

数の不思議

—素数についての様々な未解決問題—

上越教育大学 中川仁

平成 22 年 9 月 1 日, 8 日, 15 日, 22 日, 9 月 29 日

目次

0	はじめに	1
1	約数, 倍数, 素数	2
2	メルセンヌ素数と完全数	5
2.1	メルセンヌ素数	5
2.2	完全数	6
2.3	未解決の問題	8
3	素数の個数を数える	8
4	反比例のグラフで囲まれる図形の面積	9
4.1	自然数の逆数の和	9
4.2	$S(1, a)$ の性質	11
4.3	$\ln(1 - a)$ の級数展開	19
5	素数の逆数の和	24
6	素数の個数の評価	26

0 はじめに

素数はどれくらいたくさんあるか, どんな素数があるか, どんな問題が未解決かなどについて解説する. 特に, 素数の個数を近似的に表す公式を発見的に求めることを通して, 不規則に並ぶ素数の不思議さとそれを数学的にとらえようとする数学者の知的挑戦を体験してもらいたい.

予備知識は仮定しないで，必要な数学的道具はその都度獲得し，そうして得た道具を用いて，素数の個数を表す公式に迫りたい．

1 約数，倍数，素数

自然数 a, b について， $a = bc$ となる自然数 c があるとき， b は a の約数， a は b の倍数という．例えば， $15 = 3 \times 5$ だから， 3 は 15 の約数， 15 は 3 の倍数である．

$a = 1 \times a$ より， 1 と a は a の約数である．自然数 $p > 1$ について， p の約数が 1 と p だけのとき， p は素数であるという．素数を小さい方から順に挙げると，

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots$$

となっている．このように，素数は非常に不規則に現れる．ここで，次の素朴な疑問が自然にでてくる．

問 1. 素数は無数に存在するか？

補題 1.1. $a > 1$ を自然数とする． p を a の 1 より大きな約数で最小のものとする．そのとき， p は素数である．

[証明] $a = bp$, b は自然数とかける．もし， p が素数でないとすると， $p = cq$, c, q は自然数， $1 < q < p$ とかける． $a = bp = bcq$ より， q は a の約数， $1 < q < p$ ．これは， p のとり方に矛盾する．ゆえに， p は素数である． \square

定理 1.2 (ユークリッド). 素数は無数に存在する．

[証明] p_1, p_2, \dots, p_n を相異なる素数とするとき，これら以外の素数が必ず存在することを示せばよい．

$$A = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

とおく．もし， A が素数ならば， A はどの p_i よりも大きいから，これは， p_1, p_2, \dots, p_n と異なる素数である．また， A が素数でないとすると， A の 1 と A 以外の約数が存在する．そのような約数で最小のものを p とすると，補題 1.1 より， p は素数である． A は素数 p で割り切れる．しかし，

$$A = p_i (p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n) + 1$$

であるから， A を p_i で割ると 1 余る．ゆえに， $p \neq p_i, i = 1, \dots, n$ である． \square

例えば，素数 $2, 3$ に対して， $A = 2 \times 3 + 1 = 7$ は素数である．素数 $2, 3, 5$ に対して， $A = 2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$ も素数である．素数 $2, 3, 7$ に対して， $A = 2 \times 3 \times 7 + 1 = 43$ も素数である．素数 $2, 7$ に対して， $A = 2 \times 7 + 1 = 15 = 3 \times 5$ であり， $3, 5$ は $2, 7$ 以外の素数である．

2以外の素数は、 $4k+1$ の形の素数と $4k-1$ の形の素数のいずれかである。前者の素数をあげると、5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, ...。後者の素数をあげると、3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, ...。どちらの形の素数も無数に存在しそに見える。後者の素数が無数に存在することは定理1.2と同様にして証明できる。

定理 1.3. $4k-1$ の形の素数は無数に存在する。

[証明] p_1, p_2, \dots, p_n を $4k-1$ の形の相異なる素数とする。

$$A = 4p_1p_2 \cdots p_n - 1$$

とおく。Aは奇数だから、 $A = q_1 \cdots q_m$ と奇素数の積に表せる。Aは q_j で割り切れるが、Aは p_i で割り切れないから、 $q_j \neq p_i$ である。もし、すべての $1 \leq j \leq m$ について、 $q_j = 4k_j + 1$ とかけたとすると、

$$A = q_1 \cdots q_m = (4k_1 + 1) \cdots (4k_m + 1) = 4K + 1$$

となつて、 $A = 4(p_1 \cdots p_n) - 1$ であることに矛盾する。よつて、ある j に対して、 $q_j = 4k - 1$ の形である。□

$4k+1$ の形の素数が無数に存在することを証明するためには、もう少し準備が必要になる。

定理 1.4 (フェルマーの小定理). p を素数、 a を p で割り切れない整数とする。そのとき、 $a^{p-1} - 1$ は p で割り切れる。

[証明] $1 \leq j \leq p-1$ に対して、 aj を p で割ったときの商を q_j 、余りを r_j とする。

$$aj = pq_j + r_j, \quad 1 \leq r_j \leq p-1.$$

とかく。そのとき、 r_1, r_2, \dots, r_{p-1} は相異なる。実際、もし、 $r_j = r_k, 1 \leq j < k \leq p-1$ とすると、

$$a(j-k) = aj - ak = (pq_j + r_j) - (pq_k + r_k) = p(q_j - q_k).$$

この左辺は p で割り切れないから矛盾である。したがつて、 r_1, r_2, \dots, r_{p-1} は相異なる。これは、 $1, 2, \dots, p-1$ を並べ替えたものである。そこで次のような積を計算する。

$$\begin{aligned} a^{p-1}(1 \cdot 2 \cdots (p-1)) &= (a \cdot 1)(a \cdot 2) \cdots (a(p-1)) \\ &= (pq_1 + r_1)(pq_2 + r_2) \cdots (pq_{p-1} + r_{p-1}) \\ &= pQ + r_1 r_2 \cdots r_{p-1} \\ &= pQ + 1 \cdot 2 \cdots (p-1), \end{aligned}$$

したがつて、

$$(a^{p-1} - 1)(1 \cdot 2 \cdots (p-1)) = pQ.$$

$1 \cdot 2 \cdots (p-1)$ は p で割り切れないから、 $a^{p-1} - 1$ は p で割り切れる。□

系 1.5. p を素数, a を p で割りきれない整数とする. そのとき, 整数 b, c で, $ab = 1 + pc$ となるものが存在する.

[証明] $b = a^{p-2}$ とおけば, 定理 1.4 より, $ab - 1 = a^{p-1} - 1$ は p の倍数だから, $ab - 1 = pc$ とかける. \square

補題 1.6. a を 2 以上の偶数, p を $a^2 + 1$ を割り切る素数とする. そのとき, p は $4k + 1$ の形である.

[証明] a は偶数であるから, $a^2 + 1$ は奇数である. よって, $p \neq 2$ である. フェルマーの小定理によって, $a^{p-1} - 1 = pA$ とかける. $a^2 + 1 = pb$ とかく. $p = 4k - 1$ とかけたとする. そのとき, $-1 = a^2 - pb$ より,

$$\begin{aligned} -1 &= (-1)^{2k-1} = (a^2 - pb)^{2k-1} = (a^2)^{2k-1} - pB = a^{4k-2} - pB \\ &= a^{p-1} - 1 + 1 - pB \\ &= pA + 1 - pB, \end{aligned}$$

$p(B - A) = 2$ となって矛盾である. ゆえに, p は $4k + 1$ の形である. \square

定理 1.7. $4k + 1$ の形の素数は無数に存在する.

[証明] p_1, p_2, \dots, p_n を $4k + 1$ の形の相異なる素数とする.

$$A = (2p_1 p_2 \cdots p_n)^2 + 1$$

とおく. p を A を割り切る素数とすれば, 補題 1.6 より, p は $4k + 1$ の形である. A は p で割り切れるが, A は p_i で割り切れないから, $p \neq p_i$ である. \square

次に, 与えられた自然数 n が素数かどうかを判定する.

$$n \text{ が素数でない} \implies n = ab, \quad 1 < a, b < n \text{ とかける}$$

$1 < a \leq b < n$ としてよい. そのとき,

$$a^2 \leq ab = n, \quad a \leq \sqrt{n}.$$

したがって, n が素数でなければ, n は約数 $a, 1 < a \leq \sqrt{n}$ を持つ. a が素数ならば, n は素数 $a, 1 < a \leq \sqrt{n}$ で割り切れる. a が素数でなければ, a の 1 より大きな約数で最小のものを p とすれば, 補題 1.1 より, p は素数であり, n は p で割り切れる. いずれの場合も,

$$n \text{ は素数でない} \iff n \text{ は } \sqrt{n} \text{ 以下のある素数 } p \text{ で割り切れる}$$

このことから,

$$n \text{ は } \sqrt{n} \text{ 以下のどんな素数 } p \text{ でも割り切れない} \iff n \text{ は素数である}$$

がわかる。

上の素数判定法を用いて、500以下の素数の表を作ってみよう。 $\sqrt{500} = 22.36\dots$ であるから、 $\sqrt{500}$ 以下の素数は、2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19である。したがって、2から500までの数の表から、まず2以外の2の倍数を消す。次に、3以外の3の倍数を消す。5以外の5の倍数を消す。7以外の7の倍数を消す。11以外の11の倍数を消す。13以外の13の倍数を消す。17以外の17の倍数を消す。19以外の19の倍数を消す。こうして消されずに残った数が素数である。このようにして素数を求める方法をエラトステネスのふるいという。

2 メルセンヌ素数と完全数

2.1 メルセンヌ素数

$a > 1, n > 1$ を自然数とすると、 $a^n - 1$ の形の素数を考えよう。次の恒等式を用いる。

補題 2.1.

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1).$$

[証明] $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ とおけば、

$$\begin{aligned}(x - 1)f(x) &= xf(x) - f(x) \\ &= x(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) \\ &= x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x - 1 \\ &= x^n - 1.\end{aligned}$$

□

系 2.2. $a \neq 1$ のとき、

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

[証明] 補題 2.1 で、 $x = a$ とおいた式を、 $a - 1 \neq 0$ で割ればよい。 □

補題 2.1 より、 $x = a$ とおけば、

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$

したがって、 $a - 1 > 1$ ならば、これは素数ではないことがわかる。よって、 $a - 1 = 1$ 、 $a = 2$ とする。次に、 n が素数でないとし、 $n = m\ell$ 、 $1 < m, \ell < n$ とかく。そのとき、補題 2.1 より (n を m として)、

$$x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1).$$

ここで, $x = 2^\ell$ とおけば,

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{m\ell} - 1 = (2^\ell)^m - 1 \\ &= (2^\ell - 1) ((2^\ell)^{m-1} + \cdots + 2^\ell + 1). \end{aligned}$$

したがって, これは素数ではない. 以上によって, 次が証明された.

命題 2.3. $a^n - 1$ が素数ならば, $a = 2$ であり, n は素数である.

注意 2.4. 逆は成り立たない.

$2^p - 1$ (p は素数) の形の素数をメルセンヌ素数という. q を $2^p - 1$ を割り切る素数とすれば, 定理 1.4 より, $2^{q-1} - 1$ は q で割り切れる. これから, $q - 1$ は p で割り切れなければならない. 実際, もし, $q - 1$ が p で割り切れないとすると, 系 1.5 より, 整数 b, c で, $(q - 1)b = 1 + pc$ となるものが存在する. そのとき,

$$2^{(q-1)b} - 1 = (2^{q-1} - 1)((2^{q-1})^{b-1} + \cdots + 2^{q-1} + 1)$$

は q で割り切れるが,

$$2^{(q-1)b} - 1 = 2^{1+pc} - 1 = 2(2^{pc} - 1) + 1 = 2(2^p - 1)((2^p)^{c-1} + \cdots + 2^p + 1) + 1$$

の右辺は q で割って 1 余る数であるから矛盾である.

2.2 完全数

6 の約数は, 1, 2, 3, 6.

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

12 の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 12.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12.$$

15 の約数は 1, 3, 5, 15.

$$1 + 3 + 5 = 9 < 15.$$

28 の約数は, 1, 2, 4, 7, 14, 28

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

6, 28 のように, 自然数 n について, n 以外の n の約数の和が n になるとき, n は完全数であるという. 28 の次の完全数は 496 である.

496 の 496 以外の約数の和

$$\begin{aligned} &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 \times 1 + 31 \times 2 + 31 \times 4 + 31 \times 8 \\ &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 31(1 + 2 + 4 + 8) \\ &= 31 + 31 \times 15 = 31 \times (1 + 15) = 31 \times 16 = 496. \end{aligned}$$

これらは次のような形をしている .

$$6 = 2 \times 3 = 2^1(2^2 - 1), \quad 28 = 4 \times 7 = 2^2(2^3 - 1), \quad 496 = 16 \times 31 = 2^4(2^5 - 1).$$

そこで , $q = 2^p - 1$ がメルセンヌ素数のとき ,

$$n = 2^{p-1}q = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

は完全数だろうか ?

$q = 2^p - 1$ がメルセンヌ素数とすると , $n = 2^{p-1}q$ の n 以外の約数は

$$1, 2, \dots, 2^{p-2}, 2^{p-1}, \quad q, 2q, \dots, 2^{p-2}q.$$

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + \dots + 2^{p-1} + q + 2q + \dots + 2^{p-2}q \\ &= (1 + 2 + \dots + 2^{p-1}) + q(1 + 2 + \dots + 2^{p-2}) \\ &= \frac{2^p - 1}{2 - 1} + q \frac{2^{p-1} - 1}{2 - 1} = 2^p - 1 + q(2^{p-1} - 1) \\ &= q + 2^{p-1}q - q = 2^{p-1}q = n. \end{aligned}$$

よって , n は (偶数の) 完全数である .

定理 2.5 (オイラーの完全数定理). 偶数の完全数は $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, $q = 2^p - 1$ はメルセンヌ素数 , の形である .

[証明] n を偶数の完全数とする . $n = 2^k m$, $k \geq 1$, m は奇数とかく . m の約数の全体を $1 = d_1 < \dots < d_{r-1} < d_r = m$ とする . m のすべての約数の和を T とすると ,

$$T = d_1 + \dots + d_r$$

である . また , $n = 2^k m$ の約数の全体は

$$2^i d_j \quad (0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r)$$

である . したがって , n のすべての約数の和 S は , 系 2.2 より ,

$$\begin{aligned} S &= d_1(1 + 2 + \dots + 2^k) + \dots + d_{r-1}(1 + 2 + \dots + 2^k) + d_r(1 + 2 + \dots + 2^k) \\ &= d_1(2^{k+1} - 1) + \dots + d_{r-1}(2^{k+1} - 1) + d_r(2^{k+1} - 1) \\ &= (2^{k+1} - 1)(d_1 + \dots + d_r) \\ &= (2^{k+1} - 1)T. \end{aligned}$$

一方 , n は完全数であるから , n の n 以外の約数の和は n であり , これに n を加えれば , n のすべての約数の和は $S = 2n = 2^{k+1}m$ である . よって ,

$$2^{k+1}m = (2^{k+1} - 1)T.$$

この左辺は 2^{k+1} で割り切れ、 $2^{k+1} - 1$ は奇数であるから、右辺の T が 2^{k+1} で割り切れなければならない。よって、

$$T = 2^{k+1}c \quad (c \text{ は自然数}), \quad (1)$$

$$m = (2^{k+1} - 1)c. \quad (2)$$

$c > 1$ と仮定して矛盾を導く。 $c > 1$ とすると、 $1, c, m$ は $m = (2^{k+1} - 1)c$ の異なる約数であるから、(1) より、

$$\begin{aligned} T &= d_1 + \cdots + d_r \\ &\geq 1 + c + m = 1 + c + (2^{k+1} - 1)c \\ &= 1 + 2^{k+1}c = 1 + T. \end{aligned}$$

これは矛盾である。ゆえに、 $c = 1$ である。したがって、(2), (1) より、

$$m = 2^{k+1} - 1, \quad T = 2^{k+1} = 1 + m.$$

$T = 1 + m$ は m の約数が 1 と m だけであることを意味する。すなわち、 m は素数である。 $m = 2^{k+1} - 1$ であるから、 m はメルセンヌ素数である。□

2.3 未解決の問題

次のような問題自体は誰にでも理解できると思います。

問 2 奇数の完全数は存在するか？

問 3 メルセンヌ素数は無数に存在するか？

問 4 3 と 5 , 5 と 7 , 11 と 13 , 17 と 19 , 29 と 31 , \cdots のように p と $p + 2$ がともに素数であるとき、そのような素数の組を双子素数という。双子素数は無数に存在するか？

問 5 4 以上のすべての偶数は 2 つの素数の和で表せるか？

これらの問はすべて未解決の難問です。

3 素数の個数を数える

実数 $x \geq 1$ に対して、

$$\pi(x) = (x \text{ 以下の素数の個数})$$

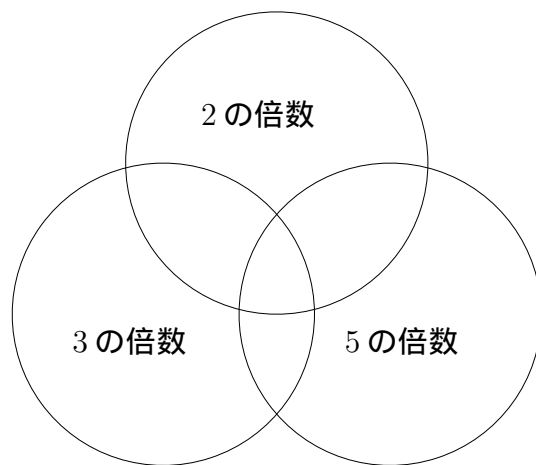
とする．例えば，10以下の素数は2, 3, 5, 7だから， $\pi(10) = 4$ ．20以下の素数は，2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19だから， $\pi(20) = 8$ である．

素数表を使わずに， $\pi(30)$ を求めてみよう．30以下の自然数のうちの，偶数の個数 m_2 ，3の倍数の個数 m_3 ，5の倍数の個数 m_5 ，6の倍数の個数 m_6 ，10の倍数の個数 m_{10} ，15の倍数の個数 m_{15} ，30の倍数の個数 m_{30} を求める．

$$m_2 = 30/2 = 15, \quad m_3 = 30/3 = 10, \quad m_5 = 30/5 = 6, \quad m_6 = 30/6 = 5$$

$$m_{10} = 30/10 = 3, \quad m_{15} = 30/15 = 2, \quad m_{30} = 30/30 = 1.$$

これを図示すれば，



これから，30以下の自然数で，2, 3, 5いずれかの倍数であるものは，22個あることがわかる．

$$m_2 + m_3 + m_5 - m_6 - m_{10} - m_{15} + m_{30} = 15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1 = 22.$$

したがって，2でも3でも5でも割れない数の個数を M とすると， $M = 30 - 22 = 8$ である．この中には，1が数えられていることと，2, 3, 5が数えられていないことから， $\pi(30) = M - 1 + 3 = M + 2 = 10$ である．

コンピュータを使って素数の個数を求めると (ガウスは手計算で求めていた)， $\pi(10) = 4$ ， $\pi(10^2) = 25$ ， $\pi(10^3) = 168$ ， $\pi(10^4) = 1229$ ， $\pi(10^5) = 9592$ ， $\pi(10^6) = 78498$ ， $\pi(10^7) = 664579$ である．

x を大きくしていくとき， $\frac{x}{\pi(x)}$ はどんな関数で近似されるだろうか？

4 反比例のグラフで囲まれる図形の面積

4.1 自然数の逆数の和

自然数の逆数の和

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

はどれくらいの大きさだろうか． $n \rightarrow \infty$ のとき， $H(n) \rightarrow \infty$ だろうか．

正の実数 a, b ($a < b$) に対して，平面における領域

$$D(a, b) = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x}, a \leq x \leq b \right\}$$

の面積を $S(a, b)$ で表す．

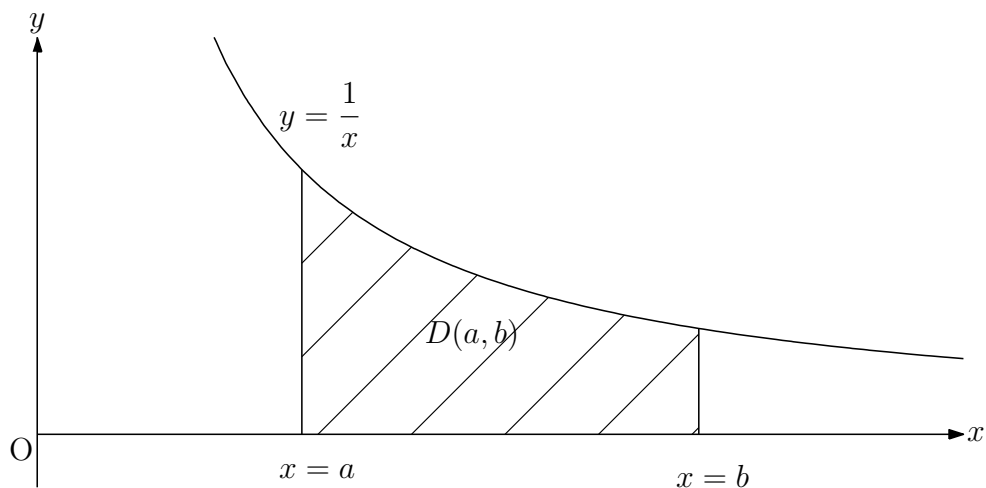


図 1: $y = \frac{1}{x}$ で囲まれる領域の面積

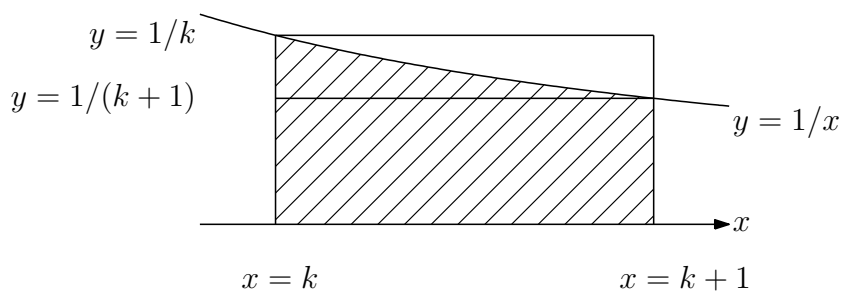


図 2: $y = \frac{1}{x}$ のグラフで囲まれる図形の面積

自然数 k に対して，領域 $D(k, k + 1)$ の面積 $S(k, k + 1)$ は図 2 より，明らかに

$$\frac{1}{k+1} < S(k, k+1) < \frac{1}{k}$$

を満たす．これを $k = 1$ から $k = n - 1$ まで加えれば，

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < S(1, n) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

したがって、次を得る。

$$S(1, n) + \frac{1}{n} < H(n) < S(1, n) + 1. \quad (3)$$

4.2 $S(1, a)$ の性質

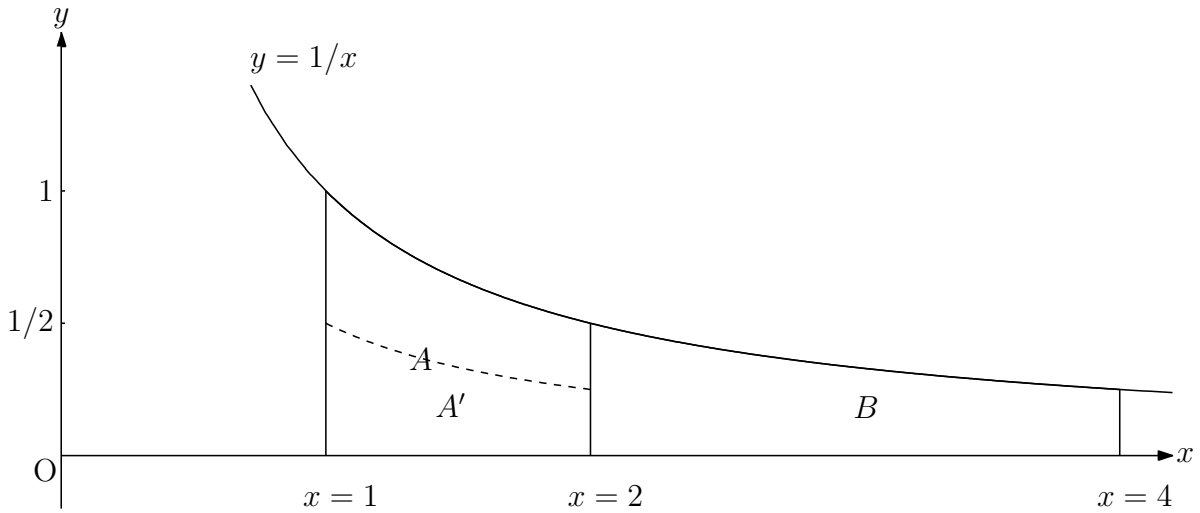


図 3: $y = \frac{1}{x}$ で囲まれる領域の面積

平面上の領域 D の面積を $m(D)$ で表す。図 3 において、 $m(A) = S(1, 2)$ と $m(B) = S(2, 4)$ を比較したい。図 4 において、 A, B を y 軸方向に 4 倍した図形を C, D とする。明らかに、 $m(C) = 4m(A)$ 、 $m(D) = 4m(B)$ である。一方、図 5 において、 F と G はともに、縦の長さ 1、横の長さ 2 の長方形であり、 E は共通であるから、

$$m(E) + m(G) = m(E) + m(F) = m(D) = 4m(B). \quad (4)$$

ここで、(4) の左辺は、 y の動く範囲が $1 \leq y \leq 2$ であるときの、反比例のグラフ

$$x = \frac{4}{y} \quad (1 \leq y \leq 2)$$

で囲まれた図形の面積であるから、 x と y を入れ替えて、 x の動く範囲が $1 \leq x \leq 2$ であるときの、反比例のグラフ

$$y = \frac{4}{x} \quad (1 \leq x \leq 2)$$

で囲まれた図形 C の面積と等しい。したがって、

$$m(E) + m(G) = m(C) = 4m(A). \quad (5)$$

(4) と (5) から、 $4m(A) = 4m(B)$ 、 $m(A) = m(B)$ を得る。

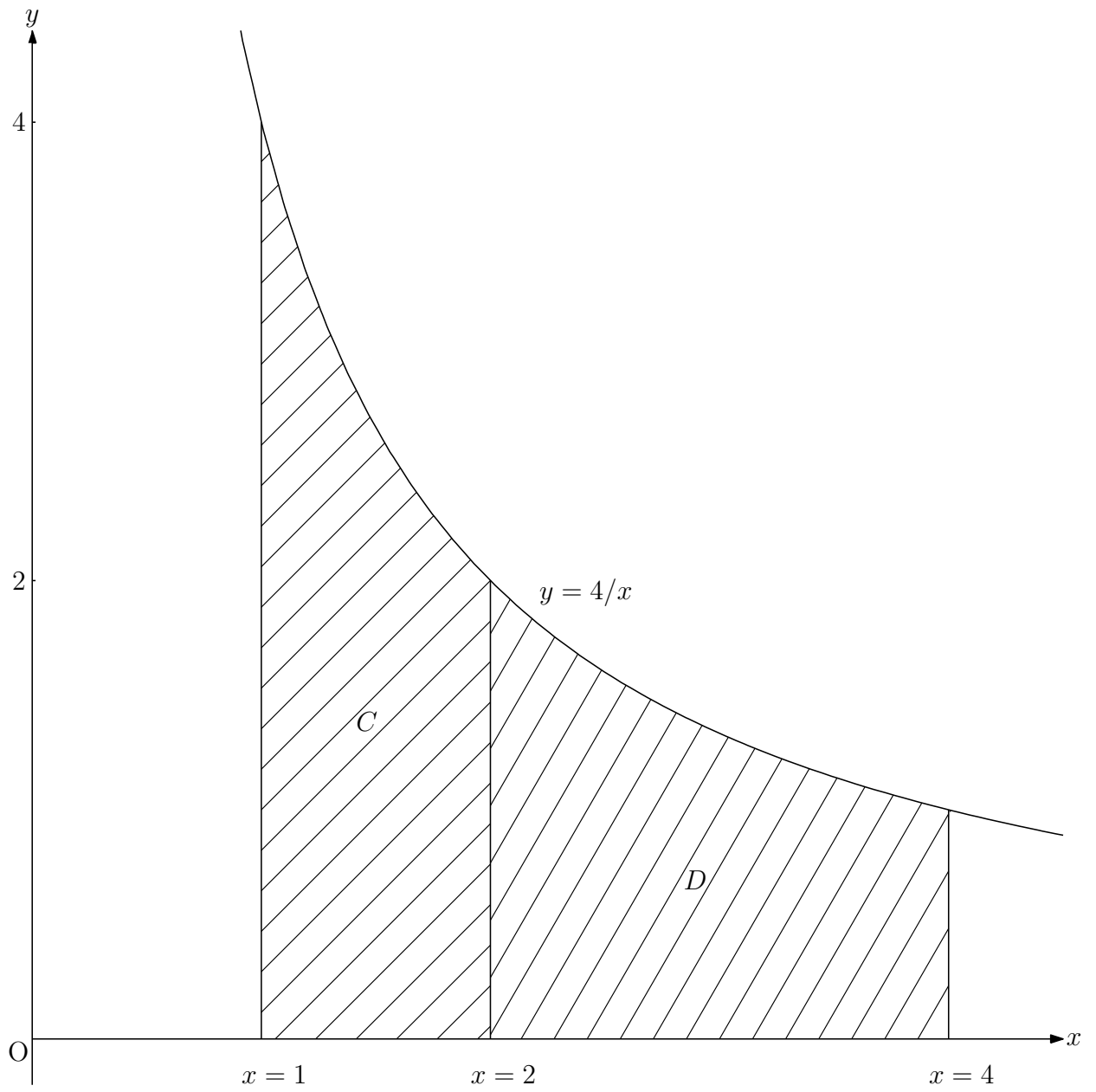


図 4: $y = \frac{4}{x}$ で囲まれる領域の面積

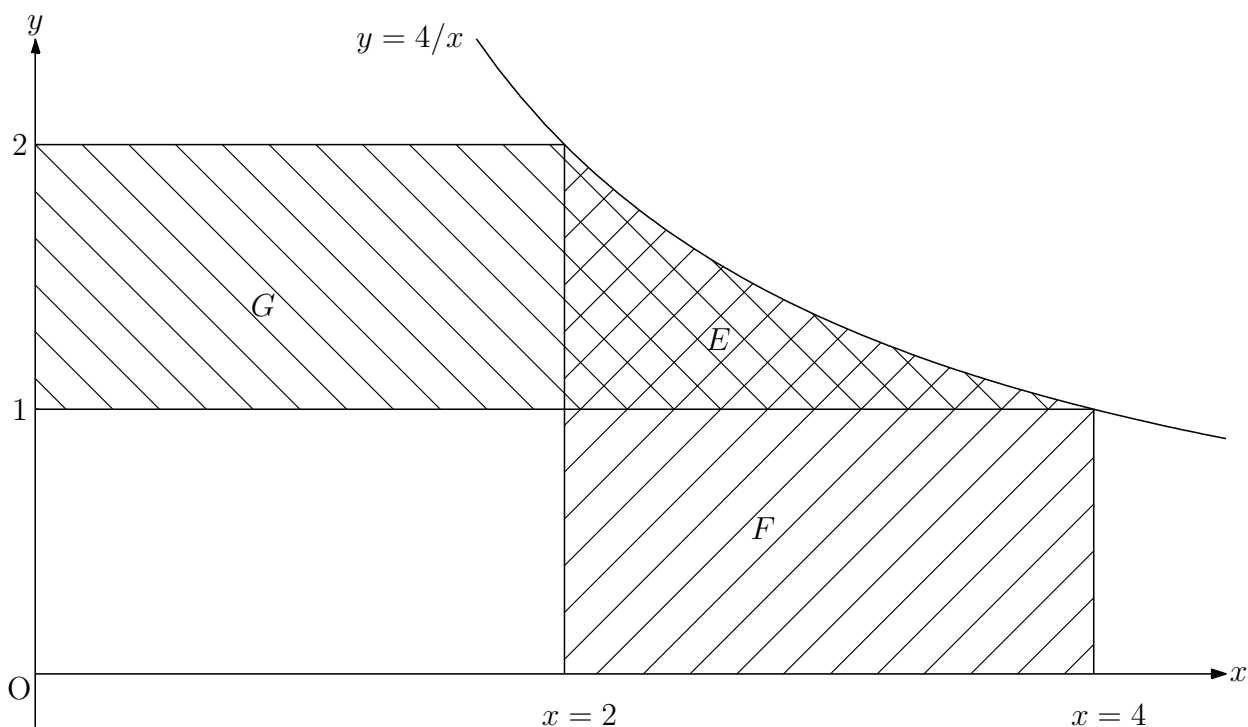


図 5: $y = \frac{4}{x}$ で囲まれる領域の面積

別の方法で, $m(A) = m(B)$ を示そう. 長方形の面積を考えれば,

$$\frac{1}{2} < m(A) < 1, \quad 2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < m(B) < 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

さらに, $x = \frac{3}{2}$ で A を分割し, $x = 3$ で B を分割して, 長方形の面積を考えれば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < m(A) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \\ 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{4} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < m(B) < 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

これを一般化すれば, 次のようになる. 区間 $1 \leq x \leq 2$ を n 等分し,

$$x_k = 1 + \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

とする. 長方形の面積と比べることによって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_n} < m(A) < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x_{n-1}}, \\ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < m(A) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}, \end{aligned}$$

同様に, 区間 $2 \leq x \leq 4$ を n 等分し,

$$x'_k = 2 + \frac{2k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

とする．長方形の面積と比べることによって，

$$\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{x'_1} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{x'_2} + \cdots + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{x'_n} < m(B) < \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{x'_0} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{x'_1} + \cdots + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{x'_{n-1}},$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < m(B) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1},$$

したがって，

$$T_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

とおけば，

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = T_n + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right) = T_n + \frac{1}{2n},$$

$$T_n < m(A) < T_n + \frac{1}{2n}, \quad T_n < m(B) < T_n + \frac{1}{2n}$$

である．したがって，

$$-\frac{1}{2n} < m(A) - m(B) < \frac{1}{2n}$$

である．これが任意の自然数 n に対して成り立つから， $m(A) = m(B)$ である．すなわち， $S(1, 2) = S(2, 4)$ である．

最初の方法は次のように一般化される．正の実数 a, b ($a < b$) に対して，平面における領域

$$D(a, b) = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x}, a \leq x \leq b \right\}$$

の面積を $S(a, b)$ で表す．

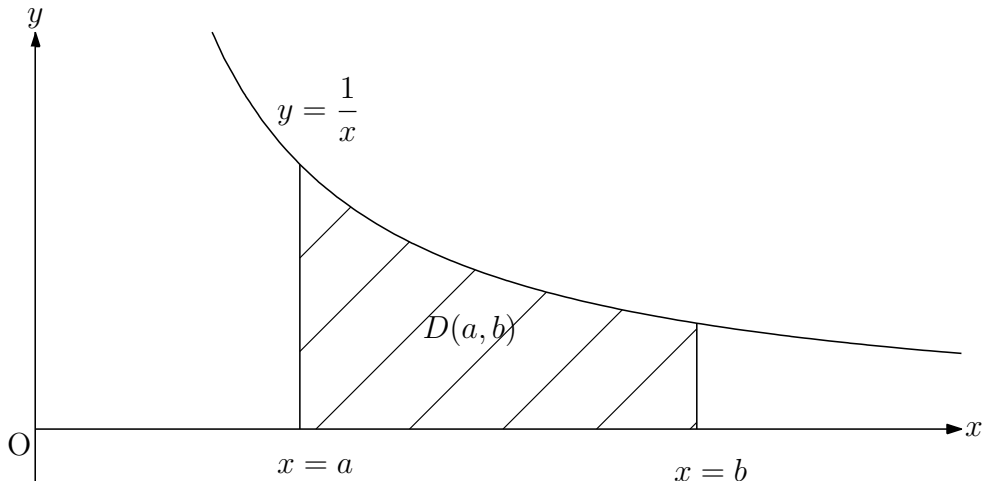


図 6: $y = \frac{1}{x}$ で囲まれる領域の面積

命題 4.1.

$$S(a, b) = S\left(1, \frac{b}{a}\right) \quad (0 < a < b).$$

特に, $b = 1$ とすれば,

$$S(a, 1) = S\left(1, \frac{1}{a}\right) \quad (0 < a < 1).$$

[証明] $b > a > 0, c > 0$ とし, 平面における領域

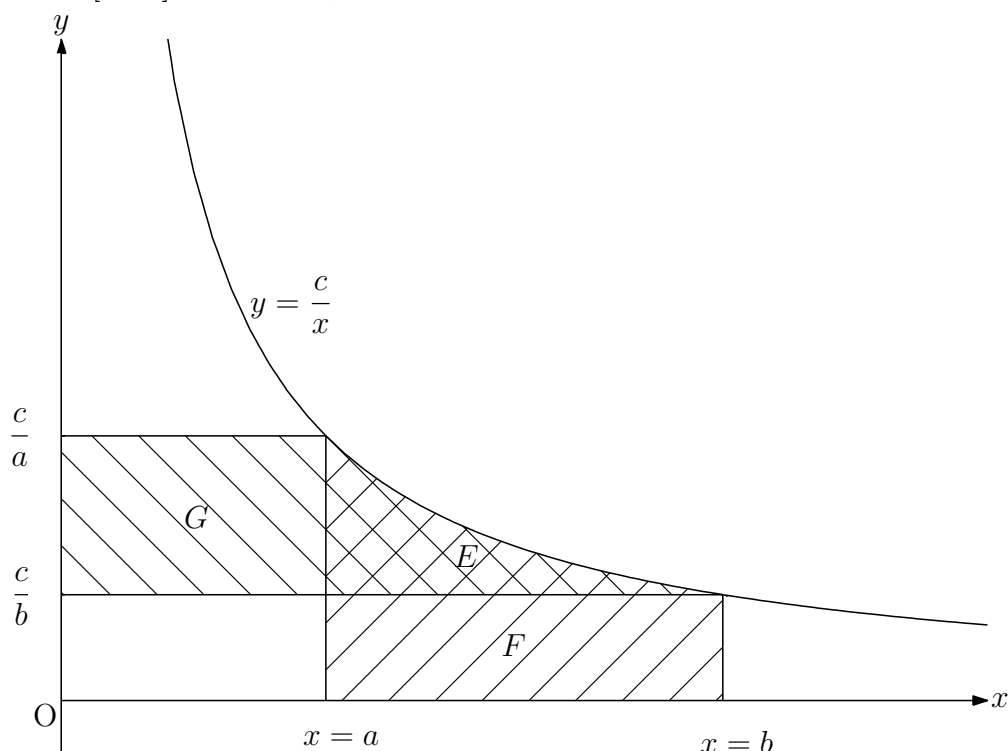


図 7: $y = \frac{c}{x}$ で囲まれる領域の面積

$$D_c(a, b) = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{c}{x}, a \leq x \leq b \right\}$$

の面積を $S_c(a, b)$ で表す. $D_c(a, b)$ は y 軸方向に $D(a, b)$ を c 倍して得られるから,

$$S_c(a, b) = cS(a, b). \quad (6)$$

また, 領域 $D_c(a, b)$ を図 7 のように領域 E, F に分割すれば, F は長方形であり, $m(F) = \frac{c}{b}(b - a)$ である. 図 7 の G も長方形であり,

$$m(G) = \left(\frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right) a = \frac{c(b - a)}{b} = \frac{c}{b}(b - a) = m(F)$$

である．また， E と G を合わせた領域は

$$\left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{c}{y}, \frac{c}{b} \leq y \leq \frac{c}{a} \right\}$$

であり，この面積は， x と y を交換して得られる領域

$$D_c \left(\frac{c}{b}, \frac{c}{a} \right) = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{c}{x}, \frac{c}{b} \leq x \leq \frac{c}{a} \right\}$$

の面積 $S_c \left(\frac{c}{b}, \frac{c}{a} \right)$ と等しい．したがって，

$$S_c(a, b) = m(E) + m(F) = m(E) + m(G) = S_c \left(\frac{c}{b}, \frac{c}{a} \right).$$

これと (6) より， $cS(a, b) = cS \left(\frac{c}{b}, \frac{c}{a} \right)$ ，したがって，

$$S(a, b) = S \left(\frac{c}{b}, \frac{c}{a} \right) \quad (b > a > 0, c > 0). \quad (7)$$

ここで， $c = b$ とすれば， $S(a, b) = S \left(1, \frac{b}{a} \right)$ を得る． \square

[別証明] 区間 $a \leq x \leq b$ を n 等分する． $h = \frac{b-a}{n}$ とおき， $x_k = a + hk$ ， $k = 0, 1, \dots, n$ とおく．同様に，区間 $1 \leq x \leq \frac{b}{a}$ を n 等分する． $h' = \frac{1}{n} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$ とおき， $x'_k = 1 + h'k$ ， $k = 0, 1, \dots, n$ とおく．そのとき，長方形の面積と比べることによって，

$$\sum_{k=1}^n h \frac{1}{x_k} < S(a, b) < \sum_{k=0}^{n-1} h \frac{1}{x_k},$$

$$\sum_{k=1}^n h' \frac{1}{x'_k} < S \left(1, \frac{b}{a} \right) < \sum_{k=0}^{n-1} h' \frac{1}{x'_k}$$

を得る．ここで，

$$h' \frac{1}{x'_k} = \frac{1}{n} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) \frac{1}{1 + h'k} = \frac{b-a}{n} \frac{1}{a + ah'k} = \frac{b-a}{n} \frac{1}{a + hk} = h \frac{1}{x_k}$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^n h' \frac{1}{x'_k} = \sum_{k=1}^n h \frac{1}{x_k}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} h' \frac{1}{x'_k} = \sum_{k=0}^{n-1} h \frac{1}{x_k}.$$

そこで，

$$T_n = \sum_{k=1}^n h \frac{1}{x_k} = (b-a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{na + (b-a)k}$$

とおけば,

$$\sum_{k=0}^{n-1} h \frac{1}{x_k} = T_n + (b-a) \left(\frac{1}{na} - \frac{1}{nb} \right) = T_n + \frac{(b-a)^2}{nab},$$

$$T_n < S(a, b) < T_n + \frac{(b-a)^2}{nab}, \quad T_n < S\left(1, \frac{b}{a}\right) < T_n + \frac{(b-a)^2}{nab}$$

である. したがって,

$$-\frac{(b-a)^2}{nab} < S(a, b) - S\left(1, \frac{b}{a}\right) < \frac{(b-a)^2}{nab}$$

である. n は任意の自然数であるから, $S(a, b) = S\left(1, \frac{b}{a}\right)$ を得る. □

定義 4.2. $a > 0$ に対して, $\ln(a)$ を

$$\ln(a) = \begin{cases} S(1, a), & a > 1, \\ 0, & a = 1, \\ -S(a, 1), & 0 < a < 1 \end{cases} \quad (8)$$

によって定義する.

命題 4.3. 正の実数 a, b に対して, 次が成り立つ.

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a),$$

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a),$$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

[証明] $0 < a < 1$ のとき, $a^{-1} > 1$ であるから, 命題 4.1 より,

$$\ln(a) + \ln(a^{-1}) = -S(a, 1) + S(1, a^{-1}) = -S(1, a^{-1}) + S(1, a^{-1}) = 0.$$

よって, $a > 1$ のときも, $\ln(a) + \ln(a^{-1}) = 0$ である. $1 < a < b$ に対して, 図 8 より,

$$S(1, b) = S(1, a) + S(a, b)$$

が成り立つ. これと命題 4.1 から,

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = S\left(1, \frac{b}{a}\right) = S(a, b) = S(1, b) - S(1, a) = \ln(b) - \ln(a). \quad (9)$$

$1 < a < b$ でない場合も, この等式が成り立つことがわかる. 最後に,

$$\ln(ab) = \ln\left(\frac{b}{a^{-1}}\right) = \ln(b) - \ln(a^{-1}) = \ln(b) + \ln(a).$$

□

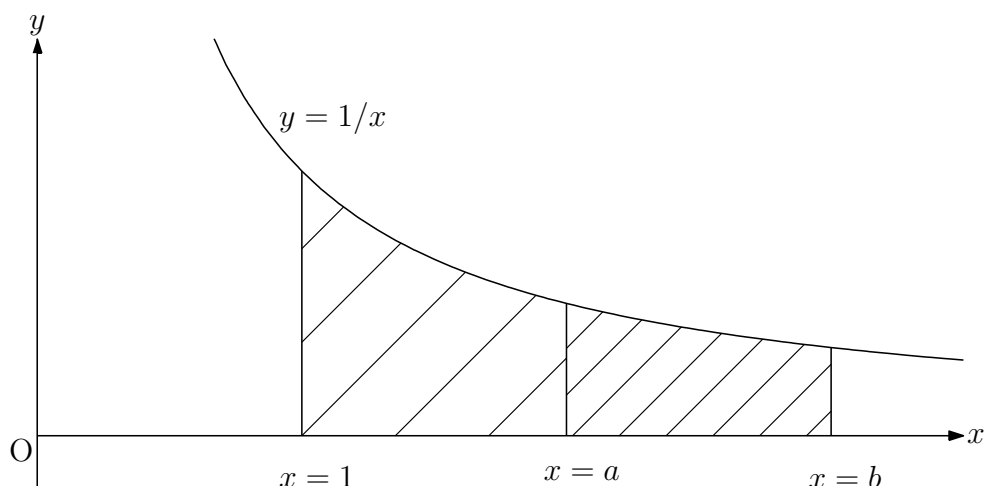


図 8: $S(1, a) + S(a, b) = S(1, b)$

系 4.4. a を正の実数, n を整数とすれば,

$$\ln(a^n) = n \ln(a).$$

[証明] $n = 1$ のときは自明. $\ln(a^{n-1}) = (n-1) \ln(a)$ とすれば,

$$\ln(a^n) = \ln(a^{n-1}a) = \ln(a^{n-1}) + \ln(a) = (n-1) \ln(a) + \ln(a) = n \ln(a).$$

帰納法によってすべての自然数 n に対して, $\ln(a^n) = n \ln(a)$ が成り立つ. $n = 0$ のときは, $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ より, この場合も成り立つ. $n < 0$ のときは,

$$\ln(a^n) = -\ln(a^{-n}) = -(-n) \ln(a) = n \ln(a). \quad \square$$

定義から $x_2 > x_1 > 0$ ならば, $\ln(x_2) > \ln(x_1)$ である. すなわち, $y = \ln(x)$ ($x > 0$) は単調増加関数である. $a > 1$ とすれば, 定義から $\ln(a) = S(1, a) > 0$ であり, 系 4.4 より, 任意の自然数 n に対して, $\ln(a^n) = n \ln(a)$ であるから, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\ln(a^n) \rightarrow \infty$ である. よって, $x \rightarrow \infty$ のとき, $\ln(x) \rightarrow \infty$ である.

この増加の仕方は, x のどんなべきよりも緩やかであることを示そう. $a > 1$ のとき, 領域 $D(1, a)$ は縦の長さ 1, 横の長さ $a - 1$ の長方形に含まれるから, その面積 $\ln(a) = S(1, a)$ は $a - 1$ 以下である.

$$\ln(a) \leq a - 1 \quad (a > 1).$$

$0 < a < 1$ のとき, 領域 $D(a, 1)$ は縦の長さ 1, 横の長さ $1 - a$ の長方形を含むから, その面積 $S(a, 1)$ は $1 - a$ 以上である. $\ln(a) = -S(a, 1)$ であるから,

$$\ln(a) = -S(a, 1) \leq -(1 - a) = a - 1$$

である. したがって, すべての $a > 0$ に対して, $\ln(a) \leq a - 1$ が成り立つ. よって,

$$\ln(x) \leq x - 1 < x \quad (x > 0). \quad (10)$$

これから，任意の $\epsilon > 0$ に対して，自然数 n を $\frac{1}{n} < \epsilon$ にとれば，

$$\ln(x) = \ln\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) = n \ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \leq nx^{\frac{1}{n}} \leq nx^\epsilon \quad (x \geq 1)$$

が成り立つ．また，(10) で， x を $1+x$ で置き換えれば，次の不等式が成り立つ．

$$\ln(1+x) \leq x \quad (x > -1). \quad (11)$$

定義 4.5. $a > 1$ とすれば，系 4.4 より， $\ln(a^n) = n \ln(a)$ であるから，自然数 n を大きくすれば， $\ln(a^n)$ はいくらでも大きくなる．また， $y = \ln(x)$ は単調に増加する．したがって， $\ln(e) = 1$ となる実数 e がただ 1 つ存在する．この e を自然対数の底とよぶ． $\ln(e) = 1 > \ln(1+1) = \ln(2)$ であるから， $e > 2$ である． $e = 2.718281\dots$ である．

4.3 $\ln(1-a)$ の級数展開

まず，等比級数の和の公式を示す． $|r| < 1$ のとき，系 2.2 より，

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{1}{1 - r} r^n.$$

$|r| < 1$ であるから， n を大きくすると， r^n は 0 に近づく．これを

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき， } r^n \rightarrow 0$$

とかく．したがって， $n \rightarrow \infty$ のとき， $1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} \rightarrow \frac{1}{1 - r}$ である．よって，次を得た．

命題 4.6.

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1 - r}.$$

$r = \frac{1}{2}$ のとき，

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

である．これは，図 9 によって，視覚的に理解することができる．

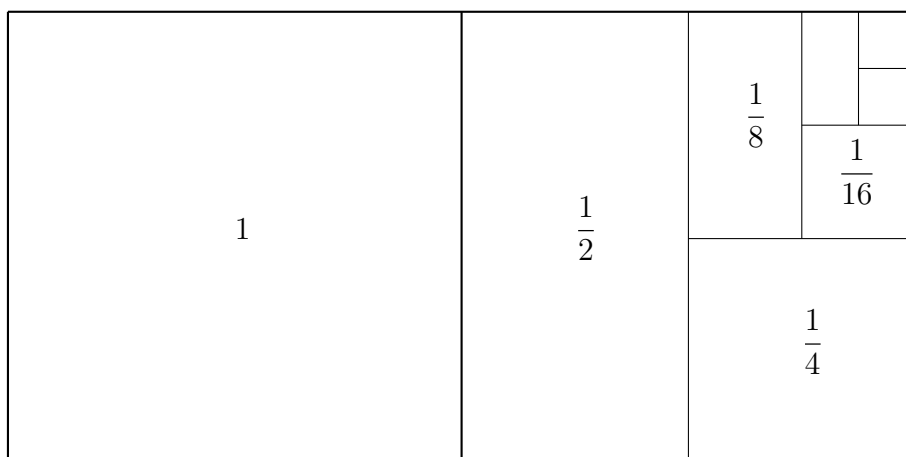


図 9: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$

命題 4.6 を用いて, $0 < a < 1$ に対して, $-\ln(1-a) = S(1-a, 1)$ の値を a の級数として求めよう. そのために, $0 < r < 1$ をとり, $x_n = 1 - ar^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおく.

$$x_0 = 1 - a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < 1$$

である. 図 10 より,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_{n+1}} (x_{n+1} - x_n) \leq S(1-a, 1) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n} (x_{n+1} - x_n). \quad (12)$$

$0 < ar^n < 1$ であるから, 命題 4.6 より,

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1 - ar^n} = 1 + (ar^n) + (ar^n)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (ar^n)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a^k r^{nk}, \quad (13)$$

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{1 - ar^{n+1}} = 1 + (ar^{n+1}) + (ar^{n+1})^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k r^{k(n+1)}. \quad (14)$$

(14), 命題 4.6 と

$$x_{n+1} - x_n = (1 - ar^{n+1}) - (1 - ar^n) = a(1 - r)r^n$$

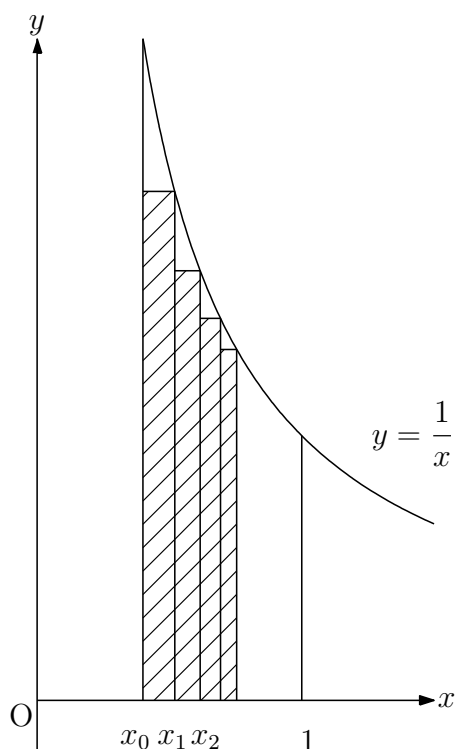


図 10: $-\ln(1-x)$ の級数展開

から

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_{n+1}} (x_{n+1} - x_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(1-r)r^n}{1-ar^{n+1}} \\
 &= a(1-r) \left[\frac{1}{1-ar} + \frac{r}{1-ar^2} + \frac{r^2}{1-ar^3} + \frac{r^3}{1-ar^4} + \dots \right] \\
 &= a(1-r) \left[(1+ar+a^2r^2+a^3r^3+\dots) + r(1+ar^2+a^2r^4+a^3r^6+\dots) \right. \\
 &\quad \left. + r^2(1+ar^3+a^2r^6+a^3r^9+\dots) + r^3(1+ar^4+a^2r^8+a^3r^{12}+\dots) \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right] \\
 &= a(1-r) \left[(1+ar+a^2r^2+a^3r^3+\dots) + (r+ar^3+a^2r^5+a^3r^7+\dots) \right. \\
 &\quad \left. + (r^2+ar^5+a^2r^8+a^3r^{11}+\dots) + (r^3+ar^7+a^2r^{11}+a^3r^{15}+\dots) \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right] \\
 &= a(1-r) \left[(1+r+r^2+r^3+\dots) + a(r+r^3+r^5+r^7+\dots) \right. \\
 &\quad \left. + a^2(r^2+r^5+r^8+r^{11}+\dots) + a^3(r^3+r^7+r^{11}+r^{15}+\dots) \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right] \\
 &= a(1-r) \left[\frac{1}{1-r} + \frac{ar}{1-r^2} + \frac{a^2r^2}{1-r^3} + \frac{a^3r^3}{1-r^4} + \dots \right] \\
 &= a \left[1 + \frac{ar}{1+r} + \frac{a^2r^2}{1+r+r^2} + \frac{a^3r^3}{1+r+r^2+r^3} + \dots \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}r^k}{1+r+\dots+r^k}.
 \end{aligned}$$

同様に, (13), 命題 4.6 より, (ここは省略)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n} (x_{n+1} - x_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(1-r)r^n}{1-ar^n} \\
&= a(1-r) \left[\frac{1}{1-a} + \frac{r}{1-ar} + \frac{r^2}{1-ar^2} + \frac{r^3}{1-ar^3} + \cdots \right] \\
&= a(1-r) [(1+a+a^2+a^3+\cdots) + r(1+ar+a^2r^2+a^3r^3+\cdots) \\
&\quad + r^2(1+ar^2+a^2r^4+a^3r^6+\cdots) + r^3(1+ar^3+a^2r^6+a^3r^9+\cdots) \\
&\quad + \cdots] \\
&= a(1-r) [(1+a+a^2+a^3+\cdots) + (r+ar^2+a^2r^3+a^3r^4+\cdots) \\
&\quad + (r^2+ar^4+a^2r^6+a^3r^8+\cdots) + (r^3+ar^6+a^2r^9+a^3r^{12}+\cdots) \\
&\quad + \cdots] \\
&= a(1-r) [(1+r+r^2+r^3+\cdots) + a(1+r^2+r^4+r^6+\cdots) \\
&\quad + a^2(1+r^3+r^6+r^9+\cdots) + a^3(1+r^4+r^8+r^{12}+\cdots) \\
&\quad + \cdots] \\
&= a(1-r) \left[\frac{1}{1-r} + \frac{a}{1-r^2} + \frac{a^2}{1-r^3} + \frac{a^3}{1-r^4} + \cdots \right] \\
&= a \left[1 + \frac{a}{1+r} + \frac{a^2}{1+r+r^2} + \frac{a^3}{1+r+r^2+r^3} + \cdots \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{1+r+\cdots+r^k}.
\end{aligned}$$

したがって, (12) は次のようになる.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}r^k}{1+r+\cdots+r^k} \leq S(1-a, 1) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{1+r+\cdots+r^k}. \quad (15)$$

ここで, $0 < r < 1$ であるから,

$$(k+1)r^k \leq 1+r+\cdots+r^k \leq k+1,$$

$$\frac{r^k}{1+r+\cdots+r^k} \leq \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{1+r+\cdots+r^k}.$$

よって, これに a^{k+1} をかけて, $k=0$ から ∞ までの和をとれば,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}r^k}{1+r+\cdots+r^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{k+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{1+r+\cdots+r^k}. \quad (16)$$

(16) の左側の級数を T_0 , 中央の級数を T_1 , 右側の級数を T_2 とすれば, $T_0 \leq T_1 \leq T_2$

より, $|T_0 - T_1| \leq T_2 - T_0$, $|T_2 - T_1| \leq T_2 - T_0$ である. $0 < a < 1$ であるから,

$$\begin{aligned} 0 \leq T_2 - T_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k+1}(1-r^k)}{1+r+\dots+r^k} = (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} a^{k+1} \frac{1+r+\dots+r^{k-1}}{1+r+\dots+r^k} \\ &\leq (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} a^{k+1} = (1-r) \frac{a^2}{1-a} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 1). \end{aligned}$$

したがって, $r \rightarrow 1$ のとき, $T_2 \rightarrow T_1$, $T_0 \rightarrow T_1$ であり, (16) の右側と左側の級数は T_1 に近づく. ゆえに, (15) において, $r \rightarrow 1$ とすれば,

$$S(1-a, 1) = T_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k}$$

を得る. 定義によって, $\ln(1-a) = -S(1-a, 1)$ であるから,

$$-\ln(1-a) = S(1-a, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k} \quad (0 < a < 1).$$

まとめると,

命題 4.7.

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \quad (0 < x < 1).$$

(以下省略)

系 4.8.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad (-1 < x < 1).$$

[証明] $x = 0$ のときは明らか. $0 < x < 1$ のとき, $(1+x)(1-x) = 1-x^2$, $0 < x^2 < 1$ であるから, 命題 4.7 より,

$$\begin{aligned} -\ln(1-x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k}, \\ -\ln(1-x^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k}. \end{aligned}$$

$\ln(1 - x^2) = \ln((1 - x)(1 + x)) = \ln(1 - x) + \ln(1 + x)$ より ,

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) &= \ln(1 - x^2) - \ln(1 - x) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}. \end{aligned}$$

$-1 < x < 0$ ならば , $x = -|x|$ であるから , 命題 4.7 より ,

$$\ln(1 + x) = \ln(1 - |x|) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

□

1792 年に 15 才のガウスは

$$\frac{x}{\pi(x)} \sim \ln(x)$$

であると予想した . この予想は約 100 年後の 1895 年にアダマールとプーサンによって独立に証明され , 素数定理と呼ばれている .

5 素数の逆数の和

素数を大きさの順に並べて , p_1, p_2, \dots とかく ($p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$) . 自然数 $n \geq 2$ に対して , n 以下の素数の個数を m とする . そのとき , $p_m \leq n < p_{m+1}$ である . $P(n)$ によって , n 以下の素数の逆数の和

$$P(n) = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m}$$

を表す . $P(n)$ はどんな大きさだろうか . $n \rightarrow \infty$ のとき , $P(n) \rightarrow \infty$ だろうか . これを調べるために , $T(n)$ によって次のような積を表す .

$$T(n) = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_m^2} + \dots\right).$$

この積を展開すれば ,

$$T(n) = \sum_{r_1, \dots, r_m=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{r_1} \dots p_m^{r_m}} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H(n). \quad (17)$$

ここで、 n 以下の任意の自然数は $p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m}$ の形に表せることを用いた。一方、命題 4.6 から、

$$1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} = \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)^{-1}.$$

したがって、

$$T(n) = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right)^{-1} \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)^{-1}$$

である。命題 4.3 より、

$$\begin{aligned} \ln(T(n)) &= \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}\right) + \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)^{-1}\right) + \cdots + \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_m}\right)^{-1}\right) \\ &= -\ln\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) - \cdots - \ln\left(1 - \frac{1}{p_m}\right) \\ &= \sum_{j=1}^m -\ln\left(1 - \frac{1}{p_j}\right). \end{aligned}$$

ここで、命題 4.7 を用いれば、

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{p_j}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{p_j}\right)^k = \frac{1}{p_j} + \frac{1}{2p_j^2} + \frac{1}{3p_j^3} + \cdots$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_j} &< -\ln\left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \\ &= \frac{1}{p_j} + \frac{1}{2p_j^2} + \frac{1}{3p_j^3} + \cdots \\ &< \frac{1}{p_j} + \frac{1}{2p_j^2} + \frac{1}{2p_j^3} + \frac{1}{2p_j^4} \cdots \\ &= \frac{1}{p_j} + \frac{1}{2p_j^2} \left(1 + \left(\frac{1}{p_j}\right) + \left(\frac{1}{p_j}\right)^2 + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{p_j} + \frac{1}{2p_j^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} = \frac{1}{p_j} + \frac{1}{2p_j(p_j - 1)}. \end{aligned}$$

これを $j = 1$ から $j = m$ まで加えれば,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} &< -\ln\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) - \cdots - \ln\left(1 - \frac{1}{p_m}\right) \\
 &< \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{p_1(p_1 - 1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{p_2(p_2 - 1)} + \cdots + \frac{1}{2} \frac{1}{p_m(p_m - 1)} \\
 &< \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \frac{1}{k(k-1)} \\
 &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\
 &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\
 &< \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

すなわち,

$$P(n) < \ln(T(n)) < P(n) + \frac{1}{2}. \quad (18)$$

(18), (17) と (3) から,

$$P(n) > \ln(T(n)) - \frac{1}{2} > \ln(H(n)) - \frac{1}{2} > \ln(S(1, n)) - \frac{1}{2} = \ln(\ln(n)) - \frac{1}{2}$$

を得る. 以上によって, 次を得た.

命題 5.1. n 以下の素数の逆数の和 $P(n)$ に対して,

$$P(n) > \ln(\ln(n)) - \frac{1}{2} \quad (n \geq 2)$$

が成り立つ. 特に, $n \rightarrow \infty$ のとき, $P(n) \rightarrow \infty$ である.

$P(n)$ の上からの評価は後で行う.

6 素数の個数の評価

n を大きくしていくとき, $\pi(n)$ はどうなるか? 初等的に $\pi(n)$ を評価しよう. そのために, 2項係数についてのいくつかの性質を用いる.

まず, 自然数 n に対して, 1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す. $n!$ を n の階乗と呼ぶ. $n!$ を素因数分解してみよう. 素数 p が $n!$ を割り切るならば, $p \leq n$ であり, 逆に, $p \leq n$ ならば, p は $n!$ を割り切る. p を $p \leq n$ なる素数とする. $n!$ が p^a で丁度割り切れるとする. そのような a を $a = e(p, n)$ とかく. $e(p, n)$ を求めるために, ガウス記号を定義する.

定義 6.1. 実数 x に対して, x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す.

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

補題 6.2. 任意の実数 x, y に対して,

$$[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1.$$

[証明] $x = [x] + x_1, y = [y] + y_1, 0 \leq x_1 < 1, 0 \leq y_1 < 1$ とかける. そのとき,

$$[x] + [y] \leq [x] + [y] + x_1 + y_1 = x + y < [x] + [y] + 2$$

であるから, $0 \leq x_1 + y_1 < 1$ ならば, $[x + y] = [x] + [y]$ であり, $1 \leq x_1 + y_1 < 2$ ならば, $[x + y] = [x] + [y] + 1$ である. \square

補題 6.3. $n!$ の素因数分解を $n! = \prod_{p \leq n} p^{e(p,n)}$ とすれば,

$$e(p, n) = \sum_{r=1}^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right]} \left[\frac{n}{p^r} \right] = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^r} \right].$$

[証明]

$$\begin{aligned} e(p, n) &= \sum_{\substack{r \geq 1 \\ p^r \leq n}} r \# \{ 1 \leq a \leq n \mid a \text{ は丁度 } p^r \text{ で割りきれ} \} \\ &= \sum_{r=1}^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right]} r \left(\left[\frac{n}{p^r} \right] - \left[\frac{n}{p^{r+1}} \right] \right) = \sum_{r=1}^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right]} r \left[\frac{n}{p^r} \right] - \sum_{r=1}^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right]-1} r \left[\frac{n}{p^{r+1}} \right] \\ &= \sum_{r=1}^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right]} r \left[\frac{n}{p^r} \right] - \sum_{r=1}^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right]} (r-1) \left[\frac{n}{p^r} \right] = \sum_{r=1}^{\left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right]} \left[\frac{n}{p^r} \right]. \end{aligned}$$

\square

次に, 整数 $1 \leq k \leq n$ に対して, 2項係数 $\binom{n}{k}$ を

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

によって定義する. また, $\binom{n}{0} = 1$ とする.

補題 6.4. 2項係数 $\binom{n}{k}$ ($0 \leq k \leq n$) は整数である.

[証明] 補題 6.3 と補題 6.2 より,

$$\begin{aligned} e(p, k) + e(p, n - k) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{k}{p^r} \right] + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n - k}{p^r} \right] = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\left[\frac{k}{p^r} \right] + \left[\frac{n - k}{p^r} \right] \right) \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{k}{p^r} + \frac{n - k}{p^r} \right] = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^r} \right] = e(p, n). \end{aligned}$$

したがって, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ は各 p について, 分子の方が分母よりも p の高いべきで割り切れるから, これは整数である. \square

自然数 n に対して,

$$b_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

とおく. まず, b_n の大きさについて, 次が成り立つ.

補題 6.5. $b_n \geq \frac{2^{2n}}{2n-1} \quad (n \geq 2).$

[証明] 帰納法による. $n = 2$ のとき, $b_2 = 6 > \frac{2^4}{3}$ である. $n \geq 2$ のとき, 補題の不等式が成り立つとする. そのとき,

$$b_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)} b_n$$

であるから, 帰納法の仮定によって,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{2(2n+1)}{(n+1)} b_n > \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \cdot \frac{2^{2n}}{2n-1} \\ &= \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n-1)} \cdot \frac{2^{2n+2}}{2n+1} = \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 2n - 2} \cdot \frac{2^{2n+2}}{2n+1} \\ &> \frac{2^{2n+2}}{2n+1} = \frac{2^{2(n+1)}}{2(n+1)-1}. \end{aligned}$$

したがって, $n+1$ に対しても主張は正しい. 帰納法によって 2 以上のすべての自然数 n に対して補題の不等式が成り立つ. \square

補題 6.6. $b_n \leq (2n)^{\pi(2n)}$

[証明] $b_n = (2n)!/(n!)^2$ であるから, 補題 6.3 より,

$$b_n = \prod_{p \leq 2n} p^{e(p, 2n) - 2e(p, n)},$$

$$e(p, 2n) - 2e(p, n) = \sum_{r=1}^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right]} \left[\frac{2n}{p^r} \right] - 2 \sum_{r=1}^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right]} \left[\frac{n}{p^r} \right] = \sum_{r=1}^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right]} \left(\left[\frac{2n}{p^r} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^r} \right] \right).$$

補題 6.2 より,

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq 1$$

であるから,

$$e(p, 2n) - 2e(p, n) \leq \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor} 1 = \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor.$$

したがって,

$$\begin{aligned} \ln(b_n) &= \sum_{p \leq 2n} (e(p, 2n) - 2e(p, n)) \ln(p) \leq \sum_{p \leq 2n} \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor \ln(p) \\ &\leq \sum_{p \leq 2n} \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \cdot \ln(p) = \sum_{p \leq 2n} \ln(2n) = \pi(2n) \ln(2n) \\ &= \ln((2n)^{\pi(2n)}). \end{aligned}$$

ゆえに, $b_n \leq (2n)^{\pi(2n)}$ である. □

$n \geq 2$ とする. 補題 6.5, 補題 6.6 より,

$$\frac{2^{2n}}{2n} < \frac{2^{2n}}{2n-1} \leq b_n \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} 2n \ln(2) - \ln(2n) &\leq \pi(2n) \ln(2n), \\ \pi(2n) &\geq \ln(2) \frac{2n}{\ln(2n)} - 1. \end{aligned}$$

$n \geq 2$ より, $2n$ は素数でないから, $\pi(2n) = \pi(2n-1)$ である. したがって,

$$\begin{aligned} \pi(2n-1) &= \pi(2n) \geq \ln(2) \frac{2n}{\ln(2n)} - 1 \\ &= \ln(2) \frac{(2n-1)}{\ln(2n-1)} \cdot \frac{2n \ln(2n-1)}{(2n-1) \ln(2n)} - 1. \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} 2n \ln(2n-1) - (2n-1) \ln(2n) &= \ln(2n-1) - (2n-1)(\ln(2n) - \ln(2n-1)) \\ &= \ln(2n-1) - (2n-1) \ln \left(\frac{2n}{2n-1} \right) \\ &= \ln(2n-1) - (2n-1) \ln \left(1 + \frac{1}{2n-1} \right). \end{aligned}$$

(11) より, $\ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \leq \frac{1}{2n-1}$ であるから,

$$\begin{aligned} 2n \ln(2n-1) - (2n-1) \ln(2n) &\geq \ln(2n-1) - (2n-1) \cdot \frac{1}{2n-1} \\ &= \ln(2n-1) - 1 \\ &\geq \ln(3) - 1 > 0. \end{aligned}$$

よって, $2n \ln(2n-1) > (2n-1) \ln(2n)$, $\frac{2n \ln(2n-1)}{(2n-1) \ln(2n)} > 1$ である. したがって,

$$\pi(2n-1) \geq \ln(2) \frac{(2n-1)}{\ln(2n-1)} - 1.$$

これから, $n \geq 3$ に対して,

$$\pi(n) \geq \ln(2) \frac{n}{\ln(n)} - 1. \quad (19)$$

これは $n = 2$ のときも成り立つ.

今度は, $\pi(n)$ の上からの評価を求めよう.

$$c_n = \binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}$$

とおく. c_n の大きさについて次が成り立つ.

補題 6.7. $c_n < 2^{2n}$ ($n \geq 1$).

[証明] $n = 1$ のとき, $c_1 = 3 < 2^2$ である. $n \geq 1$ のとき, 補題の不等式が成り立つとする. そのとき,

$$c_{n+1} = \frac{(2n+3)!}{(n+2)!(n+1)!} = \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(n+2)(n+1)(n+1)!} = \frac{2(2n+3)}{n+2} c_n$$

であるから, 帰納法の仮定によって,

$$c_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+2} c_n < \frac{2(2n+3)}{n+2} 2^{2n} = \frac{2n+3}{2n+4} 2^{2n+2} < 2^{2n+2} = 2^{2(n+1)}.$$

したがって, $n+1$ に対しても主張は正しい. 帰納法によってすべての自然数 n に対して補題の不等式が成り立つ. \square

補題 6.8. $c_n \geq \prod_{n+1 < p \leq 2n+1} p$.

[証明]

$$c_n = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{(2n+1)(2n)\cdots(n+2)(n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{(2n+1)(2n)\cdots(n+2)}{n!}$$

であるから, p が $n+1 < p \leq 2n+1$ を満たす素数ならば, c_n は p で割り切れる. したがって, $c_n \geq \prod_{n+1 < p \leq 2n+1} p$ である. \square

補題 6.7, 補題 6.8 から, 任意の自然数 n に対して,

$$\prod_{n+1 < p \leq 2n+1} p \leq c_n < 2^{2n}.$$

したがって,

$$\sum_{n+1 < p \leq 2n+1} \ln(p) < 2n \ln(2).$$

そこで, 実数 $x \geq 1$ に対して,

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p)$$

とおけば, 任意の自然数 n に対して,

$$\theta(2n+1) - \theta(n+1) < 2n \ln(2). \quad (20)$$

が成り立つ.

命題 6.9.

$$\theta(n) < 2n \ln(2) \quad (n \geq 1).$$

[証明] $\theta(1) = 0 < 2 \ln(2)$, $\theta(2) = \ln(2) < 4 \ln(2)$ であるから, $n = 1, 2$ のときは命題の不等式は成り立つ. $m \geq 1$ として, $n \leq 2m$ に対して, 命題の不等式が成り立つとする. そのとき, (20) と帰納法の仮定から,

$$\begin{aligned} \theta(2m+1) &< \theta(m+1) + 2m \ln(2) < 2(m+1) \ln(2) + 2m \ln(2) \\ &= 2(2m+1) \ln(2). \end{aligned}$$

よって, $n = 2m+1$ のときも, 命題の不等式は成り立つ. さらに, $n = 2m+2$ のときは, n は素数でないから,

$$\theta(2m+2) = \theta(2m+1) < 2(2m+1) \ln(2) < 2(2m+2) \ln(2)$$

であり, $n = 2m+2$ のときも, 命題の不等式は成り立つ. 帰納法によって, すべての自然数 n に対して, 命題の不等式は成り立つ. \square

系 6.10.

$$\theta(x) < 2x \ln(2) \quad (x \geq 1).$$

[証明] 命題 6.9 より,

$$\theta(x) = \theta([x]) < 2[x] \ln(2) \leq 2x \ln(2).$$

□

これを用いて, $\pi(x)$ の上からの評価を導こう.

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \sum_{p \leq x} \ln(p) = \sum_{p \leq x^{3/4}} \ln(p) + \sum_{x^{3/4} < p \leq x} \ln(p) \\ &\geq \sum_{p \leq x^{3/4}} \ln(2) + \sum_{x^{3/4} < p \leq x} \ln(x^{3/4}) \\ &= \ln(2)\pi(x^{3/4}) + \frac{3}{4} \ln(x)(\pi(x) - \pi(x^{3/4})) \\ &= \frac{3}{4} \pi(x) \ln(x) - \frac{3}{4} \left(\ln(x) - \frac{4}{3} \ln(2) \right) \pi(x^{3/4}).\end{aligned}$$

したがって, 系 6.10 より, $x \geq 4$ に対して,

$$\begin{aligned}\pi(x) \ln(x) &\leq \frac{4}{3} \theta(x) + \left(\ln(x) - \frac{4}{3} \ln(2) \right) \pi(x^{3/4}) \\ &< \frac{8 \ln(2)}{3} x + \left(\ln(x) - \frac{4}{3} \ln(2) \right) \pi(x^{3/4}) \\ &\leq \frac{8 \ln(2)}{3} x + \left(\ln(x) - \frac{4}{3} \ln(2) \right) x^{3/4}, \\ \pi(x) \frac{\ln(x)}{x} &\leq \frac{8 \ln(2)}{3} + \left(\ln(x) - \frac{4}{3} \ln(2) \right) x^{-1/4} \\ &< \frac{8 \ln(2)}{3} + \frac{\ln(x)}{x^{1/4}} = \frac{8 \ln(2)}{3} + \frac{4 \ln(x^{1/4})}{x^{1/4}} < \frac{8 \ln(2)}{3} + \frac{4}{e} < 3.3199 \dots\end{aligned}$$

よって, すべての実数 $x \geq 4$ に対して,

$$\pi(x) \leq \frac{3.32x}{\ln(x)}$$

が成り立つ. $2 \leq x \leq 4$ のとき,

$$\frac{3.32x}{\ln(x)} \geq \frac{3.32x}{\ln(4)} \geq \frac{3.32}{\ln(2)} \geq 3 > \pi(4) \geq \pi(x)$$

であるから, すべての $x \geq 2$ に対して,

$$\pi(x) \leq \frac{3.32x}{\ln(x)}$$

が成り立つ. 以上によって, 次を得た.

命題 6.11. すべての自然数 $n \geq 2$ に対して,

$$\ln(2) \frac{n}{\ln(n)} - 1 \leq \pi(n) \leq 3.32 \frac{n}{\ln(n)} \quad (n \geq 2).$$

が成り立つ.

次の素数定理は, ガウスによって予想され, プーサンとアダマールによって 1896 年に証明された.

定理 6.12 (素数定理).

$$\frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty).$$

n 以下の素数の逆数の和 $P(n)$ の上からの評価を命題 6.11 を用いて求めよう.

$x_k = \ln(k)$ ($k = 2, \dots, n$) とおく. 平面の領域

$$D(x_{k-1}, x_k) = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x}, x_{k-1} \leq x \leq x_k \right\}$$

の面積を $S(x_{k-1}, x_k)$ とすると,

$$\sum_{k=3}^n S(x_{k-1}, x_k) = S(x_2, x_n) = S\left(1, \frac{x_n}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{x_n}{x_2}\right) = \ln(x_n) - \ln(x_2)$$

であった. 縦が $1/x_k$, 横 $x_k - x_{k-1}$ の長方形の面積と比べれば,

$$S(x_{k-1}, x_k) > \frac{1}{x_k} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

である. したがって,

$$\sum_{k=3}^n \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} < \sum_{k=3}^n S(x_{k-1}, x_k) = \ln(x_n) - \ln(x_2) = \ln \ln(n) - \ln \ln(2). \quad (21)$$

$x_k = \ln(k)$ であるから, $k \geq 3$ に対して, 命題 4.7 より,

$$\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= \ln(k) - \ln(k-1) = -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mk^m} > \frac{1}{k}, \\ \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} &> \frac{1}{k \ln(k)}. \end{aligned}$$

これと (21) から ,

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln(k)} < \ln \ln(n) - \ln \ln(2). \quad (22)$$

一方 , 自然数 k に対して ,

$$c_k = \begin{cases} 1, & k \text{ が素数のとき ,} \\ 0, & k \text{ が素数でないとき} \end{cases}$$

とおけば ,

$$\pi(n) = \sum_{k=2}^n c_k, \quad P(n) = \sum_{k=2}^n \frac{c_k}{k}$$

である . $c_k = \pi(k) - \pi(k-1)$ であるから , 命題 6.11 より , $a = 3.32$ とおけば ,

$$\begin{aligned} P(n) &= \sum_{k=2}^n \frac{c_k}{k} = \sum_{k=2}^n \frac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{\pi(k)}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{\pi(k-1)}{k} = \sum_{k=2}^n \frac{\pi(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k+1} \\ &= \frac{\pi(n)}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \pi(k) \\ &\leq \frac{an}{n \ln(n)} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \cdot \frac{ak}{\ln(k)} \\ &= \frac{a}{\ln(n)} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a}{(k+1) \ln(k)} < \frac{a}{\ln(n)} + \sum_{k=2}^n \frac{a}{(k+1) \ln(k)} \\ &< \frac{a}{\ln(n)} + \sum_{k=2}^n \frac{a}{k \ln(k)}. \end{aligned}$$

したがって , (22) より ,

$$\begin{aligned} P(n) &< \frac{a}{\ln(n)} + \sum_{k=2}^n \frac{a}{k \ln(k)} = \frac{a}{\ln(n)} + \frac{a}{2 \ln(2)} + \sum_{k=3}^n \frac{a}{k \ln(k)} \\ &< \frac{a}{\ln(n)} + \frac{a}{2 \ln(2)} + a \ln \ln(n) - a \ln \ln(2). \end{aligned}$$

$n \geq 8$ ならば ,

$$\frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{2 \ln(2)} - \ln \ln(2) \leq \frac{1}{3 \ln(2)} + \frac{1}{\ln(2)} - \ln \ln(2) = 2.29 \dots < 3.13 \ln \ln(8),$$

$$P(n) < a \ln(\ln(n)) + 3.13a \ln(\ln(8)) \leq 4.13a \ln(\ln(n)) < 14 \ln(\ln(n)) \quad (n \geq 8)$$

よって , 次を得た .

命題 6.13.

$$P(n) < 14 \ln(\ln(n)) \quad (n \geq 8).$$

これは $n \geq 3$ で成り立つ .