ピタゴラス数について

上越教育大学　　中川仁

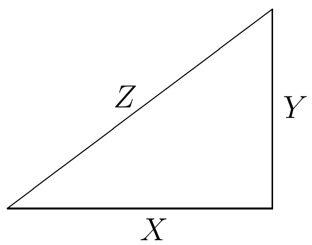
平成 11 年 10 月 30 日

1　ピタゴラス数

3 辺の長さが X, Y, Z の直角三角形は

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \tag{1.1}$$

を満たす．等式 (1.1) を満たす自然数 X, Y, Z を**ピタゴラス数**と呼ぶ．$3^2 + 4^2 = 5^2$ であるから，$3, 4, 5$ はピタゴラス数である．$5^2 + 12^2 = 13^2$ であるから，$5, 12, 13$ もピタゴラス数である．15 組のピタゴラス数の表が，約 4 千年前のバビロニアの物と推定される粘土板に残されている．



X, Y の最大公約数が d のときは，$X = dX_1,\ Y = dY_1$ とかけば，

$$Z^2 = d^2(X_1^2 + Y_1^2)$$

となって，Z^2 は d^2 で割り切れる．よって，Z は d で割り切れ，$Z = dZ_1$ とかけて，

$$X_1^2 + Y_1^2 = Z_1^2$$

である．よって，X_1, Y_1, Z_1 もピタゴラス数である．このとき，X_1, Z_1 の最大公約数も Y_1, Z_1 の最大公約数も 1 であることがわかる．このようなピタゴラス数を**原始的**なピタゴラス数と呼ぶ．このように，一般のピタゴラス数は原始的なピタゴラス数を何倍かして得られる．原始的なピタゴラス数は次の定理で与えられる．

定理 1.1. X, Y, Z を原始的なピタゴラス数で，X は奇数，Y は偶数とすれば，

$$X = a^2 - b^2,\ Y = 2ab,\ Z = a^2 + b^2$$

と表せる．ここで，a, b は自然数で，$a > b$, a, b の最大公約数は 1，a, b の一方は奇数で，もう一方は偶数である．

a	b	$a^2 - b^2$	$2ab$	$a^2 + b^2$
2	1			
3	2			
4	1			
4	3			
5	2			
5	4			
6	1			
6	5			
7	2			
7	4			
7	6			

2　ピタゴラス数の演算

2つのピタゴラス数 x_1, y_1, z_1 と x_2, y_2, z_2 に対して，

$$x = |x_1x_2 - y_1y_2|, \quad y = x_1y_2 + x_2y_1, \quad z = z_1z_2$$

とおけば，

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 \\ &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\ &= z_1^2z_2^2 = z^2 \end{aligned}$$

であるから，x, y, z もピタゴラス数である．例えば，$3, 4, 5$ と $3, 4, 5$ から，

$$x = |3 \times 3 - 4 \times 4| = 7, \quad y = 3 \times 4 + 3 \times 4 = 24, \quad z = 5 \times 5 = 25.$$

よって，$7, 24, 25$ というピタゴラス数が得られる．$3, 4, 5$ と $5, 12, 13$ からは，

$$x = |3 \times 5 - 4 \times 12| = 33, \quad y = 3 \times 12 + 5 \times 4 = 56, \quad z = 5 \times 13 = 65.$$

よって，$33, 56, 65$ というピタゴラス数が得られる．

このような演算はどこから来ているのだろうか?

$$\frac{x_1}{z_1} = \cos\theta_1,\ \frac{y_1}{z_1} = \sin\theta_1, \quad \frac{x_2}{z_2} = \cos\theta_2,\ \frac{y_2}{z_2} = \sin\theta_2$$

とするとき，三角関数の加法定理から，

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{z_1z_2},$$
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1 = \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{z_1z_2}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 &= (z_1z_2)^2(\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \sin^2(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= (z_1z_2)^2 \end{aligned}$$

を得る．これは 16 世紀のヴィエトによって知られていた．

複素数を使えば，次のように説明できる．i を虚数単位とする ($i^2 = -1$)．4 つの複素数 $x_1 + y_1 i$, $x_1 - y_1 i$, $x_2 + y_2 i$, $x_2 - y_2 i$ の積を 2 通りの順序で計算する．

$$
\begin{aligned}
&\{(x_1 + y_1 i)(x_1 - y_1 i)\}\{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)\} \\
&\quad = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2), \\
&\{(x_1 + y_1 i)(x_1 - y_1 i)\}\{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)\} \\
&\quad = \{(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)\}\{(x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i)\} \\
&\quad = \{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i\}\{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i\} \\
&\quad = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2.
\end{aligned}
$$

A　定理 1.1 の証明

X, Y, Z を原始的なピタゴラス数とする．X, Y の最大公約数は 1 であるから，X, Y がともに偶数であることはない．X, Y がともに奇数の場合も起こらない．実際，もし，X, Y がともに奇数であるとすると，$X = 2X_1 + 1$, $Y = 2Y_1 + 1$ とかける．そのとき，

$$Z^2 = (2X_1 + 1)^2 + (2Y_1 + 1)^2 = 4(X_1^2 + X_1 + Y_1^2 + Y_1) + 2$$

である．すなわち，Z^2 を 4 で割った余りは 2 である．しかし，Z が偶数ならば，$Z = 2Z_1$ とかけば，$Z^2 = 4Z_1^2$ であるから，Z^2 は 4 で割り切れる．Z が奇数ならば，$Z = 2Z_1 + 1$ とかけば，$Z^2 = 4(Z_1^2 + Z_1) + 1$ であるから，Z^2 を 4 で割った余りは 1 である．これは矛盾である．したがって，X, Y の一方は奇数でもう一方は偶数である．X は奇数，Y は偶数であるとする．そのとき，Z は奇数である．$x = \dfrac{X}{Z}$, $y = \dfrac{Y}{Z}$ とおけば，点 (x, y) は単位円

$$C : x^2 + y^2 = 1 \tag{A.1}$$

上の点であり，x, y ともに有理数であるような点である．このような点を C の**有理点**と呼ぶ．点 $P_0 = (-1, 0)$ を通る傾き t の直線 ℓ と単位円 C は P_0 以外にもう 1 点 P で交わる (図 1)．

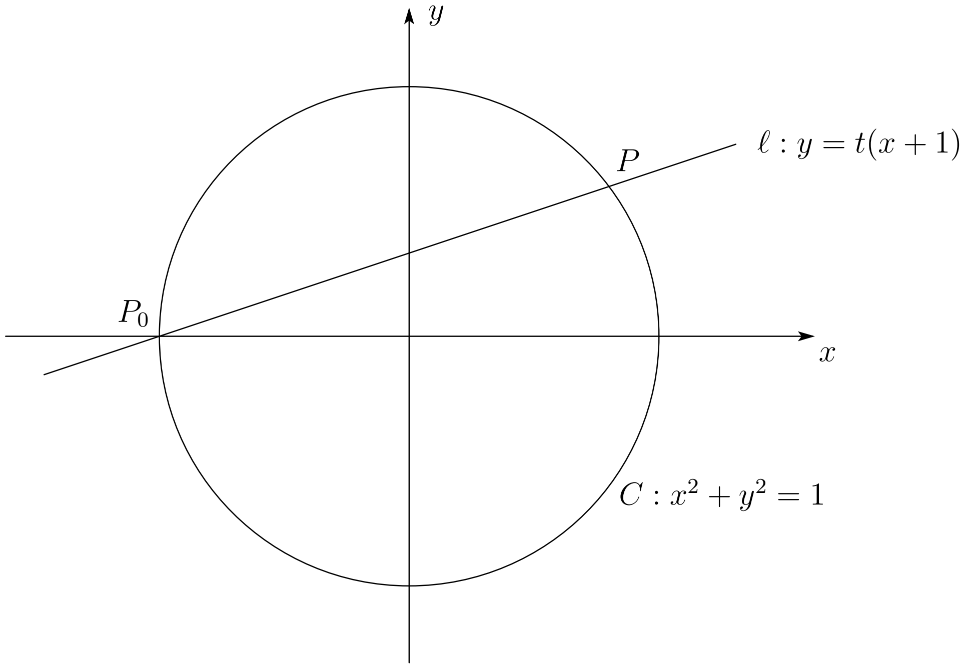


図 1: 円のパラメータ表示

直線 ℓ の方程式 $y = t(x+1)$ を (A.1) に代入して，

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1,$$

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0,$$

$$(x+1)\big((1+t^2)x + t^2 - 1\big) = 0.$$

これから，点 P の座標は，

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2} \tag{A.2}$$

とパラメータ表示される．ここで，t が有理数ならば，x, y も有理数である．逆に，x, y が有理数ならば，$t = \dfrac{y}{x+1}$ より，t は有理数である．以上によって，単位円 C 上の P_0 以外の有理点

$$\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$$

は，ある有理数 t によって，等式 (A.2) で表される．有理数 t を $t=\dfrac{b}{a}$, $a,b\in\mathbb{Z}$，$a>0$，a,b の最大公約数は 1，とかく．そのとき，

$$\frac{X}{Z}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad \frac{Y}{Z}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

である．$\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}$ はともに既約分数であるから，自然数 m が存在して，

$$a^2+b^2=mZ,\quad a^2-b^2=mX,\quad 2ab=mY$$

である．a,b の最大公約数は 1 であるから，$2a^2=m(Z+X)$, $2b^2=m(Z-X)$ から，$m=1,2$ である．a,b ともに偶数であることはない．もし，a,b ともに奇数であるとすると，X は奇数であるから，

$$(a-b)(a+b)=mX$$

において，左辺は 4 で割り切れて，右辺は 4 で割り切れないから，矛盾である．よって，a,b の一方は奇数で，もう一方は偶数である．そのとき，$a^2+b^2=mZ$ は奇数であるから，$m=1$ である．よって，

$$a^2+b^2=Z,\quad a^2-b^2=X,\quad 2ab=Y$$

である．