算術幾何平均について

上越教育大学　中川 仁

平成 20 年 7 月 26 日 修士会

1　相加平均・相乗平均・調和平均

日常生活に現れる平均について，以下の 3 つの例を挙げてみる．

例 1.1. A 君は 2 回数学のテストを受けた．1 回目の得点は 40 点で，2 回目の得点は 60 点だった．A 君の数学のテストの平均点を求めよ．

[解答]　$\dfrac{40+60}{2} = \dfrac{100}{2} = 50.$　　答．50 点

例 1.2. ある工場の製品の生産数が平成 17 年度から平成 18 年度にかけて，1.4 倍に増え，平成 18 年度から平成 19 年度にかけて，1.6 倍に増えた．平成 17 年度から平成 19 年度にかけて，平均して 1 年で何倍に増えたか．

[解答]　平成 17 年度の生産量を P とすると，平成 18 年度の生産量は，$1.4P$ であり，平成 19 年度の生産量は $1.6 \times 1.4P$ である．平均して 1 年で x 倍に増えたとすると，$x^2 P = 1.6 \times 1.4P$, $x^2 = 1.6 \times 1.4 = 2.24$, $x = \sqrt{1.6 \times 1.4} = 1.4966 \cdots$.

答．約 1.497 倍

例 1.3. A 地点から B 地点に移動するのに，行きは時速 40 km，帰りは時速 60 km で移動した．往復の平均の速度を求めよ．

[解答]　A 地点から B 地点の距離を x km とすると，行きの移動時間は $\dfrac{x}{40}$ 時間であり，帰りの移動時間は $\dfrac{x}{60}$ 時間である．したがって，往復の移動時間は

$$\frac{x}{40} + \frac{x}{60} = \frac{5}{120}x = \frac{1}{24}x \ (\text{時間})$$

である．往復の距離は $2x$ km であるから，平均の速度は

$$\frac{2x}{\frac{1}{24}x} = 2 \times 24 = 48. \qquad \text{答．時速 } 48 \text{ km}$$

以上の例に現れた平均はそれぞれ次のように定義される．

定義 1.4. 正の実数 a, b に対して，

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = A(a^{-1}, b^{-1})^{-1}$$

とおく．$A(a,b)$ を**相加平均**, $G(a,b)$ を**相乗平均**，$H(a,b)$ を**調和平均**という．一般に

$$A(a,b) \geq G(a,b) \geq H(a,b) \qquad (\text{等号は } a = b \text{ のときに限り成立})$$

の関係がある．実際，$A(a,b)^2 - G(a,b)^2 = \dfrac{(a+b)^2}{4} - ab = \dfrac{(a-b)^2}{4} \geq 0$ より，第 1 の不等式が成り立つ．これを a, b の代わりに，a^{-1}, b^{-1} に適用すれば,

$$\begin{aligned} A(a^{-1}, b^{-1}) &\geq G(a^{-1}, b^{-1}), \\ H(a,b) = A(a^{-1}, b^{-1})^{-1} &\leq G(a^{-1}, b^{-1})^{-1} = G(a,b). \end{aligned}$$

2　アルキメデスの方法による円周率の計算

半径 1 の円に外接する正 $6 \cdot 2^n$ 角形の周の長さの半分を a_n，内接する正 $6 \cdot 2^n$ 角形の周の長さの半分を b_n とする．このとき，次のような漸化式が成り立つ ([3], [5]).

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= H(a_n, b_n) \quad (a_n \text{ と } b_n \text{ の調和平均}), \\ b_{n+1} &= G(a_{n+1}, b_n) \quad (a_{n+1} \text{ と } b_n \text{ の幾何平均}), \\ 3 = b_0 < \cdots < b_n < b_{n+1} &< a_{n+1} < a_n < \cdots < a_0 = 2\sqrt{3} = 3.4\ldots. \end{aligned}$$

$\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列，$\{b_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるから収束する．それらは同じ極限値に収束することがわかり，その共通の極限値が π である．この方法で円周率 π を 1 千万桁計算するには，約 1 千 7 百万回の乗除と平方根の計算を要する ([4]).

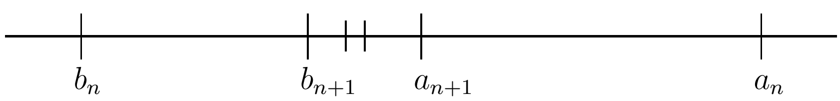
3　算術幾何平均

与えられた正の実数 $a > b$ から，$a_0 = a$, $b_0 = b$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

によって数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定義する．アルキメデスの方法のときと同様に,

$$b < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < \cdots < a_2 < a_1 < a.$$



よって，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ が存在する．さらに，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

より，$\alpha = \beta$ を得る．極限値 α を a と b の**算術幾何平均**といい，$\mathrm{AGM}(a, b)$ で表す．

例 3.1. $\mathrm{AGM}(2, 1)$ を計算してみよう．収束はかなり速いことがわかる．

n	a_n	b_n	$a_n - b_n$
0	2.00000000000	1.00000000000	1.00000000000
1	1.50000000000	1.41421356237	0.08578643763
2	1.45710678119	1.45647531512	0.00063146606
3	1.45679104815	1.45679101394	0.00000003421
4	1.45679103105	1.45679103105	0.00000000000

定理 3.2 (ガウスの公式). $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}$, $n = 0, 1, \ldots$ とすれば，

$$\pi = \frac{2\mathrm{AGM}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2}.$$

$s_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k c_k^2, \quad p_n = \frac{2a_n^2}{1 - s_n}$ とおけば，

p_1	3.	18767	26427	12108	62720	19299	70525	36923	26510
p_2	3.	14168	02932	97653	29391	80704	24560	00938	27957
p_3	3.	14159	26538	95446	49600	29147	58818	04348	61088
p_4	3.	14159	26535	89793	23846	63606	02706	63132	17577
p_5	3.	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971
π	3.	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971

p_3 は小数第 9 位まで，p_4 は小数第 20 位まで，p_5 は小数第 40 位まで，π と一致している．このように，算術幾何平均を用いたガウスの公式は，円周率 π を高速に計算することに適している．この公式によれば，p_{20} 程度で π を約 100 万桁計算できる．ガウスは数値計算によって，1799 年にこの公式を発見して日記に次のように記している．

この事実の証明は必ず解析学の全く新しい分野を開くであろう．

以下，[1],[2],[4] にしたがって，ガウスの公式の証明を紹介する．

4　楕円積分と算術幾何平均の関係

4.1　楕円の弧長

$a > b > 0$ とし，楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.1}$$

を考える．

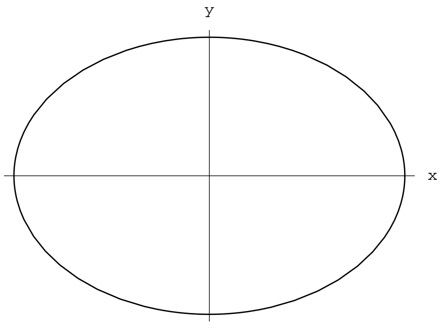


図 1: 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

この楕円の第 1 象限の部分の弧長を L とすると，

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

である．(4.1) を x で微分して，

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

(4.1) より，$a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2)$ であるから，$x = at$, $k = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ とおけば，

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}}\, dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx = a\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2t^2}{1 - t^2}}\, dt.$$

ここで，$0 \leq k < 1$ であり，$k = 0$ のときが，円の場合である．このような形の積分を**楕円積分**という．

定義 4.1. 次の楕円積分を**ルジャンドル-ヤコビの標準型**という．

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}} \quad (\textbf{第 1 種楕円積分}),$$

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\, d\theta \quad (\textbf{第 2 種楕円積分}).$$

いずれも，$x = \sin\theta$ と置換することによって，右側の表示を得る．

定義 4.2.

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}},$$
$$J(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

とおけば，$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ より，

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta}}=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{a}K(k),$$
$$J(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta}\,d\theta=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=aE(k).$$

よって，

$$I(a,b)=\frac{1}{a}K(k),\quad J(a,b)=aE(k)\ \ (=L). \tag{4.2}$$

命題 4.3.

$$I\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=I(a,b).$$

[証明]　$b\tan\theta=u$ とおけば，$\dfrac{du}{d\theta}=\dfrac{b}{\cos^2\theta}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\dfrac{b}{\sqrt{b^2+u^2}}$, $\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{d\theta}{du}=\dfrac{\cos^2\theta}{b\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{b^2+u^2}}$. よって，

$$\begin{aligned}I(a,b)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\cos\theta\sqrt{a^2+b^2\tan^2\theta}}\\&=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}\,du=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}\,du.\end{aligned}$$

したがって，

$$I\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+u^2\right)(ab+u^2)}}\,du.$$

ここで，$u=\dfrac{1}{2}\left(v-\dfrac{ab}{v}\right)$ とおけば，$ab+u^2=\dfrac{1}{4v^2}(ab+v^2)^2$, $\dfrac{1}{\sqrt{ab+u^2}}\dfrac{du}{dv}=\dfrac{1}{v}$, $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+u^2=\dfrac{1}{4}(a^2+v^2)(1+b^2v^{-2})=\dfrac{1}{4v^2}(a^2+v^2)(b^2+v^2)$ であり，v が 0 から ∞ まで動くとき，u は $-\infty$ から ∞ まで単調増加する．よって，

$$I\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(a^2+v^2)(b^2+v^2)}}\,dv=I(a,b).$$

□

命題 4.4. $k' = \sqrt{1-k^2}$ とおけば，$K(k) = \dfrac{\pi}{2\mathrm{AGM}(1,k')}$.

[証明]　$a_0 = 1$, $b_0 = k'$ として，$n = 0, 1, \ldots$ について，$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ とする．$m = \mathrm{AGM}(1, k')$ とおけば，定義から，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = m$ である．命題 4.3 の等式

$$I(1,k') = I(a_1, b_1) = \cdots = I(a_n, b_n)$$

において，$n \to \infty$ とすれば，

$$K(k) = I(1,k') = I(m,m) = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2m} = \frac{\pi}{2\mathrm{AGM}(1,k')}.$$

□

次に，$J\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ と $J(a,b)$ の関係を調べよう．そのために，補題をいくつか準備する．証明は省略する．

補題 4.5. $\dfrac{dE}{dk} = \dfrac{1}{k}(E-K)$, $\dfrac{dK}{dk} = \dfrac{1}{kk'^2}(E - k'^2 K)$.

補題 4.6.

(a)　$K(k) = \dfrac{1}{1+k}K\left(\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$,　　(b)　$K(k) = \dfrac{2}{1+k'}K\left(\dfrac{1-k'}{1+k'}\right)$,

(c)　$E(k) = \dfrac{1+k}{2}E\left(\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) + \dfrac{k'^2}{2}K(k)$,　(d)　$E(k) = (1+k')E\left(\dfrac{1-k'}{1+k'}\right) - k'K(k)$.

命題 4.7.

$$2J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - J(a,b) = abI(a,b).$$

[証明]　$k' = \dfrac{b}{a}$, $k = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$, $\dfrac{1-k'}{1+k'} = \dfrac{a-b}{a+b}$ である．$J(a,b) = aE(k)$ より，

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{a+b}{2}E\left(\sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}}\right) = \frac{a+b}{2}E\left(\frac{a-b}{a+b}\right).$$

よって，$J(a,b) = aE(k)$ と $I(a,b) = \dfrac{1}{a}K(k)$ に注意すれば，補題 4.6 の (d) より，

$$\begin{aligned}
2J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - J(a,b) &= (a+b)E\left(\frac{a-b}{a+b}\right) - aE(k) \\
&= (a+b)E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) - aE(k) \\
&= (a+b)\left(\frac{1}{1+k'}E(k) + \frac{k'}{1+k'}K(k)\right) - aE(k) \\
&= bK(k) = abI(a,b).
\end{aligned}$$

□

補題 4.8. $c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$, $n = 0, 1, \ldots$ とおけば，$n \geq 1$ のとき，$c_n = \dfrac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n c_n^2 = 0$ が成り立つ．

[証明]　$n \geq 1$ のとき，$c_n^2 = \left(\dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right)^2 - a_{n-1}b_{n-1} = \left(\dfrac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}\right)^2$ である．$a_{n-1} > b_{n-1} \geq b$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ である．特に，ある番号 n_0 が存在して，$n \geq n_0$ ならば，$0 < c_n < b$ である．よって，$n > n_0$ のとき，

$$0 < \frac{c_n}{b} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2b} = \frac{a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2}{2b(a_{n-1} + b_{n-1})} = \frac{c_{n-1}^2}{2b(a_{n-1} + b_{n-1})} < \frac{1}{4}\left(\frac{c_{n-1}}{b}\right)^2.$$

これから，

$$0 < c_{n_0+m} < b\left(\frac{1}{4}\right)^{1+2+\cdots+2^{m-1}}\left(\frac{c_{n_0}}{b}\right)^{2^m} < b\left(\frac{1}{4}\right)^{2^m} = \frac{b}{2^{2^{m+1}}}.$$

よって，

$$0 < 2^{n_0+m}c_{n_0+m}^2 < b^2\frac{2^{n_0+m}}{2^{2^{m+2}}} \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty).$$

□

命題 4.9.

$$J(a, b) = \left(a^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2\right) I(a, b).$$

[証明]　$A_n = 2^n\left(J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a_n, b_n)\right)$ とおく．命題 4.7 と命題 4.3 より，

$$\begin{aligned}
A_{n+1} - A_n &= 2^n\left(2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n)\right) - 2^{n+1}a_{n+1}^2 I(a_{n+1}, b_{n+1}) + 2^n a_n^2 I(a_n, b_n)\\
&= 2^n a_n b_n I(a_n, b_n) - 2^{n+1}a_{n+1}^2 I(a_n, b_n) + 2^n a_n^2 I(a_n, b_n)\\
&= 2^{n-1}\left(2a_n b_n - (a_n + b_n)^2 + 2a_n^2\right) I(a_n, b_n)\\
&= 2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2) I(a_n, b_n) = 2^{n-1}c_n^2 I(a, b).
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
-2^{-n}A_n &= a_n^2 I(a_n, b_n) - J(a_n, b_n)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n^2}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}\,d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n^2 - a_n^2\cos^2\theta - b_n^2\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a_n^2 - b_n^2)\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta\\
&= c_n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta \leq c_n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}} = c_n^2 I(a_n, b_n).
\end{aligned}$$

したがって，$0 < -A_n \le 2^n c_n^2 I(a_n, b_n) = 2^n c_n^2 I(a, b)$. 補題 4.8 より，$\lim_{n\to\infty} 2^n c_n = 0$ が成り立つから，

$$A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} - A_n) = \lim_{N\to\infty} A_{N+1} = 0.$$

これから，

$$\begin{aligned}
J(a, b) - a^2 I(a, b) = A_0 &= -\sum_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} - A_n) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I(a, b) \\
&= -I(a, b) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2, \\
J(a, b) &= \left(a^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) I(a, b).
\end{aligned}$$

□

次の**ルジャンドルの関係式**の証明は次節で与える．

命題 4.10 (ルジャンドルの関係式)**.**

$$E(k)K(k') + E(k')K(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2}.$$

[ガウスの公式の証明]

$a = 1,\ b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおけば，$k = k' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．命題 4.10 より，

$$2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

命題 4.9 より，

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

よって，

$$\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2\right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

命題 4.4 より，

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\mathrm{AGM}\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

であるから，

$$\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2\right) \frac{\pi^2}{4\mathrm{AGM}\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

以上によって，ガウスの公式を得る．

5　ルジャンドルの関係式の証明

定義 5.1. $a, b, c \in \mathbb{C}$，c は 0 以下の整数ではないとする．$n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ に対して，$a^{(n)} = a(a+1)\cdots(a+n-2)(a+n-1)$, $a^{(0)} = 1$ とおく．そのとき，級数

$$F(a, b, c; u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)} b^{(n)}}{n! c^{(n)}} u^n \tag{5.1}$$

を**ガウスの超幾何級数**と呼ぶ.

命題 5.2. 超幾何級数 $f(u) = F(a, b, c; u)$ は $|u| < 1$ において収束し，単位円板上の正則関数を表す．さらに，これは微分方程式

$$u(1-u)\frac{d^2 f}{du^2} + (c - (a+b+1)u)\frac{df}{du} - abf = 0 \tag{5.2}$$

を満たす.

$(1-x)^{-1/2}$ のテーラー展開に，$x = k^2 \sin^2\theta$ を代入して，項別積分すれば,

命題 5.3. $K(k) = \dfrac{\pi}{2} F\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1; k^2\right)$.

命題 5.2 と命題 5.3 から微分方程式をかきなおせば,

補題 5.4. $K'(k) = K(k')$ とおけば，$K(k)$, $K'(k)$ は 2 階線形微分方程式

$$(k^3 - k)\frac{d^2 y}{dk^2} + (3k^2 - 1)\frac{dy}{dk} + ky = 0 \tag{5.3}$$

の解である.

K と K' が微分方程式 (5.3) の解であることから,

補題 5.5. $K'(k) = K(k')$, $E'(k) = E(k')$ とおけば，$EK' + E'K - KK'$ は定数である.

[ルジャンドルの関係式の証明]　補題 5.5 より，$W = EK' + E'K - KK'$ は定数である．$\lim_{k\to 0} W$ を計算することによってこの定数を求めよう．$K(0) = \dfrac{\pi}{2}$ である．また,

$$E(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \big[\sin\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$W = (E - K)K' + E'K$ であるから,

$$\lim_{k\to 0} W = \lim_{k\to 0} (E - K)K' + E(1)K(0) = \lim_{k\to 0} (E - K)K' + \frac{\pi}{2}.$$

よって，$\displaystyle\lim_{k\to 0}(E-K)K'=0$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
(K-E)K' &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta\right) \times K(k') \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\theta}}\right) \\
&\leq k\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\,d\theta}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\theta}}\right) \\
&= kK\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\,d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta}} \\
&\leq kK\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\,d\theta}{\sqrt{k^2\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta}} = kK\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
0 < (K-E)K' < kK\frac{\pi}{2} \to 0 \quad (k\to 0).
$$

□

参考文献

[1] 竹之内修・伊藤隆， π–π の計算 アルキメデスから現代まで–， 共立出版， 2007.

[2] 梅村浩，楕円関数論， 東京大学出版会， 2000.

[3] 小林昭七, 円の数学, 裳華房, 1999.

[4] 大浦拓哉，円周率の公式と計算法，http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ ooura/pi04.pdf

[5] 中川仁，http://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/pi.pdf

[6] 中川仁，http://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/pi2002.pdf