平成 26 年度　上越教育大学公開講座

エッシャーの数学

日時：9 月 5 日 (金)，9 月 12 日 (金)，9 月 19 日 (金)，9 月 26 日 (金)，10 月 3 日 (金)
19:00〜21:00
場所：上越教育大学　人 101 教室

目次

1 **平面のタイル張り** 2

2 **ユークリッド平面** 9

3 **複素平面** 14

4 **1 次分数変換** 15

5 **ポアンカレ円板** 22

6 **三角法** 30

7 **平行と超平行** 37

8 **多角形の面積** 39

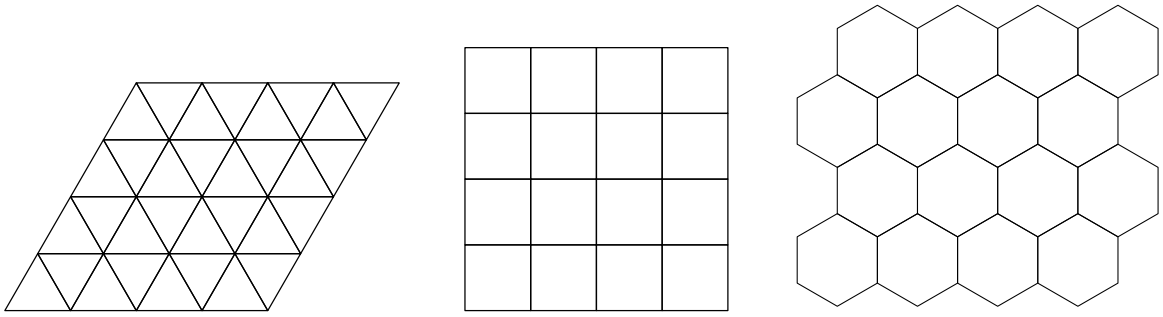
9 **双曲平面のタイル張り** 40

はじめに

オランダの画家（版画家）M. C. エッシャーの作品「円の極限 IV（天国と地獄)」(1960 年) は、無限を有限のなかに閉じ込めたものとして有名である．悪魔と天使によって円が無限に分割されているこの作品を知っている方は多いと思う．その制作には，双曲幾何学という非ユークリッド幾何学が用いられている．いくつも描かれている悪魔，天使はそれぞれ双曲幾何学の意味ですべて「合同」である．本公開講座では，ポアンカレ円板モデルを用いて，双曲幾何学の基礎から双曲タイル張りに関する基本定理まで解説する．

この講座を準備するにあたり，深谷賢治氏の著書 [1] を主に参考にした．

1　平面のタイル張り



$k = 3$　　$k = 4$　　$k = 6$

図 1　正 3 角形, 正 4 角形, 正 6 角形によるタイル張り

図 1 のように正 3 角形，正 4 角形 (正方形), 正 6 角形のタイルによって平面全体を敷き詰める (タイル張りする) ことができる．

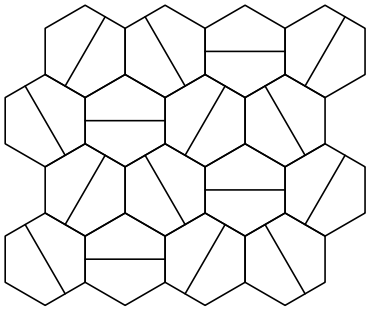
定理 1.1. 正多角形による平面のタイル張りは上の 3 種類だけである．

[証明]　正 n 角形によるタイル張りがあるとする．正 n 角形の内角の和は $180^\circ \times (n-2)$ だから，正 n 角形の 1 つの内角は $\dfrac{180^\circ \times (n-2)}{n}$ である．したがって，1 つの頂点のまわりに q 個の正 n 角形がおかれるとすると

$$180\frac{n-2}{n}q = 360, \qquad \frac{1}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}.$$

$(n-2)(q-2) = 4$, $(n, q) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$ である．　□

正多角形とは限らない凸な (へこんでいない)k 角形によるタイル張りを考えればどうなるだろうか.



$k = 5$

図 2　5 角形によるタイル張り

定理 1.2. k を 3 以上の自然数とする．このとき，凸な k 角形からなるタイル張りが存在するためには，$k \leq 6$ であることが必要用十分である.

[証明]　十分であること．$k = 3, 4, 6$ のときは図 1 で示した．$k = 5$ のときは図 2 で示した.

必要であること．2 点 A, B の距離を $d(A, B)$ で表す．凸な k 角形からなるタイル張りが存在するとする．平面上に 1 点 O をとり，O からの距離が R 以下の点の集合を $D(R)$ とする.

$$D(R) = \{x : d(O, x) \leq R\}.$$

$D(R)$ と交わるタイルを $P_1, \ldots, P_N$ とする．タイルの直径 (タイル上の 2 点間の距離の最大値) を r とする．このとき，$i = 1, \ldots, N$ について $P_i \subset D(R + 2r)$ である．実際，$P_i \cap D(R) \neq \emptyset$ だから，$x \in P_i \cap D(R)$ がとれる．任意の $y \in P_i$ をとると，$d(y, x) \leq r$ だから $d(O, y) \leq d(O, x) + d(x, y) \leq R + r < R + 2r$ であり，$y \in D(R+2r)$, $P_i \subset D(R + 2r)$ である.

$D(R + 2r)$ に含まれるタイルで $P_1, \ldots, P_N$ 以外のものを $P_{N+1}, \ldots, P_{N+M}$ とする．$P_1, \ldots, P_N$ のどれかの頂点であるような点の数を n_0，$P_1, \ldots, P_N$ のどれかの辺であるような辺の数を n_1 とする．後で証明するオイラーの定理 (定理 1.3) により

$$N - n_1 + n_0 = 1. \tag{1.1}$$

n_1 個の辺のうち，$P_1 \cup \cdots \cup P_N$ の境界上にある辺の数を m とする．$P_1 \cup \cdots \cup P_N$ の境界上にある辺に対して，それを含むタイルは必ず $D(R + 2r)$ に含まれる．実際，そのよ

うなタイルを P_i とすると，境界上にある辺上の点 $x \in P_i$ と $y \in P_i \cap D(R)$ が存在して，$d(y,x) \leq r$ である．このとき，任意の $z \in P_i$ に対して，

$$d(O,z) \leq d(O,y) + d(y,x) + d(x,z) \leq R + r + r = R + 2r.$$

よって，$z \in D(R+2r)$, $P_i \subset D(R+2r)$ である．したがって，

$$m \leq kM. \tag{1.2}$$

$P_1 \cup \cdots \cup P_N$ の辺で $P_1 \cup \cdots \cup P_N$ の境界上にない $n_1 - m$ 個の辺に対しては，それを辺とするタイルが $P_1, \ldots, P_N$ のうち 2 つある．一方，各々のタイルの辺の数は k である．よって，

$$2(n_1 - m) + m = kN. \tag{1.3}$$

$P_1 \cup \cdots \cup P_N$ の境界上にある頂点は m 個だから $P_1 \cup \cdots \cup P_N$ の境界上にない頂点は $n_0 - m$ である．この $n_0 - m$ 個の頂点に対しては，それを含む $P_1 \cup \cdots \cup P_N$ の辺が 3 個以上ある (タイルが凸タイルの 1 つの内角は π よりも小さいのでそのような頂点を含む辺は 3 個以上ある)．また，各辺は 2 つの頂点を持つ．よって，

$$3(n_0 - m) \leq 2n_1. \tag{1.4}$$

(1.1) と (1.4) より

$$1 + n_1 - N = n_0 \leq m + \frac{2n_1}{3}. \tag{1.5}$$

(1.3) より

$$n_1 = \frac{kN + m}{2}. \tag{1.6}$$

(1.5) と (1.6) より

$$\begin{aligned} 1 + \frac{kN+m}{2} - N &\leq m + \frac{kN+m}{3}, \\ \frac{kN}{6} - N &\leq \frac{5m}{6} - 1, \\ (k-6)N &\leq 5m - 6. \end{aligned} \tag{1.7}$$

タイルの面積を A とする．$P_1 \cup \cdots \cup P_N \supset D(R)$ より

$$AN \geq \pi R^2. \tag{1.8}$$

$P_{N+1}, \ldots, P_{N+M}$ は $D(R+2r) \setminus D(R)$ に含まれるから

$$AM \leq \pi((R+2r)^2 - R^2). \tag{1.9}$$

(1.8) と (1.9) より

$$\frac{M}{N} \leq \frac{(R+2r)^2 - R^2}{R^2} = \frac{4rR + 4r^2}{R^2}. \tag{1.10}$$

したがって，(1.7), (1.2), (1.10) より

$$k - 6 \leq \frac{5m-6}{N} \leq \frac{5m}{N} \leq \frac{5kM}{N} \leq 5k\frac{4rR+4r^2}{R^2} \to 0 \quad (R \to \infty).$$

ゆえに，$k \leq 6$ である． □

定理 1.3. 多角形 P が n_2 個の多角形 $P_1, \ldots, P_{n_2}$ の和に分割されているとする．どれかの P_i の辺になっている線分の個数を n_1，どれかの P_i の頂点になっている点の数を n_0 とする．このとき，

$$n_2 - n_1 + n_0 = 1$$

が成り立つ．

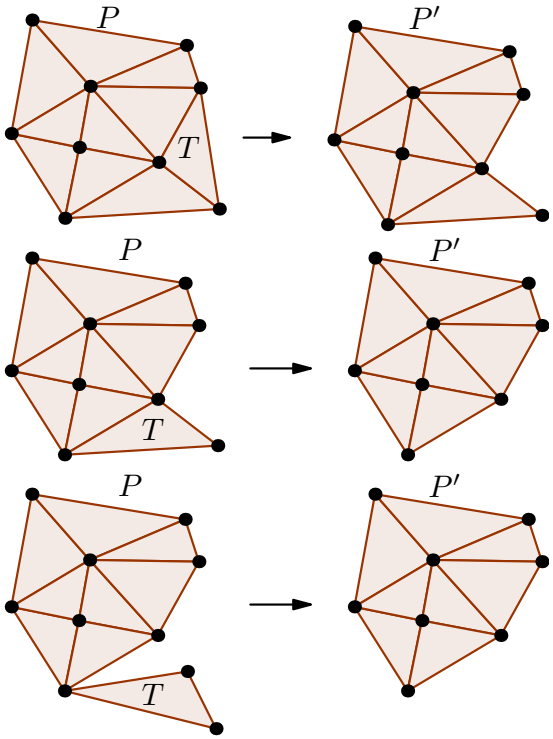


図 3　境界に辺がある三角形を 1 つ取り除く

[証明]　どれかの P_i が 4 角形以上であれば，その P_i を 2 つに分割する．そのとき，n_2 と n_1 は 1 増え n_0 は変わらないから，定理の左辺は不変である．この操作を繰り返せば，

すべての P_i は三角形になる．以下，すべての P_i が三角形の場合を考える．三角形の数に関する帰納法で証明する．三角形が 1 個の場合は明らかである．三角形が $n_2 - 1$ 個の場合までは定理の等式が成り立つとして，n_2 個の場合を考える．P に含まれる三角形のうち，少なくとも 1 辺が P の境界であるような三角形 T をとる．P から T を除いた多角形を P' とする．

T のちょうど 1 辺が P の境界であるときは, $n_2(P') = n_2(P) - 1$ と $n_1(P') = n_1(P) - 1$, $n_0(P') = n_0(P)$ である (図 3 の上).

T のちょうど 2 辺が P の境界であるときは, $n_2(P') = n_2(P) - 1$ と $n_1(P') = n_1(P) - 2$, $n_0(P') = n_0(P) - 1$ である (図 3 の中).

T の 3 辺が P の境界であるときは，$n_2(P') = n_2(P) - 1$ と $n_1(P') = n_1(P) - 3$, $n_0(P') = n_0(P) - 2$ である (図 3 の下).

よって，いずれの場合も

$$n_2(P') - n_1(P') + n_0(P') = n_2(P) - n_1(P) + n_0(P)$$

が成り立つ．帰納法の仮定より左辺は 1 だから，$n_2(P) - n_1(P) + n_0(P) = 1$. □

定理 1.4 (オイラー)**.** 凸多面体 P の面の数を f，辺の数を e，頂点の数を v とすると，

$$f - e + v = 2$$

が成り立つ.

[証明]　考えている多面体から 1 つの面を切り取る．切り取ったあとの図形の面の数，辺の数，頂点の数をそれぞれ，n_2, n_1, n_0 とすれば，$n_2 = f - 1, n_1 = e, n_0 = v$ である．この切り取ったあとの図形を辺のところをハサミで切って展開していく．1 つの辺にハサミを入れたとき，1 つの辺は 2 つの辺になり，辺の数 n_1 は 1 増える．また切れ目を入れて離れた頂点は，もともと 1 つの頂点が 2 つになるから頂点の数 n_0 は 1 増える．面の数 n_2 は変わらない．よって，$n_2 - n_1 + n_0$ の値は変わらない．この操作を何回か繰り返せば，平面上の多角形を得る．この多角形に定理 1.3 を適用すれば,

$$n_2 - n_1 + n_0 = 1.$$

これに，$n_2 = f - 1, n_1 = e, n_0 = v$ を代入すれば,

$$f - 1 - e + v = 1, \quad f - e + v = 2.$$

□

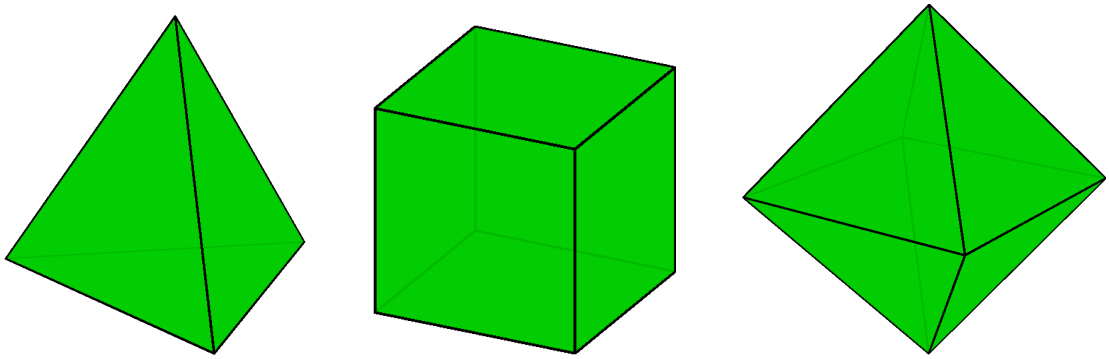


図 4　正 4 面体，正 6 面体，正 8 面体

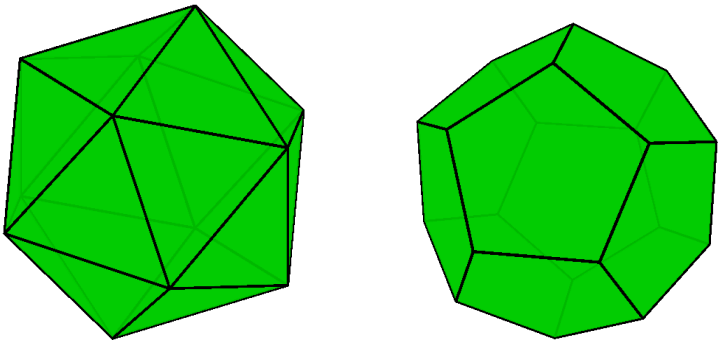


図 5　正 20 面体，正 12 面体

定理 1.5. 正多面体は正 4 面体，正 6 面体，正 8 面体，正 6 面体，正 12 面体，正 20 面体の 5 種類しかない．

[証明]　正多面体 P の面の数を f，辺の数を e，頂点の数を v とし，1 つの面が正 n 角形であるとする．各面に対して，その各辺に反時計回りの矢印を付ける．そのとき，1 つの辺を共有する隣り合う面において，共有する辺には逆向きの矢印が付けられる．各面は n 個の辺をもつから矢印の総数は

$$fn = 2e. \tag{1.11}$$

また，各頂点を始点とする矢印はある一定の数 q だから矢印の総数は

$$2e = vq. \tag{1.12}$$

(1.11), (1.12) より $f = \dfrac{2e}{n}$, $v = \dfrac{2e}{q}$ とかける．これを定理 1.4 の等式

$$f - e + v = 2$$

に代入して，

$$\frac{2e}{n} - e + \frac{2e}{q} = 2, \qquad \frac{1}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2}.$$

$0 < \dfrac{1}{e} \leq \dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{q} \leq 1,$$
$$nq - 2n - 2q < 0, \quad nq - n - q \geq 0,$$
$$(n-2)(q-2) < 4, \quad (n-1)(q-1) \geq 1.$$

$n \geq 3$ だから，$q \geq 2$ である．もし，$q = 2$ とすると，$n = e$, $f = 2$ となるが，これは不可能である．よって，$q \geq 3$ であり，$(n-2)(q-2) < 4$ を満たす (n, q) は $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$, $(5,3)$ の 5 通りだけである．

$$e = \frac{2}{\dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{q} - 1} = \frac{2nq}{2n + 2q - nq} = \frac{2nq}{4 - (n-2)(q-2)},$$
$$f = \frac{2e}{n} = \frac{4q}{4 - (n-2)(q-2)},$$
$$v = \frac{2e}{q} = \frac{4n}{4 - (n-2)(q-2)}$$

より，これらの (n, q) について (f, e, v) はそれぞれ，

$$(4,6,4), \quad (8,12,6), \quad (20,30,12), \quad (6,12,8), \quad (12,30,20)$$

である．ゆえに正多面体 P は正 4 面体，正 8 面体，正 20 面体，正 6 面体，正 12 面体のいずれかである．これらはそれぞれ各頂点の回りに，正 3 角形を 3 枚，正 3 角形を 4 枚，正 3 角形を 5 枚，正方形を 3 枚，正 5 角形を 3 枚並べたものである (図 4，図 5)． □

正多面体がゴム膜で出来ていると仮定して，この中に空気を入れて風船のようにふくらませてみれば，正多面体はふくらんで球面になる．そのとき，各面は，この球面に張り付いた「曲がった正多角形」になり，「曲がった正多角形」による球面のタイル張りが得られる．したがって，各頂点のまわりに (曲がった) 正 n 角形が q 個並んでいるようなタイル張りをタイプ (n, q) のタイル張りと呼ぶことにすると，定理 1.5 は次のことを主張している：球面の正多角形によるタイル張りは，タイプ $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$, $(5,3)$ の 5 種類に限られる．

これに対して，定理 1.1 は次のことを主張している：平面の正多角形によるタイル張りは，タイプ $(3,6)$, $(4,4)$, $(6,3)$ の 3 種類に限られる．

以上まとめると，自然数の組 (n,q), $n,q \geq 3$ で

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$$

を満たすものは $(3,6)$, $(4,4)$, $(6,3)$ の 3 つだけであり，これらは平面の正多角形によるタイル張りのタイプである．また，自然数の組 (n,q), $n,q \geq 3$ で

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$$

を満たすものは $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$, $(5,3)$ の 5 つだけであり，これらは球面の正多角形によるタイル張りのタイプである．

一方，自然数の組 (n,q), $n,q \geq 3$ で

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}$$

を満たすものは無数にあるが，これらをタイプとするタイル張りはあるのだろうか？

定理 1.6. 任意の $n \geq 3$ に対して，双曲平面の正 n 角形からなるタイル張りが存在する．

2 ユークリッド平面

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す．また，2 つの実数の順序をつけた組全体の集合を $\mathbb{R}^2$ で表す．

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}.$$

平面に点 O を原点とする直交座標系を定めれば，平面上の任意の点 P は，その座標である 2 つの実数の順序をつけた組 (x,y) として表される．このようにして，平面を $\mathbb{R}^2$ と同じものとみなすことができる．

定義 2.1. $\mathbb{R}^2$ の 2 点 $P=(x_1,y_1)$ と $Q=(x_2,y_2)$ の**距離** $d(P,Q)$ を

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

によって定義する．

命題 2.2 (距離の性質)**.** P,Q,R を $\mathbb{R}^2$ の点とすると，次が成り立つ．

(i) $d(P,Q)=d(Q,P)$.

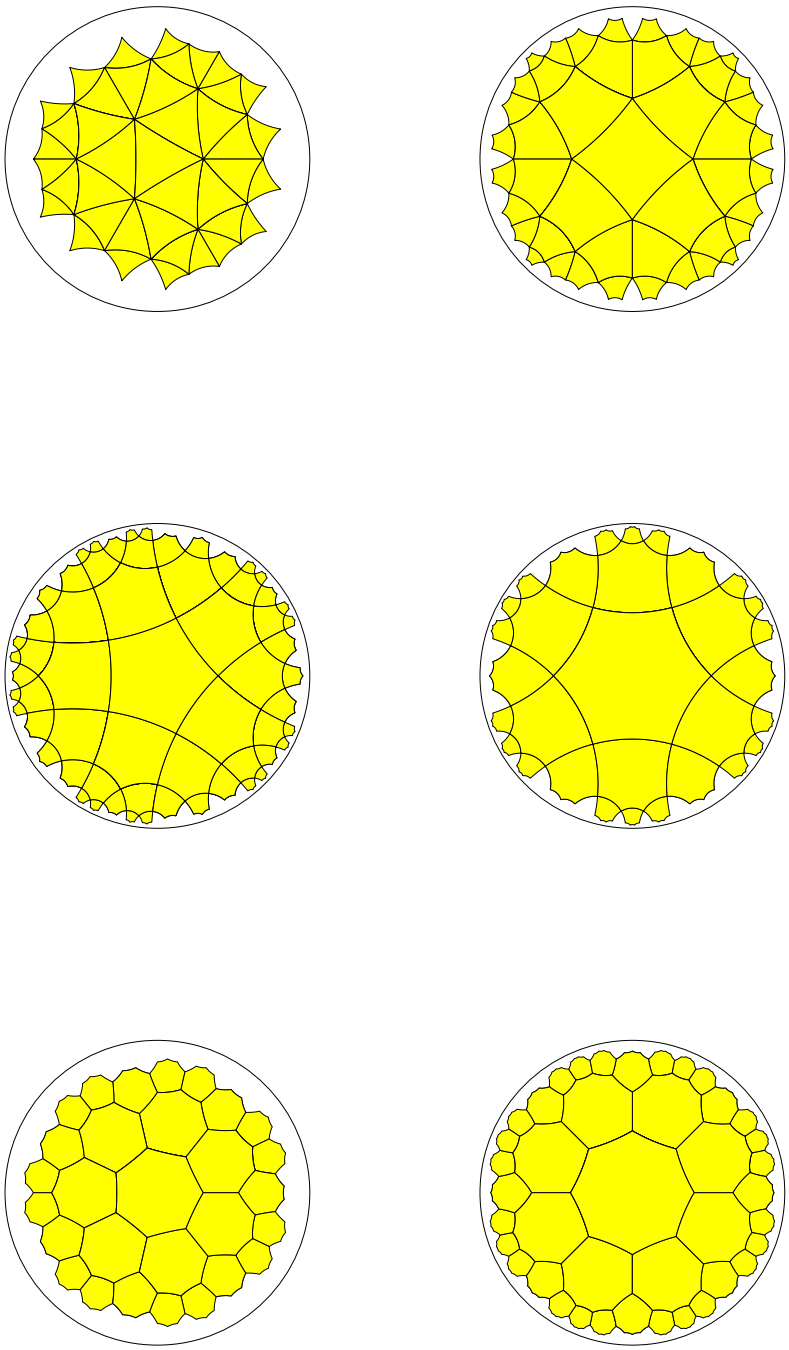


図 6　双曲平面の正 3,4,5,6,7,8 角形によるタイル張り

(ii) $d(P,Q) \geq 0$.
(iii) $d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$.
(iv) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$.

(i), (ii), (iii) は明らかである．(iv) を**三角不等式**という．(iv) は少し後で命題 2.7 として証明する．$\mathbb{R}^2$ に上のように距離を入れたものを**ユークリッド平面**という．

定義 2.3. 一般に集合 X に対して，$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ で上の (i)–(iv) を満たすものが定義されているとき，d を X における**距離**といい，(X,d) を**距離空間**という．

定義 2.4. $\mathbb{R}^2$ の 2 つの元 $\boldsymbol{v}_1 = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (x_2, y_2)$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ c\boldsymbol{v}_1 &= (cx_1, cy_1) \end{aligned}$$

と定義する．$\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 + (-1)\boldsymbol{v}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ とする．これによって，$\mathbb{R}^2$ は**ベクトル空間**になる．また，ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の元を (平面) **ベクトル**という．

定義 2.5. ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ における 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 = (x_1, y_1)$ と $\boldsymbol{v}_2 = (x_2, y_2)$ の**内積**を

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

によって定義する．また，ベクトル $\boldsymbol{v} = (x, y)$ の**長さ**を

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

によって定義する．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ とすれば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}, \\ (c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u} \cdot (c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}), \\ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \end{aligned}$$

が成り立つ．

命題 2.6 (コーシー・シュワルツの不等式)**.** $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つ．$\boldsymbol{u} \neq (0,0)$ とすれば，

$$\text{等号が成り立つ} \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u} \text{ となる } c \in \mathbb{R} \text{ が存在する}.$$

[証明]　$\boldsymbol{u} = (0,0)$ ならば，不等式の両辺とも 0 だから，等号が成り立つ．$\boldsymbol{u} \neq (0,0)$ とする．$\|\boldsymbol{u}\| > 0$ である．$\boldsymbol{u} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{v} = (x_2, y_2)$ に対して，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 - |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|^2 &= (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2)^2 \\ &= x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2 - x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - y_1^2y_2^2 \\ &= x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

等号が成立するのは, $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ のとき, そのときに限る．$x_1 \neq 0$ ならば, $c = x_2/x_1$ とおけば,

$$c\boldsymbol{u} = \frac{x_2}{x_1}(x_1, y_1) = \left(x_2, \frac{x_2y_1}{x_1}\right) = (x_2, y_2) = \boldsymbol{v}.$$

$y_1 \neq 0$ ならば，$c = y_2/y_1$ とおけば,

$$c\boldsymbol{u} = \frac{y_2}{y_1}(x_1, y_1) = \left(\frac{x_1y_2}{y_1}, y_2\right) = (x_2, y_2) = \boldsymbol{v}.$$

$\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u}$ ならば，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) = c\|\boldsymbol{u}\|^2$, $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| = |c|\|\boldsymbol{u}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$ である．　□

命題 2.7 (三角不等式)**.** $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つ．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \leq d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

が成り立つ．ここで，$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{w}$ とすると，等号が成立するためには，点 $\boldsymbol{v}$ が点 $\boldsymbol{u}$ と点 $\boldsymbol{w}$ を結ぶ線分上にあることが必要十分である.

[証明]　命題 2.6 より,

$$\begin{aligned}(\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2 &= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2, \\ \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} + 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2, \\ (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2 - \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= 2(\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) \geq 0.\end{aligned}$$

ゆえに，$\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\| \geq \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$ である．ここで，$\boldsymbol{u} \neq (0,0)$ とすると，等号が成立するのは $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u}$ となる $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ が存在するときである．したがって,

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\| = \|(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})\| \leq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\| = d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}).$$

ここで，$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{u}$ とすると，等号が成立するのは $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = c(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$ となる $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ が存在するとき，すなわち，

$$\boldsymbol{v} = \frac{c}{1+c}\boldsymbol{u} + \frac{1}{1+c}\boldsymbol{w} \qquad (\exists c \in \mathbb{R},\ c \geq 0)$$

となるとき，そのときに限る．これは点 $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}$ を結ぶ線分上にあるときである． □

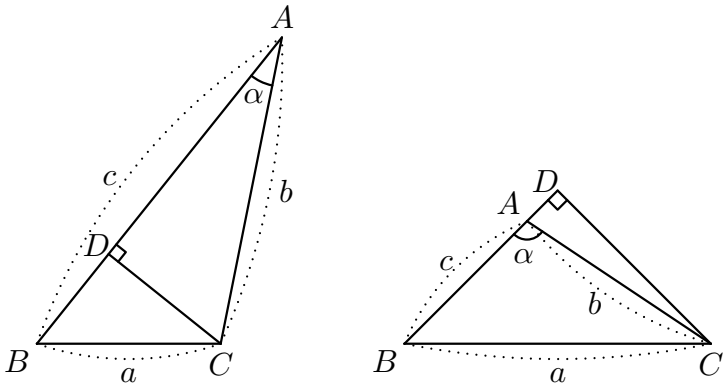


図 7　余弦定理

定理 2.8 (ユークリッド平面における余弦定理)**.** 平面上に図 7 のように 3 辺の長さが a, b, c の三角形 ABC が与えられ，頂点 A の角度を α とすると，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

が成り立つ.

[証明]　α が鋭角のとき，図 7 において，$AD = b\cos\alpha$, $CD = b\sin\alpha$ だから，直角三角形 $\triangle CDB$ に三平方の定理を適用すれば,

$$\begin{aligned} a^2 &= CD^2 + BD^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

α が鈍角のとき,

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\sin(\pi-\alpha))^2 + (c + b\cos(\pi-\alpha))^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

□

系 2.9. $\mathbb{R}^2$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1)$ と $\boldsymbol{v} = (x_2, y_2)$ のなす角度を θ とすれば,

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta.$$

[証明]　$P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, $O = (0, 0)$ とすると，定理 2.8 より,

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos\theta.$$

$OP^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2$, $OQ^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2$, $PQ^2 = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2$ だから,

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta, \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 &= \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta.\end{aligned}$$

□

3　複素平面

複素数 α は $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ と表せる．ここで，i は**虚数単位**とよばれる．複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す．$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，$\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ とかくとき，和 $\alpha + \beta$ と積 $\alpha\beta$ は

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a + c) + (b + d)i, \\ \alpha\beta &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

によって定義される．実数 a は複素数 $a + 0i$ と同一視して，$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ とみる．このとき，$i^2 = -1$ である．$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \beta + \alpha, \\ (\alpha + \beta) + \gamma &= \alpha + (\beta + \gamma), \\ (\alpha\beta)\gamma &= \alpha(\beta\gamma), \\ \alpha\beta &= \beta\alpha, \\ \alpha(\beta + \gamma) &= \alpha\beta + \alpha\gamma\end{aligned}$$

が成り立つ．複素数 $\alpha = a + bi$ に対して，a をその**実部**，b をその**虚部**とよび $a = \Re\alpha$, $b = \Im\alpha$ と表す．複素数 $\alpha = a + bi$ に対して，複素数 $a - bi$ を α の**共役複素数**とよび $\overline{\alpha}$ で表す．$\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 \geq 0$ となるので，$\sqrt{a^2 + b^2}$ を α の**絶対値**とよび $|\alpha|$ で表す．$\alpha \neq 0$ のとき

$$\left(\frac{1}{|\alpha|^2}\bar{\alpha}\right)\alpha = 1$$

となるので $\mathbb{C}$ は体になる．$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\begin{aligned} \overline{\alpha\beta} &= \overline{\alpha}\overline{\beta}, \\ |\alpha\beta| &= |\alpha||\beta|, \\ |\alpha+\beta| &\leq |\alpha| + |\beta| \end{aligned}$$

が成り立つ．

複素数 $\alpha = a + bi$ をユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の点 (a, b) と対応させることができる．平面の点がこの対応によって複素数を表しているとみたものを**複素平面**とよぶ．2 つの複素数 $\alpha = a + bi$ と $\beta = c + di$ に対して，$|\alpha - \beta|$ はユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ における点 (a, b) と点 (c, d) の通常の距離である．$i(a + bi) = -b + ai$ は $a + bi$ を原点のまわりに 90° 回転させた点を表す．複素数 $\alpha = a + bi \neq 0$ に対して，$r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a_1 = a/r$, $b_1 = b/r$ とおけば，$a_1^2 + b_1^2 = 1$ となるので $a_1 = \cos\theta$, $b_1 = \sin\theta$ となる $0 \leq \theta < 2\pi$ がとれ，$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表せる．2 つの複素数 $\alpha_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $\alpha_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対して

$$\alpha_1\alpha_2 = r_1r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big) \tag{3.1}$$

が成り立つ．これは三角関数 $\cos x$, $\sin x$ の加法定理

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y, \quad \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

と複素数の積の定義から容易に導かれる．

複素平面で考える利点は，平行移動，原点の回りの回転，x-軸に関する鏡映が，それぞれ，$z \longmapsto z + \alpha$, $z \longmapsto \beta z$, $z \longmapsto \bar{z}$ と簡単に表せることである．ここで，$\alpha = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, $\beta = \cos\theta + i\sin\theta$ である．次節において，複素数 z に対して，z の 1 次式を分子，分母とする分数を対応させるという変換の表す幾何学的意味を考え，‘双曲平面’ の導入準備をする．

4　1 次分数変換

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とおく．$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ で $ad - bc \neq 0$ を満たすものに対して，写像 $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (z \in \hat{\mathbb{C}})$$

によって定義する．ただし，$cz_1 + d = 0$ となる $z_1 \in \mathbb{C}$ については $f(z_1) = \infty$ とし，

$$f(\infty) = \begin{cases} \dfrac{a}{c}, & c \neq 0, \\ \infty, & c = 0,\ a \neq 0 \end{cases}$$

とする．f を **1 次分数変換**という．2 つの 1 次分数変換 f と g の合成 $f \circ g$ も 1 次分数変換である．実際，$p, q, r, s \in \mathbb{C}$ で $ps - qr \neq 0$ を満たすものに対して

$$g(z) = \frac{pz + q}{rz + s}$$

とすると，

$$\begin{aligned} f(g(z)) &= \frac{ag(z) + b}{cg(z) + d} = \frac{a\left(\dfrac{pz+q}{rz+s}\right) + b}{c\left(\dfrac{pz+q}{rz+s}\right) + d} \\ &= \frac{a(pz+q) + b(rz+s)}{c(pz+q) + d(rz+s)} = \frac{(ap+br)z + aq + bs}{(cp+dr)z + cq + ds}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) \\ &= ad(ps-qr) - bc(ps-qr) = (ad-bc)(ps-qr) \neq 0. \end{aligned}$$

また，1 次分数変換

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

は $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ へ 1 対 1 対応を与え，その逆変換も 1 次分数変換

$$z = f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a} \tag{4.1}$$

である．1 次分数変換は複素平面の円または直線を円または直線にうつすという性質を持つことを示そう．

補題 4.1. 複素平面における円および直線は，$a, c \in \mathbb{R}$ と $|\beta|^2 > ac$ を満たす $\beta \in \mathbb{C}$ を用いて方程式

$$az\bar{z} - \bar{\beta}z - \beta\bar{z} + c = 0 \tag{4.2}$$

で表される．方程式 (4.2) は $a = 1$ のとき，β を中心とする半径 $r = \sqrt{|\beta|^2 - ac}$ の円を表し，$a = 0$ のとき，β と垂直な直線を表す．

[証明]　中心が (a,b) で半径が r の円 C は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

で表される．複素平面で考えると，これは $\beta=a+bi$, $z=x+iy$ とおいて，

$$|z-\beta|^2=r^2,$$
$$z\bar{z}-\bar{\beta}z-\beta\bar{z}+\beta\bar{\beta}-r^2=0.$$

$a=1$, $c=\beta\bar{\beta}-r^2$ とおけば，$a,c\in\mathbb{R}$ であり，$|\beta|^2-ac=r^2>0$ だから，円 C は (4.2) で表される．

また，$p,q,r\in\mathbb{R}$, $(p,q)\neq(0,0)$ として方程式 $px+qy+r=0$ で表される直線 l はベクトル (p,q) と垂直である．$\beta=p+iq$, $z=x+iy$ とおくとき

$$\begin{aligned}\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+2r&=(p-iq)(x+iy)+(p+iq)(x-iy)+2r\\&=2(px+qy+r)=0.\end{aligned}$$

$a=0$, $c=-2r$ とおけば，$a,c\in\mathbb{R}$ であり，$|\beta|^2-ac=|\beta|^2>0$ だから，直線 l は (4.2) で表される．

逆に，(4.2) で表される図形は $a\neq0$ ならば円であり，$a=0$ ならば直線である．　□

補題 4.2. 任意の 1 次分数変換 $f(z)$ は次の 3 つ形の 1 次分数変換のいくつかの合成として得られる．

1. $z\longmapsto z+b$ $(b\in\mathbb{C})$.
2. $z\longmapsto az$ $(a\in\mathbb{C},\ a\neq0)$.
3. $z\longmapsto\dfrac{1}{z}$.

[証明]　$a,b,c,d\in\mathbb{C}$, $ad-bc\neq0$, $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ とする．$c=0$ ならば，$ad\neq0$ であり，$f(z)=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ だから，$f(z)$ は 2. の形の 1 次分数変換と 1. の形の 1 次分数変換の合成である．

$c\neq0$ のとき，$a'=-\dfrac{ad-bc}{c^2}$, $b'=\dfrac{a}{c}$, $g(z)=a'z+b'$ とおけば，上で示したことから $g(z)$ は 2. の形の 1 次分数変換と 1. の形の 1 次分数変換の合成である．このとき，$h(z)=\dfrac{1}{z+\dfrac{d}{c}}$ とおけば，$h(z)$ は 1. の形の 1 次分数変換と 3. の 1 次分数変換の合成であ

る．さらに，h と g を合成したものは

$$\begin{aligned} g(h(z)) = a'h(z) + b' &= -\frac{ad-bc}{c^2}\frac{1}{z+\dfrac{d}{c}} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{-(ad-bc)}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad+a(cz+d)}{c(cz+d)} \\ &= \frac{c(az+b)}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} = f(z). \end{aligned}$$

□

定理 4.3. 1 次分数変換 $f(z)$ は複素平面の円および直線を円または直線にうつす．

[証明]　1 次分数変換 $f(z)$ は補題 4.2 より，補題 4.2 の 3 つの形の 1 次分数変換のそれぞれについて定理の主張が正しいことを示せばよい．

$f(z) = z + \delta$ $(\delta \in \mathbb{C})$ とすると，これは平行移動だから，明らかに円を円に，直線を直線にうつす．

$f(z) = \gamma z$ $(\gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0)$ とする．$\gamma = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$ とかけば，$f(z)$ は原点のまわりの角度 θ の回転と r 倍の相似拡大の合成だから，明らかに円を円に，直線を直線にうつす．

$w = \dfrac{1}{z}$ とおく．z が (4.2) を満たすとき，

$$az\bar{z} - \bar{\beta}z - \beta\bar{z} + c = 0$$

の両辺を $z\bar{z}$ で割れば

$$\begin{aligned} a - \bar{\beta}\frac{1}{\bar{z}} - \beta\frac{1}{z} + c\frac{1}{z\bar{z}} &= 0, \\ cw\bar{w} - \beta w - \bar{\beta}\bar{w} + a &= 0. \end{aligned}$$

よって，$w = \dfrac{1}{z}$ は上の方程式の表す円または直線上にある．　□

定義 4.4. 複素平面において，直線 l と円 C が点 z_0 で交わっているとき，交点 z_0 での直線 l と円 C のなす角度を直線 l と z_0 における円 C の接線 m のなす角度 θ $\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と定義する．一般に 2 つの滑らかな曲線 C_1 と C_2 が点 z_0 で交わっているとき，交点 z_0 での C_1 と C_2 のなす角度を z_0 における C_1 の接線 m_1 と C_2 の接線 m_2 のなす角度 θ $\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と定義する．

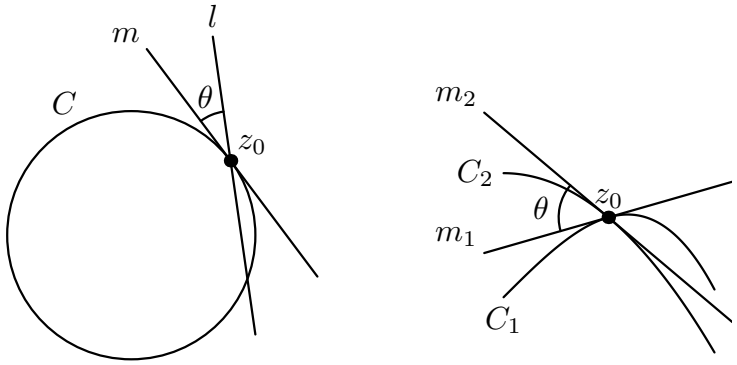


図 8　2 つの曲線 C_1 と C_2 のなす角度

補題 4.5. 0 でない複素数 α_1, α_2 のなす角度を θ とすれば,

$$\cos\theta = \frac{\Re(\bar{\alpha}_1\alpha_2)}{|\alpha_1||\alpha_2|}.$$

[証明]　$\alpha_1 = a_1 + b_1 i$, $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ とする．系 2.9 より

$$a_1a_2 + b_1b_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\cos\theta = |\alpha_1||\alpha_2|\cos\theta.$$

一方,

$$\bar{\alpha}_1\alpha_2 = (a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1a_2 + b_1b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)i,$$
$$\Re(\bar{\alpha}_1\alpha_2) = a_1a_2 + b_1b_2.$$

よって,

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{|\alpha_1||\alpha_2|} = \frac{\Re(\bar{\alpha}_1\alpha_2)}{|\alpha_1||\alpha_2|}.$$

□

補題 4.6. 複素平面における平行でない 2 直線 l_1, l_2 が

$$l_k = \{z \in \mathbb{C} : -\bar{\alpha}_k z - \alpha_k \bar{z} + c_k = 0\} \quad (k = 1, 2)$$

で与えられているとき，l_1 と l_2 のなす角度を θ $\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすれば,

$$\cos\theta = \frac{|\Re(\bar{\alpha}_1\alpha_2)|}{|\alpha_1||\alpha_2|}.$$

[証明]　l_1, l_2 はそれぞれ α_1, α_2 と垂直だから，l_1 と l_2 のなす角度は α_1 と α_2 のなす角度に等しい．補題 4.5 を適用すればよい．　□

補題 4.7. 複素平面における直線 l と円 C が

$$l = \{z \in \mathbb{C} : -\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + c = 0\}, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z - \beta| = r\}$$

で与えられていて，z_0 において l と C が交わっているとする．C の z_0 における接線を m とし，l と m のなす角度を θ $\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすれば，

$$\cos\theta = \frac{|\Re(\bar{\alpha}(z_0 - \beta))|}{|\alpha||z_0 - \beta|}.$$

[証明]　l, m はそれぞれ α, $z_0 - \beta$ と垂直だから，l と m のなす角度は α と $z_0 - \beta$ のなす角度に等しい．補題 4.5 を適用すればよい．　□

補題 4.8. 複素平面における円 C_1, C_2 が

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \beta_1| = r_1\}, \quad C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \beta_2| = r_2\}$$

で与えられていて，z_0 において C_1 と C_2 が交わっているとする．z_0 における C_1 の接線，C_2 の接線をそれぞれ m_1, m_2 とし，m_1 と m_2 のなす角度を θ $\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすれば，

$$\cos\theta = \frac{|\Re((\bar{z}_0 - \bar{\beta}_1)(z_0 - \beta_2))|}{|z_0 - \beta_1||z_0 - \beta_2|}.$$

[証明]　m_1, m_2 はそれぞれ $z_0 - \beta_1$, $z_0 - \beta_2$ と垂直だから，m_1 と m_2 のなす角度は $z_0 - \beta_1$ と $z_0 - \beta_2$ のなす角度に等しい．補題 4.5 を適用すればよい．　□

定理 4.9. C_1, C_2 を複素平面上の円または直線で点 z_0 において交わっているとする．$f(z)$ を 1 次分数変換とすれば，$f(z_0)$ での $f(C_1)$ と $f(C_2)$ のなす角度は z_0 での C_1 と C_2 のなす角度に等しい．

[証明]　$f(z) = z + \delta$ のとき，f は平行移動だから主張は明らかである．$f(z) = \beta z$, $|\beta| = 1$ のとき，f は原点の回りの回転だから主張は明らかである．$f(z) = rz$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ のとき，f は相似変換だから主張は明らかである．$f(z) = \dfrac{1}{z}$ とする．$z_0 \neq 0$ での C_1 と C_2 のなす角度を θ，$f(z_0)$ での $f(C_1)$ と $f(C_2)$ のなす角度を θ' とする．

C_1, C_2 が直線のとき．

$$C_k = \{z \in \mathbb{C} : -\bar{\alpha}_k z - \alpha_k \bar{z} + c_k = 0\} \quad (k = 1, 2).$$

$c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ ならば，

$$f(C_k) = \left\{w \in \mathbb{C} : \left|w - \frac{\bar{\alpha}_k}{c_k}\right| = \frac{|\alpha_k|}{|c_k|}\right\}.$$

補題 4.8 より

$$\cos\theta' = \frac{\left|\Re\left(\left(\frac{1}{\bar{z}_0}-\frac{\alpha_1}{c_1}\right)\left(\frac{1}{z_0}-\frac{\bar{\alpha}_2}{c_2}\right)\right)\right|}{\left|\frac{1}{z_0}-\frac{\bar{\alpha}_1}{c_1}\right|\left|\frac{1}{z_0}-\frac{\bar{\alpha}_2}{c_2}\right|} = \frac{|\Re\left((c_1-\alpha_1\bar{z}_0)\left(c_2-\bar{\alpha}_2 z_0\right)\right)|}{|c_1-\bar{\alpha}_1 z_0|\,|c_2-\bar{\alpha}_2 z_0|}.$$

$z_0 \in C_1 \cap C_2$ より

$$-\bar{\alpha}_k z_0 - \alpha_k \bar{z}_0 + c_k = 0, \qquad c_k - \alpha_k \bar{z}_0 = \bar{\alpha}_k z_0 \quad (k=1,2).$$

よって，$c_1-\alpha_1\bar{z}_0 = \bar{\alpha}_1 z_0$, $c_2-\bar{\alpha}_2 z_0 = \alpha_2\bar{z}_0$ である．補題 4.6 より

$$\cos\theta' = \frac{|\Re\left(\bar{\alpha}_1 z_0 \alpha_2 \bar{z}_0\right)|}{|\bar{\alpha}_1 z_0|\,|\alpha_2\bar{z}_0|} = \frac{|\Re(\bar{\alpha}_1\alpha_2)|}{|\alpha_1|\,|\alpha_2|} = \cos\theta.$$

$c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ のとき，C_1 は直線

$$f(C_1) = \{w \in \mathbb{C} : -\alpha_1 w - \bar{\alpha}_1 \bar{w} = 0\}$$

にうつされる． $\alpha_1\bar{z}_0 = -\bar{\alpha}_1 z_0$, $c_2-\bar{\alpha}_2 z_0 = \alpha_2\bar{z}_0$ だから補題 4.7 より

$$\cos\theta' = \frac{\left|\Re\left(\alpha_1\left(\frac{1}{z_0}-\frac{\bar{\alpha}_2}{c_2}\right)\right)\right|}{|\alpha_1|\left|\frac{1}{z_0}-\frac{\bar{\alpha}_2}{c_2}\right|} = \frac{|\Re(\alpha_1\bar{z}_0(c_2-\bar{\alpha}_2 z_0))|}{|\alpha_1|\,|z_0(c_2-\bar{\alpha}_2 z_0)|}$$
$$= \frac{|\Re(-\bar{\alpha}_1 z_0\alpha_2\bar{z}_0)|}{|\alpha_1|\,|z_0\alpha_2\bar{z}_0|} = \frac{\Re(\bar{\alpha}_1\alpha_2)}{|\alpha_1|\,|\alpha_2|} = \cos\theta.$$

$c_1 = c_2 = 0$ のとき，$f(C_k)$ $(k=1,2)$ は直線

$$f(C_k) = \{w \in \mathbb{C} : -\alpha_k w - \bar{\alpha}_k \bar{w} = 0\}$$

にうつされる． 補題 4.6 より

$$\cos\theta' = \frac{|\Re(\alpha_1\bar{\alpha}_2)|}{|\alpha_1||\alpha_2|} = \frac{|\Re(\bar{\alpha}_1\alpha_2)|}{|\alpha_1||\alpha_2|} = \cos\theta.$$

C_1, C_2 の少なくとも一方が円のとき．C_k が円のときは，交点 z_0 における円 C_k の接線を l_k とする．そのとき，$C_k \cap l_k = \{z_0\}$ であり，f は 1 対 1 対応だから，$f(C_k)\cap f(l_k) = \{f(z_0)\}$ である．これは $f(l_k)$ が $f(z_0)$ において $f(C_k)$ と接する円または直線であることを意味する．したがって，$f(z_0)$ における $f(C_k)$ の接線は，$f(l_k)$ が直線ならば $f(l_k)$ であり，$f(l_k)$ が円ならば $f(l_k)$ の $f(z_0)$ における接線と一致する．結局，C_k を l_k で置き換えても求める角度は変わらないから，C_1, C_2 ともに直線の場合に帰着される． □

5　ポアンカレ円板

単位円板

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

とその境界

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

を考える.

命題 5.1. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$, $|\beta| = 1$ とすると，1 次分数変換

$$f(z) = \beta \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha} z}$$

は $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}$ 自身への 1 対 1 対応を引き起こす．また，$f(z)$ は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ 自身への 1 対 1 対応を引き起こす.

[証明]　$w = f(z) = \beta \dfrac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha} z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$, $|\beta| = 1$ とする．このとき，$z \in \mathcal{D}$ に対して

$$\begin{aligned} 1 - |w|^2 &= 1 - |\beta|^2 \frac{|z + \alpha|^2}{|1 + \bar{\alpha} z|^2} = \frac{|1 + \bar{\alpha} z|^2 - |z + \alpha|^2}{|1 + \bar{\alpha} z|^2} \\ &= \frac{(1 + \bar{\alpha} z)(1 + \alpha \bar{z}) - (z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha})}{|1 + \bar{\alpha} z|^2} \\ &= \frac{1 + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + \alpha \bar{\alpha} z \bar{z} - z \bar{z} - \bar{\alpha} z - \alpha \bar{z} - \alpha \bar{\alpha}}{|1 + \bar{\alpha} z|^2} \\ &= \frac{(1 - |\alpha|^2)(1 - |z|^2)}{|1 + \bar{\alpha} z|^2} > 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

よって，$|w| < 1$，したがって，$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ である.

$$z = f^{-1}(w) = \frac{\bar{\beta} w - \alpha}{1 - \bar{\alpha} \bar{\beta} w} = \bar{\beta} \frac{w - \alpha \beta}{1 - \bar{\alpha} \bar{\beta} w}$$

だから，f は $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}$ への 1 対 1 対応を与える．(5.1) より f は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への 1 対 1 対応を与える.　□

命題 5.2. 命題 5.1 の 1 次分数変換 $f(z)$ の全体の集合を G で表す．$f, g \in G$ ならば $f \circ g \in G$, $f^{-1} \in G$ であり，G は群になる.

[証明]

$$f(z)=\beta\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z},\quad g(z)=\delta\frac{z+\gamma}{1+\bar{\gamma}z},\qquad |\beta|=|\delta|=1,\ |\alpha|<1,\ |\gamma|<1$$

とすれば，(4.1) より

$$f^{-1}(z)=\frac{z-\alpha\beta}{-\bar{\alpha}z+\beta}=\frac{z-\alpha\beta}{\beta(1-\bar{\alpha}\beta^{-1}z)}=\bar{\beta}\frac{z-\alpha\beta}{1-\overline{\alpha\beta}z}.$$

$|\bar{\beta}|=1$, $|\alpha\beta|<1$ より，$f^{-1}\in G$ である．

$$\begin{aligned}f(g(z))&=\beta\frac{g(z)+\alpha}{1+\bar{\alpha}g(z)}=\beta\frac{\delta\dfrac{z+\gamma}{1+\bar{\gamma}z}+\alpha}{1+\bar{\alpha}\delta\dfrac{z+\gamma}{1+\bar{\gamma}z}}\\&=\beta\frac{\delta(z+\gamma)+\alpha(1+\bar{\gamma}z)}{(1+\bar{\gamma}z)+\bar{\alpha}\delta(z+\gamma)}=\beta\frac{(\delta+\alpha\bar{\gamma})z+(\alpha+\gamma\delta)}{1+\bar{\alpha}\gamma\delta+(\bar{\alpha}\delta+\bar{\gamma})z}\\&=\beta\delta\frac{(1+\alpha\bar{\gamma}\delta^{-1})z+(\alpha\delta^{-1}+\gamma)}{1+\bar{\alpha}\gamma\delta+(\bar{\alpha}\delta+\bar{\gamma})z}=\beta\delta\frac{(1+\alpha\bar{\gamma}\bar{\delta})z+(\alpha\bar{\delta}+\gamma)}{1+\bar{\alpha}\gamma\delta+(\bar{\alpha}\delta+\bar{\gamma})z}.\end{aligned}$$

ここで，$\lambda=\dfrac{\alpha\bar{\delta}+\gamma}{1+\alpha\bar{\gamma}\bar{\delta}}$ とおけば，$\alpha\bar{\delta}+\gamma=\lambda(1+\alpha\bar{\gamma}\bar{\delta})$, $\bar{\alpha}\delta+\bar{\gamma}=\bar{\lambda}(1+\bar{\alpha}\gamma\delta)$ だから，

$$f(g(z))=\beta\delta\frac{(1+\alpha\bar{\gamma}\bar{\delta})(z+\lambda)}{(1+\bar{\alpha}\gamma\delta)(1+\bar{\lambda}z)}$$

である．よって，$\mu=\dfrac{1+\alpha\bar{\gamma}\bar{\delta}}{1+\bar{\alpha}\gamma\delta}$ とおけば，$\bar{\mu}=\mu^{-1}$, $|\mu|^2=\mu\bar{\mu}=1$, $|\mu|=1$ であり，$f(g(z))=(\beta\delta\mu)\dfrac{z+\lambda}{1+\bar{\lambda}z}$ である．$|\beta\delta\mu|=1$ であり，

$$1>|f(g(0))|=|(\beta\delta\mu)\lambda|=|\lambda|$$

だから，$f\circ g\in G$ である． □

定義 5.3. $z\in\mathcal{D}$ に対して，

$$\|z\|_h=\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

とおく．$|z|<1$ だから $\|z\|_h\geq 0$ である．また，$\beta\in\mathbb{C}$, $|\beta|=1$ ならば $\|\beta z\|_h=\|z\|_h$ である．$\alpha\in\mathcal{D}$ に対して，

$$g_\alpha(z)=\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

とおけば，$g_\alpha \in G$ である．したがって，$\mathcal{D}$ の 2 点 z_1, z_2 に対して，$g_{z_1}(z_2) \in \mathcal{D}$ である．そこで，$d_h(z_1, z_2)$ を次のように定義する．

$$d_h(z_1, z_2) = \|g_{z_1}(z_2)\|_h = \left\| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right\|_h = \log \frac{1 + \dfrac{|z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}}{1 - \dfrac{|z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}}. \tag{5.2}$$

とくに，

$$d_h(0, z) = \|z\|_h = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

補題 5.4. $f \in G$ かつ $f(0) = 0$ ならば，$\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$ が存在して，$f(z) = \beta z$ である．

[証明]　$f \in G$ だから，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$, $|\beta| = 1$ として

$$f(z) = \beta \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha} z}$$

とかける．$f(0) = \beta\alpha = 0$ より，$\alpha = 0$ である．よって，$f(z) = \beta z$ である． □

命題 5.5. $f \in G$ とすると，$\mathcal{D}$ の任意の 2 点 z_1, z_2 に対して，

$$d_h(f(z_1), f(z_2)) = d_h(z_1, z_2).$$

[証明]　$w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ とおく．d_h の定義によって，

$$d_h(z_1, z_2) = \|g_{z_1}(z_2)\|_h, \qquad d_h(w_1, w_2) = \|g_{w_1}(w_2)\|_h$$

である．$\varphi = g_{w_1} \circ f \circ g_{z_1}^{-1}$ とおけば，$\varphi \in G$ であり，$g_{z_1}(z_1) = 0$, $g_{w_1}(w_1) = 0$ だから

$$\varphi(0) = g_{w_1}(f(g_{z_1}^{-1}(0))) = g_{w_1}(f(z_1)) = g_{w_1}(w_1) = 0.$$

補題 5.4 より，$\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$ が存在して，$\varphi(z) = \beta z$ である．z に $g_{z_1}(z)$ を代入すれば，$\varphi(g_{z_1}(z)) = \beta g_{z_1}(z)$ である．しかし，φ の定義により，$\varphi(g_{z_1}(z)) = g_{w_1}(f(z))$ だから，

$$g_{w_1}(f(z)) = \beta g_{z_1}(z)$$

である．したがって，$z = z_2$ とおけば $g_{w_1}(w_2) = g_{w_1}(f(z_2)) = \beta g_{z_1}(z_2)$ であり

$$\begin{aligned} d_h(w_1, w_2) &= \|g_{w_1}(w_2)\|_h = \|\beta g_{z_1}(z_2)\|_h \\ &= \|g_{z_1}(z_2)\|_h = d_h(z_1, z_2). \end{aligned}$$

□

補題 5.6. $z \in \mathcal{D}$ に対して，$r = |z| < 1$ とおけば，$d_h(0,z) = \log \dfrac{1+r}{1-r}$ である．とくに，$|z| \to 1$ とすると，$d_h(0,z) \to \infty$ である．

[証明]　定義から $d_h(0,z) = \|z\|_h = \log \dfrac{1+r}{1-r}$. □

補題 5.7. $0 < a < b < 1$ とすると，

$$d_h(0,a) + d_h(a,b) = d_h(0,b).$$

[証明]

$$\begin{aligned} d_h(0,a) + d_h(a,b) &= \log \frac{1+a}{1-a} + \log \frac{1 + \dfrac{b-a}{1-ab}}{1 - \dfrac{b-a}{1-ab}} = \log \frac{1+a}{1-a} + \log \frac{1-ab+b-a}{1-ab-b+a} \\ &= \log \frac{1+a}{1-a} + \log \frac{(1-a)(1+b)}{(1+a)(1-b)} = \log \frac{1+b}{1-b} = d_h(0,b). \end{aligned}$$

□

補題 5.8. $0 < a < b < 1$ とし，$r_1 = d_h(0,a)$, $r_2 = d_h(a,b)$,

$$\begin{aligned} C_1 &= \{z \in \mathcal{D} : d_h(z,0) = r_1\}, \quad D_1 = \{z \in \mathcal{D} : d_h(z,0) \le r_1\}, \\ C_2 &= \{z \in \mathcal{D} : d_h(z,b) = r_2\}, \quad D_2 = \{z \in \mathcal{D} : d_h(z,b) \le r_2\} \end{aligned}$$

とおけば，$k = 1, 2$ について，C_k は $\mathcal{D}$ に含まれる通常の円であり，D_k は C_k の内側の閉円板である．さらに，$C_1 \cap D_2 = \{a\}$ である．

[証明]

$$d_h(z,0) = r_1 \Longleftrightarrow \log \frac{1+|z|}{1-|z|} = \log \frac{1+a}{1-a} \Longleftrightarrow |z| = a$$

だから，C_1 は原点中心の半径 a の円であり，D_1 は C_1 の内側の閉円板である．

$g_b \in G$, $g_b(b) = 0$ だから命題 5.5 より

$$d_h(g_b(z), 0) = d_h(g_b(z), g_b(b)) = d_h(z,b)$$

である．したがって，C_2, D_2 を g_b でうつしたものを C_2', D_2' とすれば

$$C_2' = \{z \in \mathcal{D} : d_h(z,0) = r_2\}, \quad D_2' = \{z \in \mathcal{D} : d_h(z,0) \le r_2\}$$

である．$r_2 = d_h(a,b) = d_h(g_b(a), 0)$ だから，

$$C_2' = \{z \in \mathcal{D} : |z| = |g_b(a)|\}, \quad D_2' = \{z \in \mathcal{D} : |z| \le |g_b(a)|\}$$

である．円 C_2' を 1 次分数変換 g_b^{-1} でうつせば C_2 になるが，定理 4.3 より C_2 は円または直線である．C_2 は単位円板 $\mathcal{D}$ に含まれるから直線ではなく円である．D_2' は円 C' の内側の閉円板だから D_2 も円 C_2 の内側の閉円板である．b は実数だから，

$$\overline{g_b(z)} = \frac{\overline{z-b}}{\overline{1-bz}} = \frac{\bar{z}-b}{1-b\bar{z}} = g_b(\bar{z})$$

である．よって，

$$d_h(z,b) = \|g_b(z)\|_h = \|g_b(\bar{z})\|_h = d_h(\bar{z},b)$$

であり，$z \in C_2$ ならば $\bar{z} \in C_2$ となって，C_2 は実軸に関して対称である．よって，円 C_2 の中心は実軸上にある．C_2 の中心を c，半径を r とすれば，C_2 と r_2 の定義より $a \in C_2$ だから，$|a-c| = r$ である．$a < b, b \in D_2$ だから $a < c$ であり，$r = c - a$ である．したがって，C_2 は図 9 のような円であり，$C_1 \cap D_2 = \{a\}$ がわかる． □

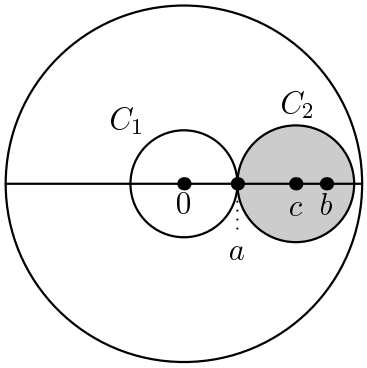


図 9　円 C_1 と円 C_2

命題 5.9. $d_h : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{D}$ の距離であり，$(\mathcal{D}, d_h)$ は距離空間になる．

[証明]　定義より $d_h(z_1,z_2) \geq 0$ と $d_h(z_2,z_1) = d_h(z_1,z_2)$ がわかる．また，$z_1 = z_2$ ならば $d_h(z_1,z_2) = \|0\| = \log 1 = 0$ である．$z \in \mathcal{D}$ が $\|z\|_h = 0$ を満たせば，

$$\log \frac{1+|z|}{1-|z|} = 0, \quad \frac{1+|z|}{1-|z|} = 1, \quad |z| = 0, \quad z = 0$$

である．よって，$d_h(z_1,z_2) = 0$ ならば，$g_{z_1}(z_2) = 0$, $z_2 = z_1$ である．三角不等式

$$d_h(z_0,z_1) + d_h(z_1,z_2) \geq d_h(z_0,z_2), \qquad z_0, z_1, z_2 \in \mathcal{D}$$

を示せばよい．z_0, z_1, z_2 は $\mathcal{D}$ の相異なる 3 点であるとしてよい．

Case 1. $z_0 = 0$, $z_2 = b \in \mathbb{R}$, $0 < b \leq |z_1| < 1$ のとき．$z_1 \neq z_2$ だから $d_h(z_1, z_2) > 0$ である．よって，

$$d_h(z_0, z_1) + d_h(z_1, z_2) > d_h(z_0, z_1) = d_h(0, z_1) = d_h(0, |z_1|) \geq d_h(0, b) = d_h(z_0, z_2).$$

Case 2. $z_0 = 0$, $z_2 = b \in \mathbb{R}$, $|z_1| = a < b$ のとき．$0 < a < b < 1$ である．$r_1 = d_h(0, a)$, $r_2 = d_h(a, b)$ とおく．C_1, D_1, C_2, D_2 を補題 5.8 の通りとすれば，補題 5.8 より $C_1 \cap D_2 = \{a\}$ だから，$z_1 \neq a$ ならば，z_1 は閉円板 D_2 の外側にあり，D_2 の定義から，$d_h(z_1, b) > r_2 = d_h(a, b)$ である．よって，補題 5.7 より

$$d_h(0, z_1) + d_h(z_1, b) \geq d_h(0, a) + d_h(a, b) = d_h(0, b).$$

等号が成立するのは上でみたように $z_1 = a$ のときに限る．

Case 3. 一般の場合．z_0, z_1, z_2 を $\mathcal{D}$ の任意の相異なる 3 点とする．$g_{z_0}(z) = \dfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ は $g_{z_0}(z_0) = 0$ を満たし，$g_{z_0} \in G$ である．$g_{z_0}(z_2) = b\beta$, $0 < b < 1$, $|\beta| = 1$ とかいて，$f(z) = \beta^{-1} g_{z_0}(z)$ とおけば，$f \in G$ であり，$f(z_0) = 0$, $f(z_2) = b$ である．このとき命題 5.5 と Case 1, Case 2 の結果によって

$$\begin{aligned} d_h(z_0, z_1) + d_h(z_1, z_2) &= d_h(f(z_0), f(z_1)) + d_h(f(z_1), f(z_2)) \\ &= d_h(0, f(z_1)) + d_h(f(z_1), b) \\ &\geq d_h(0, b) = d_h(f(z_0), f(z_2)) = d_h(z_0, z_2). \end{aligned}$$

すなわち，三角不等式が成り立つ．等号が成り立つのは，$f(z_1) = a$, $0 < a \leq b$ となるときである．単位円板と実軸の交わりである $\mathcal{D}$ の直径を $l = \mathcal{D} \cap \mathbb{R}$ とすると，等号が成立するのは，$f(z_1)$ が $0 = f(z_0)$ と $b = f(z_2)$ を結ぶ線分 $(\subset l)$ 上にあるときに限る．l は単位円 $\mathcal{S}$ と直交しているから，定理 4.3 と定理 4.9 より $f^{-1}(l)$ は $f^{-1}(\mathcal{S})$ と直交する円の一部である．さらに，命題 5.1 より $f^{-1}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ だから，$f^{-1}(l)$ は $\mathcal{S}$ と直交する．したがって，等号が成立するのは，z_1 が $f^{-1}(l)$ の弧 $\overset{\frown}{z_0 z_2}$ の上にあるときに限る． □

距離空間 $(\mathcal{D}, d_h)$ を**ポアンカレ円板**という．また，$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ をポアンカレ円板 $\mathcal{D}$ の**理想境界**という．ポアンカレ円板 $(\mathcal{D}, d_h)$ は**双曲平面**の 1 つのモデルである．$z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ とすると三角不等式より

$$d_h(0, z_1) + d_h(z_1, z_2) \geq d_h(0, z_2), \qquad d_h(z_1, z_2) \geq d_h(0, z_2) - d_h(0, z_1).$$

したがって，z_1 を固定して z_2 を $\mathcal{S}$ に近づけると，補題 5.6 により $d_h(0, z_2) \to \infty$ だから，$d_h(z_1, z_2) \to \infty$ である．

ポアンカレ円板は，双曲平面という無限の世界を単位円板という有限の世界のなかに実現したものと考えられる．

定義 5.10. $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ に対して，z_1, z_2 が $\mathcal{S}$ の 1 つの直径上にないときは，z_1, z_2 を通り理想境界 $\mathcal{S}$ と直交するような円の弧 $\overset{\frown}{z_1 z_2}$ を z_1 と z_2 を結ぶ**双曲線分**という (図 10 左)．z_1, z_2 が $\mathcal{S}$ の 1 つの直径上にあるときは，線分 $z_1 z_2$ を z_1 と z_2 を結ぶ**双曲線分**という (図 10 右)．命題 5.9 の証明でみたように，$z_1, z_2, z \in \mathcal{D}$ に対して，

$$d_h(z_1, z_2) \leq d_h(z_1, z) + d_h(z, z_2)$$

であり，等号が成立するのは z が z_1 と z_2 を結ぶ双曲線分上にあるとき，そのときに限る．このことは，ユークリッド平面における命題 2.7 の主張

> $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ に対して，$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ であり，等号が成立するのは Q が P と R を結ぶ線分 $\overline{PR}$ 上にあるとき，そのときに限る

と類似している．すなわち，ポアンカレ円板における双曲線分はユークリッド平面における線分の類似である．

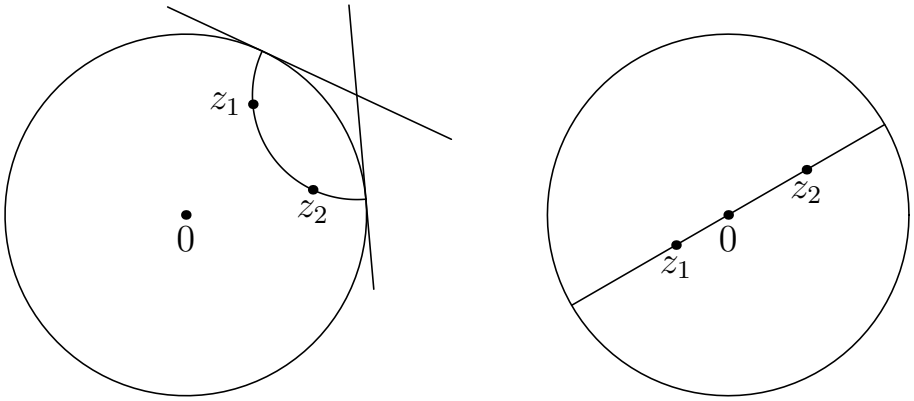


図 10　ポアンカレ円板における双曲線分

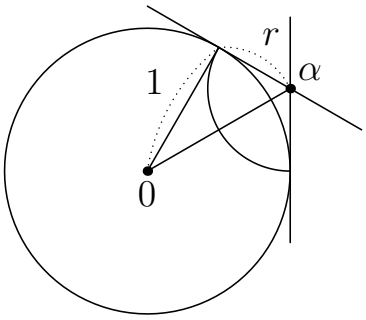


図 11　単位円と直交する円の 1 部である双曲直線

補題 5.11. C を理想境界 $\mathcal{S}$ と直交する円とし，C の中心を α，半径を r とすれば，α は単位円の外側にある点であり，C は原点を通らない．

[証明]　図 11 のように，C の中心 α と原点，および C と $\mathcal{S}$ の交点の 3 点を頂点とする三角形は直角三角形だから，$|\alpha|^2 = 1 + r^2$ が成り立つ．したがって，$|\alpha| > 1$ かつ $|\alpha| > r$ である．よって，α は単位円の外側にある点であり，C は原点を通らない．　□

定理 5.12. ポアンカレ円板 $\mathcal{D}$ の任意の 2 点 z_1, z_2 に対して，z_1 と z_2 を結ぶ双曲線分がただ 1 つ存在する．

[証明]　補題 5.11 より，直径でない双曲線分は原点を通らない．したがって，z_1, z_2, 0 が 1 直線上にある場合は，この直線 (直径) がただ 1 つの双曲線分である．そうでないとすると，$g_{z_1} \in G$ で z_1, z_2 をうつして，$0 = g_{z_1}(z_1)$ と $z_2' = g_{z_1}(z_2)$ を結ぶ双曲線分を考えれば，これは直径である．これを l とすれば，$g_{z_1}^{-1}(l)$ は $\mathcal{S}$ と直交する円だから，z_1 と z_2 を結ぶ双曲線分である．z_1 と z_2 を結ぶ双曲線分を C とすれば，$g_{z_1}(C)$ は 0 と z_2' を通り $\mathcal{S}$ と直交する円または直線だから，それは直径 l である．よって，$g_{z_1}(C) = l$, $C = g_{z_1}^{-1}(l)$ となり，C はただ 1 つである．　□

複素共役写像 $\psi_0(z) = \bar{z}$ は $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}$ への 1 対 1 対応を与える．さらに，$z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ に対して，

$$\begin{aligned} d_h(\psi_0(z_1), \psi_0(z_2)) &= \|g_{\bar{z}_1}(\bar{z}_2)\|_h = \left\| \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{1 - z_1\bar{z}_2} \right\|_h = \left\| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right\|_h \\ &= \|g_{z_1}(z_2)\|_h = d_h(z_1, z_2). \end{aligned}$$

$f \in G$ とする．$f(z) = \beta \dfrac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha} z}$, $|\alpha| < 1$, $|\beta| = 1$ とかくと，

$$(\psi_0 \circ f \circ \psi_0)(z) = \overline{\beta \frac{\bar{z} + \alpha}{1 + \bar{\alpha}\bar{z}}} = \bar{\beta} \frac{z + \bar{\alpha}}{1 + \alpha z}, \quad |\bar{\alpha}| < 1,\ |\bar{\beta}| = 1$$

だから，$\psi_0 \circ f \circ \psi_0 \in G$ である．そこで，

$$G^+ = G \cup G\,\psi_0$$

とおけば，G^+ は群になる．さらに，任意の $f \in G^+$ と任意の $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ に対して，$d_h(f(z_1), f(z_2)) = d_h(z_1, z_2)$ が成り立つ．

群 G^+ を用いて，ポアンカレ円板 $\mathcal{D}$ における合同は次のように定義される．

定義 5.13. 2 つの部分集合 $A, B \subset \mathcal{D}$ について，$f \in G^+$ が存在して，$f(A) = B$ が成り立つとき，A と B は**合同**であるという．

6　三角法

ポアンカレ円板 $\mathcal{D}$ の中で有限個の双曲線分で囲まれる図形のことを**多角形**とよぶ．とくに，3 つの双曲線分で囲まれる図形を**三角形**とよぶ．ポアンカレ円板における三角形についての正弦定理，余弦定理を導く．

補題 6.1. 任意の $f \in G$ と任意の 2 点 $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ に対して，

$$\frac{|f(z_1)-f(z_2)|^2}{(1-|f(z_1)|^2)(1-|f(z_2)|^2)} = \frac{|z_1-z_2|^2}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}$$

が成り立つ．

[証明]　$f(z) = \beta\dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|<1$, $|\beta|=1$ とかく．(5.1) より

$$1-|f(z_1)|^2 = \frac{(1-|z_1|^2)(1-|\alpha|^2)}{|1+\overline{\alpha}z_1|^2},$$
$$1-|f(z_2)|^2 = \frac{(1-|z_2|^2)(1-|\alpha|^2)}{|1+\overline{\alpha}z_2|^2}.$$

また，

$$|f(z_1)-f(z_2)| = \left|\frac{z_1+\alpha}{1+\overline{\alpha}z_1} - \frac{z_2+\alpha}{1+\overline{\alpha}z_2}\right| = \frac{|z_1-z_2|(1-|\alpha|^2)}{|1+\overline{\alpha}z_1||1+\overline{\alpha}z_2|}$$

だから，

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(z_1)-f(z_2)|^2}{(1-|f(z_1)|^2)(1-|f(z_2)|^2)} \\
&= \frac{|z_1-z_2|^2(1-|\alpha|^2)^2}{|1+\overline{\alpha}z_1|^2|1+\overline{\alpha}z_2|^2}\,\frac{|1+\overline{\alpha}z_1|^2}{(1-|z_1|^2)(1-|\alpha|^2)}\,\frac{|1+\overline{\alpha}z_2|^2}{(1-|z_2|^2)(1-|\alpha|^2)} \\
&= \frac{|z_1-z_2|^2}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}.
\end{aligned}$$

□

定義 6.2. $\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ とおく．$\cosh x$ を**双曲線余弦関数**，$\sinh x$ を**双曲線正弦関数**という．$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ を**双曲線正接関数**という．$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ．

補題 6.3. $0 \le r < 1$ に対して，$a = \log\dfrac{1+r}{1-r}$ とおけば，$r = \tanh\dfrac{a}{2}$ である．

[証明]　$a = \log\dfrac{1+r}{1-r}$ ならば，$e^a = \dfrac{1+r}{1-r}$ である．したがって，

$$e^a(1-r) = 1+r, \quad e^a - 1 = (e^a+1)r, \quad r = \frac{e^a-1}{e^a+1} = \frac{e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}}{e^{\frac{a}{2}} + e^{-\frac{a}{2}}} = \frac{\sinh\dfrac{a}{2}}{\cosh\dfrac{a}{2}} = \tanh\frac{a}{2}.$$

□

補題 6.4. 双曲線余弦関数，双曲線正弦関数について次の加法定理が成り立つ．

$$\cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y.$$

とくに，$x = y$ とすれば，次の 2 倍公式が成り立つ．

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\sinh^2 x + 1,$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x.$$

[証明]

$$\cosh x\cosh y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}),$$
$$\sinh x\sinh y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y})$$

だから

$$\cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-x-y}) = \cosh(x+y).$$

同様に

$$\cosh x\sinh y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}),$$
$$\sinh x\cosh y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y})$$

だから

$$\cosh x\sinh y + \sinh x\cosh y = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \sinh(x+y).$$

$x = y$ とすれば，$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ より

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 y = \sinh^2 x + 1 + \sinh^2 x = 2\sinh^2 x + 1.$$

□

以上の準備の下でポアンカレ円板における余弦定理等を証明する．

定理 6.5 (双曲余弦定理)**.** ポアンカレ円板における 3 辺の長さが a, b, c で対応する内角が α, β, γ の三角形に対し，次が成り立つ．

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma.$$

[証明]　適当な $g \in G$ で変換することにより，角 γ に対する頂点は 0 であるとしてよい

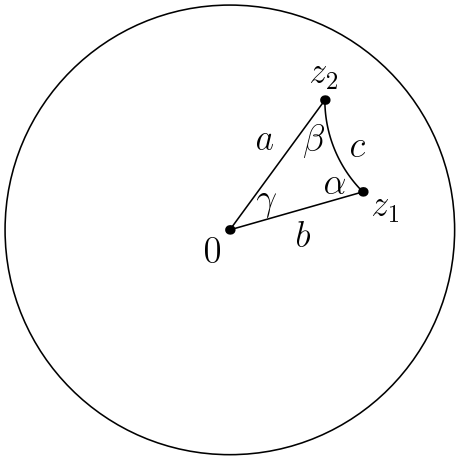


図 12　ポアンカレ円板の三角形

(こうしても定理 4.9 によって三角形の各内角の角度は変わらず，命題 5.5 によって各辺の長さも変わらない)．角 α に対する頂点を z_1，角 β に対する頂点を z_2 とする．このとき，0 と z_1 を結ぶ双曲線分，0 と z_2 を結ぶ双曲線分は定義によりユークリッド平面における線分である．$d_h(0, z_1) = b$, $d_h(0, z_2) = a$,

$$c = d_h(z_1, z_2) = \|g_{z_1}(z_2)\|_h = d_h(0, g_{z_1}(z_2))$$

だから，補題 6.3 より

$$|z_1| = \tanh \frac{b}{2}, \quad |z_2| = \tanh \frac{a}{2}, \quad |g_{z_1}(z_2)| = \tanh \frac{c}{2}.$$

補題 6.4 より

$$\cosh c = 2 \sinh^2 \frac{c}{2} + 1 = \frac{2 \sinh^2 \dfrac{c}{2}}{\cosh^2 \dfrac{c}{2} - \sinh^2 \dfrac{c}{2}} + 1 = \frac{2 \tanh^2 \dfrac{c}{2}}{1 - \tanh^2 \dfrac{c}{2}} + 1.$$

$g_{z_1}(z_1) = 0$ だから，補題 6.1 より

$$\frac{|g_{z_1}(z_2)|^2}{1 - |g_{z_1}(z_2)|^2} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\cosh c &= \frac{2|g_{z_1}(z_2)|^2}{1-|g_{z_1}(z_2)|^2}+1 = \frac{2|z_1-z_2|^2}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}+1\\ &= \frac{2|z_1|^2+2|z_2|^2-2z_1\overline{z}_2-2\overline{z}_1z_2+1-|z_1|^2-|z_2|^2+|z_1|^2|z_2|^2}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}\\ &= \frac{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)-4\Re(\overline{z}_1z_2)}{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

$|z_1| = \tanh\dfrac{b}{2}$, $|z_2| = \tanh\dfrac{a}{2}$ であり，

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|}(\cos\gamma + i\sin\gamma) = \frac{\tanh\dfrac{a}{2}}{\tanh\dfrac{b}{2}}(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

だから，

$$\overline{z}_1z_2 = \overline{z}_1z_1\frac{z_2}{z_1} = \tanh^2\frac{b}{2}\,\frac{\tanh\dfrac{a}{2}}{\tanh\dfrac{b}{2}}(\cos\gamma + i\sin\gamma) = \tanh\frac{a}{2}\tanh\frac{b}{2}(\cos\gamma + i\sin\gamma),$$

$$\Re(\overline{z}_1z_2) = \tanh\frac{a}{2}\tanh\frac{b}{2}\cos\gamma.$$

したがって，(6.1) と補題 6.4 より

$$\begin{aligned}\cosh c &= \frac{\left(1+\tanh^2\dfrac{b}{2}\right)\left(1+\tanh^2\dfrac{a}{2}\right)-4\tanh\dfrac{a}{2}\tanh\dfrac{b}{2}\cos\gamma}{\left(1-\tanh^2\dfrac{b}{2}\right)\left(1-\tanh^2\dfrac{a}{2}\right)}\\ &= \left(\cosh^2\frac{a}{2}+\sinh^2\frac{a}{2}\right)\left(\cosh^2\frac{b}{2}+\sinh^2\frac{b}{2}\right)\\ &\quad -4\sinh\frac{a}{2}\cosh\frac{a}{2}\sinh\frac{b}{2}\cosh\frac{b}{2}\cos\gamma\\ &= \cosh a\cosh b-\sinh a\sinh b\cos\gamma.\end{aligned}$$

□

双曲余弦定理から双曲正弦定理と双曲第 2 余弦定理を導くことができる．

定理 6.6 (双曲正弦定理)**.** a, b, c, α, β, γ を定理 6.5 の通りとすれば，次が成り立つ．

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma}.$$

[証明]　双曲余弦定理 (定理 6.5) より

$$\sinh a \sinh b \cos\gamma = \cosh a \cosh b - \cosh c$$

だから，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sinh c}{\sin\gamma}\right)^2 &= \frac{\sinh^2 c}{1-\cos^2\gamma} = \frac{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}{\sinh^2 a \sinh^2 b - \sinh^2 a \sinh^2 b \cos^2\gamma} \\ &= \frac{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}{\sinh^2 a \sinh^2 b - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2} \\ &= \frac{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}{(\cosh^2 a - 1)(\cosh^2 b - 1) - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2} \\ &= \frac{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}{1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c) + 2\cosh a \cosh b \cosh c}.\end{aligned}$$

この右辺は a, b, c に関して対称だから，

$$\left(\frac{\sinh a}{\sin\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\sinh b}{\sin\beta}\right)^2 = \left(\frac{\sinh c}{\sin\gamma}\right)^2$$

を得る．$\sin\alpha, \sinh a$ 等はすべて正だから定理の主張を得る．　□

定理 6.7 (双曲第 2 余弦定理)．a, b, c, α, β, γ を定理 6.5 の通りとすれば，次が成り立つ．

$$\cosh c = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

[証明]　双曲余弦定理 (定理 6.5) より

$$\cos\gamma = \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b}. \tag{6.2}$$

同様に，

$$\cos\alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}, \quad \cos\beta = \frac{\cosh a \cosh c - \cosh b}{\sinh a \sinh c}. \tag{6.3}$$

定理 6.6 の証明でみたように，

$$\sin^2\gamma = \frac{1 - (\cosh^2 a + \cosh^2 b + \cosh^2 c) + 2\cosh a \cosh b \cosh c}{\sinh^2 a \sinh^2 b}. \tag{6.4}$$

また，双曲正弦定理 (定理 6.6) より，

$$\sin\alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c}\sin\gamma, \quad \sin\beta = \frac{\sinh b}{\sinh c}\sin\gamma. \tag{6.5}$$

したがって，つぎの式の左辺の分母分子に $\sinh a \sinh b \sinh^2 c$ をかけて，(6.2) と (6.3) を用いて分子を変形，(6.5) を用いて分母を変形して，(6.4) を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}\\
&=\frac{(\sinh b\sinh c\cos\alpha)(\sinh a\sinh c\cos\beta)+\sinh^2 c(\sinh a\sinh b\cos\gamma)}{\sinh a\sinh b(\sinh c\sin\alpha)(\sinh c\sin\beta)}\\
&=\frac{(\cosh b\cosh c-\cosh a)(\cosh a\cosh c-\cosh b)+\sinh^2 c(\cosh a\cosh b-\cosh c)}{\sinh^2 a\sinh^2 b\sin^2\gamma}\\
&=\frac{(\cosh b\cosh c-\cosh a)(\cosh a\cosh c-\cosh b)+(\cosh^2 c-1)(\cosh a\cosh b-\cosh c)}{1-(\cosh^2 a+\cosh^2 b+\cosh^2 c)+2\cosh a\cosh b\cosh c}\\
&=\cosh c\,\frac{1-(\cosh^2 a+\cosh^2 b+\cosh^2 c)+2\cosh a\cosh b\cosh c}{1-(\cosh^2 a+\cosh^2 b+\cosh^2 c)+2\cosh a\cosh b\cosh c}\\
&=\cosh c.
\end{aligned}
$$

□

系 6.8. 双曲余弦定理で $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ とすると，次の双曲ピタゴラスの定理が成り立つ．

$$\cosh c=\cosh a\cosh b.$$

逆にこの等式が成り立てば，$\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ である．

注意 6.9. a,b,c を微小にとって，a,b,c の 3 次以上の項を無視すれば，通常のピタゴラスの定理

$$1+\frac{c^2}{2}=1+\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2},\qquad c^2=a^2+b^2$$

となる．

定理 6.10. $z_1,z_2,z_3\in\mathcal{D}$, $z_1',z_2',z_3'\in\mathcal{D}$ とし，$d(z_1,z_2)=d(z_1',z_2')$, $d(z_1,z_3)=d(z_1',z_3')$, $d(z_2,z_3)=d(z_2',z_3')$ とする．そのとき，$g\in G^+$ が存在して，

$$g(z_1)=z_1',\quad g(z_2)=z_2',\quad g(z_3)=z_3'$$

が成り立つ．

[証明] $g_1(z)=g_{z_1}(z)$, $g_2(z)=g_{z_1'}(z)$ とおけば，$g_1,g_2\in G$ であり，$g_1(z_1)=0$, $g_2(z_1')=0$ となる．$g=g_2^{-1}\circ g_1$ とおけば，$g\in G$ であり，$g(z_1)=z_1'$ である．よって，はじめから $z_1=z_1'$ であるとしてよい．また，$g(z_1)=0$ となる $g\in G$ でうつして考えれ

ば，はじめから $z_1 = 0$ であるとしてよい．そのとき，$d_h(0, z_2) = d_h(0, z_2')$ と補題 5.6 から，z_2, z_2' は O を中心とする 1 つの円上にある．よって，$\beta = \dfrac{z_2'}{z_2}$ とおけば，$|\beta| = 1$ であり，$g(z) = \beta z$ の形の 1 次分数変換によって $g(z_2) = z_2'$, $g(0) = 0$ とできる．よって，はじめから $z_2 = z_2'$ としてよい．さらに，$g(z) = \beta z$, $|\beta| = 1$ の形の 1 次分数変換によって $g(z_2) = g(z_2')$ は正の実軸上にあるようにできる．よって，はじめから $z_2 = z_2' = b$, $0 < b < 1$ としてよい．次に，$d_h(0, z_3) = d_h(0, z_3')$ と補題 5.6 から，z_3, z_3' は $z_1 = 0$ を中心としたある円 C の上にある．最後に，$d_h(b, z_3) = d_h(b, z_3') = r$ とおいて図形

$$C' = \{z \in \mathcal{D} : d_h(z, b) = r\}$$

を考える．補題 5.8 の証明でみたように C' は $\mathcal{D}$ 内の円である．$z_3, z_3' \in C \cap C'$ である．図 13 の左図のように実軸と C の交点 P, Q を考える．$b \neq 0$ より $d(P, b) > d(Q, b)$ または $d(P, b) < d(Q, b)$ であり，P と Q が両方とも C' 上にあることはない．ゆえに，$C \neq C'$ である．したがって，図 13 の右図のように $C \cap C'$ は 2 点からなり，この 2 点は実軸に関して対称である．よって，$z_3 = z_3'$ または $z_3' = \overline{z}_3$ である ($z_3 = \overline{z}_3$ であり，C と C' が 1 点 z_3 で接している特別な場合も含まれる)．後者の場合には $\psi_0 \in G^+$ によって，$\psi_0(z_3) = z_3'$, $\psi_0(z_1) = z_1 = z_1'$, $\psi_0(z_2) = z_2 = z_2'$ である． □

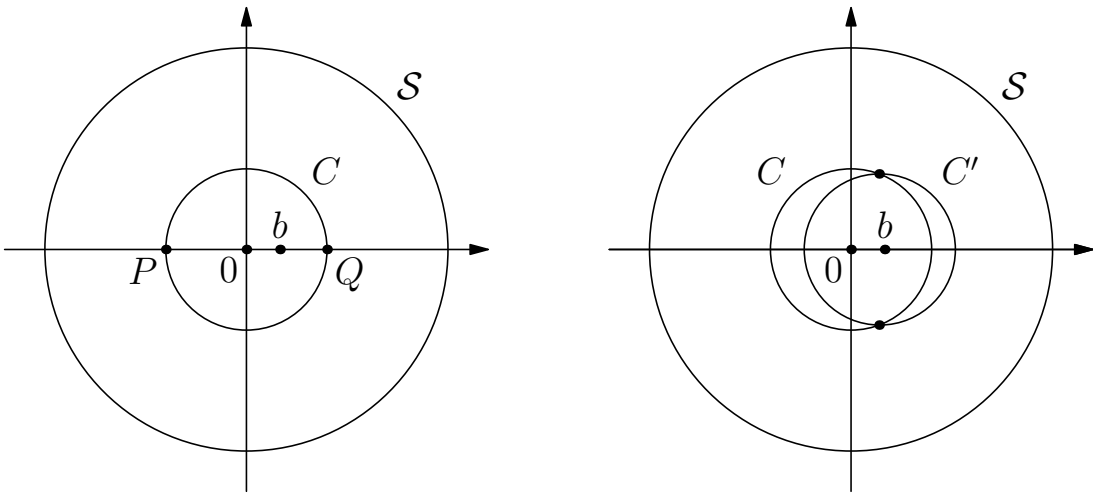


図 13　$C \neq C'$ (左)　　$C \cap C'$ (右)

注意 6.11. 定理 6.10 は，2 つの双曲三角形について，3 辺相等ならばそれらは合同であることを示している．第 2 余弦定理 (定理 6.7) より，3 角相等から 3 辺相等がでる．余弦定理 (定理 6.5) より，2 辺夾角相等から 3 辺相等がでる．第 2 余弦定理より，2 角夾辺相等から 3 角相等がでて，3 辺相等がでる．

7　平行と超平行

ユークリッド平面では，2 つの異なる直線は 1 点で交わるか，または平行であった．ポアンカレ円板における 2 つの双曲直線の関係について調べよう．ここでは，双曲直線は 2 点を結ぶ双曲線分を延長した円または直線とポアンカレ円板 $\mathcal{D}$ の共通部分を表すとする．

補題 7.1. l をポアンカレ円板における双曲直線，$z_1 \in \mathcal{D}$ を l 上の点とする．そのとき，l と直交し z_1 を通る双曲直線 m がただ 1 つ存在する．

[証明]　$g(z) = g_{z_1}(z) = \dfrac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$ とおけば，$g \in G$ であり，$g(z_1) = 0$ である．$g(l)$ は 0 を通る双曲直線だから直径である．このとき，$g(l)$ と直交する直径 m' がただ 1 つ存在する．$m = g^{-1}(m')$ とおけば m は z_1 において l と直交する双曲直線であり，一意的に定まる．　□

補題 7.2. l をポアンカレ円板における双曲直線，$z_1 \in \mathcal{D}$ を l 上にない点とする．そのとき，l と直交し z_1 を通る双曲直線 m がただ 1 つ存在する．z_2 を l と m の交点とすると，

$$d_h(z_1, z_2) \leq d_h(z_1, z), \quad \forall z \in l.$$

ここで，等号が成立するのは $z = z_2$ のときに限る．

[証明]　$g(z) = \dfrac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$ とおけば，$g \in G$ であり，$g(z_1) = 0$ である．$g(l)$ も双曲直線

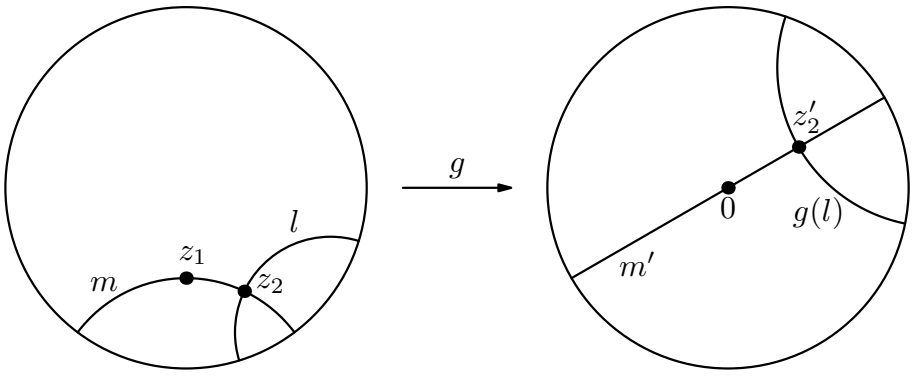


図 14　点から双曲直線への最短距離

であり，$z_1 \notin l$ より $0 = g(z_1) \notin g(l)$ である．0 を通る双曲直線は直径であり，$g(l)$ は理想境界 $\mathcal{S}$ と直交する円である．$g(l)$ の中心と 0 を結ぶ直線に含まれる直径を m' とすれば，m' と $g(l)$ は明らかに直交し，$g(l)$ と直交する直径は m' ただ 1 つである．$g(l)$ と m'

の交点を z_2' とすれば，$z' \in g(l)$ に対して，補題 5.6 より $d_h(0,z') = \log \dfrac{1+|z'|}{1-|z'|}$ であり，これは $|z'|$ が小さいほど小さいから，明らかに z_2' は

$$d_h(0,z_2') \leq d_h(0,z'), \quad \forall z' \in g(l)$$

を満たすただ 1 つの $g(l)$ の点である．$m = g^{-1}(m')$, $z_2 = g^{-1}(z_2')$ とおけば，m は $\mathcal{S}$ と直交するから双曲直線であり，l と直交するただ 1 つの双曲直線である．z_2 は l と m の交点である．任意の $z \in l$ に対して，$g(z) \in g(l)$ だから

$$\begin{aligned} d_h(z_1,z_2) &= d_h(g(z_1),g(z_2)) = d_h(0,z_2') \\ &\leq d_h(0,g(z)) = d_h(g(z_1),g(z)) = d_h(z_1,z). \end{aligned}$$

ここで，等号が成立するのは，$g(z) = z_2'$, $z = g^{-1}(z_2') = z_2$ のときに限る． □

定義 7.3. l, m を $\mathcal{D}$ における異なる 2 つの双曲直線とする．$l \cap m = \emptyset$ とするとき，次の 2 つの場合がある．

1. l と m は理想境界 $\mathcal{S}$ における 1 点を共有する．このとき，l と m は**平行**であるという．
2. l と m は $\mathcal{D} \cup \mathcal{S}$ においても交わらない．このとき，l と m は**超平行**であるという．

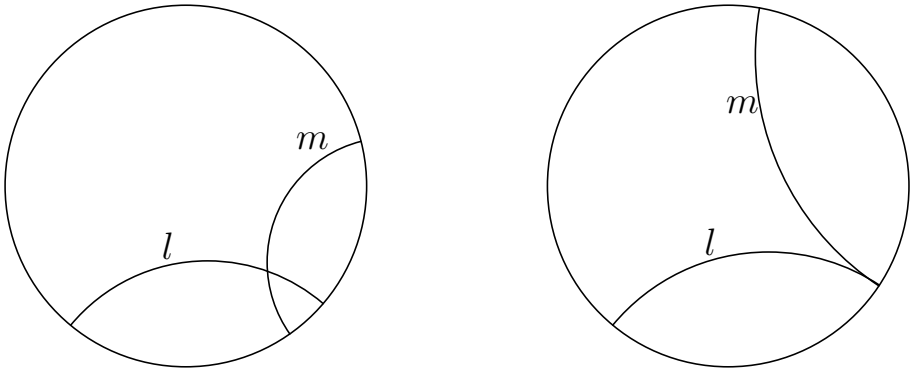


図 15　交わる双曲直線 (左)　平行な双曲直線 (右)

命題 7.4. l, m を $\mathcal{D}$ における交わらない 2 つの双曲直線とする．

(i) l と m が超平行のとき，l と m の共通垂線 n がただ 1 つ存在する．l と n の交点を z_1，m と n の交点を z_2 とすれば，

$$d_h(z_1,z_2) \leq d_h(z_1',z_2'), \qquad \forall z_1' \in l,\ z_2' \in m.$$

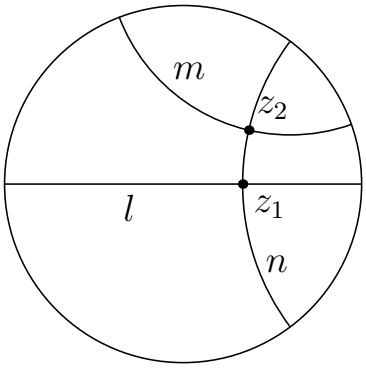


図 16　超平行な 2 つの双曲直線 l, m の共通垂線 n

ここで，等号が成立するのは $z_1' = z_1$, $z_2' = z_2$ のときに限る．

(ii) l と m が平行のとき，l と m の共通垂線は存在しない．また，$z_1 \in l$, $z_2 \in m$ で $d_h(z_1, z_2)$ がいくらでも 0 に近いものが存在する．

8　多角形の面積

定義 8.1. ポアンカレ円板 $\mathcal{D}$ の中で有限個の双曲直線で囲まれる図形のことを多角形とよんだ．しかし，いくつかの頂点 (頂点だけが) 理想境界 $\mathcal{S}$ 上にある場合を考えると便利であるので，このような図形を**理想多角形**とよぶことにする．

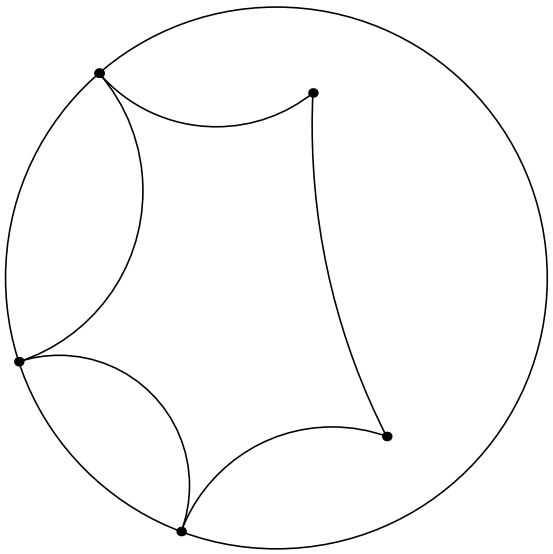


図 17　円板モデルでの理想多角形

多角形 $P \subset \mathcal{D}$ に対して，実数 $\mathrm{Area}(P)$ を対応させるもので次の条件を満たすものを**面積**とよぶことにする．

条件 8.2.

(1) $\mathrm{Area}(P)$ は正の実数．
(2) 2 つの多角形 P_1 と P_2 がその辺でしか交わらないとする．和集合 $P_1 \cup P_2$ は多角形であるが，その面積は P_1 と P_2 の面積の和である．すなわち，

$$\mathrm{Area}(P_1 \cup P_2) = \mathrm{Area}(P_1) + \mathrm{Area}(P_2).$$

(3) 2 つの多角形 P_1 と P_2 が合同であれば，$\mathrm{Area}(P_1) = \mathrm{Area}(P_2)$ である．ここで，P_1 と P_2 が合同であるとは，$g \in G^+$ が存在して，$g(P_1) = P_2$ となることであった．

条件 8.2 を満たすような面積 $\mathrm{Area}(P)$ は全体を定数倍することを除いてただ 1 通りしかないことが知られている．

定義 8.3. $P \subset \mathcal{D}$ を多角形とするとき，

$$\mathrm{Area}(P) = \int_P \frac{4dxdy}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

命題 8.4. 定義 8.3 の $\mathrm{Area}(P)$ は条件 8.2 を満たす．

定理 8.5. ポアンカレ円板の三角形 $\triangle PQR$ において，$\alpha = \angle RPQ$, $\beta = \angle PQR$, $\gamma = \angle QRP$ とおけば，面積は次の公式で与えられる．

$$\mathrm{Area}(\triangle PQR) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

系 8.6. ポアンカレ円板における三角形の内角の和は π より小さい．

定理 8.7. $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ とすると，3 つの内角が α, β, γ であるようなポアンカレ円板の三角形が存在する．

三角法の最後で述べたように，定理 8.7 の三角形はすべて合同である．これはユークリッド幾何とは異なる双曲幾何の特徴である．

9 双曲平面のタイル張り

定義 9.1. $l \subset \mathcal{D}$ を双曲直線とするとき，l に関する**鏡映** R_l とは，次のように定義される群 G^+ の元である：$P \in \mathcal{D}$ とする．P を通って l に垂直な双曲直線 m を考える (補題

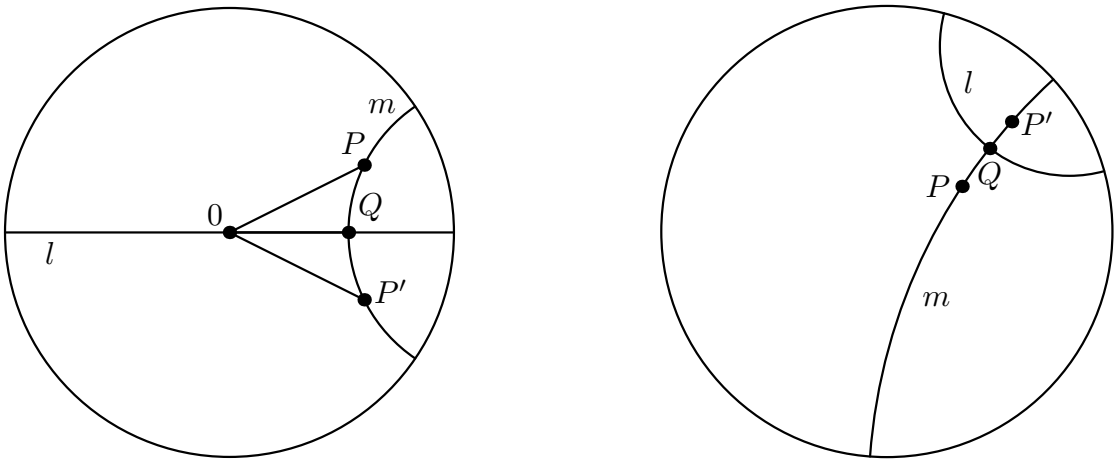


図 18　双曲直線に関する鏡映

7.2)．l と m の交点を Q とする．$P' \in m$ で，$d_h(P', Q) = d_h(P, Q)$ かつ，Q からみて P と反対側にある点 P' がただ 1 つ存在する．このとき，$R_l(P) = P'$ と定義する (図 18)．

補題 9.2. $R_l \in G^+$.

[証明]　双曲直線 l に関する鏡映 R_l を求めてみる．まず，l が実軸上の直径のときは，$z \in \mathcal{D}$ を通り l と垂直に交わる双曲直線を m とする．m は中心が実軸上にある円だから，$\bar{z} \in m$ である．l と m の交点を a とすれば，a は実数だから

$$d_h(z, a) = \log \frac{|z-a|}{|1-az|} = \log \frac{|\bar{z}-a|}{|1-a\bar{z}|} = d_h(\bar{z}, a).$$

したがって，実軸に関する鏡映は $R_l(z) = \bar{z}$ であり，これは複素共役写像 ψ_0 である．

一般の場合．P を通って l に垂直な双曲直線を m とし，l と m の交点を Q とする．適当な $g \in G$ で l をうつして，$l' = g(l)$ が実軸上の直径となるようにできる．$m' = g(m)$, $P' = g(P)$, $Q' = g(Q)$ とおけば，m' は P' を通り l' と垂直に交わる双曲直線であり，Q' は l' と m' の交点である．$P'' = R_{l'}(P')$ とおけば，$d_h(P', Q') = d_h(P'', Q')$ であり，Q' からみて P'' は P' と反対側にある．このとき，

$$\begin{aligned} d_h(g^{-1}(P''), Q) &= d_h(P'', g(Q)) = d_h(P'', Q') \\ &= d_h(P', Q') = d_h(g(P), g(Q)) = d_h(P, Q) \end{aligned}$$

であり，Q からみて $g^{-1}(P'')$ と $g^{-1}(P') = P$ は反対側にある．よって，

$$R_l(P) = g^{-1}(P'') = g^{-1}(R_{l'}(g(P)))$$

である．$R_{l'} = \psi_0$ だから，$R_l = g^{-1} \circ \psi_0 \circ g \in G^+$ である．　□

注意 9.3. R_l を具体的に求めてみる．

l が円の場合．円 l の中心を α, $|\alpha| > 1$ とする．

$$g(z) = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \frac{z - \dfrac{1}{\alpha}}{1 - \dfrac{1}{\bar{\alpha}} z} = \frac{\alpha z - 1}{z - \bar{\alpha}}$$

とおけば，$g \in G$ である．このとき，$f = g \circ \psi_0 \in G^+$ である．$z \in l$ は

$$z\bar{z} - \bar{\alpha} z - \alpha \bar{z} + 1 = 0$$

を満たすから，

$$z = \frac{\alpha \bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}} = g(\bar{z}) = f(z)$$

である．$0 \notin l$ であり，$f(0) = 1/\bar{\alpha} \neq 0$ だから，$f \neq \mathrm{id}$ である．よって，$f \neq \mathrm{id}$ は l のすべての点を固定する G^+ の元である．

$$f(z) - \alpha = \frac{\alpha \bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}} - \alpha = \frac{\alpha\bar{\alpha} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}} = \frac{|\alpha|^2 - 1}{|z - \alpha|^2}(z - \alpha)$$

であり，円 l の半径は $r = \sqrt{|\alpha|^2 - 1}$ だから，$f(z), z, \alpha$ は一直線上にあり，

$$|f(z) - \alpha| \cdot |z - \alpha| = r^2$$

となる．これは $f(z)$ が z を円 l に関して反転した点であることを示している．P を通り l と垂直に交わる双曲直線を m として，l と m の交点を Q とすれば，上のことから $f(P)$ は Q からみて P と反対側にあり，

$$d_h(f(P), Q) = d_h(f(P), f(Q)) = d_h(P, Q)$$

である．よって，$f(P) = R_l(P)$ である．ゆえに，$R_l = f \in G^+$ である．

l が直径の場合．l を $\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} = 0$ で表される直径とする．$\beta = \dfrac{-i\bar{\alpha}}{|\alpha|}$ とおけば，$|\beta| = 1$ だから，$g(z) = \beta z$ とおくと，$g \in G$ である．$z \in l$ ならば

$$\overline{g(z)} = \bar{\beta}\bar{z} = \frac{i\alpha\bar{z}}{|\alpha|} = -\frac{i\bar{\alpha} z}{|\alpha|} = \beta z = g(z)$$

より，$g(z) \in \mathbb{R}$ であり，$g(l)$ は実軸に含まれる直径である．補題 9.2 の証明でみたように $R_l(z) = (g^{-1} \circ \psi \circ g)(z) = \beta^{-2}\bar{z}$ である．

補題 9.4. l_1 と l_2 が原点を通る双曲直線で l_1 と l_2 のなす角を θ とすれば，$R_{l_1} R_{l_2}$ は原点のまわりの角 2θ の回転である．

[証明]　$l_k = \{z \in \mathcal{D} : \bar{\alpha}_k z + \alpha_k \bar{z} = 0\}$ $(k = 1, 2)$ とする．$\alpha_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ $(k = 1, 2)$ とかくと，$\theta_1 - \theta_2 = \theta$ である．上の注意で見たように

$$\beta_k = \frac{-i\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|} = -i(\cos\theta_k - i\sin\theta_k)$$

とおけば，$R_{l_k}(z) = \beta_k^{-2}\bar{z}$ である．したがって，

$$R_{l_1}R_{l_2}(z) = \beta_1^{-2}\overline{\beta_2^{-2}\bar{z}} = \beta_2^2\beta_1^{-2}z.$$

ここで，

$$\begin{aligned}\beta_2\beta_1^{-1} = \beta_2\bar{\beta}_1 &= (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\\ &= \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta + i\sin\theta.\end{aligned}$$

よって，$\beta_2^2\beta_1^{-2} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ となり，$R_{l_1}R_{l_2}$ は原点のまわりの角 2θ の回転である．　□

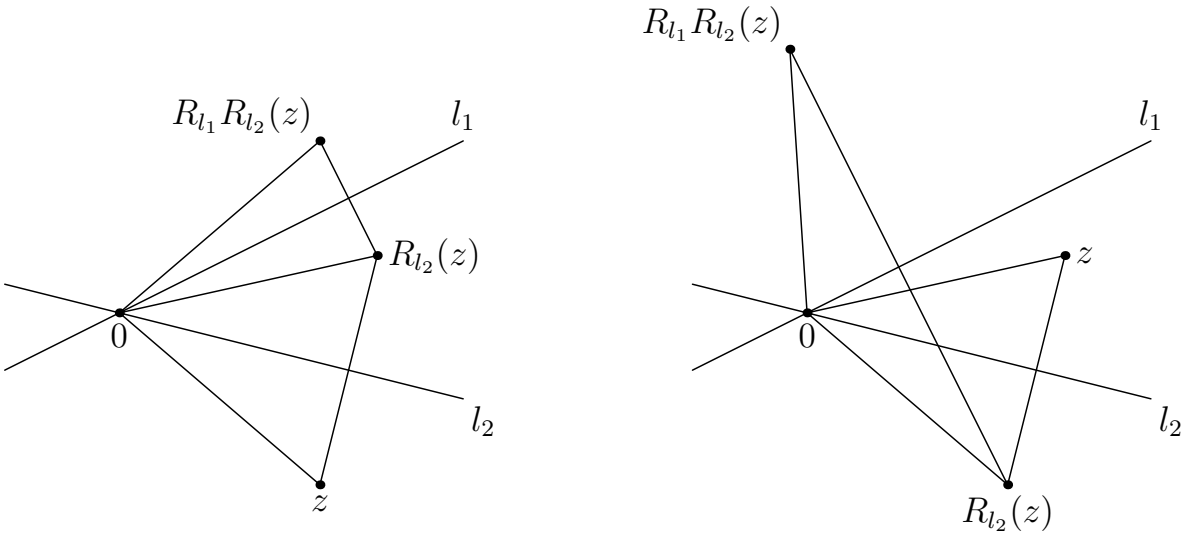


図 19　$R_{l_1}R_{l_2}$

命題 9.5. $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$, $z_1 \neq z_2$ とし，l を z_1 と z_2 を通る双曲直線とする．このとき，$f \in G^+$ が $f(z_k) = z_k$ $(k = 1, 2)$ を満たせば，$f = \mathrm{id}$ または $f = R_l$ である．

[証明]　点 z_3 が z_1 と z_2 を結ぶ双曲線分上にあるとすると三角不等式によって

$$\begin{aligned}d_h(z_1, z_2) &\leq d_h(z_1, f(z_3)) + d_h(f(z_3), z_2) = d_h(f(z_1), f(z_3)) + d_h(f(z_3), f(z_2))\\ &= d_h(z_1, z_3) + d_h(z_3, z_2) = d_h(z_1, z_2).\end{aligned}$$

したがって，$d_h(z_1, f(z_3)) + d_h(f(z_3), z_2) = d_h(z_1, z_2)$ である．これから $f(z_3)$ が z_1 と z_2 を結ぶ双曲線分上にあることがわかる．そのとき，

$$d_h(z_1, f(z_3)) = d_h(f(z_1), f(z_3)) = d_h(z_1, z_3)$$

から $f(z_3) = z_3$ が得られる．$z_3 \in l$ ならば同様にして $f(z_3) = z_3$ となることが示される．$z_3 \notin l$ ならば，z_3 を通り l と垂直に交わる双曲直線 m が一意的に定まる．定理 4.9 より $f(l)$ と $f(m)$ も垂直に交わるが，$f(l) = l$ だから l と $f(m)$ は垂直に交わる．l と m の交点を z_4 とすると，$z_4 = f(z_4) \in l \cap f(m)$ だから z_4 は l と $f(m)$ の交点でもある．補題 7.1 より $f(m) = m$ である．よって，$f(z_3) \in m$ であり，

$$d_h(f(z_3), z_4) = d_h(f(z_3), f(z_4)) = d_h(z_3, z_4)$$

だから，$f(z_3) = z_3$ または $f(z_3) = R_l(z_3)$ である．もし，すべての $z_3 \notin l$ について $f(z_3) = R_l(z_3)$ が成り立つならば，$f = R_l$ である．

そうでないとすれば，ある点 $z_3 \notin l$ において $f(z_3) = z_3$ が成り立つ．l について z_3 と同じ側にある任意の点 $z \in \mathcal{D}$ について z_3 と z を結ぶ双曲直線は l と交わらないことから $f(z) = z$ となる．よって，$f = \mathrm{id}$ である． □

系 9.6. 同一双曲直線上にない 3 点 $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{D}$ を固定するような $f \in G^+$ は恒等写像しかない．

定義 9.7. $P \subset \mathcal{D}$ を双曲多角形 (k 角形) とする．P の辺を延長して双曲直線にしたものを $l_1, \ldots, l_k$ とする．集合 $\{R_{l_1}, \ldots, R_{l_k}\}$ によって生成される G^+ の部分群を P に対する**鏡映群**とよぶ．

定義 9.8. 双曲平面 $\mathcal{D}$ の多角形による**タイル張り**とは, 双曲多角形の集合 $\{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ で次の条件を満たすものをいう．

(i) $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$.
(ii) 任意の n, m に対して，P_n と P_m は合同である．
(iii) $n \neq m$ ならば，P_n と P_m は辺または頂点でしか交わらない．

ユークリッド平面のときと比べてタイル張りの様子は異なる．定理 1.6 が成立する．すなわち，任意の $n \geq 3$ に対して，双曲平面の正 n 角形からなるタイル張りが存在する．

[定理 1.6 の証明] $n \geq 3$ に対して，q を

$$q = \begin{cases} 7, & n = 3, \\ 5, & n = 4, \\ 4, & n = 5, 6, \\ 3, & n \geq 7 \end{cases}$$

によって定める．このとき，

$$\frac{2\pi}{n} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{q} = 2\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{q}\right) < \pi$$

が成り立つ．定理 8.7 より，双曲平面の三角形でその内角が，$2\pi/n$, π/q, π/q であるものが存在する．この三角形は二等辺三角形である．双曲第 2 余弦定理により，この二等辺の (双曲的な意味での) 長さ d は

$$\cosh d = \frac{\cos\dfrac{2\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{q} + \cos\dfrac{\pi}{q}}{\sin\dfrac{2\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{q}} = \frac{1}{\tan\dfrac{\pi}{n}\tan\dfrac{\pi}{q}}$$

となる．これを n 個用意して図 6 のように張って，正 n 角形 P を作る．それぞれの内角は $2\pi/q$ である．それぞれの頂点に q 個のタイルがくるように敷き詰めていく．このようにしてできるタイル張りは凸な n 角形からなる双曲平面のタイル張りである．P の中心が原点 0 となるようにとれば，原点 0 から P の各頂点への (双曲的な意味での) 距離は d である．

$$r = \sqrt{\frac{1 - \tan\dfrac{\pi}{n}\tan\dfrac{\pi}{q}}{1 + \tan\dfrac{\pi}{n}\tan\dfrac{\pi}{q}}}$$

とおけば，P の各頂点はユークリッドの意味での原点中心の半径 r の円周上の正 n 角形の頂点になる． □

ユークリッド平面のタイル張りはあまり種類が多くないが，これに比べて双曲平面のタイル張りはずっとバラエティーに富んでいる．

次にタイル張りの対称性を考えよう．

定義 9.9. タイル張り $\{P_1, P_2, \dots\}$ の**自己同型群**とは，次の条件を満たす $g \in G^+$ 全体をいう：任意の i に対して，ある j が存在して $g(P_i) = P_j$ が成り立つ．

以後タイル張り $\mathcal{T}$ の自己同型群を $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ で表す．

定義 9.10. タイル張り $\mathcal{T} = \{P_1, P_2, \dots\}$ が**対称**であるとは，任意のタイル P_i, P_j に対して，$\gamma(P_i) = P_j$ なる $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ が存在することである．

定義 9.11. Γ を群 G^+ の部分群とする．ある双曲多角形 P が Γ の**基本領域**であるとは，次の (i), (ii) が成り立つことをいう．

(i) $\mathcal{D}$ の任意の点 p に対して，$\gamma \in \Gamma$ が存在して $\gamma(p) \in P$.
(ii) $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \mathrm{id}$ とすると，$P \cap \gamma P$ は空集合であるかまたは P の辺に含まれる．

定義 9.12. G^+ の部分群 Γ が**離散的**であるとは，任意の $R > 0$ と任意の点 $p_0 \in \mathcal{D}$ に対して，集合

$$\{\gamma \in \Gamma : d_h(\gamma(p_0), p_0) \leq R\}$$

が有限集合であることをいう．

定義 9.13. Γ を G^+ の部分群とする．Γ が**一様**であるとは，点 $p_0 \in \mathcal{D}$ と実数 R が存在して次のことが成り立つことをいう．

任意の $p \in \mathcal{D}$ に対して，$\gamma \in \Gamma$ が存在して，$d_h(p_0, \gamma(p)) \leq R$.

定理 9.14 (ポアンカレ)**.** 多角形 P について次の 2 条件は互いに同値である．

(i) P に対する鏡映群は一様かつ離散的であり，P はその基本領域である．
(ii) P の各々の頂点での内角は π を割り切る．

定理 9.14 からどんな群ができるかを考えるために，P が三角形である場合を考える．定理 9.14 の条件 (ii) を満たすようにするためには，P の 3 つの内角は $\pi/k_1, \pi/k_2, \pi/k_3$ でなければならない (k_1, k_2, k_3 は自然数)．これを内角とする三角形が存在するためには定理 8.7 より

$$\frac{\pi}{k_1} + \frac{\pi}{k_2} + \frac{\pi}{k_3} < \pi \tag{9.1}$$

である．同様に，ユークリッド平面では

$$\frac{\pi}{k_1} + \frac{\pi}{k_2} + \frac{\pi}{k_3} = \pi \tag{9.2}$$

である．$k_1 \leq k_2 \leq k_3$ とすると，(9.2) を満たすものは $3/k_1 \geq 1$ より $1 < k_1 \leq 3$ である．$k_1 = 2$ のとき，

$$\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{2}, \quad k_2 k_3 - 2k_2 - 2k_3 = 0, \quad (k_2 - 2)(k_3 - 2) = 4.$$

よって，$(k_2, k_3) = (3,6), (4,4)$ である．$k_1 = 3$ のとき，

$$\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{2}{3}, \quad 2k_2k_3 - 3k_2 - 3k_3 = 0, \quad (2k_2 - 3)(2k_3 - 3) = 9.$$

$3 \leq k_2 \leq k_3$ より，$(k_2, k_3) = (3,3)$ である．したがって，(9.2) を満たす (k_1, k_2, k_3) は $(2,3,6), (2,4,4), (3,3,3)$ である．また，

$$\frac{\pi}{k_1} + \frac{\pi}{k_2} + \frac{\pi}{k_3} > \pi \tag{9.3}$$

となるのは (球面幾何の場合)，$3/k_1 > 1$ より $1 < k_1 < 3$, $k_1 = 2$ である．そのとき，

$$\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} > \frac{1}{2}, \quad (k_2 - 2)(k_3 - 2) < 4.$$

よって，$(k_2, k_3) = (2, r), (3,3), (3,4), (3,5)$ である (r は 2 以上の任意の自然数)．したがって，$(2,2,r)$,$(2,3,3)$,$(2,3,4)$,$(2,3,5)$,$(2,3,6)$,$(2,4,4)$,$(3,3,3)$ 以外のすべての場合には双曲平面の三角形で内角が $\pi/k_1, \pi/k_2, \pi/k_3$ となるものがとれる．

参考文献

[1] 深谷賢治，双曲幾何，岩波書店， 2004.

[2] 小島定吉，多角形の現代幾何学，牧野書店，1993.

[3] 松本幸夫，タイル張りとトポロジー，http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/KOUKAI/text-h18/hiroshimadai06.pdf

[4] 杉原厚吉，エッシャー・マジック – だまし絵の世界を数理で読み解く –，東京大学出版会，2011.

[5] 谷口雅彦・奥村善英，双曲幾何学への招待 – 複素数で視る –，培風館，1996.

[6] P. M. H. ウィルソン，曲空間の幾何学，朝倉書店，2009.

索引

■ あ 行
1 次分数変換 16
一様 46

■ か 行
基本領域 46
鏡映 40
鏡映群 44
共役複素数 14
虚数単位 14
虚部 14
距離 9
合同 29

■ さ 行
三角形 30
三角不等式 11
自己同型群 45
実部 14
絶対値 14
双曲線正弦関数 30
双曲線正接関数 30
双曲線分 28
双曲平面 27
双曲線余弦関数 30

■ た 行
対称 46
タイル張り 44
多角形 30
超平行 38

■ な 行
内積 11
長さ 11

■ は 行
複素数 14
複素平面 15
平行 38
ベクトル 11
ベクトル空間 11
ポアンカレ円板 27

■ ま 行
面積 40

■ や 行
ユークリッド平面 11

■ ら 行
離散的 46
理想境界 27
理想多角形 39