平成 28 年度　上越教育大学公開講座

連分数

日時：9 月 2 日 (金)，9 月 9 日 (金)，9 月 16 日 (金)，9 月 23 日 (金)，9 月 30 日 (金)
19:00〜21:00

場所：上越教育大学　講義棟 2 階 201 教室

目次

はじめに

分母にさらに分数が含まれているような分数のことを連分数という．無限に続く連分数まで用いれば，どんな数も連分数として表せ，それを途中で止めた分数によって近似することができる．本講座では連分数の基本的な性質と様々な問題への応用について，具体的な計算を通して解説する．

この講座を準備するにあたり，ジョセフ・H. シルヴァーマンの著書 [3] を主に参考にした．

1　黄金数

$\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を**黄金数**という．φ は 2 次方程式

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \tag{1.1}$$

を満たす．縦の長さが 1 で横の長さが φ の長方形から一辺の長さが 1 の正方形を取り除いたときの残りの長方形の辺の比は (1.1) より

$$(\varphi - 1) : 1 = 1 : \varphi$$

であり，もとの長方形と相似である (図 1)．$1 : \varphi$ を**黄金比**という．

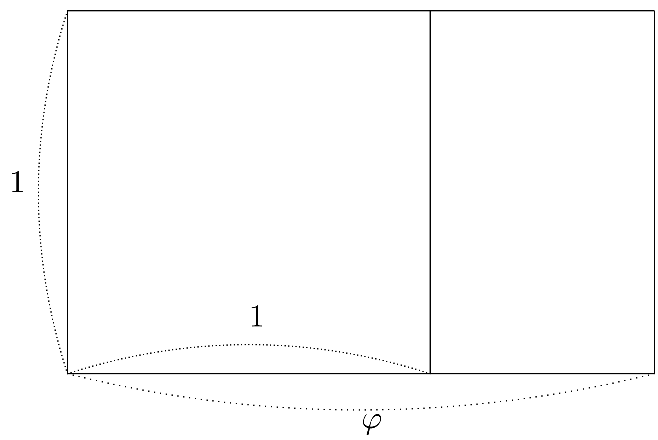


図 1　黄金比

黄金数 φ は正 5 角形にも現れる．一辺の長さが 1 の正 5 角形を考える (図 2)．三角形

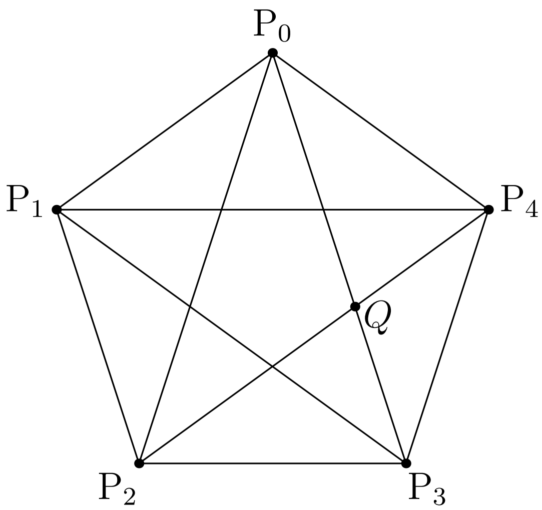


図 2　正 5 角形

の内角の和は 180°，四角形の内角の和は 360°，五角形の内角の和は 540° である．したがって正 5 角形の 1 つの外角は

$$\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

である．よって $P_0P_1 = P_1P_2 = 1$, $\angle P_0P_1P_2 = 108^\circ$ である．$\triangle P_0P_1P_2$ は二等辺三角形だから

$$\angle P_1P_0P_2 = \angle P_1P_2P_0 = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

である．$\triangle P_2P_3P_4$ は $\triangle P_0P_1P_2$ と合同だから $\angle P_3P_2P_4 = 36^\circ$ である．よって

$$\angle P_0P_2P_4 = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ.$$

$\triangle P_0P_2P_3$ と $\triangle P_2P_4P_0$ は合同な二等辺三角形だから

$$\angle P_3P_0P_2 = \angle P_0P_2P_4 = 36^\circ.$$

したがって $\triangle QP_0P_2$ は $\triangle P_1P_2P_0$ と合同な二等辺三角形である．よって

$$QP_0 = QP_2 = P_1P_2 = 1$$

である．したがって二等辺三角形 $\triangle P_2P_3Q$ は $P_0P_2P_3$ と相似である．$P_0P_3 = x$, $P_3Q = y$ とおけば

$$1 := y = x : 1, \quad xy = 1.$$

$$x = 1 + y = 1 + \frac{1}{x}, \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

$x > 0$ より

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

三角関数を使えば次のように $x = P_0P_3$ を求めることができる．$\theta = 36^\circ$ とおく．$108^\circ = 3\theta = 180^\circ - 2\theta$ だから三角形 $P_0P_1P_2$ に余弦定理を用いれば

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \cos 3\theta = 2 - 2\cos 3\theta.$$

三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{1.2}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{1.3}$$

において $\beta = \alpha$ とおけば，倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{1.4}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{1.5}$$

を得る．(1.3) で $\beta = 2\alpha$ とおけば，3 倍角公式

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha\\ &= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha\\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.\end{aligned} \tag{1.6}$$

$\theta = 36^\circ$ について $3\theta = 180^\circ - 2\theta$ だから

$$\cos 3\theta = \cos(180^\circ - 2\theta) = -\cos 2\theta.$$

(1.6) と (1.5) より

$$\begin{gathered}4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -2\cos^2\theta + 1,\\ 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0,\\ (\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) = 0,\\ \cos\theta = -1, \quad \cos\theta = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}.\end{gathered}$$

$0 < \cos\theta < 1$ より $\cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\varphi}{2}$ である．

$$\begin{gathered}x^2 = 2 - 2\cos 3\theta = 2 + 2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta,\\ x = \pm 2\cos\theta.\end{gathered}$$

$x > 0$ より $x = 2\cos\theta = \varphi$ である．

黄金数は植物にも現れる (図 3，4)．$A = \dfrac{360^\circ}{1+\varphi} = 137.507764\cdots^\circ$ とおき**黄金角**という．

「それぞれの種は，黄金角の整数倍の角度に並んでいて，中心からの距離は平方根に比例する．黄金角を A とすると，それぞれの種が位置している角度は

$$A,\ 2A,\ 3A,\ 4A,\ 5A,\ 6A,\ \ldots$$

となり，中心からの距離は

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \ldots$$

に比例する．」([2]，p.222)．

図 3　ひまわりの花

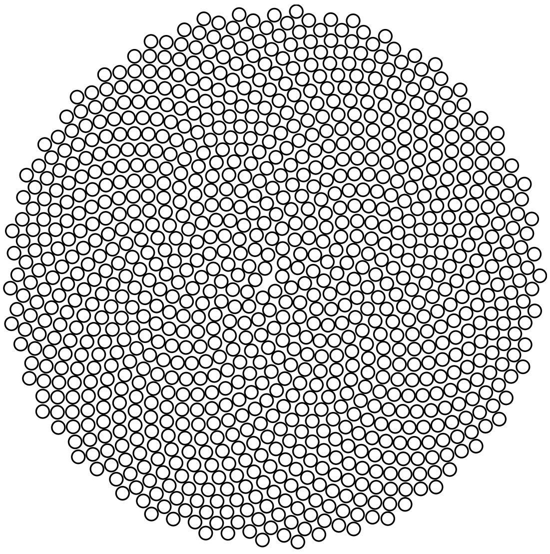


図 4　ひまわりの花に見られる螺線

2　平方三角数

平方数 $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ は正方形に並べた点の個数になっている．

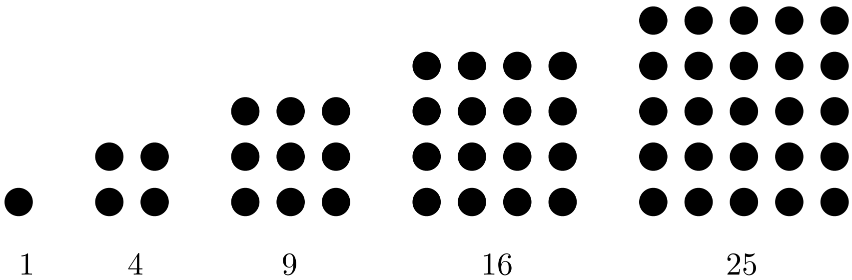


図 5　平方数

三角数 $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ は三角形に並べた点の個数になっている．

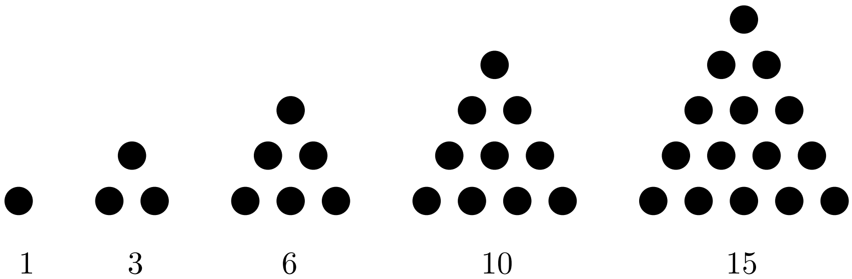


図 6　三角数

ここで三角数の中に 1 以外で平方数にもなるものがあるか，という自然な疑問がでてくる．三角数を求めていくと

$$1,\ \ 3\ \ ,6,\ \ 10,\ \ 15,\ \ 21,\ \ 28,\ \ 36,\ \ \ldots$$

となるから，36 という平方数がみつかる．

$$36 = 6^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8.$$

他にも解はあるだろうか．これを調べるためには，三角数を一般的に表す次の公式が必要になる．

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.1}$$

これは次のようにして求められる．$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ とおけば，

$$\begin{array}{rccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ S & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \\ & = & n(n+1). & & & & & & & & & & \end{array}$$

したがって，$S = \dfrac{n(n+1)}{2}$ である．この計算は，次のように図を用いて説明できる．

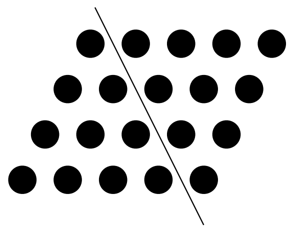


図 7　三角数の求め方

三角数 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ が平方数 m^2 であるとする．

$$m^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

両辺に 8 をかければ，

$$8m^2 = 4n^2 + 4n = (2n+1)^2 - 1, \quad (2n+1)^2 - 2(2m)^2 = 1$$

を得る．$x = 2n+1$, $y = 2m$ とおけば，

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

となる．逆に，自然数 x, y が上の方程式を満たせば，$x^2 = 2y^2 + 1$ より，x^2 は奇数であり，したがって，x は奇数である．$x = 2n+1$ とかけば，

$$4n^2 + 4n + 1 = 2y^2 + 1, \quad y^2 = 2n^2 + 2n$$

である．これから，y^2 は偶数であり，したがって，y は偶数である．$y = 2m$ とかけば，

$$4m^2 = 2n^2 + 2n, \quad m^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

となり，平方数である三角数を得る．また，このとき，

$$n = \frac{x-1}{2}, \quad m = \frac{y}{2}$$

である．以上によって，平方数である三角数 (以下，**平方三角数**とよぶ) を求めることは，方程式

$$x^2 - 2y^2 = 1 \tag{2.2}$$

の自然数解 x, y を求めることと同じである．y が偶数の値をとるときの，$2y^2+1$ の値を計算すれば，次の表を得る．

y	2	4	6	8	10	12	14	16	$\cdots$
$2y^2+1$	9	33	73	129	201	289	393	513	$\cdots$
x	3					17			

$y = 2$, $x = 3$ は平方三角数 1 に対応し，$y = 12$, $x = 17$ は平方三角数 36 に対応する．これをもっと計算していくと，$y = 70$ のとき，$2y^2 + 1 = 9801 = 99^2$, $x = 99$ を得る．$n = \dfrac{99-1}{2} = 49$, $m = \dfrac{70}{2} = 35$ であり，$49^2 = \dfrac{35 \times 36}{2}$ は平方三角数である．

$$49^2 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 34 + 35.$$

このような解は無数にあるか．あるとすると，どうやって求められるか．それは，$\sqrt{2}$ を使うとうまくいく．$x^2 - 2y^2 = 1$ の左辺は有理数の範囲では因数分解できないが，$\sqrt{2}$ を使うと，

$$(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1$$

とかきなおせる．これに最小解である $x = 3$, $y = 2$ を代入すると

$$(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1 \tag{2.3}$$

である．この両辺を 2 乗してみる．

$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

ここで

$$\begin{aligned}
\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 &= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2}, \\
\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 &= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 = 9 - 12\sqrt{2} + 8 = 17 - 12\sqrt{2}
\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}
(17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2}) &= 1, \\
17^2 - 2 \times 12^2 &= 1
\end{aligned}$$

となって，解 $x = 17$, $y = 12$ を得る．(2.3) の両辺を 3 乗してみる．

$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^3 \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^3 = 1^3 = 1.$$

ここで

$$\begin{aligned}
\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^3 &= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 (3 + 2\sqrt{2}) = (17 + 12\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) \\
&= 51 + 48 + (34 + 36)\sqrt{2} = 99 + 70\sqrt{2}, \\
\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^3 &= \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 (3 - 2\sqrt{2}) = (17 - 12\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) \\
&= 51 + 48 - (34 + 36)\sqrt{2} = 99 - 70\sqrt{2}
\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}
(99 + 70\sqrt{2})(99 - 70\sqrt{2}) &= 1, \\
99^2 - 2 \times 70^2 &= 1
\end{aligned}$$

となって，解 $x = 99$, $y = 70$ を得る．一般に，次が成り立つ．

命題 2.1. 自然数 x_k, y_k $(k = 1, 2, \ldots)$ を

$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k = x_k + y_k\sqrt{2}$$

によって定める．このとき方程式 (2.2) の自然数解はすべて (x_k, y_k), $k = 1, 2, \ldots$ で与えられる．特に，方程式 (2.2) は無数に多くの自然数解を持つ．

[証明]　(x_k, y_k), $k = 1, 2, \ldots$ が方程式 (2.2) を満たすことを k に関する帰納法で示す．$k = 1$ のときは，明らか．$k \geq 1$ として，(x_k, y_k) が方程式 (2.2) を満たすとする．

$$\begin{aligned}
x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{2} &= \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{k+1} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k (3 + 2\sqrt{2}) \\
&= (x_k + y_k\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) \\
&= (3x_k + 4y_k) + (2x_k + 3y_k)\sqrt{2}
\end{aligned}$$

より,

$$\begin{cases} x_{k+1} &= 3x_k + 4y_k, \\ y_{k+1} &= 2x_k + 3y_k. \end{cases} \tag{2.4}$$

このとき帰納法の仮定から,

$$\begin{aligned}x_{k+1}^2-2y_{k+1}^2&=(3x_k+4y_k)^2-2(2x_k+3y_k)^2\\&=9x_k^2+24x_ky_k+16y_k^2-2(4x_k^2+12x_ky_k+9y_k^2)\\&=x_k^2-2y_k^2=1.\end{aligned}$$

したがって,帰納法により,すべての $k=1,2,\dots$ に対して,(x_k,y_k) は方程式 (2.2) の解である.

次に,方程式 (2.2) の任意の自然数解 (u,v) をとる.$\alpha=u+v\sqrt{2}$ とおけば,$v\geq 2$ だから,

$$\alpha=\sqrt{2v^2+1}+v\sqrt{2}\geq 3+2\sqrt{2}$$

である.したがって,自然数 k を

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^k\leq\alpha<\left(3+2\sqrt{2}\right)^{k+1}\tag{2.5}$$

となるように定められる.

$$(x_k+y_k\sqrt{2})(x_k-y_k\sqrt{2})=x_k^2-2y_k^2=1$$

より,

$$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^k}=\frac{1}{x_k+y_k\sqrt{2}}=x_k-y_k\sqrt{2}$$

である.したがって,不等式 (2.5) に $\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^k}=x_k-y_k\sqrt{2}$ をかけて,

$$1\leq\alpha(x_k-y_k\sqrt{2})<3+2\sqrt{2}$$

を得る.ここで

$$\beta=\frac{\alpha}{x_k+y_k\sqrt{2}}=\alpha(x_k-y_k\sqrt{2})=s+t\sqrt{2},\quad s,t\in\mathbb{Z}$$

とおけば,

$$\begin{aligned}\beta&=(u+v\sqrt{2})(x_k-y_k\sqrt{2})\\&=(ux_k-2vy_k)+(vx_k-uy_k)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

よって,$s=ux_k-2vy_k$, $t=vx_k-uy_k$ である.

$$\begin{aligned}s^2-2t^2&=(ux_k-2vy_k)^2-2(vx_k-uy_k)^2\\&=u^2x_k^2-4uvx_ky_k+4v^2y_k^2-2(v^2x_k^2-2uvx_ky_k+u^2y_k^2)\\&=(u^2-2v^2)x_k^2-2(u^2-2v^2)y_k^2=(u^2-2v^2)(x_k^2-2y_k^2)\\&=1.\end{aligned}$$

したがって，$(s+t\sqrt{2})(s-t\sqrt{2})=1$ である．$1 \leq s+t\sqrt{2}$ だから，$s+t\sqrt{2}$ の逆数 $s-t\sqrt{2}$ は 1 以下の正の実数である．よって，$1 \leq s+t\sqrt{2} < 3+2\sqrt{2}$, $0 < s-t\sqrt{2} \leq 1$ より，

$$1 < 2s < 4+2\sqrt{2}, \quad \frac{1}{2} < s < 2+\sqrt{2}.$$

これから，$s=1,2,3$ である．$s^2-2t^2=1$ となる整数 t があるのは，$s=1$ で，$t=0$ のときだけである．ゆえに，$\beta=1$, $\alpha=x_k+y_k\sqrt{2}$, $u=x_k$, $v=y_k$ である． □

注意 2.2. 漸化式 (2.4) によって，(x_k, y_k) を計算すれば次の表を得る．ここで $m^2 = n(n+1)/2$ は $n=(x-1)/2$, $m=y/2$ によって，(x_k, y_k) に対応する平方三角数である．

k	x_k	y_k	$3x_k$	$4y_k$	$2x_k$	$3y_k$	n	m	$m^2=\frac{n(n+1)}{2}$
1	3	2	9	8	6	6	1	1	1
2	17	12	51	48	34	36	8	6	36
3	99	70	297	280	198	210	49	35	1225
4	577	408	1731	1632	1154	1224	288	204	41616
5	3363	2378	10089	9512	6726	7134	1681	1189	1413721
6	19601	13860	58803	55440	19601	13860	9800	6930	48024900

3 ペル方程式 I

前節では方程式 $x^2-2y^2=1$ の自然数解について調べた．これは**ペル方程式**と呼ばれる，次の形の方程式

$$x^2-Dy^2=1 \tag{3.1}$$

の特別な場合である．ここで D は平方数でない自然数である．$D=2$ の場合と同様に，最小解があれば，それを (x_1, y_1) とし，(x_k, y_k) $(k=1,2,\ldots)$ を

$$(x_1+y_1\sqrt{D})^k = x_k+y_k\sqrt{D}$$

によって定めれば，方程式 (3.1) の自然数解はすべて，(x_k, y_k) $(k=1,2,\ldots)$ で与えられることが全く同様にして証明される．したがって，ペル方程式について次の 2 つのことが問題になる．

- 自然数解が存在すること．
- 最小解を求めること．

$D=2,3,5,6,7,10,11,13$ について最小解を計算してみると次のようになっている．

D	2	3	5	6	7	10	11	13
x	3	2	9	5	8	19	10	649
y	2	1	4	2	3	6	3	180

$D=61$ のとき，$x^2-61y^2=1$ の最小解は $x=1766319049$, $y=226153980$ である．

上の 2 つの問題は連分数を用いることによって解決できる．

4 連分数

自然数 a,b の**最大公約数**を $\gcd(a,b)$ で表す．$\gcd(a,b)=1$ のとき，a と b は**互いに素**であるという．a,b が大きいとき，$\gcd(a,b)$ を効率よく求めよう．

補題 4.1. 自然数 a,b に対して，a を b で割ったときの余りを r とすれば，$\gcd(a,b)=\gcd(b,r)$.

[証明] a を b で割ったときの商を q とすれば,

$$a=bq+r, \qquad 0\le r<b.$$

d を a, b の公約数とする．$a=da_1$, $b=db_1$, a_1,b_1 は整数とかくと

$$r=a-bq=d(a_1-b_1q)$$

だから，d は b と r の公約数である．e を b と r の公約数として，$b=eb_2$, $r=ea_2$, a_2, b_2 は整数とかく．このとき

$$a=bq+r=e(b_2q+a_2)$$

だから，e は a, b の公約数である．したがって，a, b の公約数の集合と b, r の公約数の集合は一致する．とくに，a, b の最大公約数と b, r の最大公約数も一致する． □

定理 4.2 (ユークリッドの互除法)**.** 自然数 a,b に対して,

$$\begin{aligned}
a &= ba_0+r_1, & 0<r_1<b,\\
b &= r_1a_1+r_2, & 0<r_2<r_1,\\
r_1 &= r_2a_2+r_3, & 0<r_3<r_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
r_{n-2} &= r_{n-1}a_{n-1}+r_n, & 0<r_n<r_{n-1},\\
r_{n-1} &= r_na_n
\end{aligned}$$

とすると，$\gcd(a,b)=r_n$．

[証明]　補題 4.1 によって，$\gcd(a,b)=\gcd(b,r_1)$．これを繰り返せば，

$$\gcd(a,b)=\gcd(b,r_1)=\gcd(r_1,r_2)=\cdots=\gcd(r_{n-1},r_n)=r_n. \quad \square$$

例 4.3. $\gcd(1995,1029)$ を求める．

$$\begin{aligned}1995&=1029\times 1+966,\\1029&=966\times 1+63,\\966&=63\times 15+21,\\63&=21\times 3.\end{aligned}$$

したがって，$\gcd(1995,1029)=21$．

ユークリッドの互除法を見直してみる．$\gcd(31,23)$ を求める．

$$\begin{aligned}31&=23\times 1+8,\\23&=8\times 2+7,\\8&=7\times 1+1.\end{aligned}$$

これから，$\gcd(31,23)=1$ を得る．この計算を書き直して，

$$\begin{aligned}\frac{31}{23}&=1+\frac{8}{23},\\\frac{23}{8}&=2+\frac{7}{8},\\\frac{8}{7}&=1+\frac{1}{7}.\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{31}{23}=1+\frac{8}{23}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{7}{8}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7}}}.$$

自然数 a,b に対して，ユークリッドの互除法を行った結果を

$$\begin{aligned}a&=ba_0+r_1, && 0<r_1<b,\\b&=r_1a_1+r_2, && 0<r_2<r_1,\\r_1&=r_2a_2+r_3, && 0<r_3<r_2,\\&\cdots\cdots\cdots\\r_{n-2}&=r_{n-1}a_{n-1}+r_n, && 0<r_n<r_{n-1},\\r_{n-1}&=r_na_n\end{aligned}$$

とする．これを次のように分数の式にかきなおす．

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= a_0 + \frac{r_1}{b}, & 0 < \frac{r_1}{b} < 1,\\
\frac{b}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1}, & 0 < \frac{r_2}{r_1} < 1,\\
\frac{r_1}{r_2} &= a_2 + \frac{r_3}{r_2}, & 0 < \frac{r_3}{r_2} < 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}, & 0 < \frac{r_n}{r_{n-1}} < 1,\\
\frac{r_{n-1}}{r_n} &= a_n.
\end{aligned}$$

これをかきなおせば,

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

を得る．この右辺の形の分数を**連分数**といい，記号 $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ で表す．例えば, $\dfrac{31}{23} = [1, 2, 1, 7]$.

実数 x に対して,

$$m \leq x < m + 1$$

を満たす整数 m を $[x]$ で表す．$[x]$ を**ガウス記号**という．例えば, $[\sqrt{3}] = 1$, $[-3.14] = -4$ である.

ガウス記号を用いれば，上の計算において有理数 $\gamma = \dfrac{a}{b}$ に対して，整数 a_j と有理数 $\gamma_j = \dfrac{r_{j-1}}{r_j}$ は

$$\gamma_0 = \gamma, \quad a_j = [\gamma_j], \quad \gamma_{j+1} = \frac{1}{\gamma_j - a_j} \qquad (0 \leq j \leq n-1) \tag{4.1}$$

によって定まる.

γ が無理数のときでも，$\gamma_0 = \gamma$ として,

$$a_j = [\gamma_j], \qquad \gamma_{j+1} = \frac{1}{\gamma_j - a_j} \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

によって整数 $a_0, a_1, \ldots$ と実数 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ を定めることができる．γ が無理数であることから，$\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ も無理数であり，常に $0 < \gamma_j - a_j < 1$ となる．したがって，この計算は無限に続けることができる．

$$\gamma_j = a_j + \frac{1}{\gamma_{j+1}}$$

だから

$$\gamma = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\gamma_n}}}}} \tag{4.2}$$

である．この右辺も，記号 $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \gamma_n]$ で表す．定義から，$\gamma_j > 1$, $a_j \geq 1$ $(j = 1, 2, \ldots)$ である．

$p_0 = a_0$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ とおき, $n \geq 2$ に対して，漸化式

$$\begin{cases} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \tag{4.3}$$

によって数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ を定める．明らかに，q_n は正の整数であり，$q_n > q_{n-1}$ $(n \geq 2)$ である．また，次が成り立つ．

補題 4.4. $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

[証明]　$[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ において，a_n を変数 t にしたものを考え,

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, t] = \frac{p_{n-1}t + p_{n-2}}{q_{n-1}t + q_{n-2}} \quad (n \geq 2) \tag{4.4}$$

を帰納法で証明する．$n = 2$ のとき,

$$[a_0, a_1, t] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{t}} = a_0 + \frac{t}{a_1 t + 1} = \frac{(a_0 a_1 + 1)t + a_0}{a_1 t + 1} = \frac{p_1 t + p_0}{q_1 t + q_0}.$$

$k \geq 2$ として，$n = k$ のとき，(4.4) が成り立つとする．

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, t] = \frac{p_{k-1}t + p_{k-2}}{q_{k-1}t + q_{k-2}}.$$

$n=k+1$ のとき，

$$[a_0,a_1,\dots,a_{k-1},a_k,t]=\left[a_0,a_1,\dots,a_{k-1},a_k+\frac{1}{t}\right]=\frac{p_{k-1}\left(a_k+\dfrac{1}{t}\right)+p_{k-2}}{q_{k-1}\left(a_k+\dfrac{1}{t}\right)+q_{k-2}}$$

$$=\frac{(a_kp_{k-1}+p_{k-2})t+p_{k-1}}{(a_kq_{k-1}+q_{k-2})t+q_{k-1}}=\frac{p_kt+p_{k-1}}{q_kt+q_{k-1}}.$$

よって，$n=k+1$ のときも (4.4) は成り立ち，すべての自然数 $n\geq 2$ に対して，(4.4) が成り立つ．(4.4) で $t=a_n$ とおけば，(4.3) より

$$[a_0,a_1,\dots,a_{n-1},a_n]=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{p_n}{q_n}.$$

□

(4.4) で $t=\gamma_n$ とおけば，(4.2) より次の等式を得る．

$$\gamma=[a_0,a_1,\dots,a_{n-1},\gamma_n]=\frac{p_{n-1}\gamma_n+p_{n-2}}{q_{n-1}\gamma_n+q_{n-2}}\quad(n\geq 2). \tag{4.5}$$

補題 4.5. $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}\quad(n\geq 1)$.

[証明]　$n=1$ のとき，

$$p_1q_0-p_0q_1=(a_0a_1+1)1-a_0a_1=1$$

だから，成り立つ．$n=k$ のとき成り立つとする．

$$p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^{k-1}.$$

$n=k+1$ のとき，(4.3) より

$$\begin{aligned}p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}&=(a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_k-p_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1})\\&=p_{k-1}q_k-p_kq_{k-1}=(-1)(p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k)\\&=(-1)(-1)^{k-1}=(-1)^k.\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．したがって，すべての自然数 n に対して，補題 4.5 が成り立つ．　□

系 4.6. $\dfrac{p_n}{q_n}$ は既約分数である．

[証明]　補題 4.5 より，$\gcd(p_n, q_n) = 1$ である． □

補題 4.5 の両辺を $q_{n-1}q_n$ で割れば，

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_n} \tag{4.6}$$

を得る．次の等式も成り立つ．

補題 4.7. $p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n = (-1)^n a_n \quad (n \geq 2)$.

[証明]　(4.3) と補題 4.5 より

$$\begin{aligned} p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n &= (a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-2} - p_{n-2}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) \\ &= a_n(-1)^{n-2} = (-1)^n a_n. \end{aligned}$$

□

補題 4.7 の両辺を $q_{n-2}q_n$ で割れば，$n \geq 2$ のとき，

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2}q_n} \begin{cases} < 0, & n\text{: 奇数} \\ > 0, & n\text{: 偶数} \end{cases} \tag{4.7}$$

を得る．また，(4.6) から，

$$\frac{p_{2m}}{q_{2m}} - \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} = \frac{(-1)^{2m-1}}{q_{2m-1}q_{2m}} < 0.$$

これと (4.7) より

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_{2m}}{q_{2m}} < \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} < \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

さらに，(4.5) と補題 4.5 より

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} - \gamma &= \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n\gamma_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\gamma_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_n(q_n\gamma_{n+1} + q_{n-1})} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{q_n(q_n\gamma_{n+1} + q_{n-1})}. \end{aligned}$$

ここで $\gamma_{n+1} > [\gamma_{n+1}] = a_{n+1}$ だから

$$q_n\gamma_{n+1} + q_{n-1} > a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1} > q_n$$

である．したがって，

$$\left|\frac{p_n}{q_n}-\gamma\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}. \tag{4.8}$$

$n \to \infty$ のとき，$q_n \to \infty$ だから

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{p_n}{q_n} = \gamma. \tag{4.9}$$

そこで，

$$\gamma = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

とかき，これを γ の**連分数展開**という．

例 4.8. $\gamma = \sqrt{2}$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = \sqrt{2}, \quad a_0 = [\sqrt{2}] = 1,\\
&\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, \quad a_1 = [\sqrt{2}+1] = 2,\\
&\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \sqrt{2}+1, \quad a_2 = [\sqrt{2}+1] = 2,\\
&\quad \cdots\cdots\\
&\gamma_n = \sqrt{2}+1, \quad a_n = 2.
\end{aligned}$$

したがって，$\sqrt{2}$ は循環する連分数

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, \cdots] = [1, \dot{2}]$$

として表せる．有理数を連分数展開すれば，ユークリッドの互除法によって，有限連分数になる．$\sqrt{2}$ は循環する無限連分数に展開されたから，$\sqrt{2}$ は有理数ではなく，無理数である．(4.3) より，$p_0 = 1$, $p_1 = 3$, $q_0 = 1$, $q_1 = 2$, $n \geq 2$ に対して，

$$\begin{aligned}
p_n &= 2p_{n-1} + p_{n-2},\\
q_n &= 2q_{n-1} + q_{n-2},
\end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	2	2	2	2	2
p_n	1	3	7	17	41	99
q_n	1	2	5	12	29	70

$$\begin{aligned}
2 \times 17 + 7 \quad &= 41\\
2 \times 12 + 5 \quad &= 29
\end{aligned}$$

である．大きさの順に並べると，

$$1 < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$$

である．$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$, $\dfrac{99}{70} = 1.41428571\ldots$ だから

$$\left|\sqrt{2} - \frac{99}{70}\right| = 0.000072\cdots < \frac{1}{70^2}.$$

例 4.9. $\gamma = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803\ldots$ (黄金比) とすれば，

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad a_0 = [\gamma] = 1, \\
&\cdots\cdots \\
\gamma_n &= \gamma_0, \quad a_n = 1.
\end{aligned}$$

したがって，$\gamma = (1+\sqrt{5})/2$ は循環する連分数

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1,1,1,\cdots] = [\dot{1}]$$

として表せる．(4.3) より，$p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_0 = 1$, $q_1 = 1$, $n \geq 2$ に対して，

$$\begin{aligned}
p_n &= p_{n-1} + p_{n-2}, \\
q_n &= q_{n-1} + q_{n-2},
\end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55
q_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

例 4.10. $\gamma = \sqrt{7}$ とすれば,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sqrt{7}, \quad a_0 = [\sqrt{7}] = 2, \\
\gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}, \quad a_1 = \left[\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right] = 1, \\
\gamma_2 &= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{7}+2}{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2}, \quad a_2 = \left[\frac{\sqrt{7}+1}{2}\right] = 1, \\
\gamma_3 &= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}-1} = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}, \quad a_3 = \left[\frac{\sqrt{7}+1}{3}\right] = 1, \\
\gamma_4 &= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{7}+1}{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7}+2, \quad a_4 = \left[\sqrt{7}+2\right] = 4, \\
\gamma_5 &= \frac{1}{\sqrt{7}+2-4} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} = \gamma_1, \quad a_5 = \left[\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right] = 1 = a_1.
\end{aligned}$$

したがって，$\sqrt{7}$ は循環する連分数

$$\sqrt{7} = [2, \overbrace{1,1,1,4}, \overbrace{1,1,1,4}, \cdots] = [2, \dot{1}, 1, 1, \dot{4}]$$

として表せる．(4.3) より，$p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $q_0 = 1$, $q_1 = 1$, $n \geq 2$ に対して,

$$\begin{aligned}
p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\
q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2},
\end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	1	1	1	4	1	1	1	4
p_n	2	3	5	8	37	45	82	127	590
q_n	1	1	2	3	14	17	31	48	223

$$\begin{aligned}
4 \times 8 + 5 \quad &= 37 \\
4 \times 3 + 2 \quad &= 14
\end{aligned}$$

である．大きさの順に並べると,

$$2 < \frac{5}{2} < \frac{37}{14} < \frac{82}{31} < \frac{590}{223} < \frac{127}{48} < \frac{45}{17} < \frac{8}{3} < 3$$

である．$\sqrt{7} = 2.64575131\cdots$ であり,

$$\left|\sqrt{7} - \frac{590}{223}\right| = 0.00001140\cdots < \frac{1}{223^2}.$$

定理 4.11. 実数 γ が有理数であることと，γ が有限連分数として表せることは同値である．無理数 γ が循環連分数として表せることと，γ が整数係数の 2 次方程式の根であることは同値である．

例 4.12. 円周率 $\pi = 3.1415926\cdots$ の連分数展開は,

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, \cdots]$$

となる (これは π の近似値を使って得たもので，これを使って π のさらによい近似値を求めることはできない).

n	0	1	2	3	4
a_n	3	7	15	1	292
p_n	3	22	333	355	103993
q_n	1	7	106	113	33102

$$\begin{aligned} 15 \times 22 + 3 &= 333 \\ 15 \times 7 + 1 &= 106 \end{aligned}$$

これから得られる π の有理数による近似は

$$3 < \frac{333}{106} < \frac{103993}{33102} < \frac{355}{113} < \frac{22}{7}.$$

$22/7 = 3.142857\ldots$ は小数第 2 位まで，$355/113 = 3.1415929\ldots$ は小数第 6 位まで π と一致している．

例 4.13. 自然対数の底 $e = 2.718281\cdots$ の連分数展開は

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, \ldots]$$

と規則的である．

5　2 次無理数の連分数展開

例 4.10 でみたように $\sqrt{7}$ は循環する連分数

$$\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots] = [2, \dot{1}, 1, 1, \dot{4}]$$

として表せた．$\gamma = s + t\sqrt{7}$ $(s, t \in \mathbb{Q})$ に対して，$\gamma' = s - t\sqrt{7}$ とおく．γ' を γ の**共役**という．$\sqrt{7}$ の連分数展開において，γ_n, γ'_n およびこれらの満たす整数係数 2 次方程式 (最高次係数は正，係数の最大公約数は 1) を $ax^2 + bx + c = 0$ を求めると次のようになる．

n	γ_n	γ'_n	a	b	c	b^2-4ac
0	2.645751	-2.645751	1	0	-7	28
1	1.548584	-0.215250	3	-4	-1	28
2	1.822876	-0.822876	2	-2	-3	28
3	1.215250	-0.548584	3	-2	-2	28
4	4.645751	-0.645751	1	-4	-3	28

この表からつねに $b^2-4ac=28$ である．また $n \geq 1$ に対しては，$\gamma_n > 1,\ -1 < \gamma'_n < 0$ である．

次に $\gamma = \sqrt{13}$ の連分数展開を計算してみる．

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sqrt{13}, \quad a_0 = [\sqrt{13}] = 3,\\
\gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4}, \quad a_1 = \left[\frac{\sqrt{13}+3}{4}\right] = 1,\\
\gamma_2 &= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+3}{4}-1} = \frac{4}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3}, \quad a_2 = \left[\frac{\sqrt{13}+1}{3}\right] = 1,\\
\gamma_3 &= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+1}{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{13}-2} = \frac{\sqrt{13}+2}{3}, \quad a_3 = \left[\frac{\sqrt{13}+2}{3}\right] = 1,\\
\gamma_4 &= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+2}{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{4}, \quad a_4 = \left[\frac{\sqrt{13}+1}{4}\right] = 1,\\
\gamma_5 &= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{13}+1}{4}-1} = \frac{4}{\sqrt{13}-3} = \sqrt{13}+3, \quad a_5 = \left[\sqrt{13}+3\right] = 6,\\
\gamma_6 &= \frac{1}{\sqrt{13}+3-6} = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} = \gamma_1, \quad a_6 = \left[\frac{\sqrt{13}+3}{4}\right] = a_1,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

したがって $\sqrt{13}$ は循環する連分数

$$\sqrt{13} = [3,1,1,1,1,6,1,1,1,1,6,\ldots] = [3,\dot{1},1,1,1,\dot{6}]$$

として表せる．$\sqrt{7}$ のときと同様な表を作れば次のようになる．

n	γ_n	γ'_n	a	b	c	b^2-4ac
0	3.605551	-3.605551	1	0	-13	52
1	1.651388	-0.151388	4	-6	-1	52
2	1.535184	-0.868517	3	-2	-4	52
3	1.868517	-0.535184	3	-4	-3	52
4	1.151388	-0.651388	4	-2	-3	52
5	6.605551	-0.605551	1	-6	-4	52

この表においてもつねに $b^2-4ac=52$ である．また $n \geq 1$ に対しては，$\gamma_n > 1$, $-1 < \gamma'_n < 0$ である．

定義 5.1. 無理数 α が $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $a>0$, $\gcd(a,b,c)=1$, の根であるとき，α は 2 **次無理数である**といい，$D=b^2-4ac$ を α の**判別式**という．$\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ とするとき，$\alpha' = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ を α の**共役**という．

命題 5.2. α を判別式 D の 2 次無理数とし，

$$k=[\alpha], \quad \beta = \frac{1}{\alpha-k}$$

とおけば，β も判別式 D の 2 次無理数である．

[証明] α は $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c \in \mathbb{Z},\ a>0,\ \gcd(a,b,c)=1)$ の根であるとする．$\beta = \dfrac{1}{\alpha-k}$ より，$\alpha = k+\dfrac{1}{\beta}$ である．よって

$$a\left(k+\frac{1}{\beta}\right)^2 + b\left(k+\frac{1}{\beta}\right)+c=0,$$
$$ak^2+\frac{2ak}{\beta}+\frac{a}{\beta^2}+bk+\frac{b}{\beta}+c=0,$$
$$(ak^2+bk+c)\beta^2+(2ak+b)\beta+a=0.$$

ここで $\gcd(ak^2+bk+c, 2ak+b, a)=1$ である．実際，もし $p|ak^2+bk+c$, $p|2ak+b$, $p|a$ とすると，$p|a$, $p|b$, $p|c$ となって，$\gcd(a,b,c)=1$ に矛盾する．よって

$$\gcd(ak^2+bk+c, 2ak+b, a)=1$$

である．したがって β は判別式

$$(2ak+b)^2-4(ak^2+bk+c)a=b^2-4ac=D$$

の 2 次無理数である． $\square$

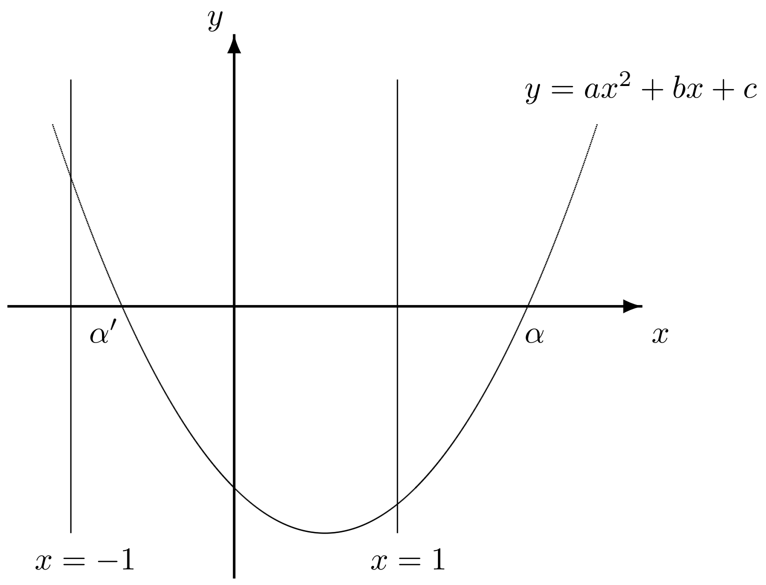
補題 5.3. 2 次無理数 α は $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{Z},\ a>0)$ の根であり，$\alpha>\alpha'$ とする．このとき

$$\alpha>1,\ -1<\alpha'<0 \Longleftrightarrow a+b+c<0,\ a-b+c>0,\ c<0.$$

[証明] $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく．$a>0$ だから，$f(x)=0$ の根を $\alpha>\alpha'$ とする．$y=f(x)$ のグラフを考えれば,

$$\alpha>1,\ -1<\alpha'<0 \Longleftrightarrow f(1)<0,\ f(0)<0,\ f(-1)>0$$

である．$f(1)=a+b+c<0$, $f(0)=c<0$, $f(-1)=a-b+c>0$ だから，補題を得る． $\square$



定義 5.4. 2 次無理数 α が，$\alpha>1$, $-1<\alpha'<0$ (α' は α の共役) を満たすとき，**簡約であ**るという．

命題 5.5. α が判別式 D の簡約 2 次無理数とするとき,

$$k=[\alpha],\quad \beta=\frac{1}{\alpha-k}$$

とおけば，β も判別式 D の簡約 2 次無理数である．

[証明]　命題 5.2 より，β は判別式 D の 2 次無理数である．$\alpha > 1$, $-1 < \alpha' < 0$ とする．$k = [\alpha]$ とおけば，$k < \alpha < k+1$ だから，$0 < \alpha - k < 1$ であり，$\beta = \dfrac{1}{\alpha - k} > 1$ である．また，$\alpha = s + t\sqrt{D}$ $(s, t \in \mathbb{Q})$ とかくとき，$\alpha' = s - t\sqrt{D}$ だから，

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{\alpha - k} = \frac{1}{(s-k) + t\sqrt{D}} = \frac{(s-k) - t\sqrt{D}}{(s-k)^2 - t^2 D},\\ \beta' &= \frac{(s-k) + t\sqrt{D}}{(s-k)^2 - t^2 D} = \frac{(s-k) + t\sqrt{D}}{\left((s-k) + t\sqrt{D}\right)\left((s-k) - t\sqrt{D}\right)}\\ &= \frac{1}{(s-k) - t\sqrt{D}} = \frac{1}{\alpha' - k}.\end{aligned}$$

$\alpha' < 0$ より，$\alpha' - k < -k \leq -1$，したがって

$$-1 < \beta' = \frac{1}{\alpha' - k} < 0$$

である．よって β は簡約 2 次無理数である．　□

命題 5.6. 与えられた判別式 D を持つ簡約 2 次無理数は高々有限個である．

[証明]　α を判別式 D の簡約 2 次無理数とし，$ax^2 + bx + c = 0$ の根であるとする．ここで，$a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, $\gcd(a, b, c) = 1$ である．$b^2 - 4ac = D$, $a + b + c < 0$, $c < 0$, $a - b + c > 0$ である．このような整数の組 (a, b, c) が有限個であることを示せばよい．$a + b + c < 0$, $-a + b - c < 0$ より，$2b < 0$, $b < 0$ である．よって $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ である．また

$$b^2 + 4|a||c| = b^2 - 4ac = D$$

より，$|b| \leq \sqrt{D}$, $4|a||c| \leq D$ である．したがって，このような整数の組 (a, b, c) は有限個である．　□

命題 5.7. 簡約 2 次無理数 α の連分数展開は純循環する．

$$\alpha = [\dot{a}_0, a_1, \ldots, \dot{a}_{l-1}].$$

[証明]　α を判別式 D の簡約 2 次無理数とする．α の連分数展開を $[a_0, a_1, \ldots]$,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \alpha, \quad a_0 = [\alpha_0], \\
\alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_0 - a_0}, \quad a_1 = [\alpha_1], \\
\alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - a_1}, \quad a_2 = [\alpha_2], \\
&\vdots \\
\alpha_n &= \frac{1}{\alpha_{n-1} - a_{n-1}}, \quad a_n = [\alpha_n], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

とする．このとき命題 5.5 より，α_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ はすべて判別式 D の簡約 2 次無理数である．命題 5.6 より，判別式 D の簡約 2 次無理数は有限個だから，ある $n \geq 0$, $l \geq 1$ が存在して，$\alpha_{n+l} = \alpha_n$ である．n をこのような最小の非負整数とする．このとき $n = 0$ である．実際，$n > 0$ とすると

$$\alpha_{n+l-1} = a_{n+l-1} + \frac{1}{\alpha_{n+l}} = a_{n+l-1} + \frac{1}{\alpha_n}, \quad \alpha_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}$$

より

$$\alpha_{n+l-1} - \alpha_{n-1} = a_{n+l-1} - a_{n-1} \in \mathbb{Z}$$

である．したがって共役をとれば

$$\alpha'_{n+l-1} - \alpha'_{n-1} = a_{n+l-1} - a_{n-1} \in \mathbb{Z}$$

であり，α_{n+l-1}, α_{n-1} は簡約だから，$-1 < \alpha'_{n+l-1} < 0$, $-1 < \alpha'_{n-1} < 0$ であり，したがってそれらの差の絶対値 $|a_{n+l-1} - a_{n-1}|$ は 1 より小さい．しかしこれは整数だから $a_{n+l-1} - a_{n-1} = 0$ である．よって $\alpha_{n+l-1} = \alpha_{n-1}$ となって，n の最小性に矛盾する．ゆえに $n = 0$ である．したがって $\alpha_l = \alpha_0$ であり，その先の連分数展開について，$a_{l+i} = a_i$, $\alpha_{l+i} = \alpha_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ である．

$$\alpha = [\dot{a}_0, a_1, \ldots, \dot{a}_{l-1}].$$

□

定理 5.8. 2 次無理数 α の連分数展開は循環する．

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_n, \dot{a}_{n+1}, \ldots, \dot{a}_{n+l}].$$

[証明]　α の連分数展開を $[a_0, a_1, \ldots]$,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \alpha, \quad a_0 = [\alpha_0], \\
\alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_0 - a_0}, \quad a_1 = [\alpha_1], \\
\alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - a_1}, \quad a_2 = [\alpha_2], \\
&\vdots \\
\alpha_n &= \frac{1}{\alpha_{n-1} - a_{n-1}}, \quad a_n = [\alpha_n], \\
&\vdots
\end{aligned}$$

とする．このとき $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ とおけば，(4.3) によって，p_n, q_n は定まる．特に,

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1} > \cdots > q_1 = a_1 \geq 1 = q_0$$

である．(4.8) より,

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha \right| < \frac{1}{q_n^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

である．一方，(4.5) より,

$$\alpha = \frac{p_n \alpha_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \alpha_{n+1} + q_{n-1}}$$

であり，これを α_{n+1} について解けば,

$$\alpha_{n+1} = \frac{q_{n-1}\alpha - p_{n-1}}{-q_n \alpha + p_n} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot \frac{\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha}{\dfrac{p_n}{q_n} - \alpha}.$$

この共役をとれば,

$$\alpha'_{n+1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot \frac{\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha'}{\dfrac{p_n}{q_n} - \alpha'} \tag{5.1}$$

を得る．ここで，(4.8) より,

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha' \right| = \left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha + \alpha - \alpha' \right| \geq |\alpha - \alpha'| - \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| > |\alpha - \alpha'| - \frac{1}{q_n^2}$$

である．同様に，

$$\left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\alpha'\right|=\left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\alpha+\alpha-\alpha'\right|\leq|\alpha-\alpha'|+\left|\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|<|\alpha-\alpha'|+\frac{1}{q_{n-1}q_n}$$

である．したがって，

$$|\alpha'_{n+1}|<\frac{q_{n-1}}{q_n}\cdot\frac{|\alpha-\alpha'|+\dfrac{1}{q_{n-1}q_n}}{|\alpha-\alpha'|-\dfrac{1}{q_n^2}}=\frac{|\alpha-\alpha'|q_{n-1}+\dfrac{1}{q_n}}{|\alpha-\alpha'|q_n-\dfrac{1}{q_n}}.$$

ここで，$q_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ だから，n を十分大にとれば，

$$q_n-q_{n-1}\geq q_{n-2}>\frac{2}{|\alpha-\alpha'|}$$

にできる．このとき

$$\begin{aligned}|\alpha-\alpha'|q_n-\frac{1}{q_n}-\left(|\alpha-\alpha'|q_{n-1}+\frac{1}{q_n}\right)&=|\alpha-\alpha'|(q_n-q_{n-1})-\frac{2}{q_n}\\&>2-\frac{2}{q_n}>0,\end{aligned}$$

したがって，$|\alpha'_{n+1}|<1$ である．また，n が十分大ならば，$\dfrac{p_n}{q_n}-\alpha'$ および $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\alpha'$ は $\alpha-\alpha'$ に近いから，$\alpha-\alpha'$ と同符号である．したがって，(5.1) より，$\alpha'_{n+1}<0$ であり，$-1<\alpha'_{n+1}<0$ である．また $a_n=[\alpha_n]$, $0<\alpha_n-a_n<1$ だから

$$\alpha_{n+1}=\frac{1}{\alpha_n-a_n}>1$$

である．よって α_{n+1} は簡約である．命題 5.7 より，$\alpha_{n+1}=[\dot{a}_{n+1},\ldots,\dot{a}_{n+l}]$ である．したがって

$$\alpha=[a_0,\ldots,a_n,\alpha_{n+1}]=[a_0,\ldots,a_n,\dot{a}_{n+1},\ldots,\dot{a}_{n+l}].$$

□

命題 5.7 の逆，および定理 5.8 の逆が成り立つことは容易に証明できる．

命題 5.9. 実数 α が純循環する連分数展開を持てば，α は簡約 2 次無理数である．また，実数 α が循環する連分数展開を持てば，α は 2 次無理数である．

[証明]　$\alpha=[\dot{a}_0,\ldots,\dot{a}_{l-1}]$ とする．$l\geq 2$ としてよい．このとき $a_0=a_l\geq 1$ である．よって，$\alpha>1$ である．また，$p_0=a_0$, $p_1=a_0a_1+1$, $q_0=1$, $q_1=a_1$, $n\geq 2$ のとき，

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},$$
$$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$$

によって定まる $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ はすべて正であり，$p_n > p_{n-1}$, $q_n \geq q_{n-1}$ $(\forall n \geq 1)$ である．$\alpha_l = \alpha_0 = \alpha$ だから，$\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0, \ldots, a_n]$ $(n = 0, 1, \ldots)$ とすれば，(4.5) より，

$$\alpha = \frac{p_{l-1}\alpha + p_{l-2}}{q_{l-1}\alpha + q_{l-2}}$$

である．これから，

$$q_{l-1}\alpha^2 + (q_{l-2} - p_{l-1})\alpha - p_{l-2} = 0.$$

$f(x) = q_{l-1}x^2 + (q_{l-2} - p_{l-1})x - p_{l-2}$ とおけば，$q_{l-1} > 0$ である．$f(0) = -p_{l-2} < 0$, $f(-1) = q_{l-1} - q_{l-2} + p_{l-1} - p_{l-2} > 0$ である．したがって，$f(x) = 0$ の根 $\alpha > 1$ 以外の根 α' は $-1 < \alpha' < 0$ を満たす．ゆえに α は簡約 2 次無理数である．

次に，$\alpha = [a_0, \ldots, a_n, \dot{a}_{n+1}, \ldots, \dot{a}_{n+l}]$ とする．$\beta = [\dot{a}_{n+1}, \ldots, \dot{a}_{n+l}]$ とおけば，前半の結果より，β は簡約 2 次無理数である．また，(4.5) より，

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}] = \frac{p_n\alpha_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1}}$$

である．ここで，$\alpha_{n+1} = [\dot{a}_{n+1}, \ldots, \dot{a}_{n+l}] = \beta$ だから，

$$\alpha = \frac{p_n\beta + p_{n-1}}{q_n\beta + q_{n-1}}$$

を得る．これを β について解いて，β の満たす 2 次方方程式に代入すれば，α も整数係数の 2 次方程式の根であることがわかる．連分数展開が無限連分数になるから，α は有理数でない．したがって α は 2 次無理数である． □

6 ペル方程式 II

$D > 1$ を平方数でない自然数とするとき，ペル方程式

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

の最小の自然数解を求める．$\gamma = [\sqrt{D}] + \sqrt{D}$ とおいて γ の連分数展開を計算する．$j = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，γ_j, a_j を次のように定める．

$$\gamma_0 = \gamma, \quad a_j = [\gamma_j], \quad \gamma_{j+1} = \frac{1}{\gamma_j - a_j}.$$

このときある自然数 n が存在して，$\gamma_n = \gamma_0$ になる (証明は述べない)．n をそのような自然数で最小のものとする．このとき (4.5) より

$$\gamma = [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, \gamma] = \frac{p_{n-1}\gamma + p_{n-2}}{q_{n-1}\gamma + q_{n-2}}.$$

これから，

$$q_{n-1}\gamma^2 + (q_{n-2} - p_{n-1})\gamma - p_{n-2} = 0. \tag{6.1}$$

一方，$b = [\sqrt{D}]$ とおけば，$\gamma = b + \sqrt{D}$ より，γ は

$$\gamma^2 - 2b\gamma + b^2 - D = 0 \tag{6.2}$$

を満たす．(6.1) と (6.2) を比較して，

$$q_{n-2} - p_{n-1} = -2bq_{n-1}, \quad -p_{n-2} = (b^2 - D)q_{n-1}, \tag{6.3}$$

$q_{n-2} = p_{n-1} - 2bq_{n-1}$, $p_{n-2} = (D - b^2)q_{n-1}$ である．これを補題 4.5 の等式

$$p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$$

に代入して，

$$\begin{aligned} p_{n-1}(p_{n-1} - 2bq_{n-1}) - (D - b^2)q_{n-1}^2 &= (-1)^n, \\ (p_{n-1} - bq_{n-1})^2 - Dq_{n-1}^2 &= (-1)^n. \end{aligned}$$

n が偶数ならば，$x_1 = |p_{n-1} - bq_{n-1}|$, $y_1 = q_{n-1}$ とおけば，(x_1, y_1) はペル方程式の解である．n が奇数ならば，$x_0 = |p_{n-1} - bq_{n-1}|$, $y_0 = q_{n-1}$ とおけば，

$$\begin{aligned} (x_0 + y_0\sqrt{D})(x_0 - y_0\sqrt{D}) &= -1, \\ (x_0 + y_0\sqrt{D})^2(x_0 - y_0\sqrt{D})^2 &= (-1)^2 = 1, \\ (x_0^2 + y_0^2 D + 2x_0y_0\sqrt{D})(x_0^2 + y_0^2 D - 2x_0y_0\sqrt{D}) &= 1. \end{aligned}$$

$x_1 = x_0^2 + y_0^2 D$, $y_1 = 2x_0y_0$ とおけば，$x_1^2 - Dy_1^2 = 1$ となって，(x_1, y_1) はペル方程式の解である．いずれの場合も (x_1, y_1) は最小の自然数解になっている (証明は述べない)．

例 6.1. ペル方程式 $x^2 - 13y^2 = 1$ の最小解を求める．$\gamma = [\sqrt{13}] + \sqrt{13} = 3 + \sqrt{13}$ と

おくと，$\gamma_0 = \gamma$,

$$a_0 = [3+\sqrt{13}] = 6, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{3+\sqrt{13}-6} = \frac{\sqrt{13}+3}{13-9} = \frac{\sqrt{13}+3}{4},$$

$$a_1 = \left[\frac{\sqrt{13}+3}{4}\right] = 1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+3}{4}-1} = \frac{4}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3},$$

$$a_2 = \left[\frac{\sqrt{13}+1}{3}\right] = 1, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+1}{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{13}-2} = \frac{\sqrt{13}+2}{3},$$

$$a_3 = \left[\frac{\sqrt{13}+2}{3}\right] = 1, \quad \gamma_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+2}{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{4},$$

$$a_4 = \left[\frac{\sqrt{13}+1}{4}\right] = 1, \quad \gamma_5 = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}+1}{4}-1} = \frac{4}{\sqrt{13}-3} = \sqrt{13}+3 = \gamma_0.$$

n	0	1	2	3	4
a_n	6	1	1	1	1
p_n	6	7	13	20	33
q_n	1	1	2	3	5

$7 \times 1 + 6 \quad = 13$

$1 \times 1 + 1 \quad = 2$

よって，$\gamma_n = \gamma_0$ となる最小の自然数は $n = 5$ (奇数) であり, $p_4 = 33$, $q_4 = 5$ である．
$b = [\sqrt{13}] = 3$ より，$x_0 = |p_4 - bq_4| = |33 - 3\cdot 5| = 18$, $y_0 = q_4 = 5$ とおけば,

$$18^2 - 13\cdot 5^2 (= 324 - 325) = -1.$$

$$(18+5\sqrt{13})^2 = 18^2 + 25\times 13 + 180\sqrt{13} = 649 + 180\sqrt{13}.$$

よって，ペル方程式 $x^2 - 13y^2 = 1$ の最小解は $x = 649$, $y = 180$ である．

参考文献

[1] 木村俊一，連分数のふしぎ (ブルーバックス)，講談社，2012.

[2] イアン・スチュアート，魅惑と驚きの「数」たち，SB クリエイティブ，2016.

[3] ジョセフ・H. シルヴァーマン，はじめての数論 原著第 3 版—発見と証明の大航海 - ピタゴラスの定理から楕円曲線まで，ピアソンエデュケーション，2007.