

線形代数学

平成26年度 後期

中川 仁

目標 線形代数について，基礎線形代数学で学んだベクトルと行列に関する基本事項を基礎として，ベクトル空間の基本的概念，線形写像の固有値等の内容を解説する．

記号 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ をそれぞれ実数全体，複素数全体の集合とする．

目次

5	行列式	2
5.1	置換	2
5.2	行列式の定義	6
5.3	行列式の基本的性質	6
5.4	行列式の展開	9
5.5	クラメールの公式	13
5.6	積の行列式	13
6	ベクトル空間	15
6.1	部分空間	15
6.2	1次独立と1次従属	15
6.3	基底	16
6.4	次元	17
7	線形写像	20
7.1	線形写像と行列	20
7.2	線形写像の合成	21
7.3	像空間，核空間	22
7.4	階数	26
8	固有値と固有ベクトル	29
8.1	固有値	29
8.2	行列の対角化	30
8.3	行列の対角化の応用	36
8.4	行列の三角化	43
8.5	正規行列	45
8.6	同時対角化	50

5 行列式

5.1 置換

n を自然数 n とし, n 個の文字 $1, 2, \dots, n$ からなる集合を

$$M_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

とする. 写像

$$\sigma : M_n \longrightarrow M_n$$

が全単射であるとき, σ を M_n の**置換**といい,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と表す. $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ は互いに相異なり $1, 2, \dots, n$ を並べ替えたものである. したがって, M_n の置換全体の集合を S_n とすると, S_n は $n!$ 個の元からなる. $\sigma(k) = k$ となる部分は省略してかくことにする. 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

とかく. $\sigma, \tau \in S_n$ のとき, 合成写像 $\sigma\tau : M_n \longrightarrow M_n$ も全単射だから, $\sigma\tau \in S_n$ である. $\sigma\tau$ を σ と τ の積という. 任意の $\rho, \sigma, \tau \in S_n$ に対して, 結合法則

$$(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$$

が成立する.

例 5.1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

これからわかるように, $\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ は一般には異なる.

恒等写像 $\epsilon : M_n \longrightarrow M_n$ を**単位置換**という. 任意の $\sigma \in S_n$ に対して,

$$\epsilon\sigma = \sigma\epsilon = \sigma$$

が成立する.

$\sigma \in S_n$ に対して、写像 σ の逆写像 $\sigma^{-1} : M_n \longrightarrow M_n$ も全単射だから、 $\sigma^{-1} \in S_n$ である。 σ^{-1} を σ の**逆置換**という。

$$\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \epsilon$$

が成立する。

$i, j \in M_n, i \neq j$ に対して、 $\sigma(i) = j, \sigma(j) = i, \sigma(k) = k$ ($k \neq i, j$) によって定まる $\sigma \in S_n$ を (ij) とかく。これを**互換**という。

$$\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix} = (ij).$$

互換と同様に、 $a_1, a_2, \dots, a_r$ を M_n の相異なる元とするととき、

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_r & a_1 \end{pmatrix} = (a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_r)$$

とかく。このような置換を r -**サイクル**と呼ぶ。任意の置換は互いに共通の数字を含まないようなサイクルの積に表すことができる。例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (135)(24).$$

さらに、 r -サイクルは次のように互換の積に表せる。

$$(a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_r) = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \cdots (a_{r-2} a_{r-1})(a_{r-1} a_r).$$

例えば、 $(135) = (13)(35)$ である。以上によって、次の命題を得る。

命題 5.1. 任意の置換は互換の積として表すことができる。

命題 5.2. S_n の任意の元は、互換 $(12), (23), \dots, (n-1n)$ の積として表せる。

[証明] n に関する帰納法で証明する。 $n = 2$ のときは明らかである。 $n > 2$ として、 S_{n-1} の任意の元は、互換 $(12), (23), \dots, (n-2n-1)$ の積として表せるとする。命題 5.1 より、任意の元は互換の積であるから、任意の互換 $(ab) \in S_n$ が互換 $(12), (23), \dots, (n-1n)$ の積として表せることを示せばよい。 $1 \leq a < b \leq n-1$ ならば、 $(ab) \in S_{n-1}$ であるから、帰納法の仮定によって、 (ab) は互換 $(12), (23), \dots, (n-1n)$ の積として表せる。 $b = n$ のとき、互換 (an) は $(an) = (an-1)(n-1n)(an-1)$ とかけ、 $(an-1)$ は $(12), (23), \dots, (n-2n-1)$ の積としてかけるから、互換 (an) は互換 $(12), (23), \dots, (n-1n)$ の積として表せる。よって、 (an) も互換 $(12), (23), \dots, (n-1n)$ の積として表せる。□

例 5.2.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

を互換の積で表す.

$$\sigma_1 = (125)(34) = (12)(25)(34).$$

変数 $x_1, \dots, x_n$ の多項式 P と置換 $\sigma \in S_n$ に対して, 変数 $x_1, \dots, x_n$ を, それぞれ $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ で置き換えて得られる多項式を σP で表す. $\sigma, \tau \in S_n$ とすると,

$$\sigma(\tau x_i) = \sigma x_{\tau(i)} = x_{\sigma(\tau(i))} = (\sigma\tau)x_i$$

であるから, 一般の多項式 P についても,

$$\sigma(\tau P) = (\sigma\tau)P$$

が成り立つ. 今, Δ_n を次のような多項式とする.

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \prod_{i < j} (x_i - x_j) \\ &= (x_1 - x_2) \quad (x_1 - x_3) \quad \cdots \quad (x_1 - x_n) \\ &\quad \times (x_2 - x_3) \quad \quad \quad (x_2 - x_n) \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \times (x_{n-1} - x_n). \end{aligned}$$

$\Delta_2 = x_1 - x_2$, $\Delta_3 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ である.

$$(12)\Delta_3 = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) = -\Delta_3,$$

$$(23)\Delta_3 = (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) = -\Delta_3,$$

であり, $(13) = (12)(23)(12)$ であるから, $(13)\Delta_3 = (12)(23)(12)\Delta_3 = (-1)^3\Delta_3 = -\Delta_3$ がわかる. 一般に, Δ_n は, 互換 (ij) に対して,

$$(ij)\Delta_n = -\Delta_n$$

を満たすことが n に関する帰納法によって証明される.

命題 5.3. 1つの置換を互換の積で表すとき, 偶数個の互換の積であるか奇数個の互換の積であるかは, 与えられた置換によって定まる.

[証明] σ を与えられた置換とする.

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_s = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_t$$

σ_i, τ_j は互換, と書けたとする. このとき,

$$\begin{aligned} \sigma\Delta &= (\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{s-1})(\sigma_s\Delta) \\ &= -(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{s-1})\Delta \\ &= \cdots \cdots = (-1)^s\Delta. \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}\tau\Delta &= (\tau_1\tau_2\cdots\tau_{t-1})(\tau_t\Delta) \\ &= -(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{t-1})\Delta \\ &= \cdots = (-1)^t\Delta.\end{aligned}$$

したがって, $(-1)^s = (-1)^t$ となり, s, t はともに偶数であるか, またはともに奇数である. $\square$

偶数個の互換の積として表せる置換を**偶置換**といい, 奇数個の互換の積として表せる置換を**奇置換**という. 単位置換は偶置換とする. 置換 σ に対して, その符号 $\text{sgn}(\sigma)$ を

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \sigma \text{ が偶置換のとき} \\ -1, & \sigma \text{ が奇置換のとき} \end{cases}$$

と定義する.

$$\begin{aligned}\text{sgn}(\sigma\tau) &= \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau), \\ \text{sgn}(\sigma^{-1}) &= \text{sgn}(\sigma)\end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 5.4. $S_n = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ ($N = n!$) とするとき,

$$(1) \quad \tau \in S_n \text{ ならば, } \{\sigma_1\tau, \dots, \sigma_N\tau\} = S_n.$$

$$(2) \quad \{\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_N^{-1}\} = S_n.$$

[証明] $\sigma_i\tau = \sigma_j\tau$ とすると,

$$(\sigma_i\tau)\tau^{-1} = (\sigma_j\tau)\tau^{-1}, \quad \sigma_i\epsilon = \sigma_j\epsilon, \quad \sigma_i = \sigma_j$$

したがって, $i = j$ となる. よって, $\sigma_1\tau, \dots, \sigma_N\tau$ は相異なるから, これらのなす集合は S_n 全体と一致する. 次に, $\sigma_i^{-1} = \sigma_j^{-1}$ とすると,

$$\sigma_j\sigma_i^{-1} = \sigma_j\sigma_j^{-1} = \epsilon,$$

$$(\sigma_j\sigma_i^{-1})\sigma_i = \epsilon\sigma_i = \sigma_i,$$

$$\sigma_j = \sigma_j\epsilon = \sigma_j(\sigma_i^{-1}\sigma_i) = \sigma_i.$$

したがって, $i = j$ となる. よって, $\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_N^{-1}$ は相異なるから, これらのなす集合は S_n 全体と一致する. $\square$

5.2 行列式の定義

n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

に対して、和

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

を A の行列式とよび、

$$|A|, \det A, D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n), \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とかく。

例 5.3. $S_2 = \{\epsilon, (12)\}$, $\text{sgn}(\epsilon) = 1$, $\text{sgn}((12)) = -1$ だから、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

である。

レポート問題 1.

$$S_3 = \left\{ 1, (12), (13), (23), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

について、各元の符号を求めよ。さらに、3 次行列 $A = (a_{ij})$ の行列式をその成分の多項式として表わせ。

5.3 行列式の基本的性質

行列式の性質の中で、記号 $D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n)$ を用いて説明できるものから述べる。

命題 5.5. 行列式 $D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n)$ は次の性質を持つ:

$$(1) \quad D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j + \mathbf{a}'_j, \cdots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) + D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}'_j, \cdots, \mathbf{a}_n).$$

$$(2) \quad D(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n).$$

$$(3) \quad D(\mathbf{a}_{\tau(1)}, \dots, \mathbf{a}_{\tau(n)}) = \text{sgn}(\tau)D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n), \quad \tau \in S_n.$$

系 5.6. ある $j \neq k$ に対して, $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k$ ならば, $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$ である.

系 5.7. $c \in \mathbb{R}$, $j \neq k$ ならば,

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j + c\mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n).$$

[証明]

$$\begin{aligned} D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j + \mathbf{a}'_j, \dots, \mathbf{a}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots (a_{\sigma(j)j} + a'_{\sigma(j)j}) \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a'_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) + D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_j, \dots, \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots (ca_{\sigma(j)j}) \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= c \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= cD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

$\tau \in S_n$ に対して, $\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_{\tau(j)}$, $j = 1, \dots, n$ とおく. $b_{ij} = a_{i\tau(j)}$ である. 補題 5.4 の (1) を用いれば,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{a}_{\tau(1)}, \dots, \mathbf{a}_{\tau(n)}) &= D(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\tau(1)} \cdots a_{\sigma(n)\tau(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)\tau(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma\tau^{-1}(j)j} \quad (\sigma\tau^{-1} = \sigma') \\ &= \sum_{\sigma' \in S_n} \text{sgn}(\sigma'\tau) a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n)n} \\ &= \text{sgn}(\tau)D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k$ ならば, $\tau = (jk)$ として, (3) を適用すると, $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$ を得る. (1) と系 5.6 から, 系 5.7 がでる. $\square$

命題 5.8. 単位行列 $I = (e_1, \dots, e_n)$ の行列式は 1 である.

[証明]

$$\begin{aligned} D(e_1, \dots, e_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \delta_{\sigma(1)1} \cdots \delta_{\sigma(n)n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる. □

命題 5.9.

$$|{}^t A| = |A|.$$

[証明] ${}^t A = (a'_{ij})$ とおくと, $a'_{ij} = a_{ji}$ であるから,

$$\begin{aligned} |{}^t A| &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a'_{\sigma(1)1} \cdots a'_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

かけ算の順序を入れ換えれば,

$$\text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \text{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

だから, 補題 5.4 より,

$$\begin{aligned} |{}^t A| &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\sigma' \in S_n} \text{sgn}(\sigma') a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n)n} \\ &= |A| \end{aligned}$$

となる. □

レポート問題 2. 行列式の性質を用いて計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

注意 5.1. 命題 5.5 と命題 5.9 より, 行についても命題 5.5 とと同様なことが成り立つ.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

とするとき,

$$\begin{aligned}
 |A| &= |{}^tA| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (A \text{ の第 1 行と第 2 行を交換した行列式})
 \end{aligned}$$

5.4 行列式の展開

n 次の行列式は $n-1$ 次の行列式の和として表せることを示そう. n 次行列 $A = (a_{ij})$ から, その第 i 行と第 j 列をとり除いて得られる $n-1$ 次行列を A_{ij} とかく. このとき,

定理 5.10.

$$(1) \quad |A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

$$(2) \quad |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$n = 4$ とする. $i = 1, j = 4$ とする.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば, $\mathbf{a}_4 = a_{14}\mathbf{e}_1 + a_{24}\mathbf{e}_2 + a_{34}\mathbf{e}_3 + a_{44}\mathbf{e}_4$ であるから,

$$\begin{aligned}
 D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) &= a_{14}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1) + a_{24}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2) \\
 &\quad + a_{34}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_3) + a_{44}D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_4).
 \end{aligned}$$

ここで、第4項について、 $a'_{i4} = 0, i = 1, 2, 3, a'_{44} = 1$ とすれば、

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_4) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\sigma \in S_4} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a'_{\sigma(4)4} \\
&= \sum_{\sigma \in S_4, \sigma(4)=4} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \\
&= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A_{44}|.
\end{aligned}$$

第3項についても、上の結果から

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_3) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = -|A_{34}|.
\end{aligned}$$

第2項についても、同様に、

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = |A_{24}|.
\end{aligned}$$

第1項についても、同様に、

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = -|A_{14}|.
\end{aligned}$$

以上によって,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^5 |A_{14}| + (-1)^6 |A_{24}| + (-1)^7 |A_{34}| + (-1)^8 |A_{44}|$$

が示された. 一般の場合も同様である.

定理 5.11.

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ik} |A_{ij}| = \delta_{kj} |A|.$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{kj} |A_{ij}| = \delta_{ki} |A|.$$

[証明] (1) $k = j$ の場合が前の定理である. $k \neq j$ の場合, 右辺は 0 である. 左辺は, $|A|$ において, 第 j 列を第 k 列で置き換えて得られる行列式

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \overbrace{\mathbf{a}_k}^j, \dots, \overbrace{\mathbf{a}_k}^k, \dots, \mathbf{a}_n)$$

の第 j 列に関する展開だから, 系 5.6 より 0 である. (2) は命題 5.9 と (1) からで
る. □

例 5.4. 行列式の展開を用いて計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 5.5. 行列式の性質を用いて計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

レポート問題 3. 行列式の展開を用いて計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

5.5 クラメールの公式

A が n 次正則行列のとき, 任意の $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して, 連立 1 次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

は唯一つの解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ を持った. この $\mathbf{x}$ を行列式を用いて表す.

$$A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n),$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

定理 5.12. クラメールの公式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ならば,

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n) = x_j |A|$$

となる. 特に, $|A| \neq 0$ ならば,

$$x_j = \frac{1}{|A|} D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

[証明] $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ならば,

$$\mathbf{b} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n$$

である. このとき,

$$\begin{aligned} & D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= x_j |A| \end{aligned}$$

となる. □

5.6 積の行列式

定理 5.13. A, B を n 次行列とすると, $|AB| = |A||B|$ が成り立つ.

[証明] $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, $B = (b_{ij})$ とすると,

$$AB = \left(\sum_{k_1=1}^n b_{k_1 1} \mathbf{a}_{k_1}, \dots, \sum_{k_n=1}^n b_{k_n n} \mathbf{a}_{k_n} \right).$$

したがって,

$$\begin{aligned} |AB| &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^n b_{k_1 1} \cdots b_{k_n n} D(\mathbf{a}_{k_1}, \dots, \mathbf{a}_{k_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} D(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= |A||B| \end{aligned}$$

となる. □

定理 5.14. A を n 次行列とするととき,

$$A \text{ が正則} \iff |A| \neq 0$$

である. また, $|A| \neq 0$ であるとき, A の逆行列 A^{-1} は次の公式で与えられる.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t(\alpha_{ij}).$$

ここで, $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ である. α_{ij} を A における a_{ij} の**余因子**という.

[証明] A が正則であるとする. このとき,

$$AA^{-1} = I.$$

したがって,

$$|A||A^{-1}| = 1.$$

ゆえに, $|A| \neq 0$. 逆に, $|A| \neq 0$ ならば, 定理 5.11 より,

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} \frac{\alpha_{ij}}{|A|} = \delta_{jk}, \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{\alpha_{ij}}{|A|} = \delta_{ki}.$$

よって,

$$B = \frac{1}{|A|} {}^t(\alpha_{ij})$$

とおけば,

$$BA = I, \quad AB = I.$$

すなわち, $B = A^{-1}$ である. □

6 ベクトル空間

6.1 部分空間

定義 6.1. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が次の条件 (i), (ii) を満たすとき $\mathbb{R}^n$ の**部分空間**であるという.

- (i) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ に対して, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$;
- (ii) $\forall \mathbf{x} \in W, \forall k \in \mathbb{R}$ に対して, $k\mathbf{x} \in W$.

例 6.1. $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

は部分空間である.

練習問題 6.1. $\mathbb{R}^4$ の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

は部分空間である.

6.2 1 次独立と 1 次従属

定義 6.2. $\mathbb{R}^n$ におけるベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ について,

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

が成り立つのは, $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ の場合に限るとき, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ は**1 次独立**であるという. そうでないとき, **1 次従属**であるという.

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ は 1 次独立であることは, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r-1}$ が 1 次独立であり, $\mathbf{v}_r$ が $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r-1}$ の 1 次結合として表せないことと同値である.

例 6.2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属.

練習問題 6.2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であることを証明せよ.

6.3 基底

$\mathbb{R}^n$ におけるベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ の 1 次結合の全体を W とすると, W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になる. このとき, ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ は部分空間 W を**生成**するという. さらに, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ が 1 次独立のとき, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ を W の**基底**という.

例 6.3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は例 6.1 の部分空間 W の基底である.

命題 6.1. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W が r 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ によって生成されるとする. このとき, $s > r$ ならば, s 個の W のベクトルは 1 次従属になる.

[証明] $s = r + 1$ の場合に証明すればよい. r に関する帰納法によって示す. $r = 1$ のときは, $W = \{k\mathbf{v}_1; k \in \mathbb{R}\}$ であるから, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in W$ は, $\mathbf{x}_1 = a_1\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2 = a_2\mathbf{v}_1$ とかける. $a_1 = a_2 = 0$ ならば, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. $a_1 \neq 0$ または $a_2 \neq 0$ ならば, $a_2\mathbf{x}_1 - a_1\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

$r = p - 1$ のとき, 命題が正しいとする. $r = p$ のとき, W_1 を $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p-1}$ によって生成される W の部分空間とする. $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+1} \in W$ とすると,

$$\mathbf{x}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{ip}\mathbf{v}_p, \quad (i = 1, \dots, p+1).$$

もし, $a_{1p} = a_{2p} = \dots = a_{p+1p} = 0$ とすると, W_1 のベクトル $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+1}$ は帰納法の仮定から 1 次従属である. 次に, $a_{1p}, a_{2p}, \dots, a_{p+1p}$ のどれかが 0 でないとする. $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+1}$ の番号をいれかえて, $a_{1p} \neq 0$ としてよい.

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - (a_{ip}/a_{1p})\mathbf{x}_1, \quad (i = 2, \dots, p+1)$$

とおけば, 帰納法の仮定から p 個の W_1 のベクトル $\mathbf{y}_i, (i = 2, \dots, p+1)$ は 1 次従属である. よって, 少なくとも 1 つは 0 でない $\mathbb{R}$ の元 $k_i, i = 2, \dots, p+1$ が存在して,

$$k_2\mathbf{y}_2 + \dots + k_{p+1}\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{0}.$$

$$k_1 = -(k_2a_{2p} + \dots + k_{p+1}a_{p+1p})/a_{1p}$$

とおけば,

$$k_1\mathbf{x}_1 + \dots + k_{p+1}\mathbf{x}_{p+1} = \mathbf{0}.$$

□

系 6.2. $\mathbb{R}^n$ の $n + 1$ 個のベクトルは 1 次従属である.

系 6.3. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_s$ がともに $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W の基底ならば, $r = s$ である.

6.4 次元

定義 6.3. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $W \neq \{0\}$ の中で 1 次独立なベクトルの最大個数を、 W の **次元** といい、 $\dim W$ とかく。すなわち、 W の中に r 個の 1 次独立なベクトルが存在し、 r 個より多くのベクトルは必ず 1 次従属になるとき、 W の次元は r 次元であるという。系 6.2 より、 $1 \leq \dim W \leq n$ である。 $\dim W = r$ ならば、 W は r 個のベクトルからなる基底を持つ。 $\dim\{0\} = 0$ とおく。

[証明] $\dim W = r$ ならば、 W は r 個の 1 次独立なベクトル $v_1, v_2, \dots, v_r$ を含む。そのとき、 W の任意のベクトル v をとると、 $r+1$ 個の W のベクトル $v_1, v_2, \dots, v_r, v$ は 1 次従属であるから、 v は $v_1, v_2, \dots, v_r$ の 1 次結合である。したがって、 $v_1, v_2, \dots, v_r$ は W を生成し、1 次独立であるから、 W の基底である。□

定理 6.4. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W が m 個のベクトル $v_1, v_2, \dots, v_m$ によって生成されたとする。このとき、これらの m 個のベクトルのうちの 1 次独立なベクトルの最大個数が W の次元である。

[証明] v_i がすべて 0 ならば、 $W = \{0\}$ だから $\dim W = 0$ 。 $v_1, v_2, \dots, v_m$ の中に含まれる 1 次独立なベクトルの最大個数が r であるとする。このとき番号をつけかえて、 $v_1, v_2, \dots, v_r$ が 1 次独立であるとしてよい。 $r+1 \leq j \leq m$ とするとき $r+1$ 個のベクトル $v_1, v_2, \dots, v_r, v_j$ は 1 次従属だから、

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r + k_j v_j = 0$$

となる。ここで、 $k_1, \dots, k_r, k_j$ の中には少なくとも 1 つ 0 でないものがある。 $v_1, v_2, \dots, v_r$ が 1 次独立であることから、 $k_j \neq 0$ がわかる。したがって、

$$v_j = -k_j^{-1}(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r) \quad (r+1 \leq j \leq m).$$

これから、 $v_1, v_2, \dots, v_r$ は W を生成することがわかる。また、これらは 1 次独立である。命題 6.1 より、 r 個より多くのベクトルは必ず 1 次従属になるから、 $\dim W = r$ である。□

V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間で、 $p = \dim V$, $q = \dim W$ とする。このとき、 $V \subset W$ ならば、次元の定義から明らかに、 $p \leq q$ である。さらに

$$V \subset W, p = q \implies V = W$$

が成り立つ。実際、 $v_1, \dots, v_p$ を V の基底とすると、 $p = q = \dim W$ であるから、 $v_1, \dots, v_p$ は W の基底でもある。

定理 6.5. W を $\mathbb{R}^n$ の r 次元部分空間とし、 s 個の W のベクトル $v_1, \dots, v_s$ が 1 次独立であるとする。このとき、 $s < r$ ならば、 W に属する $r-s$ 個のベクトル $v_{s+1}, \dots, v_r$ を選んで、 $v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_r$ が W の基底になるようにできる。

[証明] V_1 を $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ によって生成される W の部分空間とする. このとき, 定理 6.4 より, $\dim V_1 = s$ である. $s < r$ ならば, $V_1 \subsetneq W$ である. したがって, $\mathbf{v}_{s+1} \in W, \mathbf{v}_{s+1} \notin V_1$ となるベクトル $\mathbf{v}_{s+1}$ が存在する. このとき, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{s+1}$ は 1 次独立である. V_2 を $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{s+1}$ によって生成される W の部分空間とする. $\dim V_2 = s + 1$ である. もし, $s + 1 = r$ ならば, $V_2 = W$ であり, したがって, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{s+1}$ は W の基底になる. $s + 1 < r$ ならば, 上の議論を繰り返せばよい. $\square$

例 6.4. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; x_1 + x_2 = 0 \right\}$ とする. このとき, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, これらは V の基底になる. よって, $\dim V = 3$ である. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を含むような $\mathbb{R}^4$ の基底として, $\mathbf{v}_4$ を V に属さないようにとる, 例えば, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ にとれば, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ は $\mathbb{R}^4$ の基底である.

レポート問題 4. $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

について, 次の (1), (2) に答えよ.

(1) V の基底と次元を求めよ.

(2) (1) で求めた V の基底を含むような $\mathbb{R}^4$ の基底を求めよ.

$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が V の基底としてとれた. よって, $\dim V = 2$ である.

ある. $\mathbf{v}_3 \notin V$ として $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとる. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ によって生成される部分空間

間を V_1 とする.

$$V'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

とおけば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V'_1$ であり, したがって, $V_1 \subset V'_1$ である. $\dim V_1 = \dim V'_1 =$

3 であるから, $V_1 = V'_1$ である. $\boldsymbol{v}_4 \notin V_1$ として, $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとれば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,$

$\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は $\mathbb{R}^4$ の基底である.

7 線形写像

7.1 線形写像と行列

定義 7.1. 写像 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ が

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \\f(k\mathbf{x}) &= kf(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

を満たすとき、 f は**線形写像**であるという。 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である。

$n \times m$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

に対して、写像 $L_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$$

によって定義すれば、 L_A は線形写像である。 $\mathbb{R}^m$ の基本ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^m$ の基底であった。 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ を $\mathbb{R}^m$ の**標準基底**と呼ぶ。 線形写像 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して、

$$f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, m$$

とおく。 このとき、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

に対して

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_m\mathbf{e}_m$$

だから,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \dots + x_m f(\boldsymbol{e}_m) \\ &= x_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + x_m \boldsymbol{a}_m \\ &= A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

したがって, $f = L_A$ となる.

7.2 線形写像の合成

命題 7.1. $A = (a_{ij})$ を n 行 m 列の行列, $B = (b_{jk})$ を m 行 l 列の行列とすると,

$$L_A L_B = L_{AB}$$

が成立する.

[証明] 合成写像 $L_A L_B : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ も線形写像であることは容易にわかる. したがって, ある n 行 l 列の行列 $C = (c_{ik})$ が存在して, $L_A L_B = L_C$ とかける. $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_l$ を $\mathbb{R}^l$ の標準基底とすると,

$$L_B(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{b}_k,$$

$$\begin{aligned} L_A L_B(\boldsymbol{e}_k) &= L_A(\boldsymbol{b}_k) \\ &= A\boldsymbol{b}_k \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} b_{jk} \\ \sum_{j=1}^m a_{2j} b_{jk} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} b_{jk} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

一方, $L_C(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{c}_k$ だから,

$$\boldsymbol{c}_k = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} b_{jk} \\ \sum_{j=1}^m a_{2j} b_{jk} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} b_{jk} \end{pmatrix}.$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} = AB \text{ の } (i, k) - \text{成分}$$

したがって, $C = AB$ である. □

補題 7.2. f を集合 X から集合 Y への写像, g を集合 Y から集合 Z への写像, h を集合 Z から集合 W への写像とする. そのとき, $(hg)f = h(gf)$ が成り立つ.

補題 7.2 より, $(L_A L_B) L_C = L_A (L_B L_C)$ である. したがって, 命題 7.1 よりただちに, 次を得る.

系 7.3. A, B, C をそれぞれ, $n \times m$, $m \times l$, $l \times k$ 型の行列とすると,

$$(AB)C = A(BC)$$

が成立する.

7.3 像空間, 核空間

定義 7.2. 線形写像 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}, \\ \ker f &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}\end{aligned}$$

とおく. f の線形性から, $\operatorname{Im} f$ は $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間である. これを f の**像空間**という. また, $\ker f$ は $\mathbb{R}^m$ の部分ベクトル空間である. これを f の**核空間**という.

$$\begin{aligned}f \text{ が全射} &\iff \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n, \\ f \text{ が単射} &\iff \ker f = \{\mathbf{0}\}.\end{aligned}$$

[証明] $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ であるから, f が単射とすれば, $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ である. 逆に, $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ とする. $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ とすれば,

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

したがって, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \ker f = \{\mathbf{0}\}$ である. すなわち, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. ゆえに, f は単射である. $\square$

定理 7.4. 線形写像 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = m$$

が成立する.

[証明] $\dim \ker f = s \leq m$ とおく. $\ker f$ の基底を $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s$ とする. 定理 6.5 より, $r = m - s$ 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ をとって,

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$$

が $\mathbb{R}^m$ の基底であるようにできる. 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ は,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \dots + x_s \mathbf{u}_s + y_1 \mathbf{v}_1 + \dots + y_r \mathbf{v}_r$$

とかけるから,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1 f(\mathbf{u}_1) + \dots + x_s f(\mathbf{u}_s) + y_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + y_r f(\mathbf{v}_r) \\ &= y_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + y_r f(\mathbf{v}_r). \end{aligned}$$

したがって, $\text{Im } f$ は $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_r)$ で生成される. $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{R}$ に対して,

$$k_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + k_r f(\mathbf{v}_r) = \mathbf{0}$$

とすると,

$$f(k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_r \mathbf{v}_r) = \mathbf{0}.$$

すなわち,

$$k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_r \mathbf{v}_r \in \ker f.$$

したがって,

$$k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_r \mathbf{v}_r = h_1 \mathbf{u}_1 + \dots + h_s \mathbf{u}_s$$

とかけるが, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ が $\mathbb{R}^m$ の基底であることから, $k_1 = \dots = k_r = h_1 = \dots = h_s = 0$. したがって, $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_r)$ は 1 次独立である. これで, $\dim \text{Im } f = r = m - s$ が示された. $\square$

系 7.5. f が全単射ならば, $m = n$ である.

[証明] $\text{Im } f = \mathbb{R}^n$, $\ker f = \{0\}$ であるから, $\dim \text{Im } f + \dim \ker f = n + 0 = m$, $n = m$. $\square$

系 7.6. $m > n$ ならば, f は単射ではない.

[証明] $\text{Im } f \subset \mathbb{R}^n$ より, $\dim \text{Im } f \leq n$ である. したがって, $m = \dim \text{Im } f + \dim \ker f \leq n + \dim \ker f$, $\dim \ker f \geq m - n > 0$. すなわち, $\ker f \supsetneq \{0\}$. ゆえに, f は単射でない. $\square$

系 7.7. $m < n$ ならば, f は全射ではない.

[証明] $\dim \ker f \geq 0$ だから, $m = \dim \text{Im } f + \dim \ker f \geq \dim \text{Im } f$, したがって, $\dim \text{Im } f \leq m < n$, $\text{Im } f \subsetneq \mathbb{R}^n$. ゆえに, f は全射ではない. $\square$

系 7.8. $m = n$ のとき, f が単射 $\iff f$ が全射.

[証明] f が単射だとすれば, $\ker f = \{0\}$, $\dim \ker f = 0$, $n = m = \dim \text{Im } f + \dim \ker f = \dim \text{Im } f$, $\text{Im } f = \mathbb{R}^n$. ゆえに, f は全射である. f が全射だとすれば, $\text{Im } f = \mathbb{R}^n$, $\dim \text{Im } f = n$. よって, $m = \dim \text{Im } f + \dim \ker f = n + \dim \ker f$, $\dim \ker f = m - n = 0$. $\ker f = \{0\}$. ゆえに f は単射である. $\square$

例 7.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ について, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in$

$\ker L_A$ とすると,

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0, & x + 4y &= 0, \\ x &= -4y, & z &= 9y. \end{aligned}$$

したがって,

$$\ker L_A = \left\{ k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R} \right\}.$$

ゆえに, $\dim \ker L_A = 1$. したがって, $\dim \operatorname{Im} L_A = 2$. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけば,

$$A \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$-4\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 9\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}.$$

よって, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 1 次従属である. $\dim \operatorname{Im} L_A = 2$.

レポート問題 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, 線形写像 $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ について,

$\dim \ker L_A$, $\dim \operatorname{Im} L_A$ を求めよ. さらに, $\operatorname{Im} L_A$, $\ker L_A$ の基底を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker L_A \text{ とすれば,}$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0, \\ x - y + 3z &= 0, \\ 3x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

$y = -2x$, $x + 2x + 3z = 0$, $z = -x$, $3x - 2x - x = 0$. ゆえに,

$$\ker L_A = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R} \right\}.$$

したがって, $\ker L_A$ の基底として, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれ, $\dim \ker L_A = 1$ である.

$\dim \operatorname{Im} L_A = 3 - 1 = 2$. $\operatorname{Im} L_A$ はベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成されるが,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成され, これが基底である.

補題 7.9. f を集合 X から集合 Y への写像, g を集合 Y から集合 X への写像とする. そのとき, $gf = 1_X$, 1_X は X の恒等写像, ならば, f は単射であり, g は全射である.

[証明] $f(x) = f(x')$ とすれば, $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$, よって, f は単射である. 任意の $x \in X$ に対して, $y = f(x) \in Y$ とおけば, $g(y) = g(f(x)) = x$, よって, g は全射である. $\square$

命題 7.10. n 次行列 A に対して次の 3 つの条件は互いに同値である.

- (i) A は正則である.
- (ii) $BA = I_n$ となる n 次行列 B が存在する.
- (iii) $AB = I_n$ となる n 次行列 B が存在する.

[証明] (ii) または (iii) を仮定すると, 補題 7.9 と系 7.8 より, $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は全単射になる. この逆写像も明らかに線形写像であるから, ある n 次行列 C が存在して, $L_A^{-1} = L_C$ となる. このとき, 命題 7.1 より $AC = CA = I_n$. すなわち, A は正則である. また, $B = C$ であることもわかる. (i) $\Rightarrow$ (ii), (i) $\Rightarrow$ (iii) は明らか. $\square$

命題 7.11. A を n 次行列とするとき, 連立 1 次方程式

$$Ax = 0$$

が非自明解 ($x \neq 0$ となる解 x) を持つための必要十分条件は,

$$|A| = 0$$

である.

[証明] $|A| \neq 0$ ならば, A は正則であるから, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ならば,

$$A^{-1}A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

を得る. $|A| = 0$ ならば, A は正則でない. したがって, 線形写像 $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は全単射ではない. 系 7.8 より, L_A は単射でない. よって, $\ker L_A \supsetneq \{\mathbf{0}\}$ である. すなわち, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ で, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たすものが存在する. $\square$

7.4 階数

定義 7.3. n 行 m 列の行列 A に対して, 線型写像 $L_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ の像空間の次元を行列 A の**階数**といい, $\text{rank } A$ とかく. すなわち,

$$\text{rank } A = \dim \text{Im } L_A.$$

$A = (a_{ij})$ を n 行 m 列の行列とし, $\mathbf{e}_j$, ($1 \leq j \leq m$) を $\mathbb{R}^m$ の標準基底, $\mathbf{a}_j$, ($1 \leq j \leq m$) を A の列ベクトルとする. このとき,

$$L_A(\mathbf{e}_j) = A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j, \quad 1 \leq j \leq m$$

であるから, $\text{Im } L_A$ は $\mathbf{a}_j$, $1 \leq j \leq m$ で生成される. したがって,

$$\text{rank } A = \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \text{ の中で } 1 \text{ 次独立なものの最大個数.}$$

命題 7.12. A を n 行 m 列の行列, P を n 次正則行列, Q を m 次正則行列とする. そのとき,

$$\text{rank } PA = \text{rank } AQ = \text{rank } A$$

が成り立つ. 特に, 基本変形によって行列の階数は変わらない.

[証明] $L_Q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ は全単射であるから, $\text{Im } L_Q = \mathbb{R}^m$ である. $L_{AQ} = L_AL_Q$ であるから, $\text{Im } L_{AQ} = \text{Im } L_A$ である. よって, $\text{rank } AQ = \text{rank } A$ である. また, $L_{PA} = L_PL_A$ かつ $L_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は全単射であるから, $\ker L_{PA} = \ker L_A$ である. また, 定理 7.4 より,

$$\dim \text{Im } L_{PA} + \dim \ker L_{PA} = m,$$

$$\dim \text{Im } L_A + \dim \ker L_A = m$$

であるから, $\dim \text{Im } L_{PA} = \dim \text{Im } L_A$ を得る. よって, $\text{rank } PA = \text{rank } A$ である. 基礎線形代数学の命題 4.2 より, A に基本変形を繰り返して, 階段行列 A' が得られたとすると, $A' = PA$, P は m 次正則行列, とかける. よって, 上に示したことから, $\text{rank } A' = \text{rank } A$ を得る. $\square$

命題 7.13. $A = (a_{ij})$ を次のような n 行 m 列の階段行列とする. $j_1 < j_2 < \dots < j_s$, $a_{ij} = 0, j < j_i, a_{ij_i} \neq 0, 1 \leq i \leq s, a_{ij} = 0, s < i \leq n, j = 1, \dots, m$. そのとき, $\text{rank } A = s$ である.

[証明] A の第 j 列の列ベクトルを $\mathbf{a}_j$ とする. そのとき,

$$\mathbf{a}_{j_1} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{j_2} = \begin{pmatrix} * \\ a_{2j_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_{j_s} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ a_{sj_s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから, 明らかに $\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_s}$ は 1 次独立である. よって, $\text{rank } A \geq s$ である. また, すべての列ベクトル $\mathbf{a}_j$ の第 i -成分は $s < i \leq n$ に対して, 0 であるから, 線形写像 $L_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ の像空間 $\text{Im } L_A$ は $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の s 次元部分空間に含まれる. したがって, $\text{rank } A = \dim \text{Im } L_A \leq s$ である. 以上によって, $\text{rank } A = s$ が示された. $\square$

例 7.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ の階数を求める. $\mathbf{a}_j, (1 \leq j \leq 3)$ を A の列ベクトルとする.

$$\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3$$

だから, $\text{rank } A = 2$. これは基本変形を用いて次のように階数を求めることもできる.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'. \end{aligned}$$

命題 7.13 より, $\text{rank } A' = 2$ であり, 命題 7.12 より, $\text{rank } A = 2$ を得る.

命題 7.14. $A = (a_{ij})$ を n 行 m 列の行列とすると, $\text{rank } {}^t A = \text{rank } A$.

[証明] $\text{rank } A = s, \text{rank } {}^tA = r$ とする. A に基本変形を繰り返して階段行列 A' を得たとする. 命題 7.12 より, $\text{rank } A' = \text{rank } A = s$ である. 命題 7.13 より, 階段行列 A' の第 $s+1$ 行から第 n 行までは $\mathbf{0}$ である. したがって, ${}^tA'$ の第 $s+1$ 列から第 n 列までは $\mathbf{0}$ であり, ${}^tA'$ の列ベクトルで 1 次独立なものは高々 s 個しかない. ゆえに, $\text{rank } {}^tA' \leq s$ である. また, $A' = PA$, P は n 次正則行列, とかけるから, ${}^tA' = {}^tA'P$ である. 命題 7.12 より, $\text{rank } {}^tA' = \text{rank } {}^tA = r$ である. 以上によって, $r \leq s$ を得た. A を tA でおきかえて同じ議論をすれば, $s \leq r$ を得る. ゆえに, $r = s$ である. $\square$

命題 7.15. A を n 行 m 列, B を m 行 l 列の行列とすると,

$$\text{rank } AB \leq \text{rank } A, \quad \text{rank } AB \leq \text{rank } B$$

が成立する.

[証明] $L_B : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m, L_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ を考える. $L_{AB} = L_A L_B$ だから, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l$ に対して,

$$L_{AB}(\mathbf{x}) = L_A(L_B(\mathbf{x})) \in \text{Im } L_A,$$

$$\text{Im } L_{AB} \subset \text{Im } L_A.$$

したがって,

$$\text{rank } AB = \dim \text{Im } L_{AB} \leq \dim \text{Im } L_A = \text{rank } A.$$

次に, $r = \text{rank } B = \dim \text{Im } L_B$ とし, $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_r$ を $\text{Im } L_B$ の基底とする. 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l$ に対して, $L_B(\mathbf{x}) \in \text{Im } L_B$ であるから,

$$L_B(\mathbf{x}) = k_1 \mathbf{y}_1 + \dots + k_r \mathbf{y}_r \quad (k_j \in \mathbb{R})$$

とかける. よって,

$$L_{AB}(\mathbf{x}) = L_A(L_B(\mathbf{x})) = k_1 L_A(\mathbf{y}_1) + \dots + k_r L_A(\mathbf{y}_r).$$

したがって, $\text{Im } L_{AB}$ は r 個のベクトル $L_A(\mathbf{y}_1), \dots, L_A(\mathbf{y}_r)$ によって生成される. ゆえに,

$$\text{rank } AB = \dim \text{Im } L_{AB} \leq r = \text{rank } B.$$

$\text{rank } AB \leq \text{rank } A$ かつ $\text{rank } AB \leq \text{rank } B$ である. $\square$

例 7.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると, $\text{rank } A = \text{rank } B = 1$ であるが, $AB = O$ だから, $\text{rank } AB = 0$ である.

8 固有値と固有ベクトル

8.1 固有値

特に断らない限りは，考えるベクトル空間は複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であるとする．

定義 8.1. f を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ 自身への線型写像とする． $\alpha \in \mathbb{C}$ が f の**固有値**であるとは，

$$f(\boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{v}$$

を満たす $\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ が存在するときをいい，このようなベクトル $\boldsymbol{v}$ を固有値 α の**固有ベクトル**という．また， n 次行列 A に対して，線型写像

$$L_A : \mathbb{C}^n \ni \boldsymbol{x} \longrightarrow A\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$$

の固有値，固有ベクトルを，行列 A の固有値，固有ベクトルという．

定理 8.1. n 次行列 A と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\alpha \text{ が } A \text{ の固有値} \iff |\alpha I - A| = 0$$

ここで， I は n 次単位行列である．

[証明] 命題 7.11 より，

$$\begin{aligned} \alpha \text{ が } A \text{ の固有値} &\iff (\alpha I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ が非自明解を持つ} \\ &\iff |\alpha I - A| = 0. \end{aligned}$$

□

A を n 次行列とし，変数 t についての n 次の多項式

$$f_A(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{vmatrix}$$

を考えれば，定理 8.1 は，

$$\alpha \text{ が } A \text{ の固有値} \iff \alpha \text{ が方程式 } f_A(t) = 0 \text{ の根}$$

を主張している．多項式 $f_A(t)$ ，方程式 $f_A(t) = 0$ をそれぞれ， A の**固有多項式**，**固有方程式**という．

$$P^{-1}AP = B$$

のとき,

$$\begin{aligned} f_B(t) &= |tI - B| = |tI - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(tI - A)P| \\ &= |P^{-1}||tI - A||P| = f_A(t) \end{aligned}$$

である.

8.2 行列の対角化

A を n 次行列とし, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を相異なる A の固有値とする.

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$$

をそれぞれ固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ の固有ベクトルとする. このとき, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ は 1 次独立である. 実際,

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

とすると, この両辺に行列 A を左からかければ,

$$c_1 \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_r \alpha_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

したがって,

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_r) \mathbf{v}_1 + \dots + c_{r-1}(\alpha_{r-1} - \alpha_r) \mathbf{v}_{r-1} = \mathbf{0}.$$

r に関する帰納法によって, $c_1 = \dots = c_r = 0$ がわかる.

定理 8.2. n 次行列 A が n 個の相異なる固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を持つとする. そのとき, 固有値 α_i の固有ベクトルを $\mathbf{v}_i$ とし, $P = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ とおけば, P は正則行列であり, A は次のように対角化される.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

[証明] $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立であるから, $P = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ とおけば, P は正則行列である. 実際, 線形写像 $L_P: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ の像空間は $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ で生成され, $\mathbb{C}^n$ になるから, L_P は全射であり, したがって, 全単射である. よって, P は正則行列である.

$$AP = (A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_n) = (\alpha_1 \mathbf{v}_1, \dots, \alpha_n \mathbf{v}_n) = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

P は正則行列だから, 両辺に P^{-1} を左からかければよい. □

レポート問題 6.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

とするとき, A の固有値と固有ベクトルを求めて, A を対角化せよ. また, A^m を求めよ.

$$\begin{aligned} f_A(t) &= |tI - A| \\ &= (t - 11)(t + 1) + 32 \\ &= t^2 - 10t + 21 \\ &= (t - 3)(t - 7). \end{aligned}$$

したがって, A の固有値は 3, 7 である.

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_1 &= 3\mathbf{v}_1, \\ A\mathbf{v}_2 &= 7\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

を解けば,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルとしてとれる.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

となる. したがって,

$$P^{-1}A^mP = (P^{-1}AP)^m = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 7^m \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^m &= P \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 7^m \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 7^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^m & 7^m \\ 2 \cdot 3^m & 7^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^m + 2 \cdot 7^m & 3^m - 7^m \\ -2 \cdot 3^m + 2 \cdot 7^m & 2 \cdot 3^m - 7^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 8.1.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 14 & 12 \\ -7 & 10 & 6 \\ -9 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

とすると、 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。さらに、 A^m を求めよ。

$$\begin{aligned} f_A(t) &= \det(tI - A) = \begin{vmatrix} t+11 & -14 & -12 \\ 7 & t-10 & -6 \\ 9 & -9 & t-11 \end{vmatrix} \\ &= (t+11) \begin{vmatrix} t-10 & -6 \\ -9 & t-11 \end{vmatrix} - (-14) \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 9 & t-11 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-12) \begin{vmatrix} 7 & t-10 \\ 9 & -9 \end{vmatrix} \\ &= (t+11)(t^2 - 21t + 110 - 54) + 14(7t - 77 + 54) \\ &\quad - 12(-63 - 9t + 90) \\ &= (t+11)(t^2 - 21t + 56) + 14(7t - 23) - 12(-9t + 27) \\ &= t^3 - 21t^2 + 56t + 11t^2 - 231t + 616 + 98t - 322 + 108t - 324 \\ &= t^3 - 10t^2 + 31t - 30 = (t-2)(t^2 - 8t + 15) \\ &= (t-2)(t-3)(t-5). \end{aligned}$$

よって、 A の固有値は 2, 3, 5 である。固有値 2 の固有ベクトルを求める。

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$\begin{pmatrix} -11x + 14y + 12z \\ -7x + 10y + 6z \\ -9x + 9y + 11z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

$$-13x + 14y + 12z = 0,$$

$$-7x + 8y + 6z = 0,$$

$$-9x + 9y + 9z = 0.$$

$$-13x + 14y + 12z = 0,$$

$$-7x + 8y + 6z = 0,$$

$$-x + y + z = 0.$$

これから, $-x + 2y = 0, x = 2y, z = y$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって, 固有値 2 の固有ベクトルとして, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる. 次に, 固有値 3 の固有ベクトルを求める.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$\begin{pmatrix} -11x + 14y + 12z \\ -7x + 10y + 6z \\ -9x + 9y + 11z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}.$$

$$-14x + 14y + 12z = 0,$$

$$-7x + 7y + 6z = 0,$$

$$-9x + 9y + 8z = 0.$$

これから, $z = 0, y = x$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって, 固有値 3 の固有ベクトルとして, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる. 最後に, 固有値 5 の固有ベクトルを求める.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$\begin{pmatrix} -11x + 14y + 12z \\ -7x + 10y + 6z \\ -9x + 9y + 11z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \\ 5z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
-16x + 14y + 12z &= 0, \\
-7x + 5y + 6z &= 0, \\
-9x + 9y + 6z &= 0.
\end{aligned}$$

これから, $2x - 4y = 0$, $x = 2y$. $-9y + 6z = 0$, $z = 3y/2$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 3y/2 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \frac{y}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

よって, 固有値 5 の固有ベクトルとして, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がとれる.

$$P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とおく. そのとき,

$$AP = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}A^mP = (P^{-1}AP)^m = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 5^m \end{pmatrix},$$

$$A^m = P \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 5^m \end{pmatrix} P^{-1}.$$

P^{-1} を基本変形によって求める.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
A^m &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 5^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^m & 3^m & 4 \cdot 5^m \\ 2^m & 3^m & 2 \cdot 5^m \\ 2^m & 0 & 3 \cdot 5^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 \cdot 2^m - 3^m - 4 \cdot 5^m & -6 \cdot 2^m + 2 \cdot 3^m + 4 \cdot 5^m & -4 \cdot 2^m + 4 \cdot 5^m \\ 3 \cdot 2^m - 3^m - 2 \cdot 5^m & -3 \cdot 2^m + 2 \cdot 3^m + 2 \cdot 5^m & -2 \cdot 2^m + 2 \cdot 5^m \\ 3 \cdot 2^m - 3 \cdot 5^m & -3 \cdot 2^m + 3 \cdot 5^m & -2 \cdot 2^m + 3 \cdot 5^m \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

8.3 行列の対角化の応用

例 8.2. 数列 $\{a_n\}$ は次の漸化式を満たすとする.

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

一般項 a_n を a_0, a_1 を用いて表す. $b_n = a_{n+1}$ とおけば,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_n, \\ b_{n+1} &= a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n = 5b_n - 6a_n \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n \quad (n = 0, 1, \dots), \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0 = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

A の固有多項式を $f_A(t)$ とすると,

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 6 & t-5 \end{vmatrix} = t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$$

であるから, A の固有値は 2, 3 である. 固有値 2 の固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

より, $y = 2x$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとれる.

固有値 3 の固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

より, $y = 3x$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ をとれる.

$$P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

であり,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2 \cdot 2^n & 3 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & -2^n + 3^n \\ 6 \cdot 2^n - 6 \cdot 3^n & -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

の第1成分を求めれば,

$$a_n = (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)a_0 + (-2^n + 3^n)a_1 = (3a_0n - a_1)2^n + (-2a_0 + a_1)3^n.$$

例 8.3. x の関数 y は次の微分方程式を満たすとする.

$$y'' = 5y' - 6y.$$

ここで, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ である. $x = 0$ のとき, $y = c_0$, $y' = c_1$ とする. この微分方程式を解く. $z = y'$ とおけば,

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= y'' = 5y' - 6y = 5z - 6y. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

そこで,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y - z \\ -2y + z \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u \\ 3v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$u' = 2u, \quad v' = 3v.$$

この微分方程式の解は,

$$u = ae^{2x}, \quad v = be^{3x}, \quad (a, b \text{ は定数})$$

である. $x = 0$ のとき,

$$u = a = 3c_0 - c_1, \quad v = b = -2c_0 + c_1.$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{2x} \\ be^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2x} + be^{3x} \\ 2ae^{2x} + 3be^{3x} \end{pmatrix},$$

$$y = (3c_0 - c_1)e^{2x} + (-2c_0 + c_1)e^{3x} = c_0(3e^{2x} - 2e^{3x}) + c_1(-e^{2x} + e^{3x}).$$

A の固有多項式が重根を持つ場合に、 A^m を求めることについて説明する。 A を 3 次行列とする。

Case 1. $f_A(t) = (t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)$, α, β, γ は相異なるとき。これまでみてきたように対角化可能である。

Case 2. $f_A(t) = (t - \alpha)^2(t - \beta)$, $\alpha \neq \beta$ のとき。

$\mathbf{v}_3$ を A の固有値 β の固有ベクトルとする。

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - \alpha I_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}\}, \\ V' &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - \alpha I_3)^2\mathbf{v} = \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

とおく。 $V \subset V'$ である。 A の固有値 α の固有ベクトルは V に属するから、 $V \supsetneq \{\mathbf{0}\}$ である。また、

$$(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_3 = A\mathbf{v}_3 - \alpha\mathbf{v}_3 = \beta\mathbf{v}_3 - \alpha\mathbf{v}_3 = (\beta - \alpha)\mathbf{v}_3.$$

よって、

$$(A - \alpha I_3)^2\mathbf{v}_3 = (\beta - \alpha)(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_3 = (\beta - \alpha)^2\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}.$$

したがって、 $\mathbf{v}_3 \notin V'$ であり、 $V' \subsetneq \mathbb{C}^3$ である。ゆえに、

$$\{\mathbf{0}\} \subsetneq V \subset V' \subsetneq \mathbb{C}^3.$$

よって、 $1 \leq \dim V \leq \dim V' \leq 2$ である。実は、 $\dim V' = 2$ が成り立つ。

したがって、 $\dim V = 1$ か $\dim V = 2$ のいずれかである。

(1) $\dim V = 1$ のとき。 $V \subsetneq V'$ であるから、 $\mathbf{v}_2 \in V'$ で $\mathbf{v}_2 \notin V$ となるものがとれる。そのとき、

$$\mathbf{v}_1 = (A - \alpha I_3)\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$$

とおく。したがって、

$$A\mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2$$

である。また、

$$A\mathbf{v}_1 - \alpha\mathbf{v}_1 = (A - \alpha I_3)\mathbf{v}_1 = (A - \alpha I_3)^2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

よって、 $A\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_1$ である。 c_1, c_2, c_3 をスカラーとして

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{8.1}$$

とする。(8.1) に $(A - \alpha I_3)^2$ をかければ

$$c_3(\beta - \alpha)^2\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}, \quad c_3 = 0.$$

(8.1) に $A - \alpha I_3$ をかければ $c_3 = 0$ より

$$c_2 \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad c_2 = 0.$$

よって, (8.1) より $c_1 = 0$ である. ゆえに $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次独立である. したがって, $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ とおけば, P は正則であり,

$$\begin{aligned} AP &= (A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, A\mathbf{v}_3) = (\alpha\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2, \beta\mathbf{v}_3) \\ &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \\ P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \\ P^{-1}A^mP &= \begin{pmatrix} \alpha^m & m\alpha^{m-1} & 0 \\ 0 & \alpha^m & 0 \\ 0 & 0 & \beta^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) $\dim V = 2$ のとき. このとき, A の固有値 α の固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ で 1 次独立なものがある. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次独立であり, $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ とおけば, P は正則であり,

$$\begin{aligned} AP &= (A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, A\mathbf{v}_3) = (\alpha\mathbf{v}_1, \alpha\mathbf{v}_2, \beta\mathbf{v}_3) \\ &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \\ P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \\ P^{-1}A^mP &= \begin{pmatrix} \alpha^m & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^m & 0 \\ 0 & 0 & \beta^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Case 3. $f_A(t) = (t - \alpha)^3$ のとき. 定理 8.4 より, $(A - \alpha I_3)^3 = O$ である. 自然数 m を $(A - \alpha I_3)^{m-1} \neq O$, $(A - \alpha I_3)^m = O$ によって定めれば, $1 \leq m \leq 3$ である.

(1) $m = 1$ のとき. $A = \alpha I_3$ である.

(2) $m = 2$ のとき.

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - \alpha I_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

とおく. $A - \alpha I_3 \neq O$ であるから, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ で V に属さないものがある. また, A の固有値 α の固有ベクトルは V に属すから, $1 \leq \dim V \leq 2$ である. このと

き, $\dim V = 2$ であることが次のように示される. $\dim V = 1$ と仮定する. $\mathbf{v}_1$ を V の基底とし, $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{C}^3$ を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が $\mathbb{C}^3$ の基底となるようにとる. そのとき, $(A - \alpha I_3)^2 \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$, $j = 2, 3$ であるから, $(A - \alpha I_3) \mathbf{v}_2 \in V$, $(A - \alpha I_3) \mathbf{v}_3 \in V$ である. $V = \mathbb{C} \mathbf{v}_1$ より

$$(A - \alpha I_3) \mathbf{v}_2 = c_2 \mathbf{v}_1, \quad (A - \alpha I_3) \mathbf{v}_3 = c_3 \mathbf{v}_1$$

とかける. $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \notin V$ より, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$ である. また,

$$(A - \alpha I_3)(c_3 \mathbf{v}_2 - c_2 \mathbf{v}_3) = c_3 c_2 \mathbf{v}_1 - c_2 c_3 \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}.$$

よって, $c_3 \mathbf{v}_2 - c_2 \mathbf{v}_3 \in V = \mathbb{C} \mathbf{v}_1$ となる. これは $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が $\mathbb{C}^3$ の基底であることに矛盾する. ゆえに, $\dim V = 2$ である.

$\mathbf{v}_3 \in \mathbb{C}^3, \mathbf{v}_3 \notin V$ をとる. $\mathbf{v}_2 = (A - \alpha I_3) \mathbf{v}_3$ とおけば, $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ であり,

$$(A - \alpha I_3) \mathbf{v}_2 = (A - \alpha I_3)^2 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

より, $\mathbf{v}_2 \in V$ である. $\dim V = 2$ より, $\mathbf{v}_1$ を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が V の基底であるようにとる. そのとき,

$$\begin{aligned} (A - \alpha I_3) \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, & A \mathbf{v}_1 &= \alpha \mathbf{v}_1, \\ (A - \alpha I_3) \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, & A \mathbf{v}_2 &= \alpha \mathbf{v}_2, \\ (A - \alpha I_3) \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2, & A \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2 + \alpha \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

$P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(3) $m = 3$ のとき.

$$V' = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - \alpha I_3)^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

とおく. $(A - \alpha I_3)^2 \neq O$ より, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ で V' に属さないものがある. $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{C}^3, \mathbf{v}_3 \notin V'$ をとり

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= (A - \alpha I_3) \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{v}_1 &= (A - \alpha I_3)^2 \mathbf{v}_3 = (A - \alpha I_3) \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

とおく. $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ である. さらに, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次独立である. 実際,

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{8.2}$$

とする。このとき

$$(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_1 = (A - \alpha I_3)^3\mathbf{v}_3 = O\mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

$(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, $(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ より (8.2) に $A - \alpha I_3$, $(A - \alpha I_3)^2$ をかければ,

$$c_2\mathbf{v}_1 + c_3\mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

$$c_3\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}.$$

よって, $c_3 = 0$, $c_2 = 0$, $c_1 = 0$ を得る. $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

注意 8.1. 上の Case 2 で $\dim V' = 2$ であることは次のようにわかる.

$$f_A(t) = (t - \alpha)^2(t - \beta)$$

である. 定理 8.4 によって

$$f_A(A) = (A - \alpha I_3)^2(A - \beta I_3) = O. \quad (8.3)$$

割り算によって,

$$(t - \alpha)^2 = (t - \beta)(t + \beta - 2\alpha) + (\alpha - \beta)^2. \quad (8.4)$$

3 次行列 B_1, B_2 を

$$B_1 = -\frac{1}{(\alpha - \beta)^2}(A - \beta I_3)\{A + (\beta - 2\alpha)I_3\}, \quad B_2 = \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}(A - \alpha I_3)^2$$

によって定める. そのとき, (8.4) と (8.3) によって

$$B_1 + B_2 = I_3,$$

$$B_1B_2 = B_2B_1 = -\frac{1}{(\alpha - \beta)^4}(A - \alpha I_3)^2(A - \beta I_3)\{A + (\beta - 2\alpha)I_3\} = O,$$

$$(A - \alpha I_3)^2B_1 = -\frac{1}{(\alpha - \beta)^2}(A - \alpha I_3)^2(A - \beta I_3)\{A + (\beta - 2\alpha)I_3\} = O,$$

$$(A - \beta I_3)B_2 = \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}(A - \alpha I_3)^2(A - \beta I_3) = O.$$

$\mathbb{C}^3$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = V' = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - \alpha I_3)^2\mathbf{v} = \mathbf{0}\},$$

$$W_2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid (A - \beta I_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

によって定める．任意の $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ に対して， $B_1\mathbf{u} \in W_1$ であり， $B_2\mathbf{u} \in W_2$ である．また，

$$\mathbf{u} = I_3\mathbf{u} = (B_1 + B_2)\mathbf{u} = B_1\mathbf{u} + B_2\mathbf{u}$$

である．したがって，

$$\mathbb{C}^3 = W_1 + W_2$$

である． $\mathbf{u} \in W_1 \cap W_2$ とすると，

$$\begin{aligned} B_1\mathbf{u} &= -\frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \{A + (\beta - 2\alpha)I_3\}(A - \beta I_3)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ B_2\mathbf{u} &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (A - \alpha I_3)^2\mathbf{u} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

より， $\mathbf{u} = B_1\mathbf{u} + B_2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ である．よって， $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ である．これから， W_1 の基底と W_2 の基底を合わせたものは $\mathbb{C}^3$ の基底になることがわかる．特に，

$$\dim W_1 + \dim W_2 = 3$$

を得る．もし， $\dim W_1 = \dim V' = 1$ とすると， $\dim W_2 = 2$ となる．そのとき， $1 \leq \dim V \leq \dim V' = 1$ であるから， $V = V' = W_1$ である． $\mathbf{v}_1$ を W_1 の基底とし， $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を W_2 の基底とすれば， $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は $\mathbb{C}^3$ の基底であり， $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ とおけば P は正則行列であって，

$$\begin{aligned} AP &= (A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, A\mathbf{v}_3) = (\alpha\mathbf{v}_1, \beta\mathbf{v}_1, \beta\mathbf{v}_3) = P \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \beta \end{pmatrix}, \\ P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

このとき，

$$f_A(t) = f_{P^{-1}AP}(t) = (t - \alpha)(t - \beta)^2$$

となって矛盾である．ゆえに， $\dim V' = 2$ である．

8.4 行列の三角化

定理 8.3. 任意の n 次行列 A に対して，適当な正則行列 P が存在して，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

[証明] n に関する帰納法を用いる. $n = 1$ のときは, 明らか. $n - 1$ まで, 定理の主張が成立するとする. α_1 を A の一つの固有値とし, $\mathbf{v}_1$ を固有値 α_1 の固有ベクトルとする. $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が $\mathbb{C}$ の基底になるようにとる.

$$Q = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$$

とおけば,

$$\begin{aligned} AQ\mathbf{e}_1 &= A\mathbf{v}_1 \\ &= \alpha_1\mathbf{v}_1 \\ &= Q \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって,

$$Q^{-1}AQ\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots \\ 0 & & \\ \vdots & A_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

となる. ここで, A_1 は $n - 1$ 次行列だから, 帰納法の仮定により, $n - 1$ 次正則行列 R_1 が存在して, $R_1^{-1}A_1R_1$ が上三角行列になる.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & R_1 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad P = QR$$

とおけば, $P^{-1}AP = R^{-1}(Q^{-1}AQ)R$ は上三角行列になる. □

定理 8.4 (ケイリー-ハミルトン). n 次行列 A の固有多項式を,

$$f_A(t) = t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n$$

とすると,

$$f_A(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_nI = O.$$

ここで, O は零行列, I は単位行列である.

[証明] 定理 8.3 より, $B = P^{-1}AP$ が上三角行列になるような n 次正則行列 P をとれる. このとき, $f_A(t) = f_B(t)$ であり,

$$f_A(A) = f_B(A) = f_B(PBP^{-1}) = Pf_B(B)P^{-1}.$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

とすると,

$$f_B(t) = (t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \cdots (t - \alpha_n).$$

したがって,

$$f_B(B) = (B - \alpha_1 I)(B - \alpha_2 I) \cdots (B - \alpha_n I).$$

各 i について,

$$(B - \alpha_1 I) \cdots (B - \alpha_i I) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

を示す (これがいえれば, $i = n$ として, $f_B(B) = O$ を得る). $i = 1$ のときは明か. i のとき成立するとして, $i + 1$ のときを示す.

$$\begin{aligned} & (B - \alpha_1 I) \cdots (B - \alpha_i I)(B - \alpha_{i+1} I) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_{i+1} & & & \\ & \ddots & & * \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \alpha_n - \alpha_{i+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって, $i + 1$ のときも正しい. □

8.5 正規行列

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して, その内積を

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = {}^t \mathbf{v} \overline{\mathbf{w}} = \sum_{k=1}^n v_k \overline{w_k}$$

と定義する.

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^n |v_k|^2 \geq 0$$

であり, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ である. よって, $\mathbf{v}$ の長さを $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ と定義する.

n 次行列 A に対して, $A^* = {}^t\bar{A}$ とおく. つまり, A の転置行列の各成分をその複素共役で置き換えたものを A^* とする. このとき, 任意の $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $\langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \langle A^*\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ が成り立つ. 実際,

$$\langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = {}^t\mathbf{v} \overline{A\mathbf{w}} = {}^t\mathbf{v} \bar{A} \bar{\mathbf{w}} = {}^t({}^t\bar{A}\mathbf{v}) \bar{\mathbf{w}} = {}^t(A^*\mathbf{v}) \bar{\mathbf{w}} = \langle A^*\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

また, 明らかに $(A^*)^* = A$ である.

$A^*A = AA^*$ が成り立つとき, A は**正規行列**であるという.

補題 8.5. A を n 次正規行列, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ とすれば,

$$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = \langle A^*\mathbf{v}, A^*\mathbf{v} \rangle.$$

[証明]

$$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^*A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, AA^*\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, (A^*)^*A^*\mathbf{v} \rangle = \langle A^*\mathbf{v}, A^*\mathbf{v} \rangle.$$

□

補題 8.6. A を n 次正規行列とし, α を A の固有値, $\mathbf{v}$ を A の固有値 α の固有ベクトルとすれば, $\bar{\alpha}$ は A^* の固有値であり, $\mathbf{v}$ は A^* の固有値 $\bar{\alpha}$ の固有ベクトルである.

[証明]

$$\begin{aligned} (A - \alpha I_n)^*(A - \alpha I_n) &= (A^* - \bar{\alpha} I_n)(A - \alpha I_n) = A^*A - \alpha A^* - \bar{\alpha} A + \alpha \bar{\alpha} I_n \\ &= AA^* - \alpha A^* - \bar{\alpha} A + \alpha \bar{\alpha} I_n = (A - \alpha I_n)(A^* - \bar{\alpha} I_n) \\ &= (A - \alpha I_n)(A - \alpha I_n)^*. \end{aligned}$$

よって, $A - \alpha I_n$ も正規行列である. $\mathbf{v}$ を A の固有値 α の固有ベクトルとすれば, 補題 8.5 より

$$0 = \langle (A - \alpha I_n)\mathbf{v}, (A - \alpha I_n)\mathbf{v} \rangle = \langle (A^* - \bar{\alpha} I_n)\mathbf{v}, (A^* - \bar{\alpha} I_n)\mathbf{v} \rangle$$

よって, $(A^* - \bar{\alpha} I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $A^*\mathbf{v} = \bar{\alpha}\mathbf{v}$ である. □

定義 8.2. $A^* = A$ を満たす n 次行列 A を**エルミート行列**という. また, $U^*U = UU^* = I_n$ を満たす n 次行列 U を**ユニタリ行列**という. 特に, 実行列 U がユニタリ行列であるとき, すなわち, $\bar{U} = U$ かつ ${}^tUU = U{}^tU = I_n$ であるとき, U を**直交行列**という.

系 8.7. A が n 次エルミート行列ならば、 A の固有値はすべて実数である。特に、 A が実対称行列ならば、 A の固有値はすべて実数である。

[証明] α を A の固有値、 $\mathbf{v}$ を A の固有ベクトルとすれば、 $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$ であると同時に、補題 8.6 より、 $A\mathbf{v} = A^*\mathbf{v} = \bar{\alpha}\mathbf{v}$ である。よって、 $(\alpha - \bar{\alpha})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ である。 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ より、 $\alpha - \bar{\alpha} = 0$, $\alpha = \bar{\alpha}$ となつて、 α は実数である。 $\square$

命題 8.8 (シュミットの正規直交化). $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ を $\mathbb{C}^n$ の基底とすれば、正則な n 次上三角行列 C で、 $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)C$ がユニタリ行列となるものが存在する。

[証明] $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1$ とおけば、 $\|\mathbf{v}_1\| = 1$ である。このとき、 $\lambda_j = \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_1 \rangle$ とおき、 $\mathbf{u}'_j = \mathbf{u}_j - \lambda_j \mathbf{v}_1$ ($j = 2, \dots, n$) とおけば、

$$\langle \mathbf{u}'_j, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_1 \rangle - \lambda_j \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \lambda_j - \lambda_j = 0$$

である。同様に、 $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}'_2\|}\mathbf{u}'_2$ とおけば、 $\|\mathbf{v}_2\| = 1$ である。このとき、 $\lambda'_j = \langle \mathbf{u}'_j, \mathbf{v}_2 \rangle$ とおき、 $\mathbf{u}''_j = \mathbf{u}'_j - \lambda'_j \mathbf{v}_2$ ($j = 3, \dots, n$) とおけば、

$$\langle \mathbf{u}''_j, \mathbf{v}_2 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{u}''_j, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$$

である。これを繰り返せば、 $\mathbb{C}^n$ の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ で、 $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ となるものがとれる。さらに、

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n)C_1, & C_1 &= \begin{pmatrix} \|\mathbf{u}_1\| & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n) &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{u}''_n)C_2, & C_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \|\mathbf{u}'_2\| & \lambda'_2 & \cdots & \lambda'_n \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \\ & \dots \end{aligned}$$

よって、 $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)C$, C は正則な n 次上三角行列、とかける。 $\mathbf{v}_j = {}^t(v_{1j}, \dots, v_{nj})$ とかけば、

$$UU^* = \left(\sum_{k=1}^n v_{ik} \bar{v}_{jk} \right) = (\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle) = (\delta_{ij}) = I_n.$$

よって、 $U^* = U^{-1}$ であり、 $U^*U = U^{-1}U = I_n$ である。すなわち、 U はユニタリ行列である。 $\square$

命題 8.9 (シュミットの正規直交化). $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とすれば, 正則な n 次実上三角行列 C で, $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)C$ が実直交行列となるものが存在する.

[証明] 命題 8.8 の証明と全く同様である. □

命題 8.10. 任意の n 次行列 A は適当なユニタリ行列 U によって

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と三角化される.

[証明] n に関する帰納法による. $n = 1$ については自明である. $n - 1$ まで主張が正しいとする. n 次行列 A に対して, α_1 を A の 1 つの固有値とし, $\mathbf{v}_1$ を A の固有値 α_1 の固有ベクトルとする. $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n$ を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の基底となるようにとる. 命題 8.8 より, 正則な上三角行列 C が存在して, $V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)C$ がユニタリ行列となる. このとき, $V^{-1}AV$ の第 1 列の列ベクトルは

$$V^{-1}A\mathbf{v}_1 = V^{-1}\alpha_1\mathbf{v}_1 = \alpha_1 V^*\mathbf{v}_1 = \alpha_1 V^*V \text{ の第 1 列の列ベクトル} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

A_1 は $n - 1$ 次行列である. 帰納法の仮定により $n - 1$ 次のユニタリ行列 U_1 が存在して, $U_1^{-1}A_1U_1$ は上三角行列になる.

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad U = VV_1$$

とおけば, U はユニタリ行列であり,

$$U^{-1}AU = V_1^{-1}(V^{-1}AV)V_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

□

命題 8.11. 実 n 次行列 A の固有値がすべて実数ならば、適当な実直交行列 T によって

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & * & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と三角化される。

[証明] n に関する帰納法による。命題 8.10 の証明において、 α_1 を A の 1 つの固有値とし、 $\mathbf{v}_1$ を A の固有値 α_1 の固有ベクトルとする。 α_1 は実数だから $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ にとれる。 $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底となるようにとる。命題 8.9 より、正則な実上三角行列 C が存在して、 $V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)C$ が実直交行列となる。これ以外は命題 8.10 の証明と全く同じにできる。□

定理 8.12 (テプリッツ). n 次行列 A がユニタリ行列によって対角化されるためには、 A が正規行列であることが必要十分である。

[証明] ユニタリ行列 U が存在して、 $U^*AU = U^{-1}AU = B$ が対角行列であるとすれば、 $B^* = U^*A^*U$ も対角行列であり、したがって、 $BB^* = B^*B$ である。よって、 $U^{-1}AA^*U = U^{-1}A^*AU$, $AA^* = A^*A$, すなわち、 A は正規行列である。逆に、 A が正規行列であるとする。命題 8.10 より、ユニタリ行列 U が存在して、 $B = U^{-1}AU$ は上三角行列になる。 $AA^* = A^*A$ より、

$$\begin{aligned} BB^* &= U^{-1}AU(U^{-1}AU)^* = U^{-1}AUU^{-1}A^*U = U^{-1}AA^*U \\ &= U^{-1}A^*AU = U^{-1}A^*UU^{-1}AU = (U^{-1}AU)^*U^{-1}AU = B^*B. \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

とかけば、

$$B^* = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & & & 0 \\ \bar{b}_{12} & \bar{b}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{b}_{1n} & \bar{b}_{2n} & \cdots & \bar{b}_{nn} \end{pmatrix}.$$

したがって、 $BB^* = B^*B$ の $(1, 1)$ 成分を比べれば、

$$|b_{11}|^2 + |b_{12}|^2 + \cdots + |b_{1n}|^2 = |b_{11}|^2$$

となり、 $b_{12} = \cdots = b_{1n} = 0$ を得る。以下、順に (i, i) 成分を比べれば、

$$|b_{ii}|^2 + |b_{i,i+1}|^2 + \cdots + |b_{in}|^2 = |b_{ii}|^2$$

となり, $b_{i+1} = \cdots = b_{in} = 0$ を得る. したがって, $b_{ij} = 0$ ($i < j$) となって, B は対角行列である. よって, A はユニタリ行列 U によって対角化された. $\square$

系 8.13. n 次エルミート行列 A はユニタリ行列によって対角化される. 特に, n 次実対称行列 A は実直交行列によって対角化される.

[証明] エルミート行列は正規行列であるから, 定理 8.12 によってユニタリ行列によって対角化される. A を n 次実対称行列とする. 系 8.7 より A の固有値はすべて実数である. よって, 命題 8.11 より A は直交行列 T によって三角化される. $B = T^{-1}AT$ とおけば, B は上三角行列であるが,

$${}^tB = {}^t({}^tTAT) = {}^tT{}^tAT = {}^tTAT = B$$

であり, tB は下三角行列であるから, B は対角行列である. $\square$

8.6 同時対角化

定理 8.14. n 次行列 A は n 個の相異なる固有値を持つとし, n 次行列 B は $AB = BA$ を満たすとする. このとき, B は A と同時に対角化可能である. すなわち, n 次正則行列 P で, $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ がともに対角行列となるものが存在する.

[証明] A は相異なる固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を持つとし, $\mathbf{v}_j$ を A の固有値 α_j の固有ベクトルとする. V_j を A の固有値 α_j の固有空間とする. すなわち,

$$V_j = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n; A\mathbf{v} = \alpha_j\mathbf{v}\}.$$

このとき, $V_j = \mathbb{C}\mathbf{v}_j$ である. 実際, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立であり, $\mathbb{C}^n$ の基底であるから, $\mathbf{v} \in V_j$ を

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$$

とかけば,

$$\mathbf{0} = A\mathbf{v} - \alpha_j\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i A\mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^n c_i \alpha_j \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n c_i (\alpha_i - \alpha_j) \mathbf{v}_i.$$

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立であるから, $c_i(\alpha_i - \alpha_j) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) である. $i \neq j$ ならば, $\alpha_i - \alpha_j \neq 0$ であるから, $c_i = 0$ である. よって, $\mathbf{v} = c_j \mathbf{v}_j$ である. ゆえに, $V_j = \mathbb{C}\mathbf{v}_j$ である. $AB = BA$ とすれば,

$$A(B\mathbf{v}_j) = BA\mathbf{v}_j = B\alpha_j\mathbf{v}_j = \alpha_j(B\mathbf{v}_j)$$

であるから, $B\mathbf{v}_j \in V_j = \mathbb{C}\mathbf{v}_j$ である. したがって, $B\mathbf{v}_j = \beta_j\mathbf{v}_j$, $\beta_j \in \mathbb{C}$ とかける. $P = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

□

系 8.15. n 次行列 A は n 個の相異なる固有値を持つとし, n 次行列 B は $AB = BA$ を満たすとする. このとき, B は A^k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) の 1 次結合として表せる.

[証明] A の固有多項式を $f(x)$ とすれば, $f(x) = \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)$ である. $i = 1, \dots, n$ に対して,

$$g_i(x) = f(x)/(x - \alpha_i) = \prod_{j \neq i} (x - \alpha_j)$$

とおく. $g_k(\alpha_k) = f'(\alpha_k)$, $g_i(\alpha_k) = 0$ ($i \neq k$) であるから,

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{f'(\alpha_i)} g_i(x)$$

とおけば, $g(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式であり, $g(\alpha_k) = \beta_k$ ($k = 1, \dots, n$) である. $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$ とかけば,

$$g(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} g(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = P^{-1}BP.$$

$$\begin{aligned} g(P^{-1}AP) &= b_0 + b_1P^{-1}AP + \dots + b_{n-1}(P^{-1}AP)^{n-1} \\ &= b_0 + b_1P^{-1}AP + \dots + b_{n-1}P^{-1}A^{n-1}P \\ &= P^{-1}(b_0I + b_1A + \dots + b_{n-1}A^{n-1})P. \end{aligned}$$

したがって,

$$B = b_0I + b_1A + \dots + b_{n-1}A^{n-1}.$$

□

A, B がともに有理数を成分とする場合に系 8.15 の別証明を与える.

[別証明] A の固有多項式 $f(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であるとする. 固有値 α_1 は代数的数であり, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ はその共役である. $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ を $\sigma_j(\alpha_1) = \alpha_j$ によって定義される共役写像とする. $K = \mathbb{Q}(\alpha_1)$ とすれば, $\mathbf{v}_1 \in K^n$ にとれ, $\mathbf{v}_j = \sigma_j(\mathbf{v}_1)$ にとれる.

$\beta_1 \mathbf{v}_1 = B \mathbf{v}_1 \in K^n$ より, $\beta_1 \in K$ であり, σ_j でこれをうつせば, $\sigma_j(\beta_1) \mathbf{v}_j = B \mathbf{v}_j$ だから, $\beta_j = \sigma_j(\beta_1)$ である. $\beta_1 = c_0 + c_1 \alpha_1 + \cdots + c_{n-1} \alpha_1^{n-1}$, $c_j \in \mathbb{Q}$ とかけば,

$$\begin{aligned} B \mathbf{v}_j &= \beta_j \mathbf{v}_j = (c_0 I + c_1 \alpha_j + \cdots + c_{n-1} \alpha_j^{n-1}) \mathbf{v}_j \\ &= (c_0 I + c_1 A + \cdots + c_{n-1} A^{n-1}) \mathbf{v}_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

を得る. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立であるから, 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$B \mathbf{v} = (c_0 I + c_1 A + \cdots + c_{n-1} A^{n-1}) \mathbf{v}$$

となつて, $B = c_0 I + c_1 A + \cdots + c_{n-1} A^{n-1}$ を得る. $f(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約でない場合は, 既約多項式の積に分解して, $f(x) = f_1(x) \cdots f_r(x)$ とする. $n_j = \deg f_j(x)$ とおく. $f_j(x)$ の根を $\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn_j}$ とすれば, 既約の場合の結果から, $g_j(x) \in \mathbb{Q}[x]$ を $n_j - 1$ 次以下の多項式として,

$$\begin{pmatrix} \beta_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_{jn_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j(\alpha_{j1}) & & \\ & \ddots & \\ & & g_j(\alpha_{jn_j}) \end{pmatrix}$$

となる. $\gcd(f_i, f_j) = 1$ ($i \neq j$) であるから, 中国剰余定理によつて $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ で

$$g(x) \equiv g_j(x) \pmod{f_j(x)}, \quad j = 1, \dots, r$$

となるものが $f(x)$ を法として一意に存在する. $g(x)$ は $\deg g(x) \leq n - 1$ とすれば一意に定まる. このとき,

$$P^{-1} B P = g(P^{-1} A P) = P^{-1} g(A) P, \quad B = g(A)$$

である. □

最後に, 次の定理を示す.

定理 8.16. 2つの可換な n 次正規行列 A, B はユニタリ行列によつて同時に対角化される. すなわち, 適当な n 次ユニタリ行列 U をとれば,

$$U^{-1} A U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad U^{-1} B U = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

[証明] A の相異なる固有値を $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ とすれば, 定理 8.12 より, ユニタリ行列 U_1 が存在して,

$$A' = U_1^{-1} A U_1 = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix}, \quad A_i = \alpha_i I_{n_i}, \quad i = 1, \dots, r, \quad n_1 + \cdots + n_r = n.$$

$m_0 = 0$, $i = 1, \dots, r$ に対して, $m_i = n_1 + \dots + n_i$ とおく. U_1 の第 j 列の列ベクトルを $\mathbf{u}_j$ とする. $m_{i-1} + 1 \leq j \leq m_i$ に対して, $A\mathbf{u}_j = \alpha_i \mathbf{u}_j$ である. $\mathbf{u}_j$, $m_{i-1} + 1 \leq j \leq m_i$ によって生成される $\mathbb{C}^n$ の部分空間を W_i とすれば, W_i は A の固有値 α_i の固有空間である.

$$W_i = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{v} = \alpha_i \mathbf{v}\}.$$

$\mathbb{C}^n = W_1 + \dots + W_r$ と直和分解される. U_1 はユニタリ行列であるから, $\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l \rangle = \delta_{kl}$ である. この直和分解は内積に関して直交直和分解である. $AB = BA$ より, $\mathbf{v} \in W_i$ ならば,

$$A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v} = (BA)\mathbf{v} = B(A\mathbf{v}) = B(\alpha_i \mathbf{v}) = \alpha_i (B\mathbf{v}).$$

よって, $B\mathbf{v} \in W_i$ である. $\mathbf{v} \in W_i$, $\mathbf{w} \in \sum_{1 \leq j \leq r, j \neq i} W_j$ ならば, $B\mathbf{w} \in \sum_{1 \leq j \leq r, j \neq i} W_j$ であるから,

$$\langle B^* \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, B\mathbf{w} \rangle = 0.$$

これは $B^* \mathbf{v} \in W_i$ を示している.

いま, i を固定して, W_i の基底 $\mathbf{u}_j$, $m_{i-1} + 1 \leq j \leq m_i$ を $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n_i}$ とかく. そのとき, $1 \leq k, \nu \leq n_i$ に対して, $b_{\nu k}, b'_{\nu k} \in \mathbb{C}$ を

$$B\mathbf{w}_k = \sum_{\nu=1}^{n_i} b_{\nu k} \mathbf{w}_\nu, \quad B^* \mathbf{w}_k = \sum_{\nu=1}^{n_i} b'_{\nu k} \mathbf{w}_\nu$$

によって定め, n_i 次行列 B_i, B'_i を $B_i = (b_{\nu k}), B'_i = (b'_{\nu k})$ によって定める. $\langle \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_k \rangle = \delta_{lk}$ を用いれば,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_l, B\mathbf{w}_k \rangle &= \left\langle \mathbf{w}_l, \sum_{\nu=1}^{n_i} b_{\nu k} \mathbf{w}_\nu \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{n_i} \bar{b}_{\nu k} \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_\nu \rangle = \bar{b}_{lk}, \\ &= \langle B^* \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_k \rangle = \left\langle \sum_{\nu=1}^{n_i} b'_{\nu l} \mathbf{w}_\nu, \mathbf{w}_k \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{n_i} b'_{\nu l} \langle \mathbf{w}_\nu, \mathbf{w}_k \rangle = b'_{kl}. \end{aligned}$$

よって, $b'_{kl} = \bar{b}_{lk}$ である. これは, $B_i^* = B'_i$ を示している. $BB^* = B^*B$ であるから

$$\begin{aligned} BB^* \mathbf{w}_k &= \sum_{\nu=1}^{n_i} b'_{\nu k} B\mathbf{w}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_i} \bar{b}_{k\nu} B\mathbf{w}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \bar{b}_{k\nu} b_{l\nu} \mathbf{w}_l = \sum_{l=1}^{n_i} \left(\sum_{\nu=1}^{n_i} \bar{b}_{k\nu} b_{l\nu} \right) \mathbf{w}_l, \\ B^* B \mathbf{w}_k &= \sum_{\nu=1}^{n_i} b_{\nu k} B^* \mathbf{w}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} b_{\nu k} b'_{l\nu} \mathbf{w}_l = \sum_{l=1}^{n_i} \left(\sum_{\nu=1}^{n_i} b_{\nu k} \bar{b}_{\nu l} \right) \mathbf{w}_l \end{aligned}$$

より

$$\sum_{\nu=1}^{n_i} \bar{b}_{k\nu} b_{l\nu} = \sum_{\nu=1}^{n_i} b_{\nu k} \bar{b}_{\nu l}, \quad 1 \leq k, l \leq n_i.$$

この左辺は $B_i B_i^*$ の (l, k) 成分であり、右辺は $B_i^* B_i$ の (l, k) 成分であるから、 $B_i B_i^* = B_i^* B_i$ であり、 B_i は正規行列である。定理 8.12 より n_i 次ユニタリ行列 P_i で、 $P_i^{-1} B_i P_i$ が対角行列になるものが存在する。 $P_i = (p_{kl})$ として、

$$\mathbf{w}'_j = \sum_{\nu=1}^{n_i} p_{\nu j} \mathbf{w}_\nu, \quad j = 1, \dots, n_i$$

とおけば、 $\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_{n_i}$ は W_i の新しい基底であり、

$$\langle \mathbf{w}'_j, \mathbf{w}'_k \rangle = \sum_{1 \leq \mu, \nu \leq n_i} p_{\mu j} \bar{p}_{\nu k} \langle \mathbf{w}_\mu, \mathbf{w}_\nu \rangle = \sum_{\nu=1}^{n_i} p_{\nu j} \bar{p}_{\nu k} = \delta_{kj}.$$

さらに、

$$\mathbf{w}_k = \sum_{l=1}^{n_i} \bar{p}_{kl} \mathbf{w}'_l, \quad k = 1, \dots, n_i$$

であるから、

$$\begin{aligned} B \mathbf{w}'_j &= \sum_{\nu=1}^{n_i} p_{\nu j} B \mathbf{w}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} p_{\nu j} b_{k\nu} \mathbf{w}_k \\ &= \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{\nu=1}^{n_i} p_{\nu j} b_{k\nu} \mathbf{w}_k = \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{\nu=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} p_{\nu j} b_{k\nu} \bar{p}_{kl} \mathbf{w}'_l \\ &= \sum_{l=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{n_i} \sum_{\nu=1}^{n_i} \bar{p}_{kl} b_{k\nu} p_{\nu j} \right) \mathbf{w}'_l \end{aligned}$$

ここで、 $\sum_{k=1}^{n_i} \sum_{\nu=1}^{n_i} \bar{p}_{kl} b_{k\nu} p_{\nu j}$ は対角行列 $P_i^* B_i P_i$ の (l, j) 成分であるから、 $l \neq j$ ならば 0 である。よって、 $B \mathbf{w}'_j = \beta_{ij} \mathbf{w}'_j$, $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ とかける。したがって、各 $i = 1, \dots, r$ についてこのような W_i の基底 $\mathbf{w}'_j$, $j = 1, \dots, n_i$ をとって、これらを並べたものを $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ とすれば、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底であり、 $U = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ とおけば U はユニタリ行列である。 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は A の固有ベクトルであると同時に B の固有ベクトルでもあるから、 $U^{-1} A U$, $U^{-1} B U$ はともに対角行列である。□