2次曲線の交点を通る直線について

上越教育大学　中川仁

平成11年3月17日

1　二つの円の交点を通る直線

二つの円

$$F_1 = x^2 + y^2 - 9 = 0, \quad F_2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 - 4 = 0$$

の二つの交点を通る直線を求めてみよう (cf. [1], p.39).

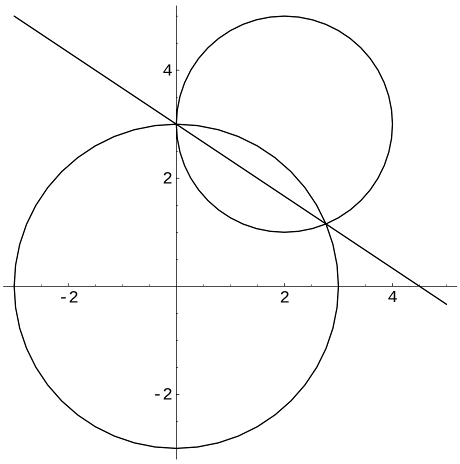

図 1: 二つの円の交点を通る直線

まず，交点は $F_1 = 0$ かつ $F_2 = 0$ を満たしているから，$F_1 - F_2 = 0$ も満たしている．これから,

$$2x + 3y - 9 = 0 \tag{1}$$

を得る．y を x で表せば，$y = 3 - \frac{2}{3}x$．これを $F_1 = x^2 + y^2 - 9 = 0$ に代入して，

$$\begin{aligned} x^2 + \left(3 - \frac{2}{3}x\right)^2 - 9 &= 0, \\ x^2 + 9 - 4x + \frac{4}{9}x^2 - 9 &= 0, \\ x\left(\frac{13}{9}x - 4\right) &= 0. \end{aligned}$$

したがって，$x = 0,\ \frac{36}{13}$．これを (1) に代入して，交点の座標

$$(0,3), \quad \left(\frac{36}{13}, \frac{15}{13}\right) \tag{2}$$

を得る．この 2 点を通る直線の傾きは

$$\frac{\frac{15}{13} - 3}{\frac{36}{13} - 0} = -\frac{2}{3}$$

であるから，これらを通る直線は

$$y = -\frac{2}{3}x + 3$$

である．結局，これは最初に $F_1 - F_2 = 0$ として求めた (1) の表す直線と同じである．(1) の表す直線が求める直線であることは，交点が 2 つ存在することがわかっていれば，次の三つのことからわかる:

- 2 つの交点は $F_1 - F_2 = 0$ を満たしている．
- $F_1 - F_2 = 0$ は直線の方程式である．
- 異なる 2 点を通る直線はただ一つである．

2　円と楕円の交点を通る直線

円 $F_1 = x^2 + y^2 - 4 = 0$ と楕円 $F_2 = x^2 + 4y^2 - 9 = 0$ は四つの交点 $P_i,\ 1 \le i \le 4$ を持つ．ここで，P_1, P_2, P_3, P_4 の座標は，それぞれ，

$$\left(\frac{\sqrt{21}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{21}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{21}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{3}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{21}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$$

である．

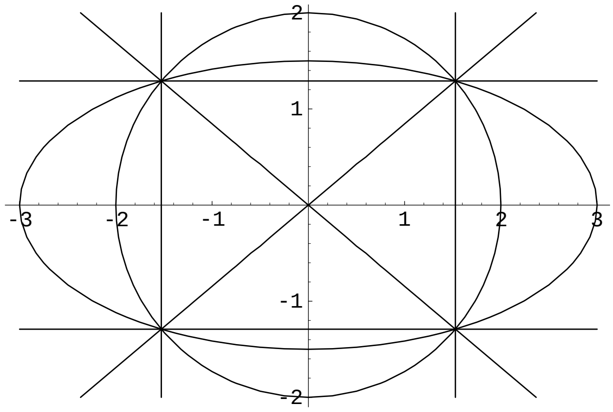

図 2: 円と楕円の交点を通る直線

これらの 4 点の中の 2 点を通る直線は ${}_4C_2 = 6$ 本ある．§1 でみたように，交点の座標を求めなくても，交点を通る直線を決定できるはずである．実際，$F_1 - F_2 = 0$ より，

$$-3\left(y-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)\left(y+\frac{\sqrt{15}}{3}\right)=0. \tag{3}$$

これは直線 P_1P_2 と直線 P_3P_4 を表す．同様に，$4F_1 - F_2 = 0$ より，

$$3\left(x-\frac{\sqrt{21}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{21}}{3}\right)=0. \tag{4}$$

これは直線 P_1P_4 と直線 P_2P_3 を表す．さらに，$9F_1 - 4F_2 = 0$ より，

$$\left(\sqrt{5}\,x-\sqrt{7}\,y\right)\left(\sqrt{5}\,x+\sqrt{7}\,y\right)=0. \tag{5}$$

これは直線 P_1P_3 と直線 P_2P_4 を表す．

3　2 次曲線の退化

§1,2 の例から，一般に次のことが成立すると考えられる:

> 係数 t をうまくとれば，二つの 2 次曲線 $F_1 = 0$ と $F_2 = 0$ の交点を通る直線 (の組) は，
>
> $$tF_1 - F_2 = 0$$
>
> の形にかける．

そのような t の値の決め方について説明しよう．t は $tF_1 - F_2$ が x, y の 1 次式 (の積) になるように決めればよい． したがって，はじめから，一つの 2 次曲線

$$ax^2 + by^2 + c + 2dy + 2ex + 2fxy = 0 \tag{6}$$

を考え，これが (二つの) 直線を表す (このとき，2 次曲線は**退化する**という) ための条件を求めればよい．すなわち，(6) の左辺が x, y の一次式 (の積) になるための条件を求めればよい．そのためには，(6) の代わりに，それを 3 変数の 2 次同次式 (**3 元 2 次形式**という)

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy = 0 \tag{7}$$

に置き換えて考えればよい．これはベクトルと行列を用いて，

$$(x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \tag{8}$$

と表せる．ここで，

$$A = \begin{pmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}$$

とおいた．A は 3 次対称行列である．

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

を 3 次正則行列として，変数変換

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y, z)P \tag{9}$$

を施せば，(8) は

$$(x\ y\ z)(PA{}^tP)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \tag{10}$$

に変換される．(7) が 1 次式の積の形

$$(p_1x + p_2y + p_3z)(q_1x + q_2y + q_3z) = 0 \tag{11}$$

に因数分解されたとする．もし，ベクトル ${}^t(p_1, p_2, p_3)$ と ${}^t(q_1, q_2, q_3)$ が 1 次独立ならば，これらを第 1 列，第 2 列とする 3 次正則行列 P がとれる．そのとき，変数変換 (9) によって，

$$xy = 0$$

を変換したものとして，(11) が得られる．これを行列でかけば，

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}{}^tP = A$$

である．したがって，$\det A = 0$ である．ベクトル ${}^t(p_1, p_2, p_3)$ と ${}^t(q_1, q_2, q_3)$ が 1 次従属のときは，${}^t(q_1, q_2, q_3) = k\,{}^t(p_1, p_2, p_3)$ とかき，${}^t(p_1, p_2, p_3)$ を第 1 列とする 3 次正則行列 P をとる．そのとき，変数変換 (9) によって，

$$kx^2 = 0$$

を変換したものとして，(11) が得られる．これを行列でかけば，

$$P \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP = A$$

である．したがって，$\det A = 0$ である．

逆に，$\det A = 0$ とする．まず，A の階数が 2 のときを考える．そのとき，A の 2 次小行列式のどれかは 0 でない．簡単のために，行列 A の左上の 2 次小行列式の値 $ab - f^2 \neq 0$ とする．そのとき，$a \neq 0$ ならば，

$$\lambda = -f + \sqrt{f^2 - ab}, \quad \lambda' = -f - \sqrt{f^2 - ab}, \tag{12}$$

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ \lambda' & a & 0 \\ df - be & ef - ad & ab - f^2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

とおけば,

$$PA{}^tP = \begin{pmatrix} 0 & 2a(ab - f^2) & 0 \\ 2a(ab - f^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

である．$a = 0$ ならば,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & -2f & 0 \\ df - be & ef - ad & ab - f^2 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$PA{}^tP = \begin{pmatrix} 0 & -2f^2 & 0 \\ -2f^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．A の階数が 1 のときは，$A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ を満たすベクトルは 2 つ独立なものがあるから，そのようなベクトルを $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ として，さらに $\boldsymbol{p}_1$ を $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ と独立にとって，

$$P = {}^t(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$$

とおけば,

$$PA{}^tP = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形である．以上まとめると,

定理 3.1. 2 次曲線 (6) が退化するための必要十分条件は,

$$\begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix} = abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2 = 0$$

である．

この結果を，二つの 2 次曲線の交点を通る直線の問題に応用すれば，次の定理を得る．

定理 3.2. 二つの 2 次曲線

$$\begin{aligned} F_1 &= a_1x^2 + b_1y^2 + c_1 + 2d_1y + 2e_1x + 2f_1xy = 0, \\ F_2 &= a_2x^2 + b_2y^2 + c_2 + 2d_2y + 2e_2x + 2f_2xy = 0 \end{aligned}$$

の交点を通る直線が

$$tF_1 - F_2 = 0$$

によって与えられるとすれば，t は 3 次方程式

$$\begin{vmatrix} a_1t - a_2 & f_1t - f_2 & e_1t - e_2 \\ f_1t - f_2 & b_1t - b_2 & d_1t - d_2 \\ e_1t - e_2 & d_1t - d_2 & c_1t - c_2 \end{vmatrix} = 0$$

の根である．

最初に挙げた二つの例では，交点の座標は比較的容易に求められたが，一般に二つの 2 次曲線の交点の座標を求めること，すなわち，**連立 2 元 2 次方程式**を解くことは容易ではない．しかし，直線と直線の交点を求めることは容易にできる (cf. [3], §38)．すなわち，二つの 2 次曲線の交点を求めるためには次のようにすればよい．定理 3.2 の 3 次方程式は重根を持たないとする．その根を t_i, $i = 1, 2, 3$ として，$t_iF_1 - F_2 = 0$ の表す二直線を ℓ_i, ℓ_i' とする．P を 2 次曲線の交点の一つとする．P は各 i について，ℓ_i または ℓ_i' 上にあるから，P が ℓ_1 上にあるとすれば，P は，ℓ_1 と ℓ_2 の交点であるか，または ℓ_1 と ℓ_2' の交点である．同様に，P は ℓ_1 と ℓ_3 の交点であるか，または ℓ_1 と ℓ_3' の交点である．したがって，(必要ならば ℓ_2 と ℓ_2', ℓ_3 と ℓ_3' を入れ換えて) 二つの 2 次曲線の交点は,

$$\ell_1 \cap \ell_2 = \ell_1 \cap \ell_3, \quad \ell_1 \cap \ell_2' = \ell_1 \cap \ell_3', \quad \ell_1' \cap \ell_2 = \ell_1' \cap \ell_3', \quad \ell_1' \cap \ell_2' = \ell_1' \cap \ell_3$$

の 4 点として得られる．

4　4次方程式の解法

§3の最後に述べたことを実数係数の4次方程式

$$X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

を解くことに応用する．$X = x - \frac{a}{4}$ のような変換によって x^3 の係数が0の場合に帰着されるから，はじめから

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{15}$$

とする．$c = 0$ ならば，これは x^2 についての2次方程式であるから簡単に解ける．よって，$c \neq 0$ とする．また，x を $-x$ で置き換えることによって，$c < 0$ であるとしてよい．そのとき，4次方程式(15)を解くことは，$y = x^2$ とおくことによって，次の連立2元2次方程式に帰着される．これは900年前のペルシャの数学者 Omar Khayyam の方法である (cf. [2], Chap.1, Part C)

$$\begin{cases} x^2 - y &= 0, \\ y^2 + by + cx + d &= 0. \end{cases} \tag{16}$$

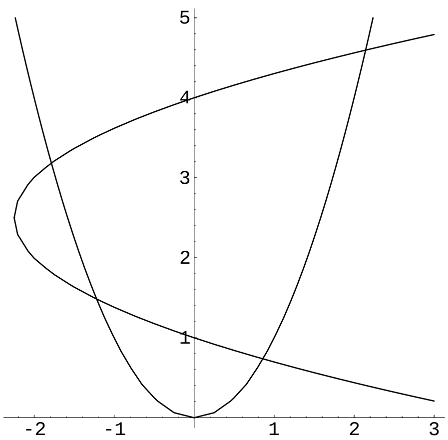

図 3: 二つの放物線 $y = x^2$ と $x = y^2 - 5y + 4$ の交点

これに対する定理3.2の3次方程式は，

$$\begin{vmatrix} t & 0 & -c/2 \\ 0 & -1 & -(b+t)/2 \\ -c/2 & -(b+t)/2 & -d \end{vmatrix} = 0$$

である．これを展開して整理すれば，

$$t^3 + 2bt^2 + (b^2 - 4d)t - c^2 = 0 \tag{17}$$

となる．3 次方程式 (17) は重根を持たないとする．その根を t_1, t_2, t_3 とする．$t_1t_2t_3 = c^2 \neq 0$ より，$t_i \neq 0$ である．$\lambda_i = \sqrt{t_i}$ とおけば，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -c$ である．

$$P_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & t_i & 0 \\ -\lambda_i & t_i & 0 \\ -c/2 & t_i(b+t_i)/2 & -t_i \end{pmatrix} \tag{18}$$

とおけば,

$$P_i \begin{pmatrix} t_i & 0 & -c/2 \\ 0 & -1 & -(b+t_i)/2 \\ -c/2 & -(b+t_i)/2 & -d \end{pmatrix} {}^tP_i = \begin{pmatrix} 0 & 2t_i^2 & 0 \\ 2t_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

である．

$$\mu_i = \frac{b + t_i + c\lambda_i^{-1}}{2}, \quad \mu_i' = \frac{b + t_i - c\lambda_i^{-1}}{2}$$

とおけば,

$$P_i^{-1} = \frac{1}{2t_i} \begin{pmatrix} \lambda_i & -\lambda_i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \mu_i' & \mu_i & -2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

より，二つの放物線 (16) の交点を通る直線は,

$$\begin{aligned} \ell_i &: -\lambda_i x + y + \mu_i = 0 \\ \ell_i' &: \lambda_i x + y + \mu_i' = 0, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3$ である．ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標として,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mu_2 - \mu_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{t_2 - t_1 + c(\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-1})}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - c\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{2} \end{aligned}$$

を得る．これは，ℓ_1 と ℓ_3 の交点の x 座標でもある．同様に，$\ell_1 \cap \ell_2' = \ell_1 \cap \ell_3'$ の x 座標として,

$$x_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{2},$$

$\ell_1' \cap \ell_2 = \ell_1' \cap \ell_3'$ の x 座標として,

$$x_3 = \frac{-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3}{2},$$

$\ell_1' \cap \ell_2' = \ell_1' \cap \ell_3$ の x 座標として,

$$x_4 = \frac{-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}{2}$$

を得る．これらが実数かどうかについて調べてみよう．3 次方程式 (17) の根 t_1, t_2, t_3 は，$t_1t_2t_3 = c^2 > 0$ を満たすから，次の三つの場合がある:

Case 1. t_1, t_2, t_3 はすべて正の実数．このときは，$\lambda_i = \sqrt{t_i}$ も実数であるから，4 次方程式 (15) の根 x_1, x_2, x_3, x_4 はすべて実数である．

Case 2. t_1, t_2, t_3 は実数であり，$t_1 > 0$, $t_2 < 0$, $t_3 < 0$．このとき，$\lambda_1 = \sqrt{t_1}$ は正の実数であり，$\lambda_2 = \sqrt{t_2}$, $\lambda_3 = \sqrt{t_3}$ は純虚数である．$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -c > 0$ より，$\lambda_2 = i\sqrt{|t_2|}$ とすれば，$\lambda_3 = -i\sqrt{|t_3|}$ である．$|t_2| \neq |t_3|$ であるから，$\lambda_2 \pm \lambda_3$ は 0 でない純虚数であり，したがって，x_1, x_2, x_3, x_4 はすべて実数でない複素数である．$x_2 = \overline{x}_1$, $x_4 = \overline{x}_3$ である．

Case 3. t_1 は正の実数，t_2, t_3 は実数でない複素数であり，$t_3 = \overline{t}_2$．このとき，$\lambda_1 = \sqrt{t_1}$ は正の実数であり，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -c > 0$ より，$\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$ である．したがって，$\lambda_2 + \lambda_3$ は実数であり，$\lambda_2 - \lambda_3$ は純虚数である．よって，x_1, x_2 は実数であり，x_3, x_4 は実数でない複素数で，$x_4 = \overline{x}_3$ である．

5　3 元 2 次形式のペア

二つの実数を成分とする 3 次対称行列の組 (A_1, A_2) を考え，そのような (A_1, A_2) 全体のなす集合を V とする．V は実数体上の 12 次元のベクトル空間である．実数を成分とする n 次正則行列全体のなす群を $GL_n(\mathbb{R})$ で表し，その中で行列式が 1 であるような行列のなす部分群を $SL_n(\mathbb{R})$ で表す．直積群 $SL_3(\mathbb{R}) \times GL_2(\mathbb{R})$ を G とかく．$g = (g_1, g_2) \in G$,

$$g_1 \in SL_3(\mathbb{R}), \quad g_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

と $A = (A_1, A_2) \in V$ に対して，

$$g \cdot A = (a\, g_1 A_1 {}^t g_1 + b\, g_1 A_2 {}^t g_1,\ c\, g_1 A_1 {}^t g_1 + d\, g_1 A_2 {}^t g_1) \tag{21}$$

によって，G の V への作用を定義する．2 元 3 次形式 $F_A(u, v)$ を

$$F_A(u, v) = \det(uA_1 + vA_2) \tag{22}$$

によって定義する．$F_A(u, v)$ の判別式を $D(A)$ とする．行列の成分をすべて複素数として考えたとき，$D(A) \neq 0$ であるような V の元たちは，互いに群の作用で移り合っている．このとき，V は**概均質ベクトル空間**であるという．概均質ベクトル空間の理論は，1960 年代に佐藤幹夫氏によって創設され，現在でも盛んに研究されている対象である (cf. [4], [5])．行列の成分をすべて整数にして考えたとき，どうなっているかを調べたい．もっと詳しく言えば，$SL_n(\mathbb{Z})$ によって整数を成分とする行列式 1 の n 次行列の群を表し，G の部分群 $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ を考える．L を整数を成分とする二つの 3 次対称行列の組のなす V の部分集合とする．その

とき，与えられた整数 $m \neq 0$ に対して，$D(A) = m$ となるような L の元で互いに Γ の作用で移り合わないようなものはいくつあるかを知りたい．その個数を $h(m)$ とするとき，ディリクレ級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{h(m)}{m^s}$$

の解析的性質について知りたい．$D(A)$ は 12 変数の 12 次同次式である．

参考文献

[1] 吉田正章，私説 超幾何関数，共立出版，1997.

[2] Van der Waerden, B., History of algebra, Springer, 1985.

[3] 高木貞治，代数学講義，共立出版.

[4] 木村達雄，概均質ベクトル空間，岩波書店，1998.

[5] 木村達雄他，現代数学の広がり 2，岩波講座「現代数学の基礎」，岩波書店.