2}r^{4n+1}\\&=r+\frac{1}{2}\frac{r^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{r^9}{9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{r^{13}}{13}+\cdots.\end{aligned}$$

$u=L(r)$ の逆関数として，$r=\mathrm{sn}(u)$ が定義された．この級数は複素数 r, $|r|<1$ に対しても収束し，r の正則関数 u を定義する．$\dfrac{du}{dr}(0)=1$ であるから，正則関数の逆関数の定理によって，$r=\mathrm{sn}(u)$ は $u=0$ の近傍で正則な関数になる．

$$L(ir)=ir+\frac{1}{2}\frac{i^5r^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{i^9r^9}{9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{i^{13}r^{13}}{13}+\cdots=iL(r)$$

より,
$$\mathrm{sn}(iu) = \mathrm{sn}(iL(r)) = \mathrm{sn}(L(ir)) = ir = i\,\mathrm{sn}(u)$$
である．これから,
$$i\,\mathrm{sn}'(iu) = i\,\mathrm{sn}'(u), \qquad \mathrm{sn}'(iu) = \mathrm{sn}'(u)$$
である．ここで，命題 2.2 の加法定理が $\mathrm{sn}(u)$ の定義域を複素数に拡張しても成り立つと仮定すれば,
$$\mathrm{sn}(x+iy) = \frac{\mathrm{sn}(x)\,\mathrm{sn}'(iy) + \mathrm{sn}'(x)\,\mathrm{sn}(iy)}{1+\mathrm{sn}^2(x)\,\mathrm{sn}^2(iy)} = \frac{\mathrm{sn}(x)\,\mathrm{sn}'(y) + i\,\mathrm{sn}'(x)\,\mathrm{sn}(y)}{1-\mathrm{sn}^2(x)\,\mathrm{sn}^2(y)}$$
となる．

定義 4.1. 複素数 $z = x+iy$ に対して，$\mathrm{sn}(z)$ を
$$\mathrm{sn}(z) = \frac{\mathrm{sn}(x)\,\mathrm{sn}'(y) + i\,\mathrm{sn}'(x)\,\mathrm{sn}(y)}{1-\mathrm{sn}^2(x)\,\mathrm{sn}^2(y)} \tag{4.1}$$
によって定義する．

$\mathrm{sn}(z)$ の定義 (4.1) より，$z = x+iy$ に対して,
$$\mathrm{sn}(iz) = \mathrm{sn}(-y+ix) = \frac{\mathrm{sn}(-y)\,\mathrm{sn}'(x) + i\,\mathrm{sn}'(-y)\,\mathrm{sn}(x)}{1-\mathrm{sn}^2(-y)\,\mathrm{sn}^2(x)}.$$
$\mathrm{sn}(-y) = -\mathrm{sn}(y)$, $\mathrm{sn}'(-y) = \mathrm{sn}'(y)$ より,
$$\begin{aligned}\mathrm{sn}(iz) &= \frac{-\mathrm{sn}(y)\,\mathrm{sn}'(x) + i\,\mathrm{sn}'(y)\,\mathrm{sn}(x)}{1-\mathrm{sn}^2(y)\,\mathrm{sn}^2(x)} = \frac{i(\mathrm{sn}(x)\,\mathrm{sn}'(y) + i\,\mathrm{sn}'(x)\,\mathrm{sn}(y))}{1-\mathrm{sn}^2(x)\,\mathrm{sn}^2(y)}\\ &= i\,\mathrm{sn}(z).\end{aligned}$$
これから，$i\,\mathrm{sn}'(iz) = i\,\mathrm{sn}'(z)$, $\mathrm{sn}'(iz) = \mathrm{sn}'(z)$ を得る．よって,
$$\mathrm{sn}(iz) = i\,\mathrm{sn}(z), \qquad \mathrm{sn}'(iz) = \mathrm{sn}'(z). \tag{4.2}$$

定理 4.2. 複素関数 $\mathrm{sn}(z)$ は次を満たす．

(1) $\mathrm{sn}(z)$ は開集合
$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \neq \frac{\varpi}{2}(2m+1) + i\frac{\varpi}{2}(2n+1)\ (m, n \in \mathbb{Z}) \right\}$$
において正則である．

(2) 加法定理
$$\mathrm{sn}(z+w) = \frac{\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(w) + \mathrm{sn}'(z)\,\mathrm{sn}(w)}{1+\mathrm{sn}^2(z)\,\mathrm{sn}^2(w)}$$
が，両辺が定義されるすべての $z, w \in \mathbb{C}$ に対して成り立つ．

(3) $z \in \mathbb{C}$ と $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\operatorname{sn}(z + m\varpi + n\varpi i) = (-1)^{m+n} \operatorname{sn}(z)$$

が成り立つ.

(4) $\operatorname{sn}'(z)^2 = 1 - \operatorname{sn}^4(z)$ が成り立つ.

[証明] (1). $\operatorname{sn}(z)$ の実部を $u(x, y)$, 虚部を $v(x, y)$ とすると,

$$u(x, y) = \frac{\operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}'(y)}{1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y)}, \quad v(x, y) = \frac{\operatorname{sn}'(x) \operatorname{sn}(y)}{1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y)}$$

である. 任意の実数 x に対して, $-1 \leq \operatorname{sn}(x) \leq 1$ であるから,

$$1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\varpi}{2}(2m+1),\ y = \frac{\varpi}{2}(2n+1)\ (m, n \in \mathbb{Z})$$

である. よって, Ω において $u(x, y)$, $v(x, y)$ は微分可能であり,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\operatorname{sn}'(x) \operatorname{sn}'(y)}{1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y)} + \frac{2 \operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}'(x) \operatorname{sn}^2(y) \operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}'(y)}{(1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y))^2} \\
&= \frac{\operatorname{sn}'(x) \operatorname{sn}'(y)(1 + \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y))}{(1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y))^2}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}''(y)}{1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y)} + \frac{2 \operatorname{sn}(x)^2 \operatorname{sn}(y) \operatorname{sn}'(y) \operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}'(y)}{(1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y))^2} \\
&= \frac{-2 \operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}^3(y)}{1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y)} + \frac{2 \operatorname{sn}(x)^3 \operatorname{sn}(y)(1 - \operatorname{sn}^4(y))}{(1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y))^2} \\
&= \frac{2 \operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}(y)(\operatorname{sn}^2(x) - \operatorname{sn}^2(y))}{(1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y))^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\operatorname{sn}''(x) \operatorname{sn}(y)}{1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y)} + \frac{2 \operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}'(x) \operatorname{sn}^2(y) \operatorname{sn}'(x) \operatorname{sn}(y)}{(1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y))^2} \\
&= \frac{-2 \operatorname{sn}^3(x) \operatorname{sn}(y)}{1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y)} + \frac{2 \operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}^3(y)(1 - \operatorname{sn}^4(x))}{(1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y))^2} \\
&= \frac{2 \operatorname{sn}(x) \operatorname{sn}(y)(\operatorname{sn}^2(y) - \operatorname{sn}^2(x))}{(1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y))^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\operatorname{sn}'(x) \operatorname{sn}'(y)}{1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y)} + \frac{2 \operatorname{sn}(y) \operatorname{sn}'(y) \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}'(x) \operatorname{sn}(y)}{(1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y))^2} \\
&= \frac{\operatorname{sn}'(x) \operatorname{sn}'(y)(1 + \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}(y)^2)}{(1 - \operatorname{sn}^2(x) \operatorname{sn}^2(y))^2}.
\end{aligned}$$

したがって, コーシー–リーマンの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial x}$$

が成り立っている．また，これらの偏導関数は Ω で連続である．ゆえに，Ω において $\mathrm{sn}(z)$ は正則である．

(2).

$$g(z,w)=\frac{\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(w)+\mathrm{sn}'(z)\,\mathrm{sn}(w)}{1+\mathrm{sn}^2(z)\,\mathrm{sn}^2(w)}$$

とおく．任意の $x_0\in\mathbb{R}$ を固定する．$\mathrm{sn}(x_0+w)$ と $g(x_0,w)$ は w の有理型関数であり，命題2.2により，$w\in\mathbb{R}$ に対しては一致する．一致の定理より，すべての $w\in\mathbb{C}$ に対して，$\mathrm{sn}(x_0+w)=g(x_0,w)$ である．次に $w_0\in\mathbb{C}$ を固定する．$\mathrm{sn}(z+w_0)$ と $g(z,w_0)$ は $z\in\mathbb{R}$ のとき一致する．一致の定理より，すべての $z\in\mathbb{C}$ に対して，$\mathrm{sn}(z+w_0)=g(z,w_0)$ である．

(3). (4.2) より，$m\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$\mathrm{sn}(m\varpi)=0,\quad \mathrm{sn}(m\varpi i)=i\,\mathrm{sn}(m\varpi)=0,\quad \mathrm{sn}'(m\varpi i)=\mathrm{sn}'(m\varpi)=(-1)^m.$$

よって，$m,n\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$\mathrm{sn}(z+m\varpi)=\frac{\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(m\varpi)+\mathrm{sn}'(z)\,\mathrm{sn}(m\varpi)}{1+\mathrm{sn}^2(z)\,\mathrm{sn}^2(m\varpi)}=(-1)^m\,\mathrm{sn}(z),$$
$$\mathrm{sn}(z+n\varpi i)=\frac{\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(n\varpi i)+\mathrm{sn}'(z)\,\mathrm{sn}(n\varpi i)}{1+\mathrm{sn}^2(z)\,\mathrm{sn}^2(n\varpi i)}=(-1)^n\,\mathrm{sn}(z).$$

したがって，

$$\mathrm{sn}(z+m\varpi+n\varpi i)=(-1)^n\,\mathrm{sn}(z+m\varpi)=(-1)^n(-1)^m\,\mathrm{sn}(z)=(-1)^{m+n}\,\mathrm{sn}(z).$$

(4). 実数 x に対して，$\mathrm{sn}'(x)^2=1-\mathrm{sn}^4(x)$ が成り立つから， □

定理4.2 の (3) で，$(m,n)=(1,1),(1,-1)$ とすれば，

$$\mathrm{sn}(z+(1+i)\varpi)=\mathrm{sn}(z),\qquad \mathrm{sn}(z+(1-i)\varpi)=\mathrm{sn}(z)\tag{4.3}$$

が成り立つ．したがって，その導関数についても，

$$\mathrm{sn}'(z+(1+i)\varpi)=\mathrm{sn}'(z),\qquad \mathrm{sn}'(z+(1-i)\varpi)=\mathrm{sn}'(z)\tag{4.4}$$

が成り立つ．これは $\mathrm{sn}(z)$ および $\mathrm{sn}'(z)$ が $\mathbb{C}$ の格子

$$\Lambda=\{m(1+i)\varpi+n(1-i)\varpi\,|\,m,n\in\mathbb{Z}\}$$

を周期として持つ**2重周期関数**であることを示している．

4.2 零点と極

有理型関数 $g(z)$ に対して，$z_0\in\mathbb{C}$ が $g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0$ を満たすとき，z_0 は $g(z)$ の1位の零点である．また，z_0 でのローラン展開が

$$g(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\qquad a_{-1}\neq 0$$

のとき，z_0 は $g(z)$ の1位の極である．

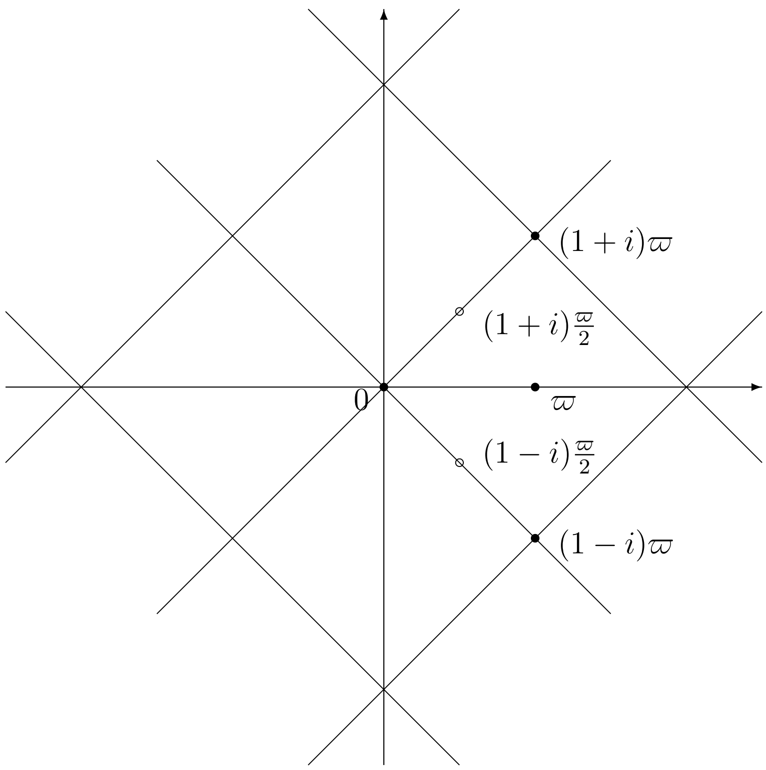


図 3: 格子 Λ

定理 4.3. $\mathrm{sn}(z)$ の零点はすべて位数 1 であり，$z = (m+in)\varpi$, $m, n \in \mathbb{Z}$ である．$\mathrm{sn}(z)$ の極はすべて位数 1 であり，$z = (m+in)\dfrac{\varpi}{2}$, m, n は奇数である．

[証明]　$\mathrm{sn}(0) = 0$, $\mathrm{sn}'(0) = 1$ であり，定理 4.2 の (3) より，$\mathrm{sn}(z+(m+in)\varpi) = (-1)^{m+n}\,\mathrm{sn}(z)$ であるから，$z = (m+in)\varpi$, $m, n \in \mathbb{Z}$ は $\mathrm{sn}(z)$ の 1 位の零点である．

$\mathrm{sn}(\varpi/2) = 1$, $\mathrm{sn}'(\varpi/2) = 0$ であるから，加法定理より，

$$\mathrm{sn}\left(z+\frac{\varpi}{2}\right) = \frac{\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'\left(\frac{\varpi}{2}\right)+\mathrm{sn}'(z)\,\mathrm{sn}\left(\frac{\varpi}{2}\right)}{1+\mathrm{sn}^2(z)\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{\varpi}{2}\right)} = \frac{\mathrm{sn}'(z)}{1+\mathrm{sn}^2(z)}.$$

$\mathrm{sn}(i\varpi/2) = i\,\mathrm{sn}(\varpi/2) = i$, $\mathrm{sn}'(i\varpi/2) = \mathrm{sn}'(\varpi/2) = 0$ であるから，加法定理より，

$$\mathrm{sn}\left(z \pm \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'\left(\pm\frac{\varpi}{2}i\right)+\mathrm{sn}'(z)\,\mathrm{sn}\left(\pm\frac{\varpi}{2}i\right)}{1+\mathrm{sn}^2(z)\,\mathrm{sn}^2\left(\pm\frac{\varpi}{2}i\right)} = \frac{\pm i\,\mathrm{sn}'(z)}{1-\mathrm{sn}^2(z)}.$$

これらの 2 式をかけると，$\mathrm{sn}'(z)^2 = 1-\mathrm{sn}^4(z)$ であるから，

$$\mathrm{sn}\left(z+\frac{\varpi}{2}\right)\mathrm{sn}\left(z \pm \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{\pm i\,\mathrm{sn}'(z)^2}{(1+\mathrm{sn}^2(z))(1-\mathrm{sn}^2(z))} = \pm i. \tag{4.5}$$

したがって，(4.5) において z を $z+\varpi/2$ で置き換えれば，

$$\mathrm{sn}(z+\varpi)\,\mathrm{sn}\left(z+(1\pm i)\frac{\varpi}{2}\right) = \pm i.$$

$\mathrm{sn}(\varpi) = 0,\ \mathrm{sn}'(\varpi) = -1$ であるから，加法定理より，

$$\mathrm{sn}(z+\varpi) = \frac{\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(\varpi) + \mathrm{sn}'(z)\,\mathrm{sn}(\varpi)}{1+\mathrm{sn}^2(z)\,\mathrm{sn}^2(\varpi)} = -\,\mathrm{sn}(z)$$

であるから，

$$\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}\left(z+(1\pm i)\frac{\varpi}{2}\right) = \mp i. \tag{4.6}$$

$z=0$ は $\mathrm{sn}(z)$ の 1 位の零点であり，$\mathrm{sn}'(0)=1$ であるから，

$$\lim_{z\to 0}\mathrm{sn}\left(z+(1\pm i)\frac{\varpi}{2}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\mp i}{\mathrm{sn}(z)} = \infty$$

であり，

$$\lim_{z\to 0} z\,\mathrm{sn}\left(z+(1\pm i)\frac{\varpi}{2}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\mp iz}{\mathrm{sn}(z)} = \frac{\mp i}{\mathrm{sn}'(0)} = \mp i$$

である．これは $z=(1\pm i)\dfrac{\varpi}{2}$ が $\mathrm{sn}(z)$ の 1 位の極であることを示している．定理 4.2 の (3) から，$\mathrm{sn}(z+m\varpi+n\varpi i) = (-1)^{m+n}\,\mathrm{sn}(z)$ であるから，$z=(1\pm i)\dfrac{\varpi}{2}+m\varpi+n\varpi i$, $m,n\in\mathbb{Z}$，も $\mathrm{sn}(z)$ の 1 位の極であることがわかる．定理 4.2 の (1) によって，$\mathrm{sn}(z)$ の特異点はこれら以外にはない．さらに，z_0 が $\mathrm{sn}(z)$ の零点ならば，(4.6) によって，$z_0+(1\pm i)\frac{\varpi}{2}$ は $\mathrm{sn}(z)$ の極であるから，$m,n\in\mathbb{Z}$,

$$z_0+(1\pm i)\frac{\varpi}{2} = (1\pm i)\frac{\varpi}{2}+m\varpi+n\varpi i, \qquad z_0 = m\varpi+n\varpi i$$

である． □

命題 4.4. 複素数 w_0 を固定する．このとき，方程式 $\mathrm{sn}(z)=w_0$ は解 $z_0\in\mathbb{C}$ を持つ．さらに，z_0 が 1 つの解であるとき，すべての解は

$$z = (-1)^{m+n}z_0 + (m+in)\varpi, \qquad m,n\in\mathbb{Z}$$

で与えられる．

[証明]　$0,\ (1-i)\varpi,\ 2\varpi,\ (1+i)\varpi$ を頂点とする正方形を基本平行四辺形といい，F とかく．

$$F = \{z\in\mathbb{C} \,|\, z = t_1(1-i)\varpi + t_2(1+i)\varpi,\ 0\le t_1,\ t_2\le 1\}.$$

さらに，$a\in\mathbb{C}$ だけ F を平行移動したものを $F[a]$ で表す.

$$F[a] = \{a+z \,|\, z\in F\}.$$

明らかに，$\mathbb{C} = F+\Lambda = F[a]+\Lambda$ が成り立つ．$f(z)=\mathrm{sn}(z)-w_0$ とおく．$f(z)$ の極は $\mathrm{sn}(z)$ の極と同じで，それは定理 4.3 より，$(1+i)\varpi/2$ を $(m+in)\varpi$, $m,n\in\mathbb{Z}$ だけ平行移動したものである．また，命題 3.7 より，$f(z)$ の零点は孤立しているか

ら，図のように適当に十分小さな正の実数 ε をとり，基本平行四辺形 $F[-\varepsilon]$ の辺上に $f(z)$ の零点および極がないようにできる．$F[-\varepsilon]$ の内部における $f(z)$ の零点の重複度を込めた個数を Z，$f(z)$ の極の重複度を込めた個数を P とすれば，定理 3.14 より，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F[-\varepsilon]}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = Z - P \tag{4.7}$$

である．$F[-\varepsilon]$ の内部における極は $(1+i)\varpi/2$ と $(1-i)\varpi/2$ の 2 つだけであり，ともに 1 位の極であるから，$P=2$ である．(4.7) の左辺の積分を計算するために，$F[-\varepsilon]$ の境界 $\partial F[-\varepsilon]$ を 4 辺 A,B,C,D に分ける．

A:　$-\varepsilon$ から $-\varepsilon+(1-i)\varpi$ へ至る線分.

B:　$-\varepsilon+(1-i)\varpi$ から $-\varepsilon+2\varpi$ へ至る線分.

C:　$-\varepsilon+2\varpi$ から $-\varepsilon+(1+i)\varpi$ へ至る線分.

D:　$-\varepsilon+(1+i)\varpi$ から $-\varepsilon$ へ至る線分.

ここで，$\mathrm{sn}(z)$, $\mathrm{sn}'(z)$ の周期性 (4.3), (4.3) を用いれば，$f(z+(1+i)\varpi) = f(z)$, $f'(z+(1+i)\varpi) = f'(z)$, $f(z+(1-i)\varpi) = f(z)$, $f'(z+(1-i)\varpi) = f'(z)$ であるから，

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon+(1-i)\varpi}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon+(1-i)\varpi}\frac{f'(z+(1+i)\varpi)}{f(z+(1+i)\varpi)}\,dz\\
&= \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon+(1-i)\varpi}\left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f'(z+(1+i)\varpi)}{f(z+(1+i)\varpi)}\right)dz\\
&= 0,\\
\int_B \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \int_D \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon+(1+i)\varpi}\frac{f'(z+(1-i)\varpi)}{f(z+(1-i)\varpi)}\,dz - \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon+(1+i)\varpi}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\\
&= \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon+(1+i)\varpi}\left(\frac{f'(z+(1-i)\varpi)}{f(z+(1-i)\varpi)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right)dz\\
&= 0.
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$Z - P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F[-\varepsilon]}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0,$$

$Z-P=0$, $Z=P=2$ である．したがって，$F[-\varepsilon]$ の内部において，$f(z) = \mathrm{sn}(z) - w_0$ は，2 つの位数 1 の零点か，または 1 つの位数 2 の零点を持つ．特に，零点 $z_0 \in F[-\varepsilon]$ が存在する．定理 4.2 の (3) と $\mathrm{sn}(z)$ が奇関数であることから，$m,n\in\mathbb{Z}$ について，

$$\mathrm{sn}((-1)^{m+n}z_0 + (m+in)\varpi) = (-1)^{m+n}\,\mathrm{sn}((-1)^{m+n}z_0) = \mathrm{sn}(z_0) = w_0.$$

すなわち，別の解として，$(-1)^{m+n}z_0+(m+in)\varpi$ を得る．これ以外に解がないことを示すことが残されている．$m=1, n=0$ として得られる解 $-z_0+\varpi$ について考える．$\mathbb{C}=F[-\varepsilon]+\Lambda$ であるから，適当な整数 a, b をとれば，

$$z_1=-z_0+\varpi+a(1-i)\varpi+b(1+i)\varpi\in F[-\varepsilon]$$

にできる．

$$\begin{aligned}z_1&=-z_0+\{(a+b+1)+i(b-a)\}\varpi\\&=(-1)^{a+b+1+b-a}z_0+\{(a+b+1)+i(b-a)\}\varpi\end{aligned}$$

であるから，z_1 も解であり，$F[-\varepsilon]$ の内部にある．この z_1 が z_0 と異なれば，z_0 と z_1 が $F[-\varepsilon]$ の内部における位数 1 の 2 つの零点となり，これですべての零点が求まったことになる．もし，$z_1=z_0$ ならば，$m=a+b+1, n=b-a$ とおけば，$m+n=2b+1$ は奇数であり，

$$z_0=(m+in)\frac{\varpi}{2}$$

である．$\operatorname{sn}(z+\varpi)=-\operatorname{sn}(z)$ より，$\operatorname{sn}'(z+\varpi)=-\operatorname{sn}'(z)$ である．よって，$\operatorname{sn}'(-z+\varpi)=-\operatorname{sn}'(-z)=-\operatorname{sn}'(z)$ である．これと $\operatorname{sn}'(z)$ の 2 重周期性から，

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}'(z_0)=\operatorname{sn}'(z_1)&=\operatorname{sn}'(-z_0+\varpi+\varpi+a(1-i)\varpi+b(1+i)\varpi)\\&=\operatorname{sn}'(-z_0+\varpi)=-\operatorname{sn}'(z_0).\end{aligned}$$

ゆえに，$f'(z_0)=\operatorname{sn}'(z_0)=0$ である．よって，z_0 が $F[-\varepsilon]$ の内部における $f(z)$ の唯一つの 2 位の零点となり，これですべての零点が求まったことになる． □

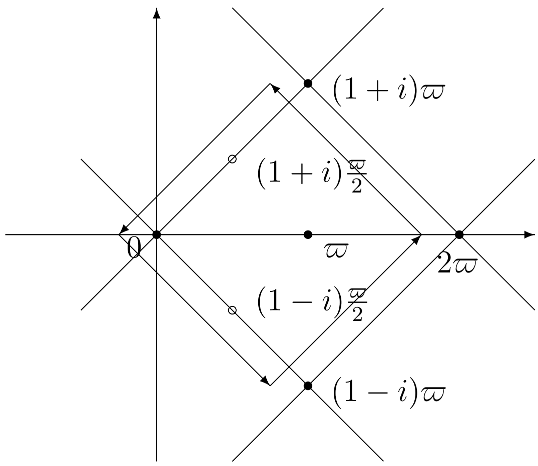


図 4: 基本平行四辺形 F, $F[z_0]$

5　楕円関数

5.1　ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数

定義 5.1. $f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上の有理型関数とする．$\omega \in \mathbb{C}$ について

$$f(z+\omega) = f(z)$$

が成り立つとき，ω は $f(z)$ の**周期**であるという．Λ を $f(z)$ の周期全体のなす集合とすれば，Λ は加群である．

定義 5.2. $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(z)$ が，$\mathbb{R}$ 上 1 次独立な ω_1, ω_2 を周期として持つとき，$f(z)$ は 2 重周期 ω_1, ω_2 の**楕円関数**であるという．そのとき，ω_1, ω_2 によって生成される加群を $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ とすれば，

$$f(z+\omega) = f(z), \quad \forall \omega \in \Lambda$$

である．

レムニスケート関数 $\mathrm{sn}(z)$ とその導関数 $\mathrm{sn}'(z)$ は 2 重周期関数 $(1+i)\varpi$, $(1-i)\varpi$ を持つ楕円関数である．

ワイエルシュトラスは級数によって，直接的に 2 重周期関数を定義した．$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上 1 次独立な複素数とし，$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ とおく．$L' = L - \{0\}$ とおく．

補題 5.3. $\sigma > 2$ とすれば，

$$\sum_{\omega \in L'} \frac{1}{|\omega|^\sigma}$$

は収束する．

[証明]　$n \in \mathbb{Z}, n > 0$ に対して，$n\omega_1 - n\omega_2$, $n\omega_1 + n\omega_2$, $-n\omega_1 + n\omega_2$, $-n\omega_1 - n\omega_2$ を頂点とする平行四辺形を P_n とする．

$$P_n = \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid a, b \in \mathbb{R},\ \max(|a|, |b|) = n\}.$$

このとき，

$$P_n \cap L = \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid a, b \in \mathbb{Z},\ \max(|a|, |b|) = n\}$$

であるから，$P_n \cap L$ の点の個数は $4 + 4(2n-2+1) = 8n$ である．$r > 0$ を円 $|z| = r$ が P_1 の中に入るようにとれば，$\omega \in P_n \cap L$ ならば，$|\omega| \geq nr$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{\omega \in L'} \frac{1}{|\omega|^\sigma} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega \in P_n \cap L} \frac{1}{|\omega|^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega \in P_n \cap L} \frac{1}{n^\sigma r^\sigma} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{n^\sigma r^\sigma} = 8r^{-\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma-1}} < \infty.\end{aligned}$$

□

定義 5.4. ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数 $\wp(z)=\wp(z;L)$ を

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in L'}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{5.1}$$

によって定義する．

命題 5.5. $\wp(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり，極は L の各点であり，それらは位数 2 である．

[証明]　$z\in\mathbb{C}$ とする．各 $\omega\in L'$ に対して，

$$g_\omega(z)=\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}=\frac{2z\left(1-\dfrac{z}{2\omega}\right)}{\omega^3\left(1-\dfrac{z}{\omega}\right)^2}$$

とおく．$g_\omega(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数である．$M>0$ を任意にとる．$N\geq 2M$ とする．$|z|\leq M$ のとき，$|\omega|\geq N$ ならば，

$$|z-\omega|\geq|\omega|-|z|\geq|\omega|-M\geq|\omega|-\frac{N}{2}\geq\frac{1}{2}|\omega|,\qquad \frac{1}{2}|\omega|\geq\frac{N}{2}\geq M\geq|z|,$$

$$\begin{aligned}\left|1-\frac{z}{2\omega}\right|&\leq 1+\frac{|z|}{2|\omega|}\leq 1+\frac{1}{2|\omega|}\frac{|\omega|}{2}=\frac{5}{4},\\ \left|1-\frac{z}{\omega}\right|&\geq\frac{|\omega-z|}{|\omega|}\geq\frac{1}{|\omega|}\frac{|\omega|}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

したがって，$|z|\leq M$, $|\omega|\geq N$ に対して，

$$|g_\omega(z)|=\frac{2|z|}{|\omega|^3}\frac{\left|1-\dfrac{z}{2\omega}\right|}{\left|1-\dfrac{z}{\omega}\right|^2}\leq\frac{2|z|}{|\omega|^3}\frac{\dfrac{5}{4}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\frac{10|z|}{|\omega|^3}\leq\frac{10M}{|\omega|^3}.$$

補題 5.3 より，

$$\sum_{\substack{\omega\in L\\|\omega|\geq N}}|g_\omega(z)|\leq\sum_{\substack{\omega\in L\\|\omega|\geq N}}\frac{10M}{|\omega|^3}\leq 10M\sum_{\substack{\omega\in L\\|\omega|\geq N}}\frac{1}{|\omega|^3}<\infty.$$

これは，級数 $\sum_{\substack{\omega\in L\\|\omega|\geq 2M}}g_\omega(z)$ が $|z|\leq M$ において一様に絶対収束することを示している．したがって，これは $|z|<M$ における z の正則関数である．よって，

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\substack{\omega\in L'\\|\omega|<2M}}g_\omega(z)+\sum_{\substack{\omega\in L\\|\omega|\geq 2M}}g_\omega(z)$$

において，第1項と第2項は有限和であり，$\mathbb{C}$ 上の有理型関数である．ゆえに，$\wp(z)$ は $|z| < M$ における有理型正則関数である．$M > 0$ は任意であったから，$\wp(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数である．各 $\omega \in L'$ を一つ取り出せば，$g_\omega(z)$ は $z = \omega$ で2位の極を持ち，これ以外の項は $|z - \omega| < \varepsilon$ において正則である．$z = 0$ においても同様である．以上によって，$\wp(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり，極は L の各点であり，それらは位数2である． □

命題 5.6. $\wp(z)$ の導関数は

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^3}$$

であり，極は L の各点であり，それらは位数3である．

[証明]　$M > 1$ とし，$|z| \le M$ とする．$\omega \in L, |\omega| \ge 2M$ ならば，

$$|z-\omega| \ge |\omega| - |z| \ge |\omega| - M \ge |\omega| - \frac{1}{2}|\omega| = \frac{1}{2}|\omega|$$

であるから，補題5.3より，

$$\sum_{\substack{\omega\in L\\|\omega|\ge 2M}}\frac{1}{|z-\omega|^3} \le 8\sum_{\substack{\omega\in L\\|\omega|\ge 2M}}\frac{1}{|\omega|^3} \le 8\sum_{\omega\in L'}\frac{1}{|\omega|^3} < \infty.$$

したがって，

$$-2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^3} = \frac{-2}{z^3} + \sum_{\substack{\omega\in L'\\|\omega|<2M}}\frac{-2}{(z-\omega)^3} + \sum_{\substack{\omega\in L'\\|\omega|\ge 2M}}\frac{-2}{(z-\omega)^3}$$

において右辺の第3項は $|z| \le M$ において一様に絶対収束し，そこで正則関数である．これから項別積分でき，

$$\int_0^z \sum_{\substack{\omega\in L'\\|\omega|\ge 2M}}\frac{-2}{(u-\omega)^3}\,du = \sum_{\substack{\omega\in L'\\|\omega|\ge 2M}}\int_0^z\frac{-2}{(u-\omega)^3}\,du = \sum_{\substack{\omega\in L'\\|\omega|\ge 2M}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)$$

を得る．いいかえれば，

$$\frac{d}{dz}\sum_{\substack{\omega\in L'\\|\omega|\ge 2M}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) = \sum_{\substack{\omega\in L'\\|\omega|\ge 2M}}\frac{-2}{(z-\omega)^3}$$

である．有限和については，明らかに，

$$\frac{d}{dz}\sum_{\substack{\omega\in L'\\|\omega|<2M}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) = \sum_{\substack{\omega\in L'\\|\omega|<2M}}\frac{-2}{(z-\omega)^3}$$

である．したがって，

$$
\begin{aligned}
\wp'(z) &= \frac{-2}{z^3} + \frac{d}{dz}\sum_{\substack{\omega\in L' \\ |\omega|<2M}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) + \frac{d}{dz}\sum_{\substack{\omega\in L' \\ |\omega|\geq 2M}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) \\
&= \frac{-2}{z^3}\sum_{\substack{\omega\in L' \\ |\omega|<2M}}\frac{-2}{(z-\omega)^3} + \sum_{\substack{\omega\in L' \\ |\omega|\geq 2M}}\frac{-2}{(z-\omega)^3} \\
&= \sum_{\omega\in L}\frac{-2}{(z-\omega)^3}.
\end{aligned}
$$

よって，$\wp'(z)$ の極は L の各点であり，それらは位数 3 の極である． □

命題 5.7. $\wp(z)$ は偶関数であり，$\wp'(z)$ は奇関数である．

[証明]　$L' = \{-\omega' \mid \omega' \in L'\}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\wp(-z) &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\omega\in L'}\left(\frac{1}{(-z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in L'}\left(\frac{1}{(z+\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega'\in L'}\left(\frac{1}{(z-\omega')^2}-\frac{1}{\omega'^2}\right) = \wp(z).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\wp'(-z) &= -2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(-z-\omega)^3} = 2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z+\omega)^3} \\
&= 2\sum_{\omega'\in L}\frac{1}{(z-\omega')^3} = -\wp'(z).
\end{aligned}
$$

□

命題 5.8. $\wp(z)$, $\wp'(z)$ は L を周期とする 2 重周期関数である．

[証明]　まず，$\wp'(z)$ についての周期性を示す．$\omega_0 \in L$ とすれば，$L = \omega_0 + L$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\wp'(z+\omega_0) &= -2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z+\omega_0-\omega)^3} = -2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-(\omega-\omega_0))^3} \\
&= -2\sum_{\omega'\in L}\frac{1}{(z-\omega')^3} = \wp'(z).
\end{aligned}
$$

したがって，$f(z) = \wp(z+\omega_0)-\wp(z)$ とおけば，$f'(z) = 0$ である．ゆえに，$f(z) = C$，C は定数である．$\omega_0 = \omega_1, \omega_2$ とすれば，$\wp(z+\omega_1)-\wp(z) = C_1$, $\wp(z+\omega_2)-\wp(z) = C_2$,

C_1, C_2 は定数である．ここで，それぞれ，$z = -\omega_1/2$, $z = -\omega_2/2$ とおけば，$\wp(z)$ は偶関数であるから，

$$C_1 = \wp(\omega_1/2) - \wp(-\omega_1/2) = 0, \quad C_2 = \wp(\omega_2/2) - \wp(-\omega_2/2) = 0$$

を得る．ゆえに，$\wp(z+\omega_1) = \wp(z)$, $\wp(z+\omega_2) = \wp(z)$ である． $\square$

$\mathrm{sn}'(z)^2 = 1 - \mathrm{sn}^4(z)$ であったから，$\wp'(z)$ と $\wp(z)$ も代数的な関係があると考えられる．それを示すために，$z=0$ における $\wp(z)$, $\wp'(z)$ のローラン展開を求めておく．$d = \min\{|\omega| \mid \omega \in L'\} > 0$ とおき，$r > 0$ を $0 < r < d$ となるようにとれば，$\wp(z) - \dfrac{1}{z^2}$ は $|z| < r$ において正則である．$\omega \in L'$ とすれば，$|\omega| \geq d$ であるから，$|z| < r$ ならば，$\left|\dfrac{z}{\omega}\right| < \dfrac{r}{|\omega|} \leq \dfrac{r}{d} < 1$ である．よって，

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{1}{\left(1-\dfrac{z}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^n,$$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\omega^{n+2}}z^n.$$

したがって，

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega\in L'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\omega^{n+2}}z^n.$$

この 2 重和の絶対収束が示されれば，和の順序が交換でき，

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\sum_{\omega\in L'}\frac{1}{\omega^{n+2}}\right)z^n$$

となる．ここで，$n \geq 3$ に対して，

$$G_n = G_n(L) = \sum_{\omega\in L'}\frac{1}{\omega^n}$$

とおけば，

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)G_{n+2}\,z^n.$$

$-L' = L'$ であることから，奇数 n については，$G_n(L) = 0$ であることがわかる．結局，$\wp(z)$ のローラン展開は

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2}\,z^{2n} \tag{5.2}$$

となる．2 重和の絶対収束することを示そう．$\left|\dfrac{z}{\omega}\right| \leq \dfrac{r}{d} < 1$ より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{|\omega|^{n+2}} |z|^n &= \frac{2|z|}{|\omega|^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2} \left|\frac{z}{\omega}\right|^{n-1} \\ &\leq \frac{2|z|}{|\omega|^3} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{r}{d}\right)^{n-1} = \frac{2|z|}{|\omega|^3} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{r}{d}\right)^2}.\end{aligned}$$

補題 5.3 より，

$$\sum_{\omega \in L'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{|\omega|^{n+2}} |z|^n \leq \sum_{\omega \in L'} \frac{2|z|}{|\omega|^3} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{r}{d}\right)^2} = \frac{2|z|}{\left(1 - \dfrac{r}{d}\right)^2} \sum_{\omega \in L'} \frac{1}{|\omega|^3} < \infty.$$

$\wp'(z)$ についても，同様に，ローラン展開を求めることができるが，$\wp(z)$ のローラン展開を項別微分しても得られる．結局，

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n+1) G_{2n+2}\, z^{2n-1} \tag{5.3}$$

となる．最初の数項を具体的にかけば，

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + 7G_8 z^6 + \cdots, \\ \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + 42G_8 z^5 + \cdots\end{aligned}$$

である．これから，

$$\begin{aligned}\wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - 24G_4 \frac{1}{z^2} - 80G_6 + (36G_4^2 - 168G_8) z^2 + \cdots, \\ \wp(z)^2 &= \frac{1}{z^4} + 6G_4 + 10G_6 z^2 + (9G_4^2 + 14G_8) z^4 + \cdots, \\ \wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + 9G_4 \frac{1}{z^2} + 15G_6 + (27G_4^2 + 21G_8) z^2 + \cdots\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 &= -60G_4 \frac{1}{z^2} - 140G_6 - (72G_4^2 + 252G_8) z^2 + \cdots, \\ \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4 \wp(z) &= -140G_6 + (108G_4^2 + 252G_8) z^2 + \cdots.\end{aligned}$$

したがって，$f(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z)$ とおけば，$f(z)$ は $|z| < r$ において正則である．$\wp(z)$, $\wp'(z)$ の周期性から，各 $\omega \in L$ に対して，$f(z+\omega) = f(z)$ であり，$f(z)$ は $z = \omega$ においても正則である．L 以外の点では $\wp(z)$, $\wp'(z)$ は正則で

あるから，$f(z)$ は全複素平面上で正則である．特に，$\mathbb{C}$ 上で連続であるから，コンパクト集合である基本平行四辺形

$$F = \{a\omega_1 + b\omega_2 \,|\, a, b \in \mathbb{R},\ 0 \leq a, b \leq 1\}$$

において，$|f(z)|$ は最大値 M をとる．任意の $z \in \mathbb{C}$ は $z = z' + \omega$, $z' \in F, \omega \in L$ とかけるから，$|f(z)| = |f(z'+\omega)| = |f(z')| \leq M$ である．ゆえに，$f(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で有界な正則関数である．定理 3.10 によって，$f(z)$ は定数である．$f(z) = f(0) = -160G_6$ である．以上によって，

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) = -160G_6,$$

すなわち，

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 160G_6$$

が示された．そこで，

$$g_2 = g_2(L) = 60G_4 = 60\sum_{\omega\in L'}\frac{1}{\omega^4},$$
$$g_3 = g_3(L) = 140G_6 = 140\sum_{\omega\in L'}\frac{1}{\omega^6}$$

とおけば，$\wp(z)$ と $\wp'(z)$ は関係式

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \tag{5.4}$$

を満たす．これを微分して，

$$2\wp'(z)\wp''(z) = 12\wp(z)^2\wp'(z) - g_2\wp'(z),$$
$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{g_2}{2}. \tag{5.5}$$

$\wp(z), \wp'(z)$ の零点について調べよう．基本平行四辺形 F を $a \in \mathbb{C}$ だけ平行移動したものを $F[a] = F + a$ と表す．a を適当にとって，$F[a]$ の辺上には $\wp(z), \wp'(z)$ の零点も極もないとしてよい．$F[a]$ の中における $\wp(z)$ の重複度を込めた零点の個数を Z，極の個数を P，$\wp'(z)$ の重複度を込めた零点の個数を Z'，極の個数を P' とすると，命題 4.4 の証明と同様に，偏角の原理 (定理 3.14) と $\wp(z)$, $\wp'(z)$ の周期性によって，$Z = P, Z' = P'$ であることがわかる．また，$\wp(z)$ の極は L の各点であり，位数 2 であるから，$P = 2$ がわかる．$\wp'(z)$ の極は L の各点であり，位数 3 であるから，$P' = 3$ がわかる．したがって，$N = P = 2, N' = P' = 3$ である．

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right),\quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right),\quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$$

とおく．$\wp'(z)$ は奇関数であるから，$\wp'(-\omega_1/2) = -\wp'(\omega_1/2)$ であり，周期性より，$\wp'(-\omega_1/2) = \wp'(-\omega_1/2 + \omega_1) = \wp'(\omega_1/2)$ であるから，$-\wp'(\omega_1/2) = \wp'(\omega_1/2)$,

$\wp'(\omega_1/2) = 0$ である．同様に，$\wp'(\omega_2/2) = 0$, $\wp'((\omega_1+\omega_2)/2) = 0$ である．よって，基本平行四辺形 F の中に $\wp'(z)$ の零点は 1 位の零点が丁度 3 個あることがわかった．また，これは，$\wp(z) - e_k$ $(k = 1, 2, 3)$ が $z = \omega_k/2$ を丁度 2 位の零点として持つことを意味する (ただし，$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ とおいた)．したがって，基本平行四辺形 F の中に $\wp(z) - e_k$ の零点は 2 位の零点が丁度 1 つだけあり，それは $z = \omega_k/2$ であることがわかった．したがって，e_1, e_2, e_3 は相異なる．このとき，(5.4) において，$z = \omega_k/2$ とおけば,

$$0 = 4e_k^3 - g_2 e_k - g_3, \qquad k = 1, 2, 3$$

を得る．すなわち，3 次多項式 $4X^3 - g_2 X - g_3 \in \mathbb{C}[X]$ は相異なる 3 根 e_1, e_2, e_3 を持つ．よって，

$$4X^3 - g_2 X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3)$$

と因数分解される．この 3 次多項式の判別式は,

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$$

である．実際,

$$h(X) = (X - e_1)(X - e_2)(X - e_3) = X^3 - \frac{g_2}{4}X - \frac{g_3}{4}$$

とおけば,

$$\begin{aligned} h'(e_1) &= (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = 3e_1^2 - \frac{g_2}{4}, \\ h'(e_2) &= (e_2 - e_1)(e_2 - e_3) = 3e_2^2 - \frac{g_2}{4}, \\ h'(e_3) &= (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) = 3e_3^2 - \frac{g_2}{4} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \Delta &= 16(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2 = -h'(e_1)h'(e_2)h'(e_3) \\ &= -16\left(3e_1^2 - \frac{g_2}{4}\right)\left(3e_2^2 - \frac{g_2}{4}\right)\left(3e_3^2 - \frac{g_2}{4}\right). \end{aligned}$$

$g_3/4 = e_1 e_2 e_3 \neq 0$ とすると，$4e_k^3 - g_2 e_k - g_3 = 0$ より,

$$e_k^2 = \frac{g_2}{4} + \frac{g_3}{4e_k}, \qquad 3e_k^2 - \frac{g_2}{4} = \frac{g_2}{2} + \frac{3g_3}{4e_k},$$

$$
\begin{aligned}
\Delta &= -16\left(\frac{g_2}{2}+\frac{3g_3}{4e_1}\right)\left(\frac{g_2}{2}+\frac{3g_3}{4e_2}\right)\left(\frac{g_2}{2}+\frac{3g_3}{4e_3}\right)\\
&= -16\frac{g_2^3}{8e_1e_2e_3}\left(e_1+\frac{3g_3}{2g_2}\right)\left(e_2+\frac{3g_3}{2g_2}\right)\left(e_3+\frac{3g_3}{2g_2}\right)\\
&= \frac{2g_2^3}{e_1e_2e_3}\left(-e_1-\frac{3g_3}{2g_2}\right)\left(-e_2-\frac{3g_3}{2g_2}\right)\left(-e_3-\frac{3g_3}{2g_2}\right)\\
&= \frac{8g_2^3}{g_3}h\left(-\frac{3g_3}{2g_2}\right) = \frac{8g_2^3}{g_3}\left(\left(-\frac{3g_3}{2g_2}\right)^3-\frac{g_2}{4}\left(-\frac{3g_3}{2g_2}\right)-\frac{g_3}{4}\right)\\
&= -27g_3^2+3g_2^3-2g_2^3 = g_2^3-27g_3^2.
\end{aligned}
$$

$g_3=0$ のときは，$\{k,l,m\}=\{1,2,3\}$, $e_k=0$, $e_l=-e_m$, $e_m^2=g_2/4$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\Delta &= -16\left(-\frac{g_2}{4}\right)\left(3\frac{g_2}{4}-\frac{g_2}{4}\right)\left(3\frac{g_2}{4}-\frac{g_2}{4}\right)\\
&= g_2^3 = g_2^3-27g_3^2.
\end{aligned}
$$

以上まとめると，

命題 5.9. $\omega_3=\omega_1+\omega_2$ とおく．$e_k=\wp(\omega_k/2)$, $k=1,2,3$ とおけば，e_1,e_2,e_3 は相異なり，

$$
4X^3-g_2X-g_3=4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)
$$

が成り立つ．また，$\Delta=g_2^3-27g_3^2\neq 0$ である．基本平行四辺形 F の中の $\wp'(z)$ の零点は，$\omega_1/2$, $\omega_2/2$, $\omega_3/2$ の 3 点であり，いずれも位数 1 の零点である．$k=1,2,3$ について，基本平行四辺形 F の中の $\wp(z)-e_k$ の零点は $\omega_k/2$ だけであり，これは位数 2 の零点である．

5.2　アイゼンシュタイン級数

$\mathcal{H}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\,|\,y>0\}$ を複素上半平面とする．偶数 $k>2$ に対して，**アイゼンシュタイン級数** $G_k(\tau)$ を

$$
G_k(\tau)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\frac{1}{(m\tau+n)^k},\qquad \tau\in\mathcal{H}
$$

によって定義する．$L_\tau=\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$ とおけば，L は $\mathbb{C}$ の格子であり，$L'_\tau=L_\tau-\{0\}$ とおけば，

$$
G_k(\tau)=\sum_{\omega\in L'_\tau}\frac{1}{\omega^k},\qquad \tau\in\mathcal{H}
$$

とかける．この和は絶対収束し，$\mathcal{H}$ の任意のコンパクト集合上で一様収束し，$\mathcal{H}$ 上の正則関数になる．また，$SL_2(\mathbb{Z})$ に関して，重さ k の不変性を持つ．すなわち，

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して，$j(\gamma, \tau) = c\tau + d$,

$$\gamma(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

とおくとき，

$$G_k(\gamma(\tau)) = j(\gamma, \tau)^k G_k(\tau)$$

が成り立つ．実際，$a\tau + b$, $c\tau + d$ は L_τ の $\mathbb{Z}$ 上の基底であるから，

$$\begin{aligned} G_k(\gamma(\tau)) &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\gamma(\tau)+n)^k} \\ &= (c\tau+d)^k \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(m(a\tau+b)+n(c\tau+d))^k} \\ &= j(\gamma,\tau)^k \sum_{\omega\in L'_\tau} \frac{1}{\omega^k} = j(\gamma,\tau)^k G_k(\tau). \end{aligned}$$

特に，$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば，$G_k(\tau+1) = G_k(\tau)$ を満たすから，$G_k(\tau)$ は周期 1 を持つ周期関数であり，フーリエ級数展開を持つ．これを求めよう．$\sin \pi\tau$ の無限積展開から出発する．

$$\sin \pi\tau = \pi\tau \prod_{d=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau^2}{d^2}\right).$$

この対数微分をとれば，$q = e^{2\pi i\tau}$ とおくとき，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} + \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau-d} + \frac{1}{\tau+d}\right) &= \pi \cot \pi\tau \\ &= \pi i \frac{e^{i\pi\tau} + e^{-i\pi\tau}}{e^{i\pi\tau} - e^{-i\pi\tau}} = \pi i \frac{q+1}{q-1} \\ &= \pi i - 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} q^m. \end{aligned} \tag{5.6}$$

(5.6) を τ で $k-1$ 回微分して，

$$\sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+d)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} q^m, \qquad k \geq 2. \tag{5.7}$$

偶数 $k>2$ に対して，

$$
\begin{aligned}
G_k(\tau) &= \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0\}} \frac{1}{(c\tau+d)^k} \\
&= \sum_{d\neq 0}\frac{1}{d^k} + \sum_{c=1}^{\infty}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)^k} + \sum_{c=1}^{\infty}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(-c\tau+d)^k} \\
&= 2\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^k} + 2\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)^k} \qquad ((5.7) \text{ より},) \\
&= 2\zeta(k) + 2\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1}q^{cm} \\
&= 2\zeta(k) + 2\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n.
\end{aligned}
$$

ここで，$\sigma_{k-1}(n)=\sum_{m|n,\,m>0} m^{k-1}$ である．

$$
\begin{aligned}
g_2(\tau) &= 60G_4(\tau), \\
g_3(\tau) &= 140G_6(\tau)
\end{aligned}
$$

とおく．$\zeta(4)=\pi^4/90$, $\zeta(6)=\pi^6/945$ であるから，

$$
g_2(\tau) = \frac{4\pi^4}{3}\left(1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right), \tag{5.8}
$$

$$
g_3(\tau) = \frac{8\pi^6}{27}\left(1-504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n\right). \tag{5.9}
$$

5.3 $\mathrm{sn}(z)$ と $\wp(z)$ の関係

$\wp(z)$ を格子 $L=\mathbb{Z}i+\mathbb{Z}$ に対するワイエルシュトラスの $\wp$ 関数とする．$g_3(i)=0$ である．実際，$iL=L$ より，

$$
-G_6(i) = i^{-6}G_6(i) = \sum_{\omega\in L,\,\omega\neq 0}\frac{1}{i^6\omega^6} = \sum_{\omega\in L,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6} = G_6(i).
$$

よって，$G_6(i)=0$, $g_3(i)=0$ である．また，$\tau=i$ のとき，$q=e^{-2\pi}$ であるから，(5.8) より，$g_2=g_2(i)$ は正の実数である．

$$
\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z)
$$

である．また，$\wp(iz) = -\wp(z)$, $\wp'(iz) = i\wp'(z)$ が成り立つ．実際，$iL = L$ であるから，

$$\begin{aligned}
\wp(iz) &= \frac{1}{(iz)^2} + \sum_{\omega \in L,\, \omega \neq 0} \left(\frac{1}{(iz-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \\
&= \frac{1}{(iz)^2} + \sum_{\omega \in L,\, \omega \neq 0} \left(\frac{1}{(iz-i\omega)^2} - \frac{1}{(i\omega)^2} \right) \\
&= -\frac{1}{z^2} - \sum_{\omega \in L,\, \omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = -\wp(z), \\
\wp'(iz) &= -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(iz-\omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(iz-i\omega)^3} \\
&= i^{-3}(-2) \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3} = i\wp'(z).
\end{aligned}$$

また，$x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$ のとき，$\bar{L} = L$ より，

$$\begin{aligned}
\overline{\wp(x)} &= \frac{1}{x^2} + \sum_{\omega \in L,\, \omega \neq 0} \left(\frac{1}{(x-\bar{\omega})^2} - \frac{1}{\bar{\omega}^2} \right), \\
&= \frac{1}{x^2} + \sum_{\omega \in L,\, \omega \neq 0} \left(\frac{1}{(x-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \\
&= \wp(x), \\
\overline{\wp'(x)} &= -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(x-\bar{\omega})^3} = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(x-\omega)^3} = \wp'(x).
\end{aligned}$$

よって，$\wp(x)$, $\wp'(x)$ は実数である．$y \in \mathbb{R}$, $0 < y < 1$ のとき，$\wp(iy) = -\wp(y)$ は実数であるが，$\wp'(iy) = i\wp'(y)$ は純虚数である．

$\omega_1 = i$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = i + 1$, $e_k = \wp(\omega_k/2)$, $k = 1, 2, 3$ とおくと，命題 5.9 より，e_1, e_2, e_3 は

$$4X^3 - g_2 X = 0$$

の相異なる 3 根である．g_2 は正の実数であるから，e_1, e_2, e_3 は $0, \pm a$, $a = \sqrt{g_2}/2$ である．

$$-e_3 = -\wp\left(\frac{i+1}{2}\right) = \wp\left(i\frac{i+1}{2}\right) = \wp\left(\frac{-1+i}{2}\right) = \wp\left(\frac{1+i}{2}\right) = e_3$$

より，$e_3 = 0$ である．命題 5.9 より，基本平行四辺形 F 内の $\wp(z) = \wp(z) - e_3$ の零点は $z = \omega_3/2$ だけで，それは位数 2 の零点である．F 内の $\wp'(z)$ の零点は $z = \omega_1/2, \omega_2/2, \omega_3/2$ の 3 点だけであり，それらはすべて 1 位の零点である．

したがって，$0 < x < 1$ において，$\wp(x) \neq 0$ であり，連続関数であるから，その符号は一定である．$z = 0$ は極であり，$x \to +0$ のとき，$\wp(x) \to +\infty$ であるから，

$0 < x < 1$ において，$\wp(x) > 0$ である．$\wp'(1/2) = 0$ であるから，$0 < x < 1$ において，$x \neq 1/2$ ならば，$\wp'(x) \neq 0$ である．したがって，$0 < x < 1$ において $\wp(x)$ は $x = 1/2$ で唯一の極小値 $\wp(1/2) = a$ をとり，$0 < x < 1/2$ のとき，$\wp'(x) < 0$ であり，$1/2 < x < 1$ のとき，$\wp'(x) > 0$ である．これは，x が $0 < x < 1$ を動くとき，点 $(X, Y) = (\wp(x), \wp'(x))$ が楕円曲線 $Y^2 = 4X^3 - g_2X$ の $X \geq a$ の部分の実点を動くことを示している．$\wp(i/2) = -\wp(1/2) = -a$ である．

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)(\wp(z) - a)(\wp(z) + a).$$

加法定理

$$\wp(z_1 + z_2) = \frac{(\wp'(z_2) - \wp'(z_1))^2}{4(\wp(z_2) - \wp(z_1))^2} - \wp(z_1) - \wp(z_2)$$

より，

$$\begin{aligned}
\wp(x + i/2) &= \frac{(\wp'(x) - \wp'(i/2))^2}{4(\wp(x) - \wp(i/2))^2} - \wp(x) - \wp(i/2) \\
&= \frac{\wp'(x)^2}{4(\wp(x) + a)^2} - \wp(x) + a \\
&= \frac{\wp(x)(\wp(x) - a)}{\wp(x) + a} - \wp(x) + a \\
&= -\frac{a(\wp(x) - a)}{\wp(x) + a}.
\end{aligned}$$

x が $0 < x < 1$ を動くとき，$\wp(x)$ は区間 $(a, +\infty)$ を動くから，

$$\wp(x + i/2) = -\frac{a(\wp(x) - a)}{\wp(x) + a}$$

は区間 $(-a, 0)$ を動く．$\wp'(z)$ の加法定理より，

$$\wp'(x + i/2) = -\frac{g_2\wp'(x)}{(\wp(x) + a)^2}$$

であり，$0 < x < 1/2$ のときは，$\wp'(x) < 0$, $1/2 < x < 1$ のときは，$\wp'(x) > 0$ であるから，これは，x が $0 < x < 1$ を動くとき，点 $(X, Y) = (\wp(x), \wp'(x))$ が楕円曲線 $Y^2 = 4X^3 - g_2X$ の $-a \leq x \leq 0$ の部分の実点を動くことを示している．以上のことから，$u = \wp(x)$ $(1/2 < x < 1)$ とおけば，

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\wp'(x)} = \frac{1}{\sqrt{4\wp(x)^3 - g_2\wp(x)}} = \frac{1}{\sqrt{4u^3 - g_2u}} = \frac{1}{\sqrt{4u^3 - 4a^2u}},$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \int_{1/2}^{1} dx = \int_{a}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - 4a^2u}}.$$

ここで，$u=at^{-2}$ とおけば，$du/dt=-2at^{-3}$ より，

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \frac{dt}{\sqrt{4u^3-4a^2u}} &= 2a\int_0^1 \frac{dt}{t^3\sqrt{4a^3t^{-6}-4a^3t^{-2}}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.\end{aligned}$$

よって，

$$\varpi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \sqrt{a},$$
$$g_2(i)=g_2=4a^2=4\varpi^4.$$

そこで，$\Lambda=\mathbb{Z}(1+i)\varpi+\mathbb{Z}(1-i)\varpi$ とおく．Λ も $\mathbb{C}$ の格子であり，$(1+i)\varpi L$ と一致する．このとき，

$$\begin{aligned}g_2(\Lambda) &= 60\sum_{\substack{\omega\in\Lambda\\ \omega\neq 0}}\frac{1}{\omega^4} = 60\sum_{\substack{\omega\in L\\ \omega\neq 0}}\frac{1}{((1+i)\varpi\omega)^4}\\ &= \frac{60}{(1+i)^4\varpi^4}\sum_{\substack{\omega\in L\\ \omega\neq 0}}\frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{(1+i)^4\varpi^4}g_2(L)\\ &= \frac{1}{(1+i)^4\varpi^4}4\varpi^4 = -1,\\ g_3(\Lambda) &= 140\sum_{\substack{\omega\in\Lambda\\ \omega\neq 0}}\frac{1}{\omega^6} = 140\sum_{\substack{\omega\in L\\ \omega\neq 0}}\frac{1}{((1+i)\varpi\omega)^6}\\ &= \frac{140}{(1+i)^6\varpi^6}\sum_{\substack{\omega\in L\\ \omega\neq 0}}\frac{1}{\omega^6} = \frac{1}{(1+i)^6\varpi^6}g_3(L) = 0.\end{aligned}$$

したがって，$\wp(z)=\wp(z;L)$, $\wp_1(z)=\wp(z;\Lambda)$ とおけば，

$$\wp_1'(z)^2 = 4\wp_1(z)^3+\wp_1(z). \tag{5.10}$$

$f(z)=-2\dfrac{\wp_1(z)}{\wp_1'(z)}$ とおくと，(5.5) より，

$$\begin{aligned}f'(z) &= -2\frac{\wp_1'(z)^2-\wp_1(z)\wp_1''(z)}{\wp_1'(z)^2}\\ &= -2\frac{4\wp_1(z)^3+\wp_1(z)-\wp_1(z)(6\wp_1(z)^2+1/2)}{4\wp_1(z)^3+\wp_1(z)}\\ &= -2\frac{4\wp_1(z)^3+\wp_1(z)-6\wp_1(z)^3-(1/2)\wp_1}{4\wp_1(z)^3+\wp_1(z)} = \frac{4\wp_1(z)^3-\wp_1(z)}{4\wp_1(z)^3+\wp_1(z)}\\ &= \frac{4\wp_1(z)^2-1}{4\wp_1(z)^2+1}.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}1-f(z)^4 &= 1-\left(-2\frac{\wp_1(z)}{\wp_1'(z)}\right)^4 = 1-\frac{16\wp_1(z)^4}{(4\wp_1(z)^3+\wp_1(z))^2}\\ &= 1-\frac{16\wp_1(z)^2}{(4\wp_1(z)^2+1)^2} = \frac{16\wp_1(z)^4+8\wp_1(z)^2+1-16\wp_1(z)^2}{(4\wp_1(z)^2+1)^2}\\ &= \frac{16\wp_1(z)^4-8\wp_1(z)^2+1}{(4\wp_1(z)^2+1)^2} = \frac{(4\wp_1(z)^2-1)^2}{(4\wp_1(z)^2+1)^2}\\ &= f'(z)^2.\end{aligned}$$

これは $\mathrm{sn}(z)$ と $\mathrm{sn}'(z)$ の関係式と同じである．$f(z)=\mathrm{sn}(z)$ であることを示そう．そのために，$g(z)=\dfrac{f(z)}{\mathrm{sn}(z)}$ とおく．$f(z)$ の零点と極を調べる．$\omega_1=i(1+i)\varpi=(-1+i)\varpi, \omega_2=(1+i)\varpi$ とおく．$\wp_1((1+i)\varpi z)=(1+i)^{-2}\varpi^{-2}\wp(z), \wp_1'((1+i)\varpi z)=(1+i)^{-3}\varpi^{-3}\wp'(z)$ であるから，Λ に対する基本平行四辺形 F_1 内における $\wp_1'(z)$ の零点は $\omega_1/2, \omega_2/2, \omega_3/2$ であり，すべて 1 位の零点である．ここで，$\omega_3=\omega_1+\omega_2=2i\varpi$ とおいた．F_1 内における $\wp_1'(z)$ の零点は $\omega_3/2$ だけであり，それは 2 位の零点である．また，F_1 内における $\wp_1'(z)$ の極は 0 だけであり，3 位の極であり，F_1 内における $\wp_1(z)$ の極は 0 だけであり，2 位の極である．結局，$f(z)=-2\wp_1(z)/\wp_1'(z)$ の F_1 内における極は $\omega_1/2$ と $\omega_2/2$ であり，いずれも 1 位の極であり，零点は 0 と $\omega_3/2=\varpi i$ であり，いずれも 1 位の零点である．一方，定理 4.3 より，$\mathrm{sn}(z)$ の零点はすべて位数 1 であり，$z=(m+in)\varpi,\ m,n\in\mathbb{Z}$ である．$\mathrm{sn}(z)$ の極はすべて位数 1 であり，$z=(m+in)\dfrac{\varpi}{2},\ m,n$ は奇数である．F_1 内の零点は $0, i\varpi$ であり，F_1 内の極は $\omega_1/2, \omega_2/2$ である．以上によって，$f(z)$ の零点と $\mathrm{sn}(z)$ の零点，$f(z)$ の極と $\mathrm{sn}(z)$ の極は完全に一致する．したがって，その比 $g(z)=\dfrac{f(z)}{\mathrm{sn}(z)}$ は零点も極も持たない楕円関数である．$g(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数であり，有界であるから，定理 3.10 によって，定数である．$g(z)=C$ とする．$f(z)=C\,\mathrm{sn}(z)$ である．よって，$f'(z)=C\,\mathrm{sn}'(z)$ である．

$$f'(z)=\frac{4\wp_1(z)^2-1}{4\wp_1(z)^2+1}=\frac{4(z^2\wp_1(z))^2-z^4}{4(z^2\wp_1(z))^2+z^4},$$
$$z^2\wp_1(z)=1+3G_4z^4+\cdots$$

であるから，$f'(z)$ は $z=0$ において正則であり，$f'(0)=1$ を得る．$\mathrm{sn}'(0)=1$ であったから，$1=C$ を得る．ゆえに，$f(z)=\mathrm{sn}(z)$ である．以上によって次を得た．

命題 5.10. $\mathrm{sn}(z)=-2\dfrac{\wp_1(z)}{\wp_1'(z)},\ \mathrm{sn}'(z)=\dfrac{4\wp_1(z)^2-1}{4\wp_1(z)^2+1}$.

6　虚数乗法

定理 2.7 において実関数として，自然数 n に対して，$\mathrm{sn}(nx)$ を $\mathrm{sn}(x), \mathrm{sn}'(x)$ によって表す n 倍公式を与えた．一致の定理によってこの公式は複素関数としても

成り立つ．$\mathbb{Z}[i]$ によって，$m+in$, $m,n\in\mathbb{Z}$，の形の複素数全体のなす環を表す．$\mathbb{Z}[i]$ を**ガウスの整数環**という．加法定理を用いれば，$m+in\in\mathbb{Z}[i]$ 倍の公式を得る．$\mathrm{sn}(iz)=i\,\mathrm{sn}(z)$, $\mathrm{sn}'(iz)=\mathrm{sn}'(z)$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}((m+in)z)=\mathrm{sn}(mz+inz)&=\frac{\mathrm{sn}(mz)\,\mathrm{sn}'(inz)+\mathrm{sn}(inz)\,\mathrm{sn}'(mz)}{1+\mathrm{sn}^2(mz)\,\mathrm{sn}^2(inz)}\\&=\frac{\mathrm{sn}(mz)\,\mathrm{sn}'(nz)+i\,\mathrm{sn}(nz)\,\mathrm{sn}'(mz)}{1-\mathrm{sn}^2(mz)\,\mathrm{sn}^2(nz)}.\end{aligned}$$

特に，$1+i$ 倍，$1-i$ 倍公式は次のようになる．

$$\mathrm{sn}((1+i)z)=\frac{(1+i)\,\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(z)}{1-\mathrm{sn}^4(z)}, \tag{6.1}$$

$$\mathrm{sn}((1-i)z)=\frac{(1-i)\,\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(z)}{1-\mathrm{sn}^4(z)}. \tag{6.2}$$

$\alpha=a+ib\in\mathbb{Z}[i]$ について，$a+b$ が奇数のとき，α は**奇**であるという．これは $\mathrm{N}(\alpha)=\alpha\bar{\alpha}=a^2+b^2$ が奇数であることと同値である．α が奇でないとき，$\alpha=(1+i)\beta$, $\beta\in\mathbb{Z}[i]$ とかける．実際，$a+b=2c$, $c\in\mathbb{Z}$ のとき，$a-b=a+b-2b=2c-2b$ であるから，$\beta=\alpha/(1+i)$ とおくと，

$$\beta=\frac{1}{2}(1-i)(a+ib)=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}i(b-a)=c+i(b-c)\in\mathbb{Z}[i]$$

である．

補題 6.1. $\beta\in\mathbb{Z}[i]$ を奇とする．そのとき，集合

$$R_\beta=\{\mathrm{sn}(z)\,|\,z\in\mathbb{C},\ \mathrm{sn}(\beta z)=0\}$$

はちょうど $\mathrm{N}(\beta)$ 個の元を持ち，

$$\mathrm{sn}\left(\alpha\frac{\varpi}{\beta}\right),\qquad \alpha\in\mathbb{Z}[i]\ \text{は奇}$$

という形のすべての複素数からなる．

[証明]　まず，$\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ が奇のとき，$\mathrm{sn}\left(\alpha\frac{\varpi}{\beta}\right)\in R_\beta$ であることに注意する．実際，定理 4.3 より，

$$\mathrm{sn}\left(\beta\alpha\frac{\varpi}{\beta}\right)=\mathrm{sn}(\alpha\varpi)=0$$

だからである．逆に，$\mathrm{sn}(\beta z)=0$ とする．定理 4.3 より，

$$\beta z=(a+ib)\varpi,\qquad a,b\in\mathbb{Z}$$

である．$\alpha = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ とおく．α が奇ならば，何も示すことはない．α が偶であるとする．定理 4.3 の証明でみたように，$\mathrm{sn}(\varpi + z) = -\mathrm{sn}(z)$ である．z を $-z$ で置き換えれば，$\mathrm{sn}(\varpi - z) = -\mathrm{sn}(-z) = \mathrm{sn}(z)$ である．よって，

$$\mathrm{sn}\left((\beta - \alpha)\frac{\varpi}{\beta}\right) = \mathrm{sn}\left(\varpi - \alpha\frac{\varpi}{\beta}\right) = \mathrm{sn}\left(\alpha\frac{\varpi}{\beta}\right)$$

であり，$\beta - \alpha$ は奇であるから，R_β は補題の主張の通りであることが示された．$\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}[i]$ はともに奇であり，$\tilde{\alpha} \equiv \alpha \pmod{\beta\mathbb{Z}[i]}$ であるとする．$\tilde{\alpha} = \alpha + (m+in)\beta$, $m, n \in \mathbb{Z}$ とかく．$\alpha, \tilde{\alpha}$ はともに奇であるから，$\tilde{\alpha} - \alpha = (m+in)\beta$ は偶である．β は奇だから $m + in$ は偶である．すなわち，$m + n$ は偶数である．よって，

$$\mathrm{sn}\left(\tilde{\alpha}\frac{\varpi}{\beta}\right) = \mathrm{sn}\left(\alpha\frac{\varpi}{\beta} + (m+in)\varpi\right) = (-1)^{m+n}\,\mathrm{sn}\left(\alpha\frac{\varpi}{\beta}\right) = \mathrm{sn}\left(\alpha\frac{\varpi}{\beta}\right)$$

である．逆に，$\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}[i]$ はともに奇であり，

$$\mathrm{sn}\left(\tilde{\alpha}\frac{\varpi}{\beta}\right) = \mathrm{sn}\left(\alpha\frac{\varpi}{\beta}\right)$$

であるとする．$w_0 = \mathrm{sn}\left(\alpha\frac{\varpi}{\beta}\right)$ とおけば，命題 4.4 より，

$$\tilde{\alpha}\frac{\varpi}{\beta} = (-1)^{m+n}\alpha\frac{\varpi}{\beta} + (m+in)\varpi, \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

とかける．

$$\tilde{\alpha} = (-1)^{m+n}\alpha + (m+in)\beta$$

であるが，$(-1)^{m+n}\alpha, \tilde{\alpha}, \beta$ は奇であるから，$m + in$ は偶であり，$m + n$ は偶数である．よって，$\tilde{\alpha} \equiv \alpha \pmod{\beta\mathbb{Z}[i]}$ である．$\mathbb{Z}[i]/\beta\mathbb{Z}[i]$ の各剰余類の代表元として，奇なものがとれる．実際，α がもし偶ならば，$\alpha + \beta$ は同じ剰余類に属し，奇である．以上によって，R_β と $\mathbb{Z}[i]/\beta\mathbb{Z}[i]$ は 1 対 1 に対応することが示された．ゆえに，$\#R_\beta = \#(\mathbb{Z}[i]/\beta\mathbb{Z}[i]) = \mathrm{N}(\beta)$ である． □

定理 6.2. $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ を奇とする．そのとき，$\mathbb{Z}[i][u]$ の互いに素な多項式 $P_\beta(u)$, $Q_\beta(u)$ と $\varepsilon \in \{0, 1, 2, 3\}$ が存在して次を満たす．

(1) すべての $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\mathrm{sn}(\beta z) = i^\varepsilon\,\mathrm{sn}(z)\frac{P_\beta(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_\beta(\mathrm{sn}^4(z))}.$$

(2) $\beta \equiv i^\varepsilon \pmod{2(1+i)}$.

(3) $P_\beta(u)$ と $Q_\beta(u)$ の次数は $d = (\mathrm{N}(\beta) - 1)/4$ である．

(4) β **等分多項式** $uP_\beta(u^4)$ の根は複素数 $\mathrm{sn}(\alpha\varpi/\beta)$, $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$，の全体である．

(5) $P_\beta(u)$ はモニック多項式であり，$Q_\beta(0) = 1$ かつ

$$Q_\beta(u) = u^d P_\beta\left(\frac{1}{u}\right), \qquad d = \frac{\mathrm{N}(N) - 1}{4}$$

である．

[証明]　5 段階に分けて証明する．

Step 1.　まず，すべての $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ に対して，$P_\beta(u)$, $Q_\beta(u) \in \mathbb{Z}[i][u]$ であって，$Q_\beta(0) = 1$ かつ β が奇のときは,

$$\mathrm{sn}(\beta z) = \mathrm{sn}(z)\frac{P_\beta(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_\beta(\mathrm{sn}^4(z))} \tag{6.3}$$

であり，β が偶のときは,

$$\mathrm{sn}(\beta z) = \mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(z)\frac{P_\beta(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_\beta(\mathrm{sn}^4(z))} \tag{6.4}$$

となるものが存在することを示す．(4.2) より,

$$\mathrm{sn}(iz) = i\,\mathrm{sn}(z) \tag{6.5}$$

である．(6.1) より,

$$\mathrm{sn}((1+i)z) = \frac{(1+i)\,\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(z)}{1 - \mathrm{sn}^4(z)}. \tag{6.6}$$

(2.8) の複素変数版より,

$$\mathrm{sn}((\beta+1)z) + \mathrm{sn}((\beta-1)z) = \frac{2\,\mathrm{sn}(\beta z)\,\mathrm{sn}'(z)}{1 + \mathrm{sn}^2(\beta z)\,\mathrm{sn}^2(z)}, \tag{6.7}$$

$$\mathrm{sn}((\beta+i)z) + \mathrm{sn}((\beta-i)z) = \frac{2\,\mathrm{sn}(\beta z)\,\mathrm{sn}'(z)}{1 - \mathrm{sn}^2(\beta z)\,\mathrm{sn}^2(z)}. \tag{6.8}$$

これらの等式と定理 2.7 を用いる．$\beta = n + i$ に対して，証明すべき等式は，$n = 0$ のときは，(6.5) である．$n = 1$ のときは，証明すべき等式は，(6.6) である．$n \geq 1$ として，$\beta = n - 1 + i$, $\beta = n + i$ についての等式が成り立つと仮定すると，n が

奇数のときは，$\beta = n+i$ は偶，$n-1+i$ は奇であるから，(6.7) より，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sn}((n+1+i)z) \\
&= -\operatorname{sn}((n-1+i)) + \frac{2\operatorname{sn}((n+i)z)\operatorname{sn}'(z)}{1+\operatorname{sn}^2((n+i)z)\operatorname{sn}^2(z)} \\
&= -\operatorname{sn}(z)\frac{P_{n-1+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n-1+i}(\operatorname{sn}^4(z))} + \frac{2\operatorname{sn}(z)\operatorname{sn}'(z)\dfrac{P_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))}\operatorname{sn}'(z)}{1+\operatorname{sn}^2(z)\operatorname{sn}'(z)^2\dfrac{P_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))^2}{Q_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))^2}\operatorname{sn}^2(z)} \\
&= -\operatorname{sn}(z)\frac{P_{n-1+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n-1+i}(\operatorname{sn}^4(z))} + \frac{2\operatorname{sn}(z)\operatorname{sn}'(z)^2 P_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))Q_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))^2+\operatorname{sn}^4(z)\operatorname{sn}'(z)^2 P_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))^2} \\
&= -\operatorname{sn}(z)\frac{P_{n-1+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n-1+i}(\operatorname{sn}^4(z))} + \frac{2\operatorname{sn}(z)(1-\operatorname{sn}^4(z))P_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))Q_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))^2+\operatorname{sn}^4(z)(1-\operatorname{sn}^4(z))P_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))^2} \\
&= \operatorname{sn}(z)\frac{P_{n+1+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n+1+i}(\operatorname{sn}^4(z))}.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1+i}(u) &= Q_{n-1+i}(u)\left\{Q_{n+i}(u)^2 + u(1-u)P_{n+i}(u)^2\right\}, \\
P_{n+1+i}(u) &= -P_{n-1+i}(u)\left\{Q_{n+i}(u)^2 + u(1-u)P_{n+i}(u)^2\right\} \\
&\quad + 2(1-u)P_{n+i}(u)Q_{n+i}(u)Q_{n-1+i}(u)
\end{aligned}
$$

である．これから，$Q_{n-1+i}(0) = Q_{n+i}(0) = 1$ より，$Q_{n+1+i}(0) = 1$ がわかる．

n が偶数のときは，$\beta = n+i$ は奇，$n-1+i$ は偶であるから，(6.7) より，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sn}((n+1+i)z) \\
&= -\operatorname{sn}((n-1+i)) + \frac{2\operatorname{sn}((n+i)z)\operatorname{sn}'(z)}{1+\operatorname{sn}^2((n+i)z)\operatorname{sn}^2(z)} \\
&= -\operatorname{sn}(z)\operatorname{sn}'(z)\frac{P_{n-1+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n-1+i}(\operatorname{sn}^4(z))} + \frac{2\operatorname{sn}(z)\dfrac{P_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))}\operatorname{sn}'(z)}{1+\operatorname{sn}^2(z)\dfrac{P_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))^2}{Q_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))^2}\operatorname{sn}^2(z)} \\
&= -\operatorname{sn}(z)\operatorname{sn}'(z)\frac{P_{n-1+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n-1+i}(\operatorname{sn}^4(z))} + \frac{2\operatorname{sn}(z)\operatorname{sn}'(z)P_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))Q_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))^2+\operatorname{sn}^4(z)P_{n+i}(\operatorname{sn}^4(z))^2} \\
&= \operatorname{sn}(z)\operatorname{sn}'(z)\frac{P_{n+1+i}(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_{n+1+i}(\operatorname{sn}^4(z))}.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1+i}(u) &= Q_{n-1+i}(u)\left\{Q_{n+i}(u)^2 + uP_{n+i}(u)^2\right\}, \\
P_{n+1+i}(u) &= -P_{n-1+i}(u)\left\{Q_{n+i}(u)^2 + uP_{n+i}(u)^2\right\} \\
&\quad + 2P_{n+i}(u)Q_{n+i}(u)Q_{n-1+i}(u)
\end{aligned}
$$

である．これから，$Q_{n-1+i}(0)=Q_{n+i}(0)=1$ より，$Q_{n+1+i}(0)=1$ がわかる．

以上によって，すべての整数 $n\geq 0$ に対して，$\mathrm{sn}((n+i)z)$ を表す多項式 $P_{n+i}(u), Q_{n+i}(u)\in\mathbb{Z}[i][u]$ で，$Q_{n+i}(0)=1$ を満たすものの存在が示された．

ここで，整数 $n\geq 0$ を固定する．いま証明した $\mathrm{sn}((n+i)z)$ の公式と定理 2.7 における $\mathrm{sn}(nz)$ に対する公式がある．よって，$\beta=n, \beta=n+i$ に対する等式は成り立っている．$m\geq 1$ として，$\beta=n+i(m-1), \beta=n+im$ についての等式が成り立つと仮定する．$\beta=n+mi$ が奇のとき，$n+i(m-1)$ は偶であるから，(6.8) より，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sn}((n+i(m+1))z)\\
&=-\mathrm{sn}((n+i(m-1))z)+\frac{2\,\mathrm{sn}((n+mi)z)\,\mathrm{sn}'(z)}{1-\mathrm{sn}^2((n+mi)z)\,\mathrm{sn}^2(z)}\\
&=-\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(z)\frac{P_{n+i(m-1)}(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_{n+i(m-1)}(\mathrm{sn}^4(z))}+\frac{2\,\mathrm{sn}(z)\dfrac{P_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))}\,\mathrm{sn}'(z)}{1-\mathrm{sn}(z)^2\dfrac{P_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))^2}{Q_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))^2}\,\mathrm{sn}^2(z)}\\
&=-\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(z)\frac{P_{n+i(m-1)}(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_{n+i(m-1)}(\mathrm{sn}^4(z))}+\frac{2\,\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(z)P_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))Q_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))^2-\mathrm{sn}(z)^4P_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))^2}\\
&=\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(z)\frac{P_{n+i(m+1)}(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_{n+i(m+1)}(\mathrm{sn}^4(z))}.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
Q_{n+i(m+1)}(u)&=Q_{n+i(m-1)}(u)\left\{Q_{n+im}(u)^2-uP_{n+im}(u)^2\right\},\\
P_{n+1+i}(u)&=-P_{n+i(m-1)}(u)\left\{Q_{n+im}(u)^2-uP_{n+im}(u)^2\right\}\\
&\quad+2P_{n+im}(u)Q_{n+im}(u)Q_{n+i(m-1)}(u)
\end{aligned}
$$

である．これから，$Q_{n+i(m-1)}(0)=Q_{n+im}(0)=1$ より，$Q_{n+i(m+1)}(0)=1$ がわかる．

$\beta=n+mi$ が偶のとき，$n+i(m-1)$ は奇であるから，(6.8) より，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sn}((n+i(m+1))z)\\
&=-\mathrm{sn}((n+i(m-1))z)+\frac{2\,\mathrm{sn}((n+mi)z)\,\mathrm{sn}'(z)}{1-\mathrm{sn}^2((n+mi)z)\,\mathrm{sn}^2(z)}\\
&=-\mathrm{sn}(z)\frac{P_{n+i(m-1)}(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_{n+i(m-1)}(\mathrm{sn}^4(z))}+\frac{2\,\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(z)\dfrac{P_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))}\,\mathrm{sn}'(z)}{1-\mathrm{sn}(z)^2\,\mathrm{sn}'(z)^2\dfrac{P_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))^2}{Q_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))^2}\,\mathrm{sn}^2(z)}\\
&=-\mathrm{sn}(z)\frac{P_{n+i(m-1)}(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_{n+i(m-1)}(\mathrm{sn}^4(z))}+\frac{2\,\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}'(z)^2P_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))Q_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))^2-\mathrm{sn}(z)^4\,\mathrm{sn}'(z)^2P_{n+im}(\mathrm{sn}^4(z))^2}\\
&=\mathrm{sn}(z)\frac{P_{n+i(m+1)}(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_{n+i(m+1)}(\mathrm{sn}^4(z))}.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$\begin{aligned}
Q_{n+i(m+1)}(u) &= Q_{n+i(m-1)}(u)\left\{Q_{n+im}(u)^2 - u(1-u)P_{n+im}(u)^2\right\},\\
P_{n+1+i}(u) &= -P_{n+i(m-1)}(u)\left\{Q_{n+im}(u)^2 - u(1-u)P_{n+im}(u)^2\right\}\\
&\quad + 2(1-u)P_{n+im}(u)Q_{n+im}(u)Q_{n+i(m-1)}(u)
\end{aligned}$$

である．これから，$Q_{n+i(m-1)}(0) = Q_{n+im}(0) = 1$ より，$Q_{n+i(m+1)}(0) = 1$ がわかる．

以上によって，すべての整数 $n, m \geq 0$ に対して，$\operatorname{sn}((n+im)z)$ を表す多項式 $P_{n+im}(u), Q_{n+im}(u) \in \mathbb{Z}[i][u]$ で，$Q_{n+im}(0) = 1$ を満たすものの存在が示された．このとき，

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}((-m+in)z) &= \operatorname{sn}(i(n+im)z) = i\operatorname{sn}((n+im)z),\\
\operatorname{sn}((-n-im)z) &= \operatorname{sn}(-(n+im)z) = -\operatorname{sn}((n+im)z),\\
\operatorname{sn}((m-in)z) &= \operatorname{sn}(-i(n+im)z) = -i\operatorname{sn}((n+im)z)
\end{aligned}$$

より，すべての $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ に対して，$\operatorname{sn}(\beta z)$ を表す多項式 $P_\beta(u), Q_\beta(u) \in \mathbb{Z}[i][u]$ の存在が示された．

Step 2. $P_\beta(u)$, $Q_\beta(u)$ の共通因子を除去する．以下では，β は奇とする．Step 1 で構成した $P_\beta(u)$, $Q_\beta(u)$ は共通因数を持つかもしれない．$\mathbb{Z}[i]$ は単項イデアル整域だから，一意分解整域であり，したがって，$\mathbb{Z}[i][u]$ も一意分解整域である．よって，

$$P_\beta(u) = C_\beta(u)\tilde{P}_\beta(u), \qquad Q_\beta(u) = C_\beta(u)\tilde{Q}_\beta(u),$$

$C_\beta(u), \tilde{P}_\beta(u), \tilde{Q}_\beta(u) \in \mathbb{Z}[i](u)$, $\tilde{P}_\beta(u)$ と $\tilde{Q}_\beta(u)$ は互いに素，とかける．$Q_\beta(0) = 1$ より，$C_\beta(u)$, $\tilde{P}_\beta(u)$, $\tilde{Q}_\beta(u)$ に適当に $\mathbb{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}$ をかけて，$\tilde{Q}_\beta(0) = 1$ にできる．β は奇としたから，

$$\operatorname{sn}(\beta z) = \operatorname{sn}(z)\frac{P_\beta(\operatorname{sn}^4(z))}{Q_\beta(\operatorname{sn}^4(z))} = \operatorname{sn}(z)\frac{C_\beta(\operatorname{sn}^4(z))\tilde{P}_\beta(\operatorname{sn}^4(z))}{C_\beta(\operatorname{sn}^4(z))\tilde{Q}_\beta(\operatorname{sn}^4(z))} = \operatorname{sn}(z)\frac{\tilde{P}_\beta(\operatorname{sn}^4(z))}{\tilde{Q}_\beta(\operatorname{sn}^4(z))}.$$

Step 3. 定数 i^ε を決定する．$(\mathbb{Z}[i]/2(1+i)\mathbb{Z}[i])^*$ は位数 4 の群であり，$\{\pm[1], \pm[i]\}$ に等しい．よって，ある $\varepsilon \in \{0, 1, 2, 3\}$ に対して，

$$\beta \equiv i^\varepsilon \pmod{2(1+i)}$$

である．$\beta = i^\varepsilon + 2(1+i)(m+in)$, $m, n \in \mathbb{Z}$ とかくと，

$$\beta\frac{\varpi}{2} = i^\varepsilon\frac{\varpi}{2} + (1+i)(m+in)\varpi = i^\varepsilon\frac{\varpi}{2} + m(1+i)\varpi - n(1-i)\varpi.$$

周期性から，

$$\operatorname{sn}\left(\beta\frac{\varpi}{2}\right) = \operatorname{sn}\left(i^\varepsilon\frac{\varpi}{2}\right) = i^\varepsilon\operatorname{sn}\left(\frac{\varpi}{2}\right) = i^\varepsilon. \tag{6.9}$$

$P_\beta(u)$ に適当な $\mathbb{Z}[i]^*$ の元をかけたもので置き換えることによって，

$$\mathrm{sn}(\beta z) = i^\varepsilon\,\mathrm{sn}(z)\frac{P_\beta(\mathrm{sn}^4(z))}{Q_\beta(\mathrm{sn}^4(z))} \tag{6.10}$$

を得る．以上によって，互いに素な多項式 $P_\beta(u), Q_\beta(u) \in \mathbb{Z}[i][u]$ で，(1), (2) および (5) の $Q_\beta(0) = 1$ を満たすものが存在することが示された．

Step 4. $uP_\beta(u^4)$ の根を決定する．補題 6.1 を用いて，$A_\beta(u) = uP_\beta(u^4)$ の根を決定する．$B_\beta(u) = Q_\beta(u^4)$ とする．β は奇であるから，

$$\mathrm{sn}(\beta z) = i^\varepsilon\frac{A_\beta(\mathrm{sn}(z))}{B_\beta(\mathrm{sn}(z))} \tag{6.11}$$

である．$P_\beta(u)$ と $Q_\beta(u)$ は互いに素であるから，多項式 $a(u), b(u) \in \mathbb{Z}[i][u]$ と $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$, $\gamma \neq 0$ が存在して，

$$a(u)P_\beta(u) + b(u)Q_\beta(u) = \gamma$$

となる．もし，$A_\beta(u)$ と $B_\beta(u)$ が $\mathbb{C}$ において共通根 w_0 を持ったとすると，$Q_\beta(0) = 1$ であるから，$w_0 \neq 0$ であり，$P_\beta(w_0^4) = Q_\beta(w_0^4) = 0$ である．

$$\gamma = a(w_0^4)P_\beta(w_0^4) + b(w_0^4)Q_\beta(w_0^4) = 0$$

となって，$\gamma \neq 0$ に矛盾する．ゆえに，$A_\beta(u)$ と $B_\beta(u)$ が $\mathbb{C}$ において共通根を持たない．このことから，

$$A_\beta(\mathrm{sn}(z)) = 0 \iff \mathrm{sn}(\beta z) = 0$$

がわかる．$A_\beta(u)$ の任意の根 w_0 は，命題 4.4 より，ある $z \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathrm{sn}(z)$ という形なので，$A_\beta(u)$ の根は，補題 6.1 の集合

$$R_\beta = \{\mathrm{sn}(z) \mid \mathrm{sn}(\beta z) = 0\}$$

をなす．このとき，同じ補題 6.1 によって，$A_\beta(u)$ のすべての根は $\mathrm{sn}\left(\alpha\dfrac{\varpi}{\beta}\right), \alpha \in \mathbb{Z}[i]$ は奇，と表せる．よって，(4) の主張が示された．

$A_\beta(u)$ の根の重複度はすべて 1 であることを示そう．$u_0 = \mathrm{sn}(z_0)$ が $A_\beta(u)$ の重根であるとする．$A_\beta(u_0) = 0$, $A'_\beta(u_0) = 0$ である．$B_\beta(u_0) \neq 0$ である．(6.11) を微分して，$z = z_0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}'(\beta z_0)\beta &= i^\varepsilon\frac{A'_\beta(\mathrm{sn}(z_0))\,\mathrm{sn}'(z_0)B_\beta(\mathrm{sn}(z_0)) - A_\beta(\mathrm{sn}(z_0))B_\beta(\mathrm{sn}(z_0))\,\mathrm{sn}'(z_0)}{B_\beta(\mathrm{sn}(z_0))^2}\\ &= i^\varepsilon\,\mathrm{sn}'(z_0)\frac{A'_\beta(u_0)B_\beta(u_0) - A_\beta(u_0)B_\beta(u_0)}{B_\beta(u_0)^2} = 0.\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{sn}'(\beta z_0) = 0$ である．$\mathrm{sn}(\beta z_0) = i^{\varepsilon} A_\beta(u_0)/B_\beta(u_0) = 0$ であるから，βz_0 は $\mathrm{sn}(z)$ の 2 位の零点である．これは定理 4.3 よりあり得ない．ゆえに，$A_\beta(u)$ の根の重複度はすべて 1 である．したがって，$A_\beta(u)$ の次数は根の個数 $\#R_\beta$ に等しく，これは補題 6.1 より，$\mathrm{N}(\beta)$ である．$A_\beta(u) = uP_\beta(u^4)$ であるから，

$$\deg P_\beta(u) = (\mathrm{N}(\beta) - 1)/4 = d$$

である．これで (3) が $P_\beta(u)$ について示された．

Step 5. $P_\beta(u)$ と $Q_\beta(u)$ の関係を示す．いったん，

$$Q_\beta(u) = u^d P_\beta\left(\frac{1}{u}\right), \qquad d = \frac{\mathrm{N}(\beta) - 1}{4} \tag{6.12}$$

が示されれば，$Q_\beta(u)$ の次数も d であり，$Q_\beta(0) = 1$ より，$P_\beta(u)$ がモニック多項式であることがわかる．したがって，(6.12) を証明すれば，定理 6.2 の証明が完成する．(4.6) より，

$$\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}\left(z + (1+i)\frac{\varpi}{2}\right) = -i = i^3. \tag{6.13}$$

$w = z + (1+i)\dfrac{\varpi}{2}$ とおくと，

$$\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}(w) = i^3.$$

(6.13) において，z を β で置き換えれば，

$$\mathrm{sn}(\beta z)\,\mathrm{sn}\left(\beta z + (1+i)\frac{\varpi}{2}\right) = i^3.$$

$\beta \equiv i^{\varepsilon} \pmod{2(1+i)}$ より，

$$(\beta - 1)(1+i)\frac{\varpi}{2} \equiv \begin{cases} 0 \pmod{\Lambda}, & \varepsilon = 0, 2, \\ \varpi \pmod{\Lambda}, & \varepsilon = 1, 3. \end{cases}$$

よって，

$$\beta w - \beta z - (1+i)\frac{\varpi}{2} = (\beta - 1)(1+i)\frac{\varpi}{2} \equiv 0, \varpi \pmod{\Lambda}.$$

したがって，$\varepsilon = 0, 2$ のとき，

$$\mathrm{sn}(\beta z)\,\mathrm{sn}(\beta w) = i^3 = i^{3+2\varepsilon},$$

$\varepsilon = 1, 3$ のときも，

$$-\mathrm{sn}(\beta z)\,\mathrm{sn}(\beta w) = \mathrm{sn}(\beta z)\,\mathrm{sn}(\beta w + \varpi) = i^3,$$

$$\mathrm{sn}(\beta z)\,\mathrm{sn}(\beta w) = -i^3 = i^{3+2\varepsilon}.$$

これから，

$$\frac{\mathrm{sn}(\beta z)}{i^\varepsilon \,\mathrm{sn}(z)} = \frac{i^\varepsilon \,\mathrm{sn}(w)}{\mathrm{sn}(\beta w)} = \frac{Q_\beta(\mathrm{sn}^4(w))}{P_\beta(\mathrm{sn}^4(w))} = \frac{Q_\beta(1/\mathrm{sn}^4(z))}{P_\beta(1/\mathrm{sn}^4(z))}. \tag{6.14}$$

ここで，最後の等号は $\mathrm{sn}(z)\,\mathrm{sn}(w) = i^3$ を 4 乗して得られる $\mathrm{sn}^4(z)\,\mathrm{sn}^4(w) = 1$ からわかる．この等式と (6.10) を比べて，

$$\frac{Q_\beta(1/u^4)}{P_\beta(1/u^4)} = \frac{P_\beta(u^4)}{Q_\beta(u^4)}$$

を得る．したがって，

$$\frac{Q_\beta(1/u)}{P_\beta(1/u)} = \frac{P_\beta(u)}{Q_\beta(u)}$$

である．$\deg P_\beta(u) = d = (\mathrm{N}(\beta)-1)/4$ であったから，$\deg Q_\beta(u) = d'$ とすれば，

$$\frac{Q_\beta(1/u)}{P_\beta(1/u)} = \frac{u^{\max(d,d')-d'}u^{d'}Q_\beta(1/u)}{u^{\max(d,d')-d}u^{d}P_\beta(1/u)} = \frac{P_\beta(u)}{Q_\beta(u)}$$

において，右辺の分子と分母は互いに素であるから，多項式 $C(u)$ が存在して，

$$u^{\max(d,d')-d'}u^{d'}Q_\beta(1/u) = C(u)P_\beta(u), \qquad u^{\max(d,d')-d}u^{d}P_\beta(1/u) = C(u)Q_\beta(u)$$

となる．この次数をみれば，

$$\max(d,d') - d' + d' = \deg C(u) + d, \qquad \max(d,d') - d + d = \deg C(u) + d'.$$

よって，

$$\max(d,d') = \deg C(u) + d = \deg C(u) + d', \quad d = d',\ \deg C(u) = 0.$$

したがって，$C(u) = \lambda$ は定数で，$Q_\beta(u)$ の次数も d であり，

$$u^d P_\beta(1/u) = \lambda Q_\beta(u) \tag{6.15}$$

である．(6.10) で $z = \varpi/2$ とおけば，(2.10) より，

$$i^\varepsilon = \mathrm{sn}\left(\beta\frac{\varpi}{2}\right) = i^\varepsilon\frac{P_\beta(1)}{Q_\beta(1)}.$$

ゆえに，$P_\beta(1) = Q_\beta(1) \neq 0$ である．(6.15) に，$u = 1$ を代入すれば，$\lambda = 1$ がわかり，$u^d P_\beta(1/u) = Q_\beta(u)$ を得る． □

例 6.3. $\beta = 3$ とすると，$\mathrm{N}(3) = 9$, $d = (9-1)/4 = 2$ である．$3 \equiv i^2 \pmod{2(1+i)}$ であるから，系 2.5 より，

$$\mathrm{sn}(3z) = i^2\,\mathrm{sn}(z)\frac{-3 + 6\,\mathrm{sn}^4(z) + \mathrm{sn}^8(z)}{1 + 6\,\mathrm{sn}^4(z) - 3\,\mathrm{sn}^8(z)}$$

であるから，$P_3(u) = u^2 + 6u - 3$, $Q_3(u) = u^2P_3(1/u) = 1 + 6u - 3u^2$ である．