

円の面積と球の体積

上越教育大学 中川仁

令和3年10月1日(金)～10月29日(金)

毎週金曜日 19:00～21:00

上越教育大学 人文棟1階104教室

目次

1	基本的図形の面積	1
1.1	三角形の合同	1
1.2	長方形の面積	2
1.3	平行四辺形の面積	5
1.4	三角形の面積	6
1.5	三角形の相似	7
1.6	相似な図形の面積	7
2	円の面積	9
2.1	素朴な方法	9
2.2	三平方の定理	10
2.3	円周の長さと円の面積	11
3	放物線と反比例のグラフ	18
3.1	放物線で囲まれた図形の面積	18
3.2	反比例のグラフで囲まれる図形の面積	26
4	基本的空間図形の体積	36
4.1	平行六面体の体積	36
4.2	相似な空間図形の体積	38
4.3	柱体の体積	39
4.4	三角錐の体積	40
5	球の体積と表面積	47
5.1	アルキメデスの方法	47
5.2	区分求積法	53
A	空間図形の合同	55
A.1	空間における 2 点間の距離	55
A.2	空間における合同変換	56
B	空間ベクトルの内積と外積	62

はじめに

アルキメデス（前 287 年 – 前 212 年）は半径 r の円の面積が πr^2 であることを証明し、球の体積や表面積の公式も証明してる。円周率の値も放物線で囲まれる図形の面積も求めている。本講座ではアルキメデスがどのような方法でこれらの結果を導いたかを解説し、その方法を反比例のグラフで囲まれた図形に適用すると何が得られるかなどを解説する。

本講座の参考書として、小林 [1]、齋藤 [4]、上野 [5] を挙げておく。第 1 節、第 2 節は主に [5] を参考にした。第 5 節は [1] を参考にした。アルキメデスの人物像や求積の考え方については [4] に詳しく解説されている。

1 基本的図形の面積

1.1 三角形の合同

平面上の2つの図形について、**平行移動**、**回転移動**、**鏡映**によって一方の図形を他方の図形に重なり合わせることができるときに、それら2つの図形は**合同**であるという。

命題 1.1 (三角形の合同条件). 2つの三角形は次のいずれかが成り立つとき合同である。

- (1) 3辺がそれぞれ等しい。
- (2) 2辺とその間の角がそれぞれ等しい。
- (3) 1辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

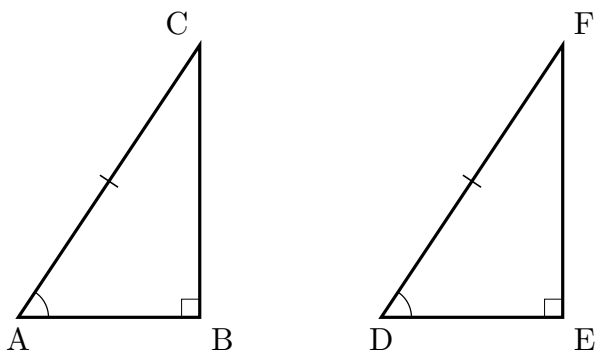


図1 直角三角形の合同 (1)

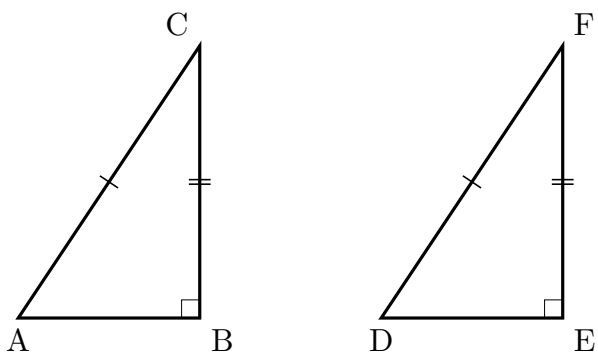


図2 直角三角形の合同 (2)

命題 1.2 (直角三角形の合同条件). 2つの直角三角形は, 次のいずれかが成り立つとき合同である.

- (1) 斜辺とひとつの鋭角がそれぞれ等しい.
- (2) 斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい.

[証明] (1) $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ を $\angle B = \angle E = 90^\circ$ かつ $AC = DF$, $\angle A = \angle D$ を満たすとする

$$\angle C = 180^\circ - 90^\circ - \angle A = 180^\circ - 90^\circ - \angle D = \angle F.$$

すなわち命題 1.1 の (2) の条件が成り立ち, したがって $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ である.

(2) $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ を $\angle B = \angle E = 90^\circ$ かつ $AC = DF$, $BC = EF$ を満たすとする. 必要なら $\triangle DEF$ を鏡映してから辺 BC と辺 EF を重ね合わせる. $\angle ABC = \angle DEF = 90^\circ$ だから $A, B (= E), D$ は一直線上にある. $AC = DF$ だから $\triangle CAD$ は二等辺三角形である. $\angle ACD$ の二等分線と辺 AD の交点を H とすれば $\triangle CAH$ と $\triangle CDH$ は2辺とその間の角がそれぞれ等しいから合同である. したがって $\angle CAB = \angle FDE$ である. よって (1) の条件が成り立ち $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は合同である. $\square$

1.2 長方形の面積

長さは基準の1となる長さの何倍になっているかで測る. 同じように面積も基準となる1の面積の何倍の広さになっているかで測る. 通常, 1辺の長さが1である正方形の面積を基準の1とする (中学校以降の数学では単位はつけずに議論する).

三角形, 四角形のように線分で囲まれた図形を**多角形**という (凸でない, へこんでいる図形も多角形とよぶことにする).

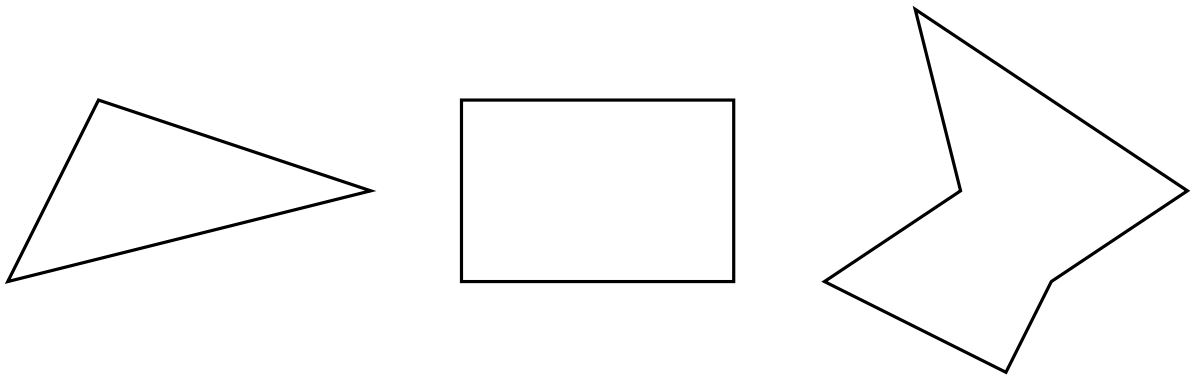


図3 多角形

まず長方形の面積の求め方について考える.

縦が 3, 横が 4 の長方形がある. これに図 4 のように線を入れて分割すると 1 辺の長さが 1 の正方形が $3 \times 4 = 12$ 個できるから, この長方形の面積は 12 となる.

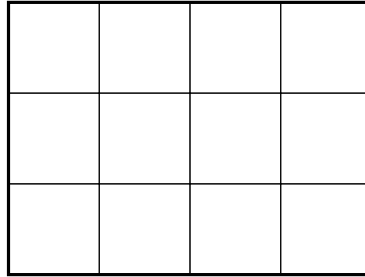


図 4 長方形

a, b がどんな正の数であっても, 縦が a , 横が b の長方形の面積は ab で与えられるのだろうか?

例えば 1 辺の長さが $\frac{1}{10}$ の正方形の面積について考えてみる. 図 5 のように 1 辺の長さが 1 の正方形の各辺を 10 等分すると, 1 辺の長さが $\frac{1}{10}$ の小さな正方形 100 個に分割される. この小さな正方形の面積の 100 倍が 1 辺の長さが 1 の正方形の面積 1 だから, 小さな正方形の面積は $\frac{1}{100} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ である.

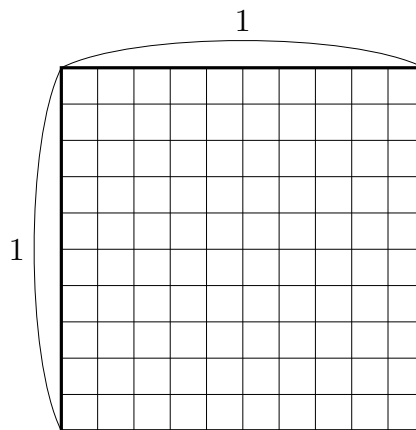


図 5 正方形の分割 (縦, 横ともに 10 等分)

次に p, q を任意の自然数として, 縦 $\frac{1}{p}$, 横 $\frac{1}{q}$ の長方形の面積を考える. 1 辺が $\frac{1}{10}$ の正方形のときと同様に, 1 辺の長さが 1 の正方形の縦の辺を p 等分して, 横の辺を q 等分すると縦が $\frac{1}{p}$, 横が $\frac{1}{q}$ の pq 個の小さな長方形に分割される (図 6 は $p = 5, q = 3$ の場合).

この小さな長方形の面積の pq 倍が 1 辺の長さが 1 の正方形の面積 1 だから、小さな長方形の面積は $\frac{1}{pq} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{q}$ である.

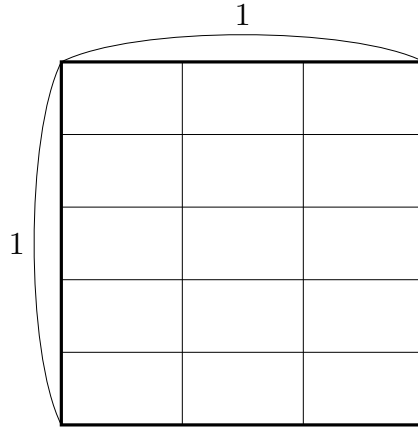


図 6 正方形の分割 (縦を 5 等分, 横を 3 等分)

今度は k, l を自然数として, 縦 $\frac{k}{p}$, 横 $\frac{l}{q}$ の長方形の面積を考える. この長方形の縦の辺を k 等分して, 横の辺を l 等分すると縦が $\frac{1}{p}$, 横が $\frac{1}{q}$ の kl 個の小さな長方形に分割される. この小さな長方形の面積 $\frac{1}{pq}$ の kl 倍がもとの長方形だから, もとの長方形の面積は $\frac{kl}{pq} = \frac{k}{p} \times \frac{l}{q}$ である.

定理 1.3 (長方形の面積). 一辺の長さが a と b の長方形の面積は ab である.

[証明] a, b が有理数のときに定理が成り立つことは上で示した.

一般の場合の証明. $c < a < d$, $e < b < f$ を満たす有理数 c, d, e, f をとる. 図 7 のように縦が a , 横が b の長方形を F , 縦が c , 横が e の長方形を E , 縦が d , 横が f の長方形を G とする. E の面積は ce , G の面積は df であり, E は F に含まれ, F は G に含まれるから

$$ce < (F \text{ の面積}) < df$$

である. c と d はいくらでも a に近くとれ, e と f はいくらでも b に近くとれるから ce と df はともにいくらでも ab に近くなる. ゆえに F の面積は ab に等しくなければならない. $\square$

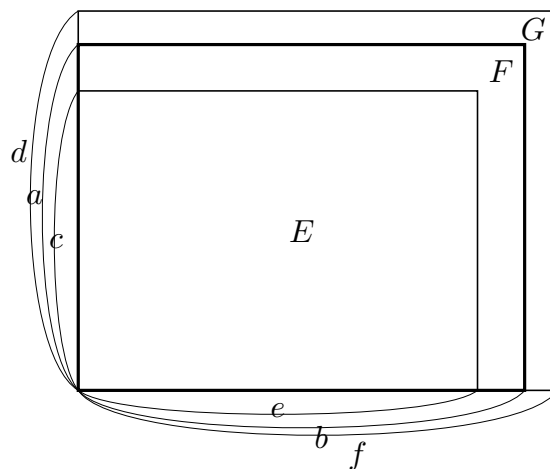


図 7 長方形の面積の比較

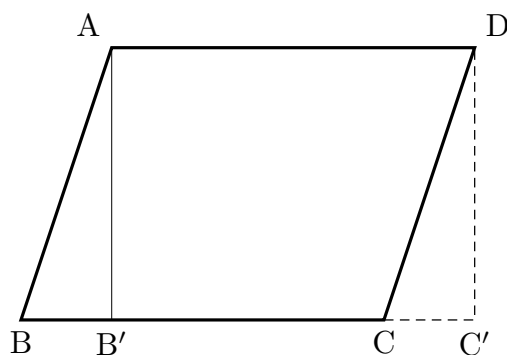


図 8 平行四辺形の面積

1.3 平行四辺形の面積

図 8 のように平行四辺形 $ABCD$ の頂点 A から辺 BC へおろした垂線が辺 BC と交わる点を B' とし、頂点 D から辺 BC へおろした垂線が辺 BC の延長と交わる点を C' とすると、 $AB = DC$, $\angle ABB' = \angle DCC'$, $\angle BAB' = \angle CDC'$ だから三角形 ABB' と三角形 DCC' は合同である。したがって三角形 ABB' の面積と三角形 DCC' の面積は等しい。

$$\begin{aligned}
 \text{平行四辺形 } ABCD \text{ の面積} &= \text{三角形 } ABB' \text{ の面積} + \text{台形 } AB'CD \text{ の面積} \\
 &= \text{三角形 } DCC' \text{ の面積} + \text{台形 } AB'CD \text{ の面積} \\
 &= \text{長方形 } AB'C'D \text{ の面積}
 \end{aligned}$$

が成り立つ. $BC = a$, $AB' = DC' = h$ とおくと

$$B'C' = B'C + CC' = B'C + BB' = BC = a$$

である. したがって長方形 $AB'C'D$ の面積は定理 1.3 により ah であり, 平行四辺形 $ABCD$ の面積も ah である. 以上により次の平行四辺形の面積の公式が得られた.

定理 1.4. 底辺の長さが a で高さが h の平行四辺形の面積は ah である.

1.4 三角形の面積

面積の定義は, 1 辺の長さが 1 の正方形に基づいているが, 多角形を直接正方形に分割して面積を計算することは難しい.

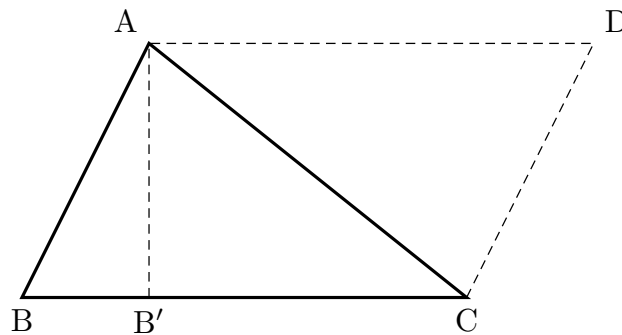


図 9 三角形の面積

図 9 のように $\triangle ABC$ のコピーを回転して貼り合わせると平行四辺形ができる. 三角形の高さは頂点から底辺へおろした垂線の長さである (図 9 の AB'). $BC = a$, $AB' = h$ とすると平行四辺形 $ABCD$ の面積は定理 1.4 より ah だから $\triangle ABC$ の面積はその半分の $\frac{1}{2}ah$ である. このようにしてよく知られている公式を得る.

定理 1.5. 底辺の長さが a で高さが h の三角形の面積は $\frac{1}{2}ah$ である.

面積の定義は, 1 辺の長さが 1 の正方形に基づいているが, 多角形を直接正方形に分割して面積を計算することは難しい. 図 10 のように多角形は必ず有限個の三角形に分割することができる. 各三角形の面積を合計すれば多角形の面積になる. よって三角形の面積の方が実際の計算では基本となる.

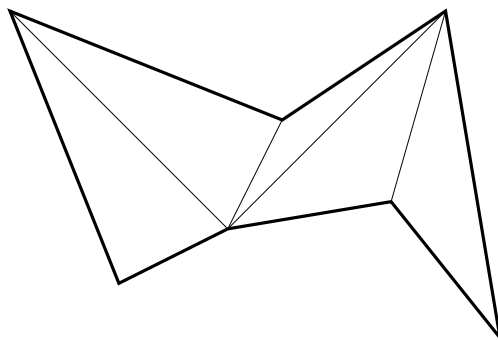


図 10 多角形の三角形への分割

1.5 三角形の相似

平面上の 2 つの図形について，一方の図形を適当に拡大または縮小すると他方の図形に合同になるときに，それら 2 つの図形は**相似**であるという．

命題 1.6 (三角形の相似条件)．2 つの三角形は次のいずれかが成り立つとき相似である．

- (1) 3 組の辺の比がすべて等しい．
- (2) 2 組の辺の比が等しく，その間の角が等しい．
- (3) 2 組の角がそれぞれ等しい．

1.6 相似な図形の面積

正方形の 1 辺の長さを $\frac{1}{10}$ にすると面積は $\frac{1}{100}$ になることは §1.2 で述べた．一般に相似比が $m : n$ の図形の面積はどうなるのだろうか？

相似比が $m : n$ の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ を考えてみる (図 11)．三角形はそれぞれの対応する辺の比が一定のときに相似になる．いま辺 AB に辺 $A'B'$ ，辺 BC に辺 $B'C'$ ，辺 AC に辺 $A'C'$ が対応しているとすると

$$AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C' = m : n$$

である．このとき辺 BC ，辺 $B'C'$ を底辺と考えて， $\triangle ABC$ の高さ h と $\triangle A'B'C'$ の高さ h' についても

$$h : h' = m : n$$

が成り立つ．実際，辺 BC またはその延長線上に点 D を AD が BC と垂直になるようにと

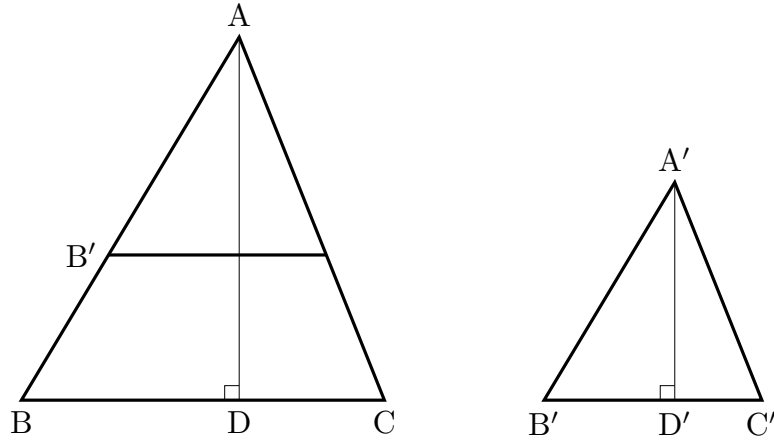


図 11 相似な三角形の面積

り，同様に辺 $B'C'$ またはその延長線上に点 D' を $A'D'$ が $B'C'$ と垂直になるようにとる． $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ は相似だから $\angle B = \angle B'$ である．また $\angle BDA = \angle B'D'A' = 90^\circ$ である．命題 1.6 の (3) より $\triangle ABD$ と $\triangle A'B'D'$ は相似である．よって $AD : A'D' = AB : A'B' = m : n$ である．したがって $B'C' = \frac{n}{m}BC$, $h' = \frac{n}{m}h$ より

$$\begin{aligned} (\triangle ABC \text{ の面積}) : (\triangle A'B'C' \text{ の面積}) &= \frac{1}{2}(BC)h : \frac{1}{2}(B'C')h' \\ &= \frac{1}{2}(BC)h : \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^2 (BC)h \\ &= 1 : \left(\frac{n}{m}\right)^2 = m^2 : n^2. \end{aligned}$$

以上により三角形については次の定理が成り立つことがわかった．

定理 1.7. 相似な図形 S, S' の相似比が $m : n$ ならば，面積の比は $m^2 : n^2$ である．

[証明] 正方形については成り立つことは既にみた．一般の図形の場合． P を S に含まれるような同じ大きさの有限個の正方形からなる図形とし， Q を S を含むような同じ大きさの有限個の正方形からなる図形とする (S が円板のとき， P は図 12， Q は図 13 のようなものになる)． $k = \frac{n}{m}$ とおく．このとき S' に含まれるような同じ大きさの有限個の正方形からなる図形 P' と S' を含む同じ大きさの有限個の正方形からなる図形 Q' で， P' は P と相似で P, P' の相似比が $1 : k$ ， Q' は Q と相似で Q, Q' の相似比が $1 : k$ となるものが存在する．ここで

$$P' \text{ の面積} \leq S' \text{ の面積} \leq Q' \text{ の面積}$$

が成り立つ．正方形の場合の結果より P' の面積 $= k^2 \times (P \text{ の面積})$, Q' の面積 $= k^2 \times (Q \text{ の面積})$ だから

$$k^2 P \text{ の面積} \leq S' \text{ の面積} \leq k^2 Q' \text{ の面積}$$

が成り立つ． P の面積, Q の面積はいくらでも S の面積に近くできるから, 上の不等式により $S' \text{ の面積} = k^2 S \text{ の面積}$ に等しいことがわかる．ゆえに

$$S \text{ の面積} : S' \text{ の面積} = 1 : k^2 = m^2 : n^2$$

である．

□

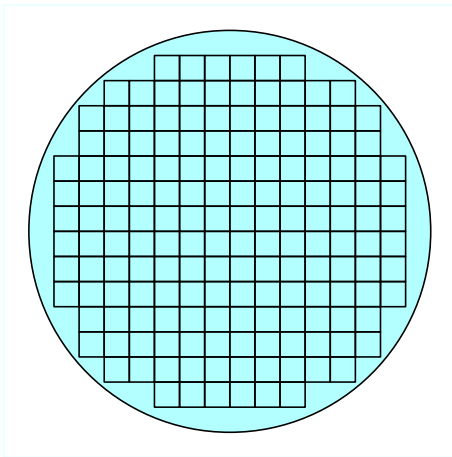


図 12 円に含まれる正方形の和

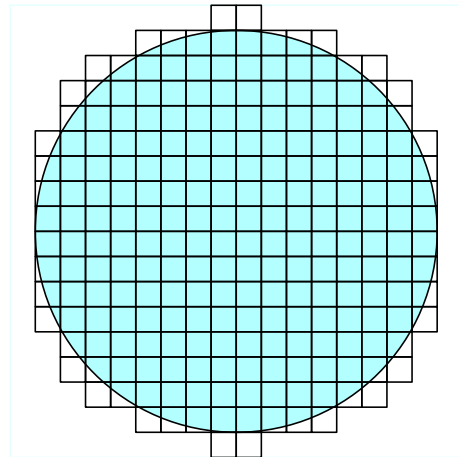


図 13 円を含む正方形の和

2 円の面積

2.1 素朴な方法

最初に面積の定義にしたがって素朴に円の面積を考えてみる．対称性から円の $1/4$ (90° の扇形) について考えてそれを 4 倍する．半径 1 の $(1/4)$ 円に含まれる同じ大きさの正方形からなる図形 P と半径 1 の $(1/4)$ 円を含む同じ大きさの正方形からなる図形 Q を考える．正方形の 1 辺の長さを $1/20$ としたときの P は図 14, Q は図 15 のようなものになる．それぞれの正方形の個数を数えると P は 個, Q は 個の正方形からなる．

これから半径 1 の円の面積について次の不等式が成り立つことがわかる．

$$(2.1) \quad 2.94 < \text{半径 1 の円の面積} < 3.34$$

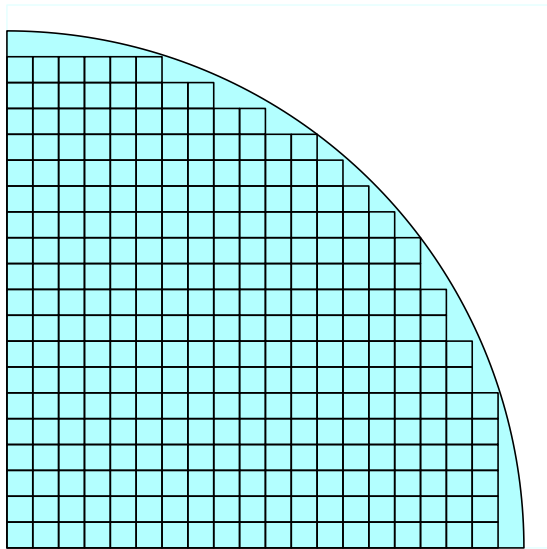


図 14 $(1/4)$ 円に含まれる正方形の和 P

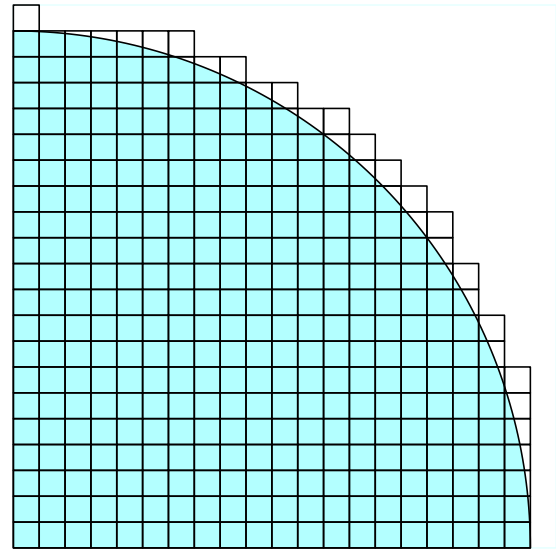


図 15 $(1/4)$ 円を含む正方形の和 Q

2.2 三平方の定理

定理 2.1 (三平方の定理). 図 16 のように直角をはさむ辺の長さが a, b で斜辺の長さが c であるような直角三角形に対して

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ.

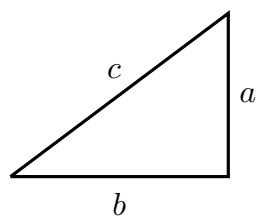


図 16 直角三角形

[証明] 図 17 の左の図から, 1 辺の長さが $a+b$ の正方形の面積は $c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab = c^2 + 2ab$ である. 右の図からこれは $a^2 + b^2 + 2ab$ に等しい. すなわち $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$, $a^2 + b^2 = c^2$. □

[別証明]

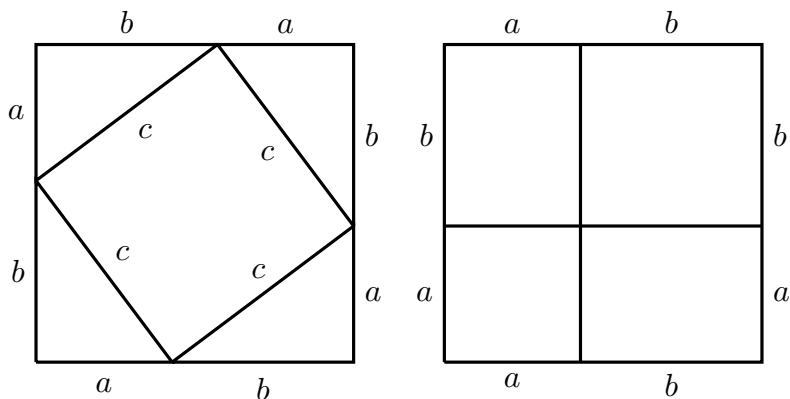


図 17 三平方の定理の証明

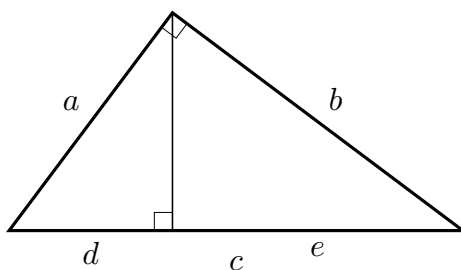


図 18 三平方の定理の別証明

図 18 の 3 つの直角三角形は命題 1.6 の (3) により互いに相似である．したがって

$$c : b = b : e, \quad c : a = a : d.$$

これから $b^2 = ce$, $a^2 = cd$ である． $d + e = c$ だから

$$a^2 + b^2 = cd + ce = c(d + e) = c^2.$$

□

2.3 円周の長さと円の面積

半径 1 の円に内接する正 6 角形と外接する正 6 角形を考える (図 19)．これらはそれぞれ 6 個の正三角形に分割される．内接正 6 角形の正三角形は 1 辺の長さは 1 である．その高さ h は三平方の定理により

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2 = 1, \quad h^2 = \frac{3}{4}$$

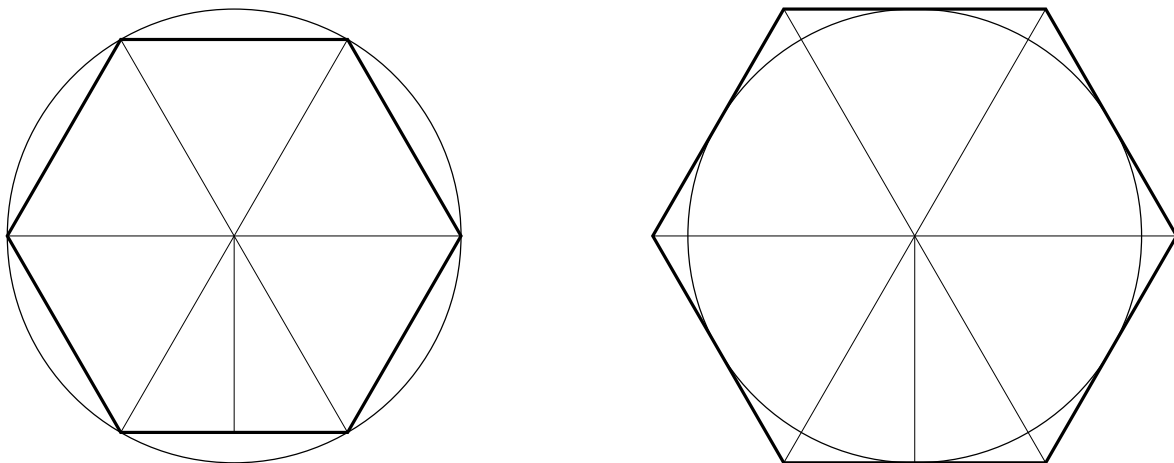


図 19 円の内接正 6 角形と外接正 6 角形

となるから, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である. 一方, 外接正 6 角形の正三角形の高さは 1 である. その 1 辺の長さを a とするとこの正三角形は内接正 6 角形の正三角形と相似だから

$$a : 1 = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}a = 1$$

となり, $a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ である. したがって内接正 6 角形の周の長さは $6 \times 1 = 6$ であ

り, 外接正 6 角形の周の長さは $6 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} = 6.928\cdots$ である.

アルキメデスは, $N = 6, 12, 24, 48, 96, \dots$ に対して, 円に内接する正 N 角形と外接する正 N 角形を考えた. 自然数 n に対して $N = 3 \cdot 2^n$ とおく.

p_n : 半径 1 の円に内接する正 N 角形の周の長さ,

S_n : 半径 1 の円に内接する正 N 角形の面積,

q_n : 半径 1 の円に外接する正 N 角形の周の長さ,

T_n : 半径 1 の円に外接する正 N 角形の面積,

とする. 図 20 において AB は半径 1 の円に内接する正 N 角形の 1 辺, $A'B'$ は半径 1 の円に外接する正 N 角形の 1 辺, AC は半径 1 の円に内接する正 $2N$ 角形の 1 辺である. したがって

$$(2.2) \quad p_n = N \cdot AB, \quad q_n = N \cdot A'B', \quad p_{n+1} = 2N \cdot AC$$

である. このとき直線 OC は辺 AB の垂直 2 等分線だから交点を M とすれば, $\triangle OAC$

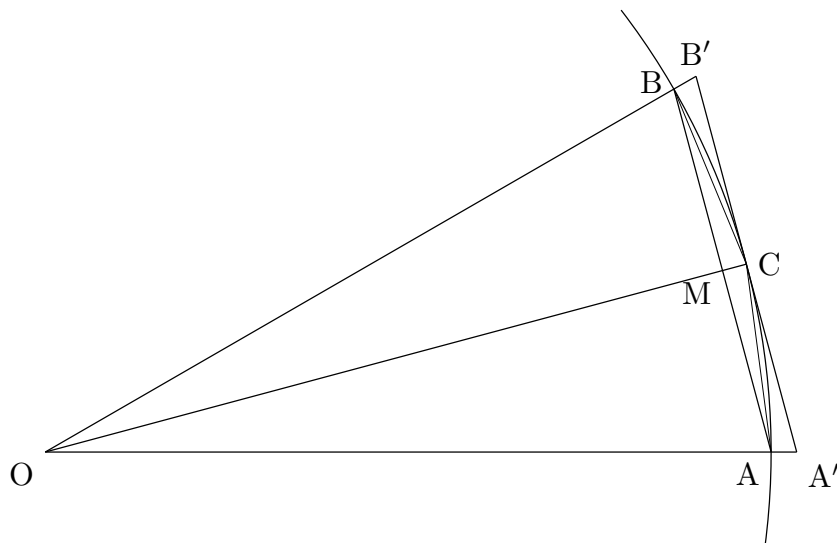


図 20 円の内接正 $3 \cdot 2^n$ 角形と外接正 $3 \cdot 2^n$ 角形

について，底辺が $AC = 1$ で高さが $AM = \frac{1}{2}AB$ とみれば，その面積は

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AB$$

である．したがって円に内接する正 $2N = 3 \cdot 2^{n+1}$ 角形の面積 S_{n+1} は $S_{n+1} = 2N \times \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}N \cdot AB$ である．よって (2.2) より

$$(2.3) \quad S_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$$

を得る．一方， $OA'C$ は $\angle C = 90^\circ$ で $OC = 1$ の直角三角形だからその面積は

$$\frac{1}{2}OC \times A'C = \frac{1}{4}A'B'$$

である．したがって円に外接する正 $N = 3 \cdot 2^n$ 角形の面積 T_n は $T_n = 2N \times \frac{1}{4}A'B' = \frac{1}{2}N \times A'B'$ である．よって (2.2) より

$$(2.4) \quad T_n = \frac{1}{2}q_n$$

を得る．明らかに

$$(2.5) \quad S_{n+1} < \text{半径 } 1 \text{ の円の面積} < T_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ．半径 1 の円の周の長さを 2π とすれば，(2.3), (2.4) とこれから証明する定理 2.2 の系 2.3 により，(2.5) の両側はともに π に近づくので，半径 1 の円の面積は π でな

ければならない. 一般的に成り立つ定理 1.7 により, 半径 r の円の面積は

$$(2.6) \quad \pi r^2$$

で与えられる.

定理 2.2. 自然数 n に対して $N = 3 \cdot 2^n$ とおく. 半径 1 の円に内接する正 N 角形の周の長さを p_n , 外接する正 N 角形の周の長さを q_n とする. このとき $p_1 = 6$, $q_1 = 4\sqrt{3}$ であり, $p_n, q_n, p_{n+1}, q_{n+1}$ の間には次のような漸化式が成り立つ.

$$(2.7) \quad q_{n+1} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \quad (p_n \text{ と } q_n \text{ の調和平均}),$$

$$(2.8) \quad p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}} \quad (p_n \text{ と } q_{n+1} \text{ の幾何平均}).$$

[証明] $p_1 = 6$, $q_1 = 4\sqrt{3}$ であることは既に示した. 内接正 N 角形の隣り合う頂点と円の中心を結んで得られる 1 つの三角形を $\triangle OAB$ とし, それを含むような外接正 N 角形の隣り合う頂点と円の中心を結んで得られる 1 つの三角形を $\triangle OA'B'$ とする (図 20). 線分 $A'B'$ の中点を C とすると直線 $A'B'$ は C において円と接する. また線分 AB の中点を M とすると OAB は二等辺三角形だから OM と AB は垂直である. 特に M は線分 OC 上にある. $AM = h$ とおくと $OA = 1$ だから三平方の定理により

$$OM^2 + h^2 = 1^2$$

が成り立つ. よって $OM = \sqrt{1 - h^2}$ である. また 2 つの直角三角形 $\triangle OAM$ と $\triangle OA'C$ は相似だから

$$OA : OA' = OM : OC = AM : A'C$$

である. $AM = h$, $OM = \sqrt{1 - h^2}$, $OA = OC = 1$ だからこれは

$$1 : OA' = \sqrt{1 - h^2} : 1 = h : A'C$$

となる. したがって

$$OA' = \frac{1}{\sqrt{1 - h^2}}, \quad A'C = \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}}$$

を得る. 直角三角形 $\triangle ACM$ に三平方の定理を使えば

$$AC^2 = AM^2 + CM^2.$$

AM = h, CM = OC - OM = 1 - \sqrt{1 - h^2} だから

$$AC^2 = h^2 + \left(1 - \sqrt{1 - h^2}\right)^2 = h^2 + 1 - 2\sqrt{1 - h^2} + 1 - h^2 = 2 - 2\sqrt{1 - h^2}.$$

したがって AC = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - h^2}} である. 内接正 N 角形の 1 辺の長さを a_n, 外接正 N 角形の 1 辺の長さを b_n とすれば

$$(2.9) \quad a_n = AB = 2h,$$

$$(2.10) \quad b_n = A'B' = \frac{2h}{\sqrt{1 - h^2}}$$

である. さらに内接正 2N 角形の 1 辺の長さは

$$(2.11) \quad a_{n+1} = AC = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - h^2}}$$

である. (2.9) より h = \frac{1}{2}a_n である. これを (2.10), (2.11) に代入すれば

$$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}a_n^2}} = \frac{2a_n}{\sqrt{4 - a_n^2}},$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}a_n^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$$

を得る. これから

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{2a_{n+1}}{\sqrt{4 - a_{n+1}^2}} = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}}{\sqrt{4 - \left(2 - \sqrt{4 - a_n^2}\right)}} \\ &= \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a_n^2}}} = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}\sqrt{2 + \sqrt{4 - a_n^2}}}{2 + \sqrt{4 - a_n^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{\left(2 - \sqrt{4 - a_n^2}\right)\left(2 + \sqrt{4 - a_n^2}\right)}}{2 + \sqrt{4 - a_n^2}} = \frac{2a_n}{2 + \sqrt{4 - a_n^2}}. \end{aligned}$$

一方,

$$\frac{a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{a_n \frac{2a_n}{\sqrt{4 - a_n^2}}}{a_n + \frac{2a_n}{\sqrt{4 - a_n^2}}} = \frac{2a_n^2}{a_n\sqrt{4 - a_n^2} + 2a_n} = \frac{2a_n}{2 + \sqrt{4 - a_n^2}}.$$

したがって

$$(2.12) \quad b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$$

を得る. 同様に

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= 2 - \sqrt{4 - a_n^2}, \\ a_n b_{n+1} &= \frac{2a_n^2}{2 + \sqrt{4 - a_n^2}} = \frac{2a_n^2 (2 - \sqrt{4 - a_n^2})}{(2 + \sqrt{4 - a_n^2})(2 - \sqrt{4 - a_n^2})} \\ &= \frac{2a_n^2 (2 - \sqrt{4 - a_n^2})}{a_n^2} = 2(2 - \sqrt{4 - a_n^2}). \end{aligned}$$

したがって

$$(2.13) \quad 2a_{n+1}^2 = a_n b_{n+1}$$

を得る. $p_n = Na_n$, $q_n = Nb_n$, $p_{n+1} = 2Na_{n+1}$, $q_{n+1} = 2Nb_{n+1}$ だから (2.12), (2.13) より

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= 2Nb_{n+1} = \frac{2Na_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{2(Na_n)(Nb_n)}{Na_n + Nb_n} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}, \\ p_{n+1} &= 2Na_{n+1} = \sqrt{4N^2 a_{n+1}^2} = \sqrt{2N^2 a_n b_{n+1}} = \sqrt{(Na_n)(2Nb_{n+1})} = \sqrt{p_n q_{n+1}}. \end{aligned}$$

□

系 2.3. p_n, q_n を定理 2.2 の通りとすると

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_n < q_n < \cdots < q_2 < q_1$$

が成り立つ. n を大きくするとき p_n と q_n は同じ値に近づく. この値を 2π と定義し, π を**円周率**とよぶ. 半径 1 の円の円周の長さは 2π である.

[証明] $p_1 = 6$, $q_1 = 4\sqrt{3}$ だから $0 < p_1 < q_1$ である. $n \geq 1$ として $p_n < q_n$ が成り立つとする. このとき

$$\begin{aligned} q_n - q_{n+1} &= q_n - \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} = \frac{q_n(p_n + q_n) - 2p_n q_n}{p_n + q_n} = \frac{q_n(q_n - p_n)}{p_n + q_n} > 0, \\ q_{n+1} - p_n &= \frac{2p_n q_n - p_n(p_n + q_n)}{p_n + q_n} = \frac{p_n(q_n - p_n)}{p_n + q_n} > 0. \end{aligned}$$

よって $p_n < q_{n+1} < q_n$ である。また

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \sqrt{p_n q_{n+1}} > \sqrt{p_n^2} = p_n, \\ p_{n+1} &= \sqrt{p_n q_{n+1}} < \sqrt{q_{n+1}^2} = q_{n+1}. \end{aligned}$$

よって $p_n < p_{n+1} < q_{n+1}$ である。帰納法によりすべての自然数 n に対して

$$p_n < p_{n+1} < q_{n+1} < q_n$$

が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned} q_{n+1} - p_{n+1} &< q_{n+1} - p_n = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} - p_n = \frac{p_n}{p_n + q_n} (q_n - p_n) \\ &< \frac{p_n}{2p_n} (q_n - p_n) = \frac{1}{2} (q_n - p_n). \end{aligned}$$

したがって

$$0 < q_n - p_n < \frac{1}{2} (q_{n-1} - p_{n-1}) < \frac{1}{2^2} (q_{n-2} - p_{n-2}) < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}} (q_1 - p_1).$$

実数の連続性により単調増加数列 $\{p_n\}$ と単調減少数列 $\{q_n\}$ はそれぞれ極限值 α, β をもつ。上の不等式により $\{q_n - p_n\}$ は 0 に収束するから、 $\beta - \alpha = 0$, $\beta = \alpha$ である。
 $\alpha = \beta = 2\pi$ と定義する。 □

$p_1 = 6, q_1 = 4\sqrt{3}$ である。(2.7) より,

$$q_2 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} = 24(2 - \sqrt{3}).$$

(2.8) より,

$$p_2 = \sqrt{6 \cdot 24(2 - \sqrt{3})} = 12\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

これを繰り返せば表 1 を得る。

円周率 π の値は表 1 より正 24 角形の計算から 3.1 まで、正 96 角形の計算から 3.14 まで、正 192 角形の計算から 3.141 までわかる。

定理 2.4. 半径 r の円の周の長さは $2\pi r$ である。

[証明] 半径 r の円に内接する正 $3 \cdot 2^n$ 角形の周の長さを $p_n(r)$, 外接する正 $3 \cdot 2^n$ 角形の周の長さを $q_n(r)$ とする。半径 r の円に内接する正 $3 \cdot 2^n$ 角形は半径 1 の円に内接する正 $3 \cdot 2^n$ 角形と相似であり、相似比は $r : 1$ だから、 $p_n(r) : p_n = r : 1$, $p_n(r) = rp_n$ で

表 1 アルキメデスの方法による円周率の計算

n	N	p_n	q_n	$p_n/2$	$q_n/2$
1	6	6.000000	6.928203	3.000000	3.464102
2	12	6.211657	6.430781	3.105829	3.215390
3	24	6.265257	6.319320	3.132629	3.159660
4	48	6.278700	6.292172	3.139350	3.146086
5	96	6.282064	6.285429	3.141032	3.142715
6	192	6.282905	6.283746	3.141452	3.141873
7	384	6.283115	6.283325	3.141558	3.141663
8	768	6.283168	6.283220	3.141584	3.141610
9	1536	6.283181	6.283194	3.141590	3.141597

ある．同様に半径 r の円に外接する正 $3 \cdot 2^n$ 角形は半径 1 の円に外接する正 $3 \cdot 2^n$ 角形と相似であり，相似比は $r : 1$ だから， $q_n(r) : q_n = r : 1$ ， $q_n(r) = r q_n$ である．定理 2.2 より n を大きくするとき p_n, q_n はともに 2π に近づくから， $p_n(r), q_n(r)$ はともに $2\pi r$ に近づく．ゆえに半径 r の円の周の長さは $2\pi r$ である． $\square$

3 放物線と反比例のグラフ

3.1 放物線で囲まれた図形の面積

アルキメデスは放物線上の 2 点を結ぶ線分と放物線で囲まれた図形の面積を‘取り尽くし法’とよばれる方法によって求めた．放物線を C とし， C 上に 2 点 P, Q をとる．線分 PQ と放物線 C で囲まれる図形を A とする． P における放物線 C の接線 l_P と Q における放物線 C の接線 l_Q の交点を R とする． R を通る放物線の対称軸と平行な直線と放物線 C との交点を R' とする． A は $\triangle PQR'$ を含み， $\triangle PQR$ に含まれるから，図形 A の面積を $m(A)$ とすると

$$m(\triangle PQR') < m(A) < m(\triangle PQR)$$

が成り立つ (図 21)．

$\triangle PQR'$ および $\triangle PQR$ の面積を座標を使って計算してみよう．放物線 C は 2 次関数 $y = ax^2$ ($a > 0$) のグラフとして与えられるとする (図 22)． C 上に 2 点 P, Q をとり， P の座標を (p, ap^2) ， Q の座標を (q, aq^2) とする． $p < q$ としてよい．直線 $y = 2apx - ap^2$

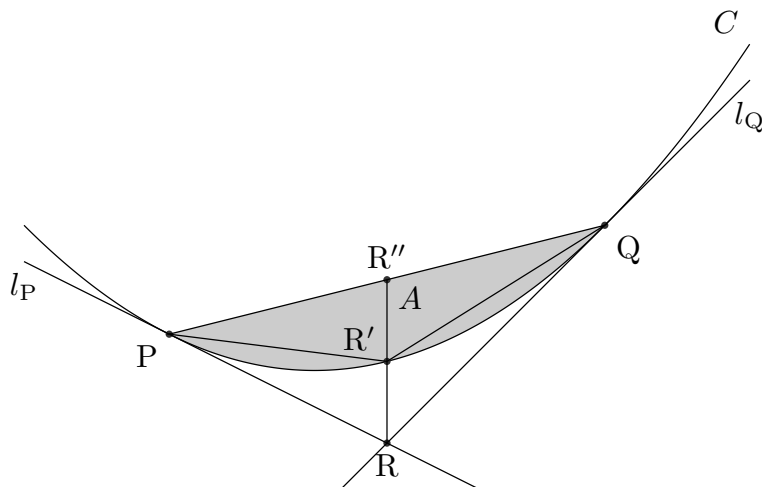


図 21 放物線で囲まれた図形の面積

は $x = p$ で $y = ap^2$ となるから、これは P を通る．さらに直線 $y = 2apx - ap^2$ と $y = ax^2$ の交点の x 座標は 2 次方程式

$$ax^2 = 2apx - ap^2, \quad ax^2 - 2apx + ap^2 = 0, \quad a(x - p)^2 = 0$$

を満たすから、 $x = p$, $y = ap^2$ となって、交点は 1 点 P だけである．ゆえに直線 $y = 2apx - ap^2$ は P における放物線 C の接線 l_P である．同様に Q における放物線 C の接線 l_Q は直線 $y = 2aqx - aq^2$ である．したがって l_P と l_Q の交点 R の座標は連立方程式

$$\begin{cases} y = 2apx - ap^2, \\ y = 2aqx - aq^2 \end{cases}$$

を解いて

$$2aqx - aq^2 = 2apx - ap^2, \quad 2a(q - p)x = a(q^2 - p^2), \quad x = \frac{p + q}{2}, \quad y = apq$$

となる．すなわち l_P と l_Q の交点 R の座標は $\left(\frac{p + q}{2}, apq\right)$ である．放物線 C の対称軸は y 軸だから、 R を通る放物線の対称軸と平行な直線は $x = \frac{p + q}{2}$ であり、これと C との交点 R' の座標は $\left(\frac{p + q}{2}, a\left(\frac{p + q}{2}\right)^2\right)$ である．直線 RR' と直線 PQ の交点を R'' とすれば、 R'' は線分 PQ の中点である．よって R'' の座標は $\left(\frac{p + q}{2}, a\left(\frac{p^2 + q^2}{2}\right)\right)$ であ

る。これから $\triangle PR'Q$ の面積は

$$\begin{aligned} m(\triangle PR'Q) &= \frac{1}{2}R'R'' \left(\frac{p+q}{2} - p \right) + \frac{1}{2}R'R'' \left(q - \frac{p+q}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}R'R''(q-p) = \frac{1}{2} \left\{ a \left(\frac{p^2+q^2}{2} \right) - a \left(\frac{p+q}{2} \right)^2 \right\} (q-p) \\ &= \frac{1}{2}a \left\{ \frac{p^2+q^2}{2} - \frac{p^2+2pq+q^2}{4} \right\} (q-p) = \frac{a(q-p)^3}{8}. \end{aligned}$$

同様に $\triangle PRQ$ の面積は

$$\begin{aligned} m(\triangle PRQ) &= \frac{1}{2}RR'' \left(\frac{p+q}{2} - p \right) + \frac{1}{2}RR'' \left(q - \frac{p+q}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}RR''(q-p) = \frac{1}{2} \left\{ a \left(\frac{p^2+q^2}{2} \right) - apq \right\} (q-p) \\ &= \frac{1}{2}a \left\{ \frac{p^2-2pq+q^2}{2} \right\} (q-p) = \frac{a(q-p)^3}{4}. \end{aligned}$$

以上まとめると

命題 3.1. 方程式 $y = ax^2$ で定義される放物線を C とする. C 上に 2 点 P, Q をとる. P の座標を (p, ap^2) , Q の座標を (q, aq^2) , $p < q$ とする. $r = \frac{p+q}{2}$ とおくと, 点 P における C の接線 l_P と点 Q における接線 l_Q の交点 R の座標は (r, apq) である. R を通る放物線 C の対称軸と平行な直線と放物線 C との交点を R' とすると R' の座標は (r, ar^2) である. このとき線分 PQ と放物線 C で囲まれる図形 A の面積 $m(A)$ と $\triangle PR'Q$ の面積 $m(\triangle PR'Q)$, $\triangle PRQ$ の面積 $m(\triangle PRQ)$ について

$$\begin{aligned} m(\triangle PR'Q) &< m(A) < m(\triangle PRQ), \\ m(\triangle PRQ) &= 2m(\triangle PR'Q), \\ m(\triangle PR'Q) &= \frac{a}{8}(q-p)^3 \end{aligned}$$

が成り立つ.

Q を R' で置き換えて命題 3.1 を適用する. $T = m(\triangle PR'Q)$ とおく. l_P と $l_{R'}$ の交点を P_1 とすると P_1 の座標は $((p+r)/2, apr)$ であり, $((p+r)/2, a(p+r)^2/4)$ を座標とする点を P'_1 とすれば

$$\begin{aligned} m(\triangle PP_1R') &= 2m(\triangle PP'_1R'), \\ m(\triangle PP'_1R') &= \frac{a}{8}(r-p)^3 = \frac{a}{8} \left(\frac{q-p}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}T. \end{aligned}$$

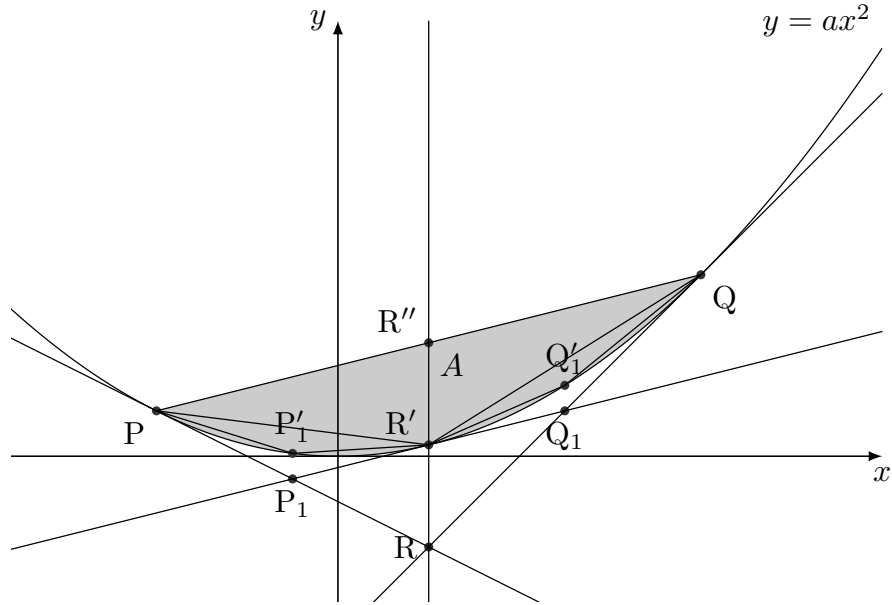


図 22 $y = ax^2$ のグラフで囲まれた図形の面積

同様に $l_{R'}$ と l_Q の交点を Q_1 とすると Q_1 の座標は $((r+q)/2, arq)$ であり, $((r+q)/2, a(r+q)^2/4)$ を座標とする点を Q'_1 とすれば

$$m(\triangle R'Q_1Q) = 2m(\triangle R'Q'_1Q),$$

$$m(\triangle R'Q'_1Q) = \frac{a}{8}(q-r)^3 = \frac{a}{8} \left(\frac{q-p}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}T.$$

A は $\triangle PP'_1R' \cup \triangle PR'Q \cup \triangle R'Q'_1Q$ を含み, $\triangle PP_1R' \cup \triangle PR'Q \cup \triangle R'Q_1Q$ に含まれるから

$$T + \frac{2}{8}T < m(A) < T + \frac{2}{4}T.$$

上の議論を繰り返せば

$$\begin{aligned} T + \frac{2}{8}T + \frac{2^2}{8^2}T &< m(A) < T + \frac{2}{8}T + \frac{2^2 \cdot 2}{8^2}T, \\ T + \frac{2}{8}T + \frac{2^2}{8^2}T + \frac{2^3}{8^3}T &< m(A) < T + \frac{2}{8}T + \frac{2^2}{8^2}T + \frac{2^3 \cdot 2}{8^3}T, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

となり, 自然数 n に対して

$$(3.1) \quad \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{8^k}T < m(A) < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{8^k}T + \frac{2^n \cdot 2}{8^n}T$$

を得る． $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$(3.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{8^k} T = T \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = T \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} T = \frac{a(q-p)^3}{6}$$

だから

$$m(A) = \frac{a(q-p)^3}{6} = \frac{2}{3} m(\triangle PRQ)$$

を得る． ここで (3.2) が成り立つことは次のようにわかる． 図 23 より

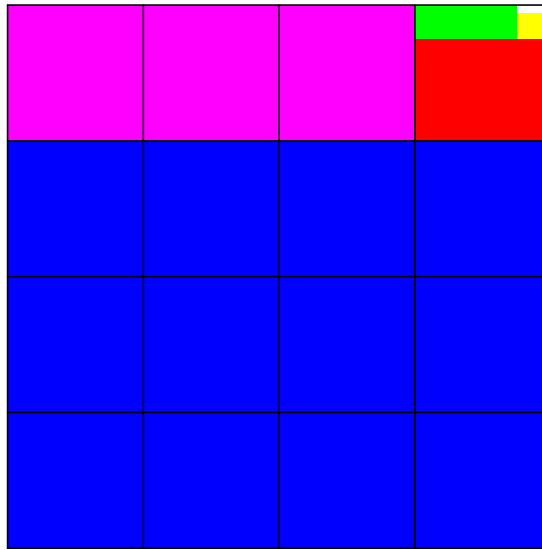


図 23 $(3/4) + (3/4^2) + (3/4^3) + \cdots = 1$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots = 1.$$

両辺を 3 で割れば

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

この両辺に 1 を加えれば

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{4}{3}.$$

定理 3.2. 方程式 $y = ax^2$ で定義される放物線を C とする．放物線 C 上に 2 点 P, Q をとる．線分 PQ と放物線 C で囲まれる図形を A とする．P における放物線 C の接線 l_P と Q における放物線 C の接線 l_Q の交点を R とする．図形 A の面積を $m(A)$, $\triangle PQR$ の面積を $m(\triangle PQR)$ とすると

$$m(A) = \frac{2}{3} m(\triangle PQR) = \frac{a(q-p)^3}{6}$$

である.

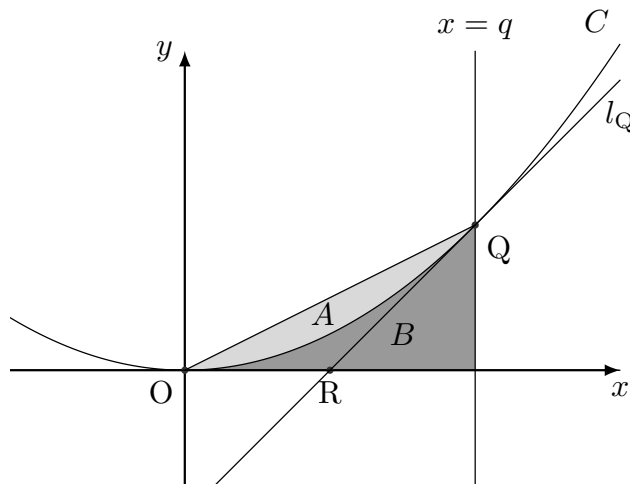


図 24 放物線で囲まれた図形の面積

系 3.3. 方程式 $y = ax^2$ で定義される放物線を C とする. C と x 軸, および直線 $x = q$ で囲まれた図形を B とすれば B の面積は次の式で与えられる.

$$m(B) = \frac{1}{3}aq^2.$$

[証明] 定理 3.2 において $p = 0$ とすれば $m(A) = aq^3/6$ である. したがって

$$m(A) + m(B) = \frac{1}{2}q \times aq^2 = \frac{1}{2}aq^3, \quad m(B) = \frac{1}{2}aq^3 - \frac{1}{6}aq^3 = \frac{1}{3}aq^3.$$

□

アルキメデスと別の方法で系 3.3 の面積 $m(B)$ を求めてみる. $n > 1$ を自然数として, $x_0 = 0, x_1 = \frac{q}{n}, x_2 = \frac{2q}{n}, \dots, x_n = \frac{nq}{n} = q$ とおく. $P_k = (x_k, 0)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) は x 軸上の点であり, $Q_k = (x_k, ax_k^2)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) は放物線 C 上の点である. $R_k = (x_{k-1}, ax_k^2)$ ($k = 1, \dots, n$) として四角形 $P_k Q_k R_k P_{k-1}$ を D_k とすれば, D_k は長方形でありその面積は

$$m(D_k) = (x_k - x_{k-1})ax_k^2 = \frac{q}{n} \cdot a \left(\frac{kq}{n} \right)^2 = \frac{aq^3}{n^3} k^2$$

であり, それらの長方形の和 $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ は B を含む. また $R'_k = (x_{k+1}, ax_k^2)$ ($k = 1, \dots, n-1$) として四角形 $P_k Q_k R'_k P_{k+1}$ を E_k とすれば E_k も長方形でありその面

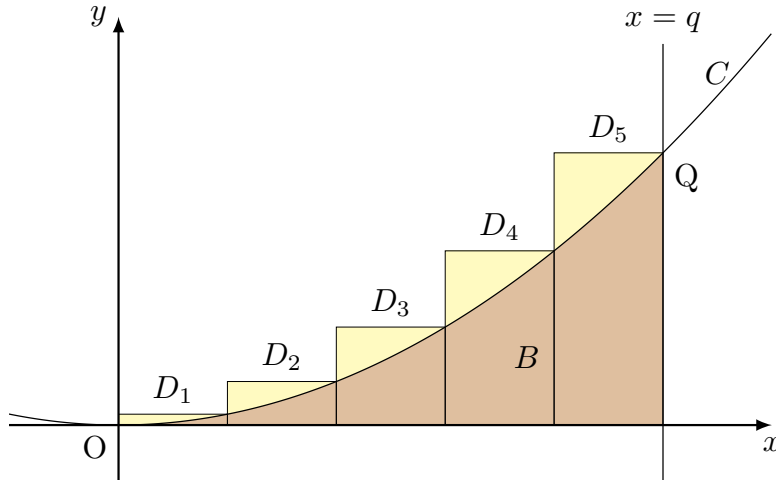


図 25 $n = 5$, 長方形の和 $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5$ は B を含む

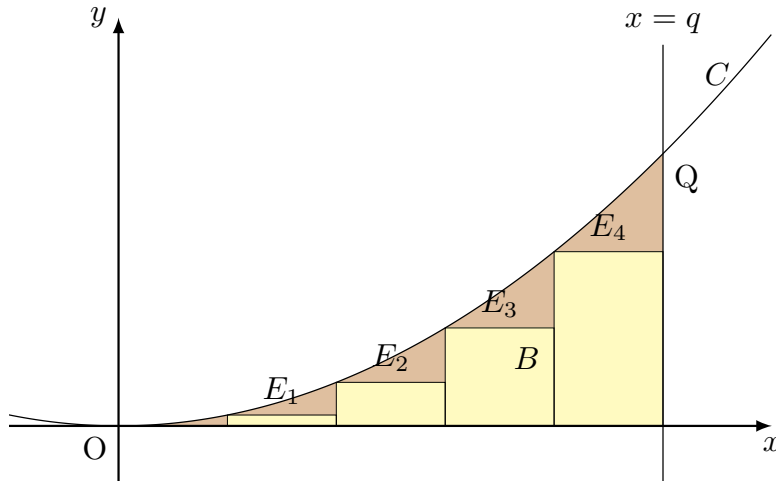


図 26 $n = 5$, 長方形の和 $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ は B に含まれる

積は

$$m(E_k) = (x_{k+1} - x_k)ax_k^2 = \frac{q}{n} \cdot a \left(\frac{kq}{n} \right)^2 = \frac{aq^3}{n^3} k^2$$

であり, それらの長方形の和 $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n-1}$ は B に含まれる. したがって

$$(3.3) \quad \frac{aq^3}{n^3} \{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\} < m(B) < \frac{aq^3}{n^3} \{1^2 + 2^2 + \dots + n^2\}$$

が成り立つ. ここで

$$(3.4) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つ．この証明はすぐ後で与える．この式で n を $n-1$ で置き換えれば

$$(3.5) \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

を得る．(3.4) より (3.3) の右端は

$$\begin{aligned} & \frac{aq^3}{n^3} \{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\} \\ &= \frac{aq^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = aq^3 \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= aq^3 \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = aq^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right). \end{aligned}$$

同様に (4.3) より (3.3) の左端は

$$\begin{aligned} & \frac{aq^3}{n^3} \{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\} \\ &= \frac{aq^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = aq^3 \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \\ &= aq^3 \cdot \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = aq^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right). \end{aligned}$$

したがって (3.3) は

$$(3.6) \quad aq^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) < m(B) < aq^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

となる．この両側は n を大きくしていくと $\frac{1}{3}aq^3$ に近づくから

$$m(B) = \frac{1}{3}aq^3$$

でなければならない．このような面積の求め方を**区分求積法**とよぶ． □

[(3.4) の証明] アルキメデスによる平方数の和 $Q_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ の求め方を紹介する． n を自然数とする． $k = 1, 2, \dots, n$ に対して， $a_k = k$ とおくと

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = 1 + 2 + \cdots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$$

である．アルキメデスのアイディアは平方数 k^2 を次のようにとらえることである．

$$\begin{aligned} k^2 &= (1 + k - 1)k = k + (k-1)k \\ &= a_k + 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}). \end{aligned}$$

これを $k = 1, 2, \dots, n$ について加えれば

$$\begin{aligned}
 Q_n &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \\
 &= a_1 + \{a_2 + 2a_1\} + \{a_3 + 2(a_1 + a_2)\} + \dots + \{a_n + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})\} \\
 &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 2\{a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_1 + \dots + a_{n-1})\} \\
 &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 2(n-1)a_1 + 2(n-2)a_2 + \dots + 4a_{n-2} + 2a_{n-1} \\
 &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 2a_{n-1}a_1 + 2a_{n-2}a_2 + \dots + 2a_2a_{n-2} + 2a_1a_{n-1}.
 \end{aligned}$$

ここで $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ だから

$$(3.7) \quad Q_n = 2a_1a_{n-1} + 2a_2a_{n-2} + \dots + 2a_{n-2}a_2 + 2a_{n-1}a_1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

この等式と

$$\begin{aligned}
 Q_n &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + n^2, \\
 Q_n &= a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + \dots + a_1^2 + n^2
 \end{aligned}$$

を加えれば

$$\begin{aligned}
 3Q_n &= (a_1^2 + 2a_1a_{n-1} + a_{n-1}^2) + (a_2^2 + 2a_2a_{n-2} + a_{n-2}^2) + \dots + (a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}a_1 + a_1^2) \\
 &\quad + \frac{n(n+1)}{2} + n^2 + n^2 \\
 &= (a_1 + a_{n-1})^2 + (a_2 + a_{n-2})^2 + \dots + (a_{n-1} + a_1)^2 + \frac{n(n+1)}{2} + 2n^2 \\
 &= \overbrace{n^2 + n^2 + \dots + n^2}^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2} + 2n^2 = (n-1)n^2 + \frac{n(n+1)}{2} + 2n^2 \\
 &= n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}. \\
 Q_n &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

3.2 反比例のグラフで囲まれる図形の面積

反比例 $y = 1/x$ のグラフと x 軸, および $x = 1$ と $x = a (> 1)$ によって囲まれる図形 A の面積 $m(A)$ を $L(a)$ で表す (図 27).

まず, 区分求積法の考え方を使って $L(a)$ のある性質を導く. $k > 1$ として A を原点 O を中心に k 倍に拡大した図形 A' の面積 $m(A')$ を考える. 定理 1.7 より

$$(3.8) \quad m(A') = k^2 m(A)$$

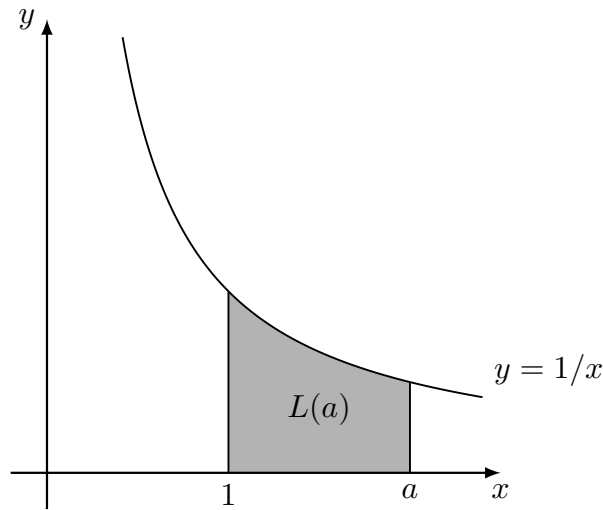


図 27 $y = 1/x$ と x 軸, $x = 1$ と $x = a$ で囲まれる図形の面積 $L(a)$

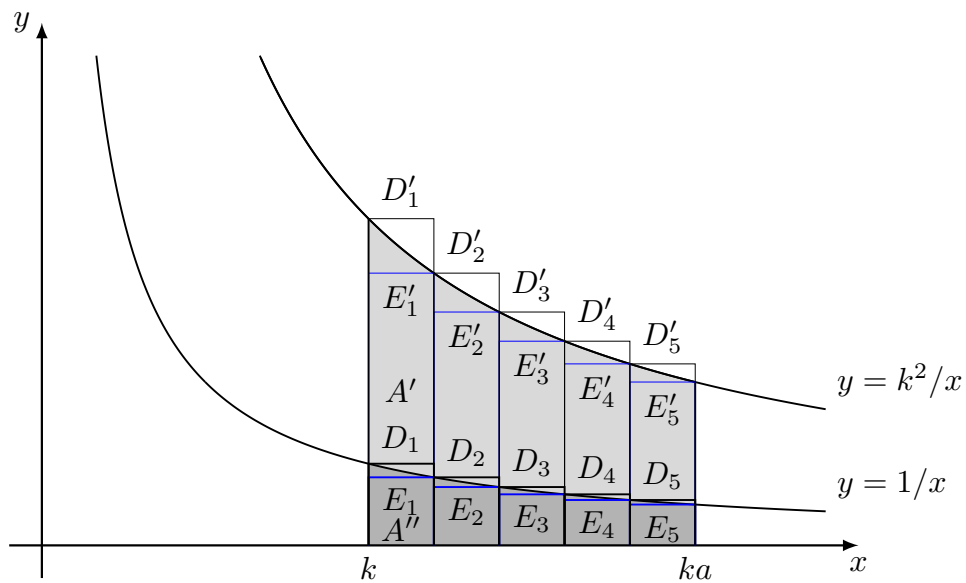


図 28 $y = k^2/x$ と x 軸, $x = k$ と $x = ka$ で囲まれる図形 A'

である．反比例 $y = 1/x$ のグラフ上の点 $(x_1, 1/x_1)$ は原点 O を中心に k 倍に拡大すると点 $(kx_1, k/x_1)$ にうつされるからこれは反比例 $y = k^2/x$ のグラフ上の点になる．したがって A' は反比例 $y = k^2/x$ のグラフと x 軸, および $x = k$ と $x = ka$ で囲まれる図形になる． A'' を反比例 $y = 1/x$ のグラフと x 軸, および $x = k$ と $x = ka$ で囲まれる図形とする．放物線のとときと同様に $k \leq x \leq ka$ を n (> 1) 等分して, A'' を含む n 個の長方

形の和 D と, A'' に含まれる n 個の長方形の和 E を考える.

$$m(E) < m(A'') < m(D)$$

であり, n を大きくすれば $m(D)$ も $m(E)$ もともに $m(A'')$ に近づく. 一方, これらの長方形を縦方向 (y 軸方向) に k^2 倍すれば, A' を含む n 個の長方形の和 D' と, A' に含まれる n 個の長方形の和 E' が得られて

$$m(E') < m(A') < m(D')$$

が成り立つ. $m(D') = k^2 m(D)$ であり, $m(E') = k^2 m(E)$ であるから, n を大きくすれば $m(D')$ も $m(E')$ もともに $k^2 m(A'')$ に近づく. したがって

$$(3.9) \quad m(A') = k^2 m(A'')$$

が成り立つ. さらに $L(a)$ の定義により

$$(3.10) \quad m(A'') = L(ka) - L(k)$$

である. (3.8), (3.9) より $L(a) = m(A) = m(A'')$ である. これと (3.10) より

$$(3.11) \quad L(a) = L(ka) - L(k)$$

が得られた. $1 < a < b$ に対して, $k = b$ とおけば (3.11) より $L(a) = L(ab) - L(b)$, したがって

$$(3.12) \quad L(ab) = L(a) + L(b)$$

を得る. また (3.11) で $k = b/a$ とおけば $L(a) = L(b) - L(b/a)$ となり

$$(3.13) \quad L(b/a) = L(b) - L(a)$$

を得る. (3.12), (3.13) が成り立つことを $L(a)$ は**対数**の性質をもつという. ここでは相似な図形の面積を用いて (3.13) を導いたが, [3] では反比例のグラフの $y = 1/x$ に関する線対称性を用いて (3.13) を導いている.

次にアルキメデスの取り尽くし法を $y = 1/x$ のグラフに適用してみる. まず $y = 1/x$ のグラフのもつ性質をまとめておく.

命題 3.4. $0 < a < b$ とし, $y = 1/x$ のグラフ上の 2 点 $A(a, 1/a)$, $B(b, 1/b)$ をとる.

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad g = \sqrt{ab}, \quad h = \frac{2ab}{a+b}$$

とおけば, 点 $C(g, 1/g)$ における $y = 1/x$ の接線は直線 AB と平行であり, A における接線と B における接線の交点は $D(h, 1/m)$ である.

[証明] 直線 $y = -(1/a^2)x + 2/a$ と $y = 1/x$ のグラフの交点の x 座標は

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}, & a^2 &= -x^2 + 2ax, \\ x^2 - 2ax + a^2 &= 0, & (x - a)^2 &= 0\end{aligned}$$

より, $x = a$ である. よって交点は 1 点 A だけである. したがって $y = -(1/a^2)x + 2/a$ は $y = 1/x$ のグラフの点 A における接線 l_A である. これから点 B, 点 C における $y = 1/x$ のグラフの接線 l_B, l_C はそれぞれ $y = -(1/b^2)x + 2/b, y = -(1/g^2)x + 2/g$ で与えられる. 直線 AB の傾きは

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{a - b}{ab(b - a)} = -\frac{1}{ab} = -\frac{1}{g^2}$$

である. よって直線 AB は点 C における接線 l_C と平行である. l_A と l_B の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} &= -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}, & \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}x &= \frac{2(b - a)}{ab}, \\ x &= \frac{2a^2b^2(b - a)}{ab(b^2 - a^2)} = \frac{2ab}{b + a} = h\end{aligned}$$

である. よって l_A と l_B の交点の y 座標は

$$y = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{2ab}{a + b} + \frac{2}{a} = \frac{2a}{a(a + b)} = \frac{2}{a + b} = \frac{1}{m}.$$

したがって l_A と l_B の交点は $D(h, 1/m)$ である. □

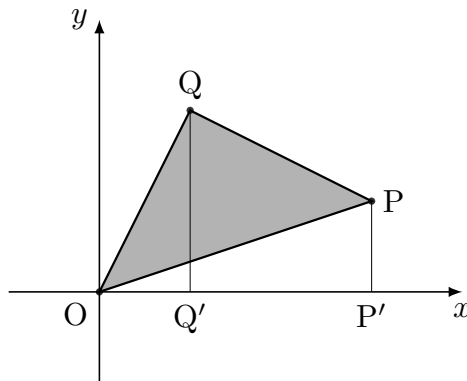


図 29 座標平面における三角形の面積

三角形の面積について次を証明しておく.

補題 3.5. 座標平面上に同一直線上にない 3 点 $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$, $R(r_1, r_2)$ がある. このとき $\triangle PQR$ の面積は

$$\frac{1}{2} |(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)|$$

で与えられる.

[証明] 点 R が原点 $O(0, 0)$ になるように平行移動して考えれば, はじめから $r_1 = r_2 = 0$ であるとしてよい. $0 < q_1 < p_1$, $0 < p_2 < q_2$ であるとする. 図 29 において, P' , Q' は x 軸上の点で PP' , QQ' は x 軸と垂直であるものとする. $P'(p_1, 0)$, $Q'(q_1, 0)$ である. 四角形 $OP'PQ$ の面積を 2 通りに計算する. 四角形 $OP'PQ$ は $\triangle OPQ$ と $\triangle OP'P$ に分割される. また $\triangle OQ'Q$ と台形 $QQ'P'P$ に分割される. これから

$$(\text{OPQ の面積}) + \frac{1}{2} p_1 p_2 = \frac{1}{2} q_1 q_2 + \frac{(p_2 + q_2)(p_1 - q_1)}{2}.$$

したがって

$$\begin{aligned} (\text{OPQ の面積}) &= \frac{1}{2} q_1 q_2 + \frac{(p_2 + q_2)(p_1 - q_1)}{2} - \frac{1}{2} p_1 p_2 \\ &= \frac{1}{2} (q_1 q_2 + p_1 p_2 - p_2 q_1 + p_1 q_2 - q_1 q_2 - p_1 p_2) = \frac{1}{2} (p_1 q_2 - p_2 q_1). \end{aligned}$$

他の場合も同様である. □

$y = 1/x$ のグラフと線分 AB で囲まれた図形 (図 30 の塗りつぶした部分) の面積を S とする. 三角形 ABC の面積を T , 三角形 ABD の面積を T' とすれば, 明らかに

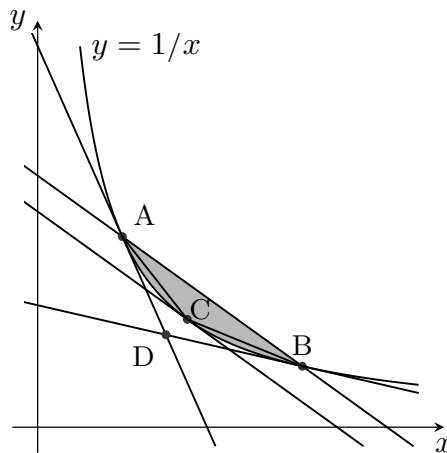


図 30

$$(3.14) \quad T < S < T'$$

が成り立つ. 命題 3.4 と補題 3.5 より

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left| (a-g) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{g} \right) - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{g} \right) (b-g) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{(a-g)(g-b)}{bg} - \frac{(g-a)(b-g)}{ag} \right| = \frac{|(a-g)(g-b)(a-b)|}{2abg} \\ &= \frac{|\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(a-b)|}{2ab\sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(b-a)}{2ab}. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} \left| (a-h) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{m} \right) - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{m} \right) (b-h) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{a(a-b)}{a+b} \cdot \frac{a-b}{b(a+b)} - \frac{b-a}{a(a+b)} \cdot \frac{b(b-a)}{a+b} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{a(a-b)^2}{b(a+b)^2} - \frac{b(b-a)^2}{a(a+b)^2} \right| = \frac{|(b^2-a^2)(b-a)^2|}{2ab(a+b)^2} = \frac{(b-a)^3}{2ab(a+b)}. \end{aligned}$$

ここで $r = b/a$ とおけば $r > 1$, $b = ra$ となるから

$$(3.15) \quad \begin{aligned} T &= \frac{(r-1)(\sqrt{r}-1)^2}{2r}, \\ T' &= \frac{(r-1)^3}{2r(r+1)} \end{aligned}$$

を得る. これから

$$T' - T = \frac{2\sqrt{r}(r-1)(\sqrt{r}-1)^2}{2r(r+1)} = \frac{2\sqrt{r}}{r+1} T \leq T,$$

したがって

$$(3.16) \quad T' \leq 2T$$

が成り立つ. 直線 AB のかわりに直線 AC, 直線 CB をとって直線 AC と $y = 1/x$ のグラフで囲まれる図形の面積を S_1 , 直線 CB と $y = 1/x$ のグラフで囲まれる図形の面積を S'_1 とし, 三角形 AC_1C , AD_1C , CC'_1B , CD'_1B を考える (図 31). このとき三角形 ACC_1 の面積を T_1 , 三角形 ACD_1 の面積を T'_1 とすれば, $g/a = \sqrt{b/a} = \sqrt{r}$ となる. よって $r_1 = \sqrt{r}$ とおけば (3.15), (3.16) より

$$(3.17) \quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{(r_1-1)(\sqrt{r_1}-1)^2}{2r_1}, \\ T'_1 &= \frac{(r_1-1)^3}{2r_1(r_1+1)} \leq 2T_1 \end{aligned}$$

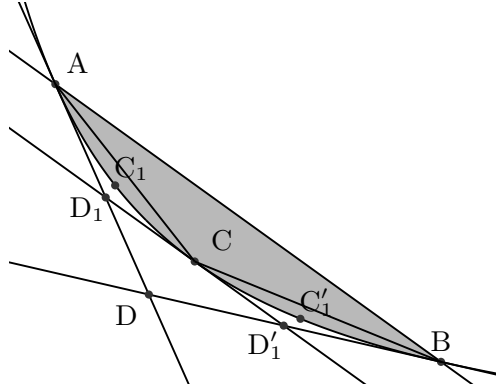


図 31 アルキメデスの取り尽くし法

を得る. $b/g = \sqrt{b/a} = \sqrt{r} = r_1$ より三角形 CBC'_1 の面積は T_1 に等しく, 三角形 CBD'_1 の面積は T'_1 に等しい. 明らかに

$$S = T + S_1 + S'_1, \quad T_1 < S_1 < T'_1, \quad T_1 < S'_1 < T'_1$$

が成り立つ. したがって

$$(3.18) \quad T + 2T_1 < S < T + 2T'_1$$

が成り立つ. この不等式を S の代わりに S_1, S'_1 に適用すれば

$$T_1 + 2T_2 < S_1 < T_1 + 2T'_2, \quad T_1 + 2T_2 < S'_1 < T_1 + 2T'_2$$

を得るから

$$(3.19) \quad T + 2T_1 + 2^2T_2 < S < T + 2T_1 + 2^2T'_2$$

を得る. ここで $r_2 = \sqrt{r_1} = r^{1/2^2}$,

$$(3.20) \quad T_2 = \frac{(r_2 - 1)(\sqrt{r_2} - 1)^2}{2r_2},$$

$$T'_2 = \frac{(r_2 - 1)^3}{2r_2(r_2 + 1)} \leq 2T_2$$

である. この議論を繰り返せば, 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$(3.21) \quad T + 2T_1 + \dots + 2^nT_n < S < T + 2T_1 + \dots + 2^{n-1}T_{n-1} + 2^nT'_n$$

が成り立つ. ここで $r_n = r^{1/2^n}$,

$$(3.22) \quad T_n = \frac{(r_n - 1)(\sqrt{r_n} - 1)^2}{2r_n},$$

$$T'_n = \frac{(r_n - 1)^3}{2r_n(r_n + 1)} \leq 2T_n$$

である． $2^n T_n$ を上から評価する． $u_n = r_n - 1$ とおけば $u_n > 0$ であり $r_n = 1 + u_n$ である． $r_n^{2^n} = r$ であり 2 項定理により

$$r = r_n^{2^n} = (1 + u_n)^{2^n} \geq 1 + 2^n u_n.$$

したがって $u_n \leq (r - 1)/2^n$ である． よって

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{(r_n - 1)(\sqrt{r_n} - 1)^2}{2r_n} = \frac{u_n u_{n+1}^2}{2(1 + u_n)} \\ &< \frac{u_n u_{n+1}^2}{2} \leq \frac{(r - 1)^3}{2^{3n+3}}, \\ 2^n T_n &< \frac{(r - 1)^3}{2^{2n+3}} \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n T_n < \frac{(r - 1)^3}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{(r - 1)^3}{6}.$$

すなわち無限和 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n T_n$ は収束する．

$$0 < S - \sum_{k=0}^n 2^k T_k < 2^n (T'_n - T_n) \leq 2^n T_n < \frac{(r - 1)^3}{2^{2n+3}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n T_n$$

が成り立つ．この値は $r = b/a$ のみで定まることに注意する． $A'(a, 0)$, $B'(b, 0)$ とすれば，図 32 から明らかに台形 $AA'B'B$ の面積から S を引いたものが $L(b) - L(a)$ である．この台形の面積は

$$\frac{1}{2}(b - a) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{(b - a)(b + a)}{2ab} = \frac{r^2 - 1}{2r}$$

となるので

$$L(b) - L(a) = \frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n T_n$$

が成り立つ．この右辺も $r = b/a$ のみで定まるから， $L(b) - L(a)$ も $r = b/a$ のみで定まることがわかる．したがって

$$L(b) - L(a) = L(r) - L(1) = L(b/a)$$

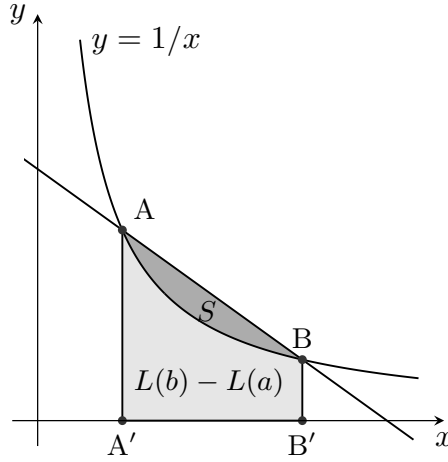


図 32 S と $L(b) - L(a)$ の関係

が成り立ち，等式 (3.13) が再び証明された．

次に

$$L(r) = \frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^k T_k$$

を簡単な極限の形に書き直す．

$$\begin{aligned} \frac{r^2 - 1}{2r} - T_0 &= \frac{r^2 - 1}{2r} - \frac{(r - 1)(\sqrt{r} - 1)^2}{2r} = \frac{r_1^2 - 1}{r_1}, \\ \frac{r^2 - 1}{2r} - T_0 - 2T_1 &= \frac{r_1^2 - 1}{r_1} - \frac{(r_1 - 1)(\sqrt{r_1} - 1)^2}{r_1} = \frac{2(r_2^2 - 1)}{r_2}. \end{aligned}$$

したがって

$$(3.23) \quad \frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k T_k = \frac{2^{n-1}(r_n^2 - 1)}{r_n}$$

となることが予想される．これが正しいとすると

$$\begin{aligned} \frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{k=0}^n 2^k T_k &= \frac{2^{n-1}(r_n^2 - 1)}{r_n} - 2^n T_n \\ &= \frac{2^{n-1}(r_n^2 - 1)}{r_n} - \frac{2^n(r_n - 1)(\sqrt{r_n} - 1)^2}{2r_n} = \frac{2^n(r_{n+1}^2 - 1)}{r_{n+1}}. \end{aligned}$$

表 2 $L(2)$ の近似値

n	2^n	a_n	$2^n(a_n - 1)$
1	2	1.4142	0.8284
2	4	1.1892	0.7568
3	8	1.0905	0.7241
4	16	1.0443	0.7084
5	32	1.0219	0.7007
6	64	1.0109	0.6969
7	128	1.0054	0.6950
8	256	1.0027	0.6940
9	512	1.0014	0.6936

よって帰納法によりすべての自然数 n に対して (3.23) が成り立つ. したがって

$$\begin{aligned}
 L(r) &= \frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^k T_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r^2 - 1}{2r} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k T_k \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}(r_n^2 - 1)}{r_n}
 \end{aligned}$$

を得る. $r_n = r^{1/2^n}$ であり, $r_n = 1 + u_n$, $0 < u_n \leq (r-1)/2^n$ となるから, $n \rightarrow \infty$ のとき $u_n \rightarrow 0$, $r_n \rightarrow 1$, $(r_n + 1)/(2r_n) \rightarrow 1$ である. したがって $r_n = r^{1/2^n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とするとき

$$L(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n(r_n - 1) \frac{r_n + 1}{2r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n(r_n - 1).$$

以上まとめて次の定理を得る.

定理 3.6. 反比例 $y = 1/x$ のグラフと x 軸, および $x = 1$ と $x = a$ (> 1) によって囲まれる図形の面積を $L(a)$ で表す. このとき $1 < a < b$ に対して

$$L(b/a) = L(b) - L(a), \quad L(ab) = L(a) + L(b)$$

が成り立つ. また

$$L(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(a^{1/2^n} - 1 \right)$$

が成り立つ.

定理 3.6 の最後の等式を用いて $L(a)$ の近似値を計算することができる．例えば， $a = 2$ に対して $a_n = 2^{1/2^n}$ とおけば， $a_1 = \sqrt{2}$ ， $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) と次々に平方根をとることによって定まる．このとき $2^n(a_n - 1)$ は n を大きくすると $L(2)$ に近づく (表 2)．

4 基本的空間図形の体積

体積は，1 辺の長さが 1 の立方体の体積を基準の 1 として測る．

長方形のときと同様に，縦が 3，横が 4，高さが 2 の直方体は基準となる体積 1 の立方体 24 個に分けられるから，その体積は $3 \times 4 \times 2 = 24$ である．直方体の体積について次が成り立つ．

定理 4.1 (直方体の体積)．縦が a ，横が b ，高さが c の直方体の体積は abc である．

この定理の証明は長方形の面積のときと同様に， a, b, c が整数のとき，有理数のときに定理を証明し，それを用いて実数のときの定理が証明される．

4.1 平行六面体の体積

6 面の平行四辺形で構成されている空間図形を**平行六面体**という．すべての隣り合う面が直交して，したがって各面が長方形である場合には**直方体**になる．

平行六面体の体積を求めよう．

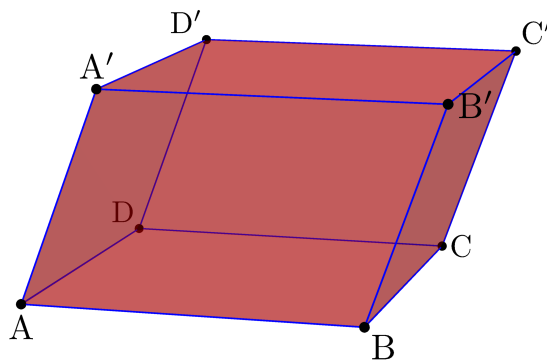


図 33 平行六面体

定理 4.2. 図 33 のような平行六面体の体積を V とする．底面の平行四辺形 $ABCD$ の面

積を S とし、高さを h とすれば、体積 V は

$$V = Sh$$

で与えられる．ただし高さとは底面 $ABCD$ と垂直な直線 l と面 $ABCD$ との交点を P , l と面 $A'B'C'D'$ との交点を P' とするときの PP' の長さである．

[証明] 必要ならば合同な平行六面体を何個かを同じ方向につなぎ合わせたもの (例えば面 $BCC'B'$ でつなぐ) を考えることによって、線分 AB の長さは十分大きいとして体積の公式を証明すればよい．このとき線分 AB の中点を M として、 M を通り直線 AB と垂直な平面を H とする．平面 H によって平行六面体を 2 つの部分に分割する．面 $ADD'A'$ を含む部分を W_1 、面 $BCC'B'$ を含む部分を W_2 とし、 W_2 の面 $BCC'B'$ と W_1 の面 $ADD'A'$ が重なるように W_1 を直線 AB の方向に平行移動することによりあらたな平行六面体が得られる．このあらたに得られた平行六面体の底面の面積は S のままであり、高さも h のままである．さらに底面の 1 つの辺 (直線 AB の一部) と側面 (もとの平行六面体を平面 H で切った切り口) は垂直である．

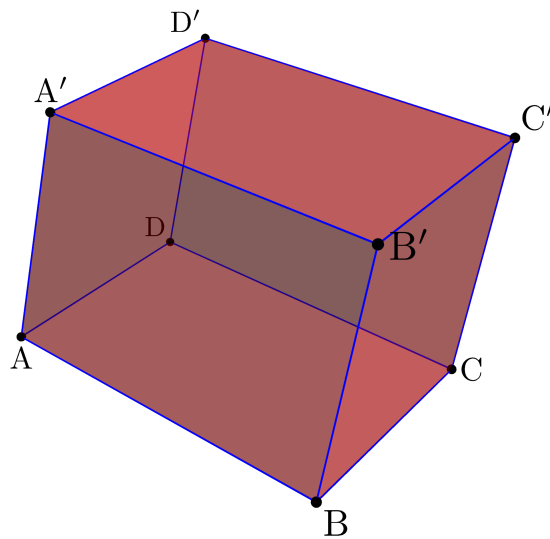


図 34 2 組の面が長方形である平行六面体

そこではじめから平行六面体の底面の辺 AB と側面 $ADD'A'$ は垂直、辺 AB と側面 $BCC'B'$ は垂直であるとして定理を証明すればよい．このとき面 $ABCD$ と $ABB'A'$ は長方形であり、側面 $BCC'B'$ は平行四辺形である (図 34)．はじめと同様に必要ならば合同な平行六面体を何個かを直線 BC の方向につなぎ合わせたもの (面 $CDD'C'$ でつなぐ) を考えることによって、線分 BC の長さは十分大きいとして体積の公式を証明すればよ

い. このとき線分 BC の中点を N として, N を通り直線 BC と垂直な平面を K とする. 平面 K によって平行六面体を 2 つの部分に分割する. 面 $ABB'A'$ を含む部分を U_1 , 面 $DCC'D'$ を含む部分を U_2 とし, U_2 の面 $DCC'D'$ と U_1 の面 $ABB'A'$ が重なるように U_1 を直線 BC の方向に平行移動することによりあらたな平行六面体が得られる. このあらたに得られた平行六面体は, 底面の面積が S , 高さが h の直方体である. よって体積は Sh である. $\square$

4.2 相似な空間図形の体積

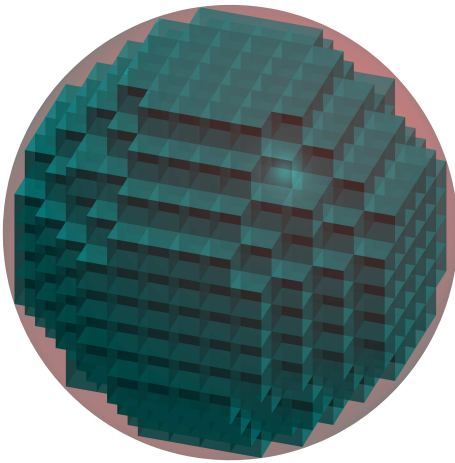


図 35 球に含まれる立方体の和

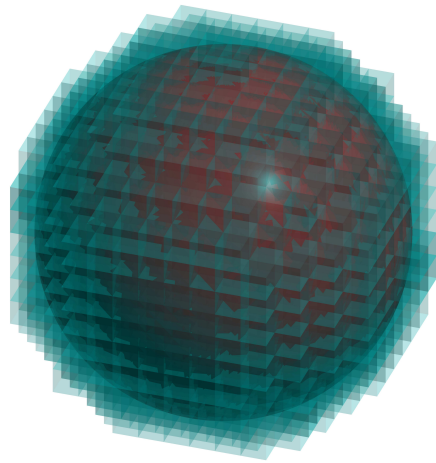


図 36 球を含む立方体の和

空間図形 F の体積を $v(F)$ で表すことにする. U を 1 辺の長さが a の立方体, U' を 1 辺の長さが ka の立方体とすれば, 定理 4.1 より, $v(U) = a^3$ であり, $v(U') = (ka)^3 = k^3 a^3$ である. よって $v(U) : v(U') = 1 : k^3$ である.

定理 4.3. 相似な空間図形 U, U' の相似比が $m : n$ ならば, 体積の比は $m^3 : n^3$ である.

[証明] 立方体について成り立つことは既にみた.

一般の図形の場合. P を U に含まれるような同じ大きさの有限個の立方体からなる空間図形とし, Q を U を含むような同じ大きさの有限個の立方体からなる空間図形とする (U が球のとき, P は図 35, Q は図 36 のようなものになる). $k = \frac{n}{m}$ とおく. このとき U' に含まれるような同じ大きさの有限個の立方体からなる空間図形 P' と U' を含む同じ大きさの有限個の立方体からなる空間図形 Q' で, P' は P と相似で P, P' の相似比が

$1:k$, Q' は Q と相似で Q, Q' の相似比が $1:k$ となるものが存在する．ここで

$$v(P') \leq v(U') \leq v(Q')$$

が成り立つ．立方体の場合の結果より $v(P') = k^3 v(P)$, $v(Q') = k^3 v(Q)$ だから

$$k^3 v(P) \leq v(U') \leq k^3 v(Q)$$

が成り立つ． $v(P)$, $v(Q)$ はいくらでも $v(U)$ に近くできるから，上の不等式により $v(U') = k^3 v(U)$ に等しいことがわかる．ゆえに

$$v(U) : v(U') = 1 : k^3 = m^3 : n^3$$

□

4.3 柱体の体積

三角柱や四角柱などの体積を求めよう．一般に空間において，平面 H 上に面積 S をもつ図形 A があるとし，平行移動によって A をうつしたものを A' とする． A の P とその平行移動で P をうつした A' 上の点 P' を結んだ線分 PP' 上のすべての点 Q からなる空間図形を柱体 AA' という (図 37)．このような空間図形を一般に**柱体**という．

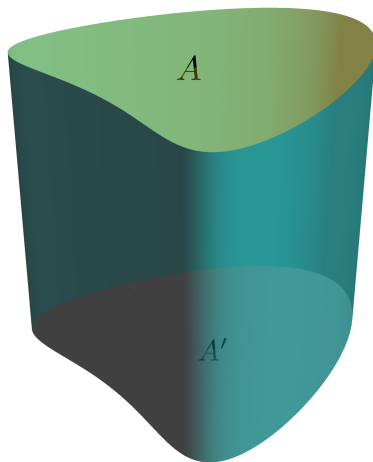


図 37 一般の柱体

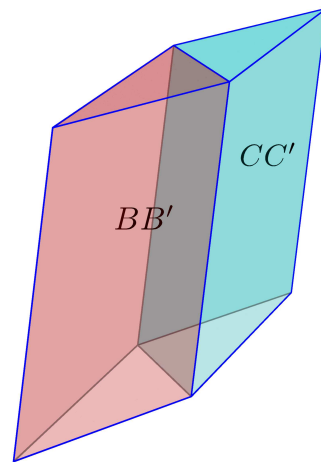


図 38 三角柱と平行六面体

平行六面体は平行四辺形 A を平行移動によってうつした A' によって得られる柱体 AA' である．定理 4.2 により，その体積は A の面積 S と高さ h の積 Sh である．ここで高さ h は底面 A の任意の点 P と P を通る底面 A と垂直な直線と A' を含む平面との交点を Q としたときの線分 PQ の長さである．平行六面体の底面の平行四辺形 A をその対角線で

2つの合同な三角形 B, C に分割すれば、平行四辺形 A' も2つの合同な三角形 B', C' に分割され、平行六面体 AA' は2つの合同な三角柱 BB' と三角柱 CC' に分割される。したがって三角柱 BB' の体積は平行六面体 AA' の体積 Sh の半分の $\frac{1}{2}Sh$ である。 $\frac{1}{2}S$ は三角形 B の面積である。逆に三角柱 BB' が与えられたとする。三角形 B' は三角形 B からある平行移動によって得られるものとする。三角形 B をその1つの辺に関して線対称移動して得られる合同な三角形を C とし、 B と C をあわせて得られる平行四辺形を A とする。 A をその平行移動でうつして得られる平行四辺形を A' とすれば、平行六面体 AA' の体積は三角柱 BB' の体積の2倍である。よって三角柱の体積は次のようになる。

定理 4.4. 底面の面積が S で高さが h の三角柱の体積は Sh で与えられる。

四角柱、五角柱などの多角柱は底面を三角形に分割していくつかの三角柱に分割できるから、定理 4.4 により、多角柱の体積は底面の面積を S 、高さを h とすれば Sh で与えられる。

AA' を一般の柱体とする。ここで A は平面上の図形で、 A' は A からある平行移動によって得られるものとする。底面 A の面積を S とし、高さを h とする。 B を A に含まれる多角形とし、 C を A を含む多角形とする。この平行移動によって B, C をうつしたものをそれぞれ B', C' とすれば、柱体 BB' は柱体 AA' に含まれ、柱体 CC' は柱体 AA' を含むから

$$v(BB') \leq v(AA') \leq v(CC')$$

が成り立つ。多角柱 BB' の高さも多角柱 CC' の高さも h だから $v(BB') = (B \text{ の面積})h$, $v(CC') = (C \text{ の面積})h$ である。したがって

$$(B \text{ の面積})h \leq v(AA') \leq (C \text{ の面積})h$$

が成り立つ。多角形 B の面積、多角形 C の面積は A の面積 S にいくらでも近くとれるから、上の不等式から柱体 AA' の体積は Sh でなければならない。以上まとめると

定理 4.5. 平面 H 上の面積 S をもつ図形 A と A を平行移動して得られる図形 A' からつくられる柱体 AA' の体積は高さを h とすると $v(AA') = Sh$ で与えられる。

4.4 三角錐の体積

空間において4つの平面で囲まれた空間図形を**四面体**という。四面体は同一平面上にない4点を結ぶことにより得られる4つの三角形を面とする空間図形であり、三角錐と同じ

である．平行六面体の体積の公式と定理 4.3 を用いることによって四面体の体積の公式を導くことができる．

定理 4.6. 四面体 $OABC$ の体積 V は底面 $\triangle ABC$ の面積を S ，高さを h とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

で与えられる．ただし高さとは頂点 O から底面 ABC へおろした垂直と底面 ABC との交点を P とするときの OP の長さである．

[証明] U を四面体とし， U' を U と相似な四面体で相似比が $1:2$ であるものとする．定理 4.3 より U, U' の体積の比は $v(U) : v(U') = 1:8$ である．四面体 U' の頂点を O ,

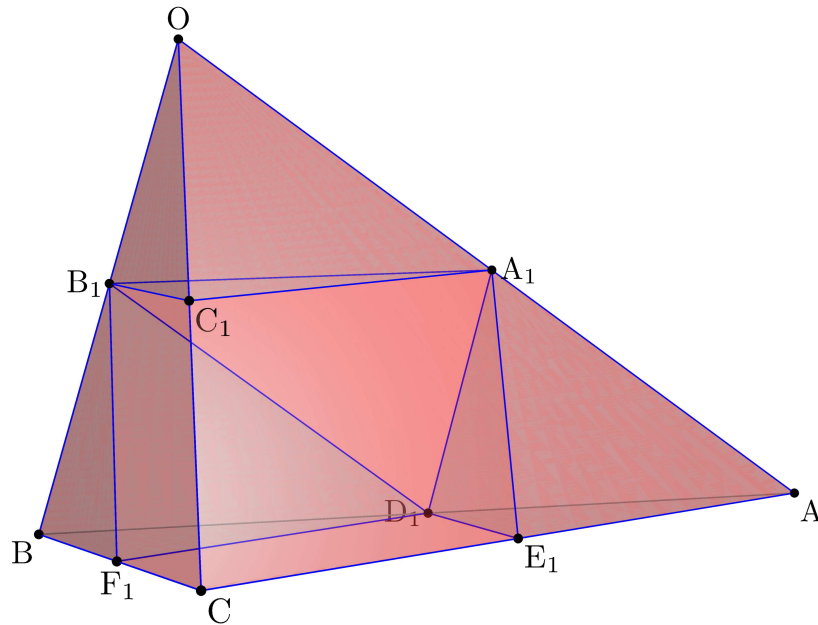


図 39 四面体の分割

A, B, C とし， U' の 6 つの辺 OA, OB, OC, AB, AC, BC の中点をそれぞれ $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ とする (図 39)．このとき 3 つの四面体 $OA_1B_1C_1, A_1AD_1E_1, B_1D_1BF_1$ はすべて U と合同である．四面体 U' からこの 3 つの四面体を取り除いて得られる空間図形を W とする． W は 3 つの平行四辺形の面と 4 つの三角形の面をもつ (図 40)． U, W の体積の比は $v(U) : v(W) = 1:5$ である．

W の 3 つの平行四辺形の面 $A_1C_1CE_1, B_1F_1CC_1, F_1CE_1D_1$ のそれぞれを平行移動して得られる平行六面体を $\widetilde{W}$ とする． $\widetilde{W}$ は W に平面 $A_1B_1C_1$ 上の点 C'_1 を四角形

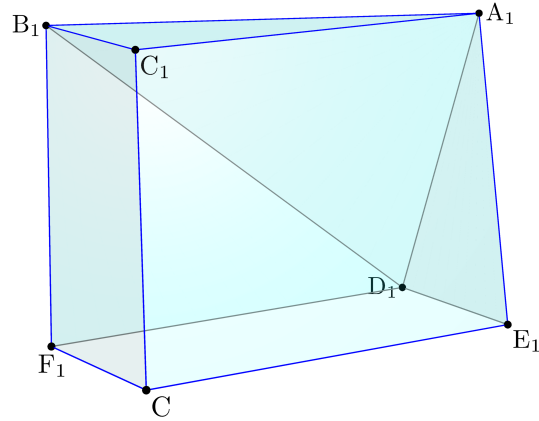


図 40 空間図形 W

$A_1C'_1B_1C_1$ が平行四辺形になるようにとることによって得られる平行六面体である (図 41).

四面体 $B_1D_1BF_1$ を U とし, 四面体 $D_1B_1A_1C'_1$ を $\tilde{U}$ とする. U と $\tilde{U}$ が合同であることを示そう. そのためには定理 A.11 により, 対応する 6 つの辺の長さがそれぞれ等しいことを示せばよい. まず四角形 $B_1C_1A_1C'_1$ は平行四辺形だからこれを対角線 B_1A_1 で 2 つの三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ と $B_1A_1C'_1$ にわければ, この 2 つの三角形は合同である. すなわち $\triangle A_1B_1C_1 \equiv B_1A_1C'_1$ である. また四面体 $OA_1B_1C_1$ は四面体 $U = B_1D_1BF_1$ と合同だから, $\triangle A_1B_1C_1$ は $\triangle D_1BF_1$ と合同である. よって $\triangle D_1BF_1 \equiv \triangle A_1B_1C_1 \equiv B_1A_1C'_1$ である. したがって

$$D_1B = B_1A_1, \quad D_1F_1 = B_1C'_1, \quad BF_1 = A_1C'_1$$

が成り立つ. 四角形 $B_1F_1D_1C'_1$ は平行四辺形だから

$$B_1F_1 = D_1C'_1$$

である. また四面体 $U = B_1D_1BF_1$ は四面体 $A_1AD_1E_1$ と合同だから,

$$B_1B = A_1D_1$$

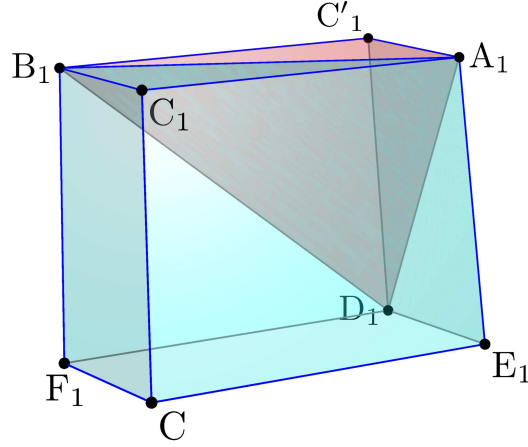


図 41 平行六面体 $\widetilde{W}$ の W と $\widetilde{U}$ への分割

である． $B_1D_1 = D_1B_1$ は自明である．以上により四面体 $U = B_1D_1BF_1$ と四面体 $\widetilde{U} = D_1B_1A_1C'_1$ の対応する 6 つの辺の長さがそれぞれ等しいことがいえた．ゆえに $U \equiv \widetilde{U}$ である ($\widetilde{U}$ は U の鏡映を平行移動と回転移動して得られるものである)．

平行六面体 $\widetilde{W}$ は W と $\widetilde{U}$ からなるから， $v(U) : v(\widetilde{W}) = 1 : 6$ である．はじめに与えられた四面体 $U' = OABC$ の底面 $\triangle ABC$ の面積を S とし，高さを h とすると，四面体 $U = B_1D_1BF_1$ の底面 $\triangle D_1BF_1$ の面積は $\frac{1}{4}S$ であり，高さは $\frac{1}{2}h$ である．平行六面体 $\widetilde{W}$ の底面 $F_1CE_1D_1$ の面積は $\triangle D_1BF_1$ の面積の 2 倍だから $\frac{1}{2}S$ であり，高さは $\frac{1}{2}h$ である．定理 4.2 より

$$v(\widetilde{W}) = \frac{1}{2}S \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}Sh$$

である．

$$v(U) = \frac{1}{6}v(\widetilde{W}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4}Sh = \frac{1}{24}Sh$$

である．したがって四面体 U' の体積は

$$v(U') = 8v(U) = 8 \times \frac{1}{24}Sh = \frac{1}{3}Sh$$

である．

□

一般に空間において，平面 H 上に面積 S をもつ図形 A があるとし，平面 H 上でない点 O をとって，点 O と A の点 P とを結んだ線分 OP 上のすべての点 Q からなる空間図形を錐 OA という (図 42)．このような空間図形を一般に**錐体**という．

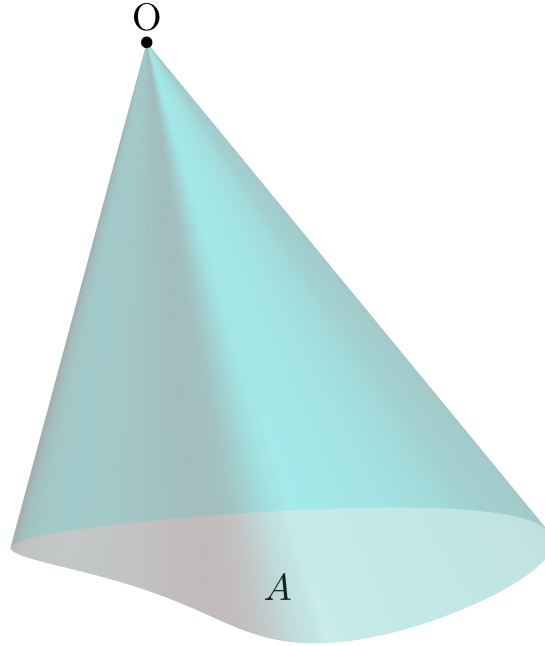


図 42 一般の錐体

$$OA = \{Q \mid Q \text{ は線分 } OP \text{ 上の点, } P \in A\}.$$

錐 OA の高さを h とする． h は O から平面 H へおろした垂線と H の交点を R としたときの距離 OR である． B を A に含まれる多角形とし， C を A を含む多角形とすれば，錐 OB は錐 OA に含まれ，錐 OC は錐 OA を含むから

$$v(OB) \leq v(OA) \leq v(OC)$$

が成り立つ．多角錐 OB の高さも多角錐 OC の高さも h だから $v(OB) = \frac{1}{3}(B \text{ の面積})h$ ， $v(OC) = \frac{1}{3}(C \text{ の面積})h$ である．したがって

$$\frac{1}{3}(B \text{ の面積})h \leq v(OA) \leq \frac{1}{3}(C \text{ の面積})h$$

が成り立つ．多角形 B の面積，多角形 C の面積は A の面積 S にいくらでも近くとれるから，上の不等式から錐 OA の体積は $v(OA) = \frac{1}{3}Sh$ で与えられる．以上まとめると

定理 4.7. 平面 H 上の面積 S をもつ図形 A と平面 H 上にない点 O からつくられる錐 OA の体積は高さを h とすると

$$v(OA) = \frac{1}{3}Sh$$

で与えられる.

錐体の体積の別の求め方

平面 H 上に面積 S をもつ図形 A があり, O を H 上にない点とする. O から平面 H へおろした垂線と H の交点を R とする. $h = OR$ がこの錐 OA の高さである. $0 \leq x \leq h$ を満たす実数 x に対して線分 OR 上に $OX = x$ となる点 X をとる. 点 X を通り平面 H と水平な平面を H_x とする. 錐 OA の平面 H_x による切り口の図形を A_x とする. A_x は A と相似であり, 相似比は $x : h$ である. したがって A_x の面積を $S(x)$ とすれば, $S(x) : S = x^2 : h^2$ である. すなわち

$$S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$$

である. $d > 0$ を十分小さくとり, A_x を直線 OR に沿って R の方向に d だけ平行移動したものを B_x とし, A_x を直線 OR に沿って O の方向に d だけ平行移動したものを C_x とする. このとき柱体 A_xB_x および A_xC_x の体積は定理 4.5 によりいずれも

$$(4.1) \quad S(x)d = \frac{Sd}{h^2}x^2$$

である.

$n > 1$ を自然数として $0 \leq x \leq h$ を n 等分する. $i = 0, 1, \dots, n$ に対して $x_i = (i/n)h$ とおく. $d = h/n$ とする. 柱体の和

$$\begin{aligned} P_n &= A_{x_1}B_{x_1} \cup A_{x_2}B_{x_2} \cup \dots \cup A_{x_{n-1}}B_{x_{n-1}}, \\ Q_n &= A_{x_1}C_{x_1} \cup A_{x_2}C_{x_2} \cup \dots \cup A_{x_n}C_{x_n}, \end{aligned}$$

は図 43, 44 のようになり, P_n は錐 OA に含まれ, Q_n は錐 OA を含む. したがって

$$(4.2) \quad v(P_n) < v(OA) < v(Q_n)$$

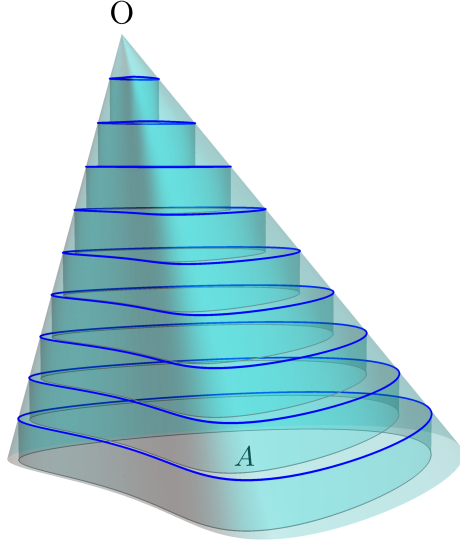


図 43 錐体に含まれる柱体の和 P_n

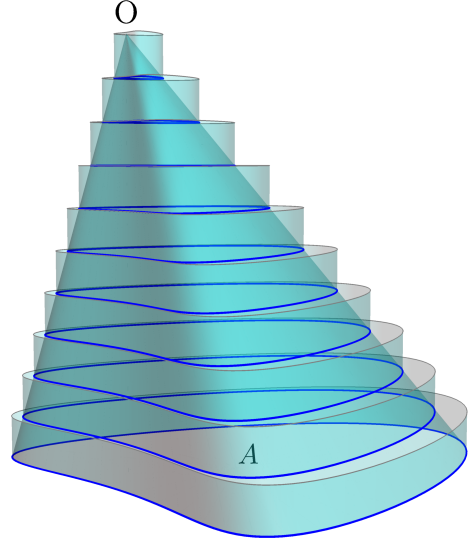


図 44 錐体を含む柱体の和 Q_n

を得る．この不等式の両側を計算する．(4.1) より

$$\begin{aligned}
 v(P_n) &= v(A_{x_1}B_{x_1}) + v(A_{x_2}B_{x_2}) + \cdots + v(A_{x_{n-1}}B_{x_{n-1}}) \\
 &= \frac{Sd}{h^2}x_1^2 + \frac{Sd}{h^2}x_2^2 + \cdots + \frac{Sd}{h^2}x_{n-1}^2 \\
 &= \frac{S(h/n)}{h^2} \left\{ \left(\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{2h}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{(n-1)h}{n}\right)^2 \right\} \\
 &= \frac{Sh}{n^3} \{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}, \\
 v(Q_n) &= v(A_{x_1}C_{x_1}) + v(A_{x_2}C_{x_2}) + \cdots + v(A_{x_n}C_{x_n}) \\
 &= \frac{Sd}{h^2}x_1^2 + \frac{Sd}{h^2}x_2^2 + \cdots + \frac{Sd}{h^2}x_n^2 \\
 &= \frac{S(h/n)}{h^2} \left\{ \left(\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{2h}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{nh}{n}\right)^2 \right\} \\
 &= \frac{Sh}{n^3} \{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\}.
 \end{aligned}$$

ここで (3.4) より

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

である．この式で n を $n-1$ で置き換えれば

$$(4.3) \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

を得る. (3.4), (4.3) より

$$\begin{aligned} v(P_n) &= \frac{Sh}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = Sh \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \\ &= Sh \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = Sh \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right), \\ v(Q_n) &= \frac{Sh}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = Sh \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= Sh \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = Sh \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right). \end{aligned}$$

これから n を大きくしていくと P_n も Q_n も $\frac{1}{3}Sh$ に近づく. したがって (4.2) より

$$v(OA) = \frac{1}{3}Sh$$

でなければならない. □

5 球の体積と表面積

この節の議論, 特に定理 5.3 の証明は小林 [1] によるものである.

5.1 アルキメデスの方法

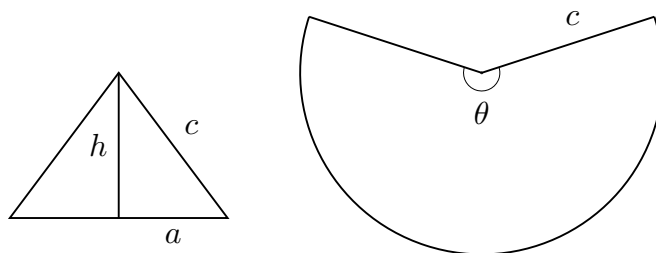


図 45 円錐の側面の展開図

補題 5.1. 底面の半径が a で高さが h の円錐の側面積は $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ とおくとき, πac である.

[証明] 展開図をかけば, 側面は半径 $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ の円の長さ $2\pi a$ の弧に対する扇形だから, その中心角は $\theta = 2\pi a/c$ であり, したがって面積は $\frac{1}{2}c^2\theta = \pi ac$. □

補題 5.2. 底面の半径が a_1 で高さが h_1 の円錐から、その一部である同じ頂点をもち底面の半径が a_2 で高さが h_2 ($a_2 < a_1$, $h_2 < h_1$) の円錐を除いた円錐台の側面積は $c = \sqrt{a_1^2 + h_1^2} - \sqrt{a_2^2 + h_2^2}$ とおくとき

$$\pi(a_1 + a_2)c.$$

[証明] $c_1 = \sqrt{a_1^2 + h_1^2}$, $c_2 = \sqrt{a_2^2 + h_2^2}$ において求める側面積を S とすると補題 5.1 から

$$S = \pi a_1 c_1 - \pi a_2 c_2.$$

辺の長さが a_1, h_1, c_1 の直角三角形と辺の長さが a_2, h_2, c_2 の直角三角形は相似だから, $0 < t < 1$ が存在して $(a_2, h_2, c_2) = (ta_1, th_1, tc_1)$ が成り立つ. このとき,

$$\begin{aligned} S &= \pi a_1 c_1 - \pi a_1 c_1 t^2 = \pi a_1 c_1 (1 - t^2) \\ &= \pi a_1 (1 + t) c_1 (1 - t) = \pi (a_1 + ta_1) (c_1 - tc_1) \\ &= \pi (a_1 + a_2) (c_1 - c_2) = \pi (a_1 + a_2) c. \end{aligned}$$

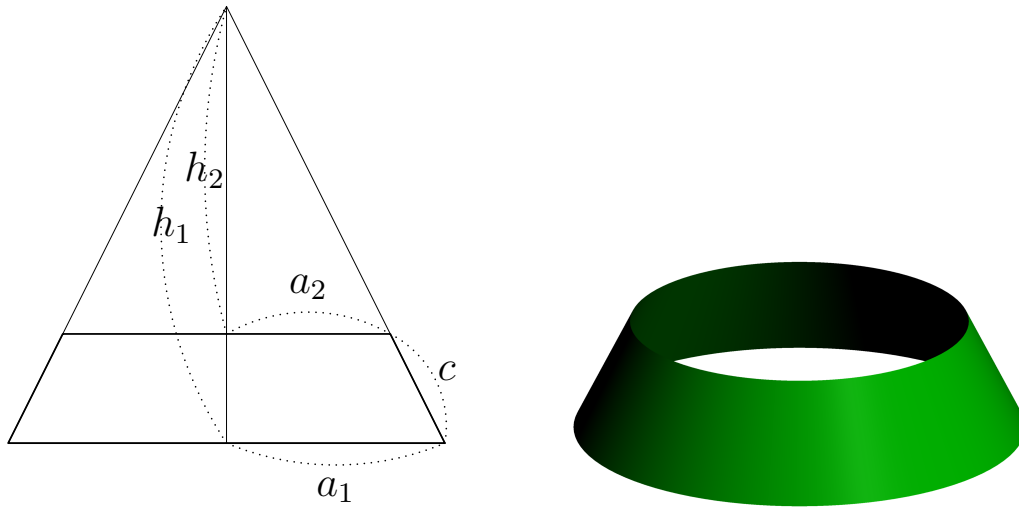


図 46 円錐の一部の側面積

□

定理 5.3 (アルキメデス). 図 48 のように $EC_1 = b$ として半径 r の円弧 A_1EB_1 を EF を軸として回転させて得られる曲面 (球面の一部) の面積 S は

$$2\pi r b$$

で与えられる. 特に $b = r$ とすれば半径 r の半球の表面積は $2\pi r^2$ であり, 半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ である.

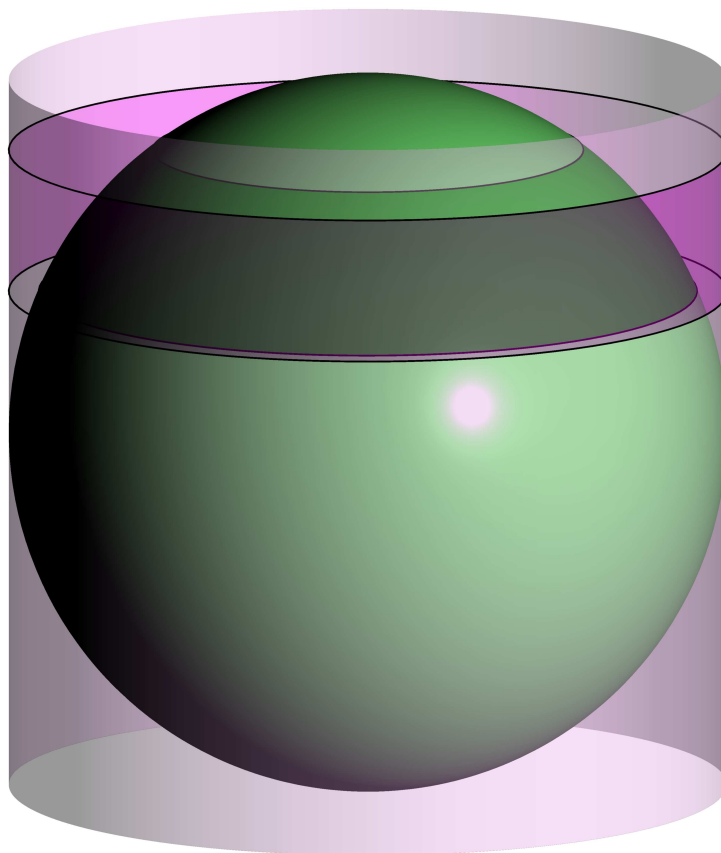


図 47 球面の面積と円柱の側面積

[証明] 円弧 A_1EB_1 を $2n$ 等分したときの等分点を $A_1, A_2, \dots, A_n, E, B_n, \dots, B_2, B_1$ とする (図 48 は $n = 3$ の場合). A_iB_i の中点を C_i とし, A_iB_{i+1} と OE の交点を D_i とする ($i = 1, 2, \dots, n-1$). $D_n = E$ とする. $C_1E = b$ とする.

直角三角形 $A_iC_iD_i$ と直角三角形 $B_{i+1}C_{i+1}D_i$ について, A_iB_i と $A_{i+1}B_{i+1}$ は平行だから, $\angle C_iA_iD_i = \angle C_{i+1}B_{i+1}D_i$ である. したがって $\triangle A_iC_iD_i$ と $\triangle B_{i+1}C_{i+1}D_i$ は相似である. 円弧 B_iB_{i+1} と円弧 $B_{i+1}B_{i+2}$ の長さは等しいから, 円周角の定理によって $\angle B_iA_iB_{i+1} = \angle B_{i+1}A_{i+1}B_{i+2}$ が成り立つ. したがって $\triangle A_iC_iD_i$ と $\triangle A_{i+1}C_{i+1}D_{i+1}$ も相似である. よって $i = 1, 2, \dots, n-1$ について

$$(5.1) \quad \frac{A_iC_i}{C_iD_i} = \frac{B_{i+1}C_{i+1}}{C_{i+1}D_i} = \frac{A_{i+1}C_{i+1}}{C_{i+1}D_{i+1}}$$

が成り立つ. さらに, $\angle EB_nF$ は直径上の円周角だから直角であり, 円周角の定理により, $\angle A_nFE = \angle B_nFE = \angle B_nA_nE$ である. したがって $\triangle A_nC_nE$ は $\triangle FA_nE$ と相似で

ある。よって

$$(5.2) \quad \frac{A_n C_n}{C_n E} = \frac{F A_n}{A_n E}$$

が成り立つ。(5.1) と (5.2) により, すべての $i = 1, 2, \dots, n-1$ について

$$(5.3) \quad \frac{A_i C_i}{C_i D_i} = \frac{B_{i+1} C_{i+1}}{C_{i+1} D_i} = \frac{F A_n}{A_n E}$$

が成り立つ。したがって

$$\frac{A_1 C_1 + B_2 C_2 + A_2 C_2 + B_3 C_3 + \dots + A_n C_n}{C_1 D_1 + C_2 D_1 + C_2 D_2 + C_3 D_2 + \dots + C_n D_n} = \frac{F A_n}{A_n E}$$

を得る。左辺の分母は $C_1 E$ であり, 分子は $A_1 C_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + \dots + A_n B_n$ だから

$$(5.4) \quad \frac{A_1 C_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + \dots + A_n B_n}{C_1 E} = \frac{F A_n}{A_n E}.$$

一方, 線分 $A_i A_{i+1}$ を EF のまわりに回転させて得られる曲面の面積は補題 5.2 より

$$\pi \left(\frac{1}{2} A_i B_i + \frac{1}{2} A_{i+1} B_{i+1} \right) A_i A_{i+1}$$

だから, 折れ線 $A_1 A_2 \dots A_n E$ を EF のまわりに回転させて得られる曲面の面積を S_n とすれば

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\pi}{2} (A_1 B_1 + 2A_2 B_2 + \dots + 2A_n B_n) A_n E \\ &= \pi (A_1 C_1 + A_2 B_2 + \dots + A_n B_n) A_n E \end{aligned}$$

である。これと (5.4) より

$$S_n = \pi \frac{F A_n}{A_n E} C_1 E A_n E = \pi F A_n \cdot C_1 E$$

を得る。 $C_1 E = b$ であり, $F A_n$ は n について単調増加で $n \rightarrow \infty$ とすれば $F A_n \rightarrow F E = 2r$ だから, S_n も n について単調増加で

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2\pi r b$$

を得る。特に $b = r$ とすれば半球の表面積が $2\pi r^2$ であり球の表面積は $4\pi r^2$ となる。

□

補題 5.4. E を原点 O を中心とする半径 r の球とする。 P を E に含まれる凸多面体で原点 O は P の内部にあるとする。 F を P の任意の面とする。このとき原点 O から F を含む平面へおろした垂線と F を含む平面との交点 D は面 F 上にある。

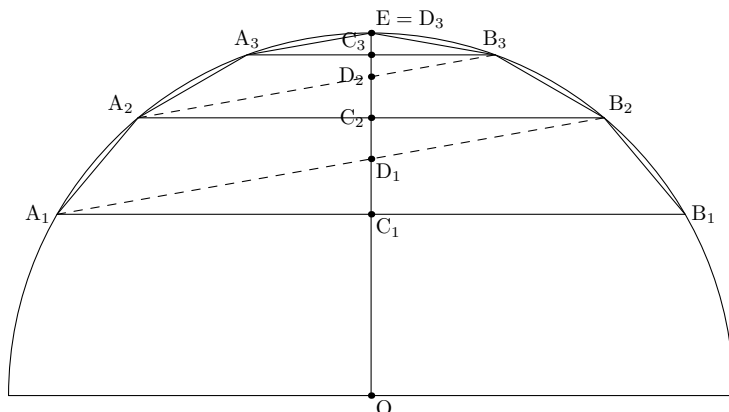


図 48 球面の一部の面積

[証明] 面 F はコンパクトだから連続関数 $A \mapsto d(A, O)$ は面 F 上で最小値をとる．原点 O は F に含まれず F は E に含まれているから， F の任意の点 A に対して $0 < d(A, O) \leq r$ である．また F の任意の点 A に対して $d(A, O) = r$ であるとする．と面 F が球 E の表面に含まれることになって矛盾である．ゆえに F のある点 A で $d(A, O) < r$ となる．したがって面 F 上の点 A_0 で最小値 $d_0 = d(A_0, O)$ をとるとすれば， $0 < d_0 < r$ である． $\delta_0 = r/d_0 > 1$ とおけば，凸多角形 $\delta_0 F$ 上の点と原点 O との距離は $\delta_0 A_0$ において最小値 $\delta_0 d_0 = r$ をとる．したがって $\delta_0 F$ を含む平面は点 $\delta_0 A_0$ で球 E と接する．ゆえに直線 $O(\delta_0 A_0)$ は凸多角形 $\delta_0 F$ と垂直である．面 F は面 $\delta_0 F$ と平行だから，直線 OA_0 は面 F と垂直である．これは $D = A_0 \in F$ を示している． $\square$

定理 5.5 (アルキメデス)．半径 r の球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

で与えられる．

[証明] 原点 O を中心とする半径 r の球 (中身のつまったもの) を E とする． E の 2 点を結ぶ線分は E に含まれるから， E は凸体である．命題 C.21 より各 $\delta > 1$ に対して凸多面体 P で $P \subset E \subset \delta P$ となるものが存在する． $v(P) \leq v(E) \leq v(\delta P) = \delta^3 v(P)$ である．定義 C.6 より

$$a(E) \leq a(\delta P) = \delta^2 a(P).$$

定理 C.22 より

$$a(E) \geq a(P)$$

である．一方，凸多面体 P の面の全体を $F_1, \dots, F_m$ として，原点 O を頂点として F_i を底面とする多角錐を Q_i とすれば

$$P = Q_1 \cup \dots \cup Q_m$$

と分割される．実際， P は凸だから $Q_1 \cup \dots \cup Q_m \subset P$ は明らかである． A を P の任意の点とする． O を端とする半直線 OA と交わるような P の面が 1 つ定まり，それを F_i とすれば $A \in Q_i$ である．ゆえに $P = Q_1 \cup \dots \cup Q_m$ である． Q_i は F_i を底面とする多角錐だから， O から F_i を含む平面へおろした垂線と F_i を含む平面との交点を H_i として，線分 OH_i の長さを h_i とすると定理 4.7 より

$$v(Q_i) = \frac{1}{3}|F_i|h_i$$

である．また

$$\begin{aligned} a(P) &= \sum_{i=1}^m |F_i|, \\ v(P) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{3}|F_i|h_i \end{aligned}$$

である．面 $F_i \subset E$ だから $h_i \leq r$ である．したがって

$$\begin{aligned} v(E) &\leq v(\delta P) = \delta^3 v(P) = \delta^3 \sum_{i=1}^m \frac{1}{3}|F_i|h_i \\ &\leq \frac{\delta^3}{3} r \sum_{i=1}^m |F_i| = \frac{\delta^3}{3} r a(P) \leq \frac{\delta^3}{3} r a(E). \end{aligned}$$

すなわち $v(E) \leq \frac{\delta^3}{3} r a(E)$ を得る．これがすべての $\delta > 1$ について成り立つから $r \rightarrow 1+0$ として

$$v(E) \leq \frac{1}{3} r a(E)$$

を得る．

逆向きの不等式を示す．補題 5.4 より点 H_i は面 F_i に含まれる．凸多面体 δP は球 E を含むから， δP の面 δF_i は E の内部の点を含まない．ゆえに δF_i は E の外部または境界に含まれる．特に δF_i の点 δH_i は $\delta h_i = d(\delta H_i, O) \geq r$ である．すなわち $h_i \geq r/\delta$ ($i = 1, \dots, m$) が成り立つ．これから

$$v(E) \geq v(P) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{3}|F_i|h_i \geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{3}|F_i|\frac{r}{\delta} = \frac{r}{3\delta} a(P) \geq \frac{r}{3\delta} \frac{a(E)}{\delta^2} = \frac{r}{3\delta^3} a(E).$$

すなわち $v(E) \geq \frac{1}{3\delta^3}ra(E)$ を得る．これがすべての $\delta > 1$ について成り立つから $r \rightarrow 1+0$ として

$$v(E) \geq \frac{1}{3}ra(E)$$

を得る．ゆえに $v(E) = \frac{1}{3}ra(E)$ である．定理 5.3 より $a(E) = 4\pi r^2$ だから $v(E) = \frac{4}{3}\pi r^3$ を得る． $\square$

5.2 区分求積法

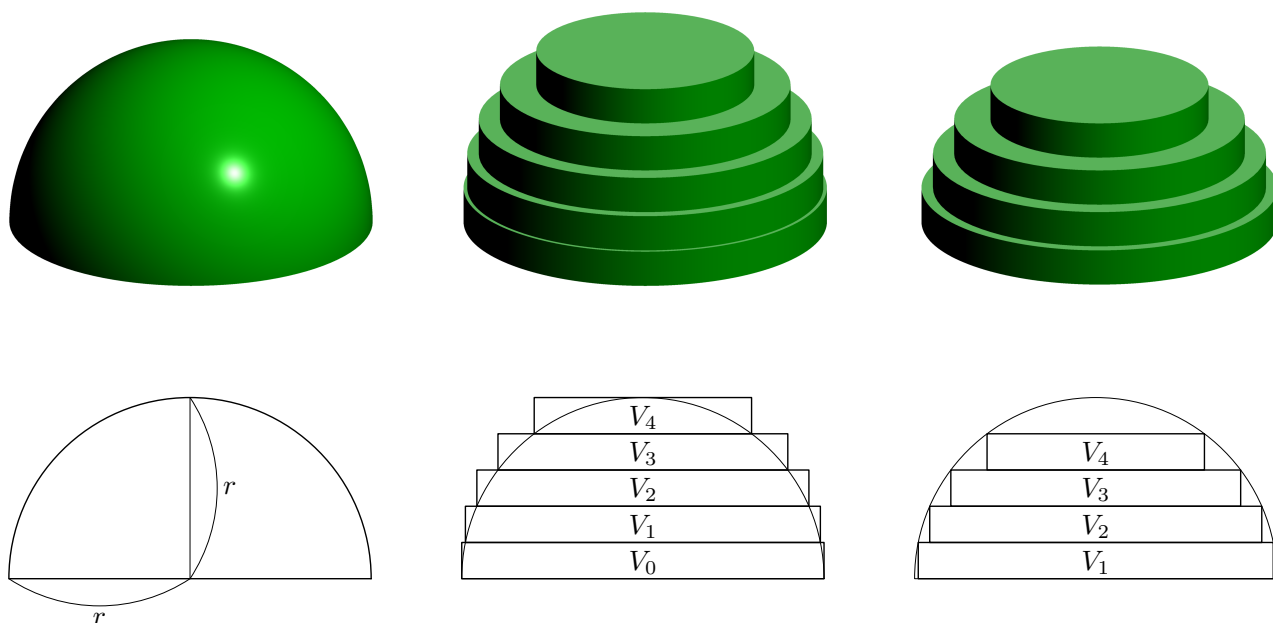


図 49 球の体積の求め方 ($n = 5$)

上半球を高さの方向に n 等分する．底面からの距離が $\frac{k}{n}r$ であるような底面と平行な平面で半球を切ったときの切口の円の半径を r_k とすると

$$r_k = \sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{n}r\right)^2}$$

である． V_k によって半径 r_k で高さが $\frac{r}{n}$ の円柱の体積を表す．この円柱を切口の平面の上側に置いて $k = 0, 1, \dots, n-1$ について並べれば，上半球を含む空間図形が得られる (図 49 中央)．またこの円柱を切口の平面の下側に置いて $k = 1, \dots, n-1$ について並べれば，上半球に含まれる空間図形が得られる (図 49 右)．したがって上半球の体積 $\frac{1}{2}V$ は

次の不等式を満たす.

$$\begin{aligned}
 V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1} &< \frac{1}{2}V < V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}, \\
 (5.5) \quad V_k &= \pi r_k^2 \frac{r}{n} = \frac{\pi r}{n} \left(r^2 - \left(\frac{k}{n} r \right)^2 \right) = \frac{\pi r^3}{n} - W_k, \\
 W_k &= \pi \left(\frac{k}{n} r \right)^2 \frac{r}{n}.
 \end{aligned}$$

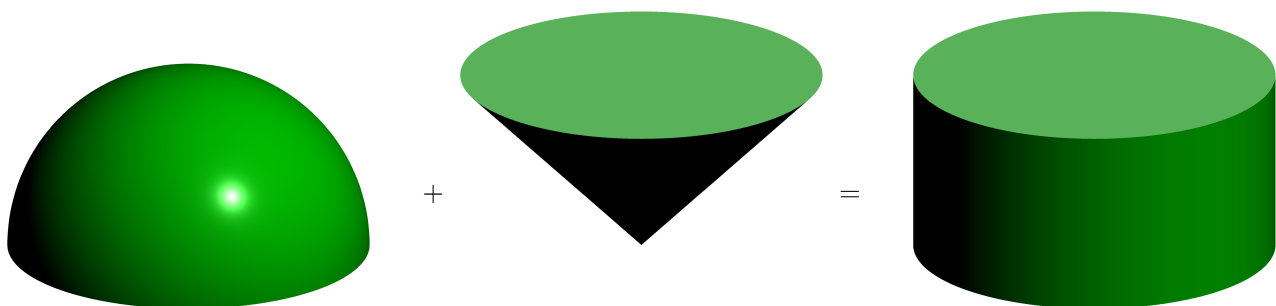


図 50 半球の体積 + 円錐の体積 = 円柱の体積

この W_k は何を意味しているか考えると次がわかる. 底面が半径 r の円で高さが r の円錐を逆向きにして, 円錐の頂点が半球の中心, 円錐の底面が, 半球の底面と平行で半球の中心から高さが r である平面上にあるように置く. 円錐の頂点からの距離 (= 半球の底面からの距離) が $\frac{k}{n}r$ であるような底面と平行な平面で円錐を切ったときの切口は, 半径が $\frac{k}{n}r$ の円である. したがって W_k はその円を底面とする高さ $\frac{r}{n}$ の円柱の体積である. この円柱を切口の平面の上側に置いて $k = 1, \dots, n-1$ について並べれば, 逆円錐に含まれる空間図形が得られ, この円柱を切口の平面の下側に置いて $k = 1, \dots, n$ について並べれば, 逆円錐を含む空間図形が得られる. よってこの逆円錐の体積を W とすれば

$$(5.6) \quad W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-1} < W < W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

$V_k + W_k = \frac{\pi r^3}{n}$ は k によらずに一定だから (5.5) と (5.6) から

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi r^3 < \frac{1}{2}V + W < \left(1 + \frac{1}{n}\right) \pi r^3$$

を得る. n を大きくすれば上の不等式の両側ともいくらでも πr^3 に近づくから, $\frac{1}{2}V + W = \pi r^3$ でなければならない (図 50). 定理 4.7 より $W = \frac{1}{3}\pi r^3$ であるから, $\frac{1}{2}V = \frac{2}{3}\pi r^3$,

したがって

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

を得る．定理 5.5 の証明で見たように，半径 r の球 E について，その体積 $v(E)$ とその表面積 $a(E)$ の間には

$$v(E) = \frac{1}{3}a(E)r$$

の関係があった．したがって $v(E) = \frac{4}{3}\pi r^3$ がわかれば， $a(E) = 4\pi r^2$ がわかることになる．

A 空間図形の合同

A.1 空間における 2 点間の距離

空間における 2 点 P, Q の距離を $d(P, Q)$ で表す．

定理 A.1. 平面 H 上に $\angle BCA$ が直角である直角三角形 ABC がある．点 A を通り H に垂直な直線上に点 D があるとする．このとき

$$d(B, D)^2 = d(B, C)^2 + d(C, A)^2 + d(A, D)^2$$

が成り立つ．

[証明] 図 51 において $\triangle ABC$ は直角三角形だから三平方の定理により

$$d(B, A)^2 = d(B, C)^2 + d(C, A)^2$$

が成り立つ． $\triangle DBA$ は $\angle BAD$ が直角である直角三角形だから三平方の定理により

$$d(B, D)^2 = d(B, A)^2 + d(A, D)^2$$

が成り立つ．ゆえに

$$d(B, D)^2 = d(B, C)^2 + d(C, A)^2 + d(A, D)^2$$

である．

□

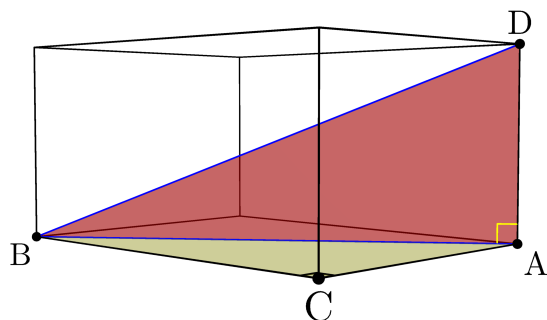


図 51 空間における 2 点間の距離

A.2 空間における合同変換

定義 A.2. 空間上の変換 f が**合同変換**であるとは、任意の 2 点 P, Q に対して

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

が成り立つことをいう。

すべての点 P に対して P 自身を対応させる恒等変換を id であらわせば、 id は合同変換である。 f, g が合同変換ならば合成変換 $f \circ g$ も合同変換である。

例 A.3. 平行移動、回転移動 (直線を回転軸とする)、鏡映 (平面に関する対称移動) は合同変換である。これらはどれも明らかに逆変換をもち、平行移動、回転移動、鏡映の逆変換はそれぞれ平行移動、回転移動、鏡映である。

定理 A.4. 空間上の変換 f が合同変換ならば、 f は平行移動、回転移動、鏡映の有限回の合成として表される。

定理 A.4 を証明するために補題を 4 つ用意する。

補題 A.5. 球面 S と平面 H が 2 点以上で交われば S と H の交わり $S \cap H$ は円である。 $S \cap H$ が 1 点 P_0 ならば H は点 P_0 で球面 S に接する平面である。

[証明] S の中心を O 、半径を r とする。

O が平面 H 上にあるとき、 $S \cap H$ の点は平面 H 上の点で O からの距離が r の点だから、 $S \cap H$ は O を中心とする半径 r の平面 H 上の円である。

O が平面 H 上にないとき、 O を通り H と垂直な直線と H の交点を B とする。 $OB = l$ とする。 $l > 0$ である。 $l > r$ ならば $S \cap H$ は空である。 $l = r$ ならば $S \cap H = \{B\}$ で

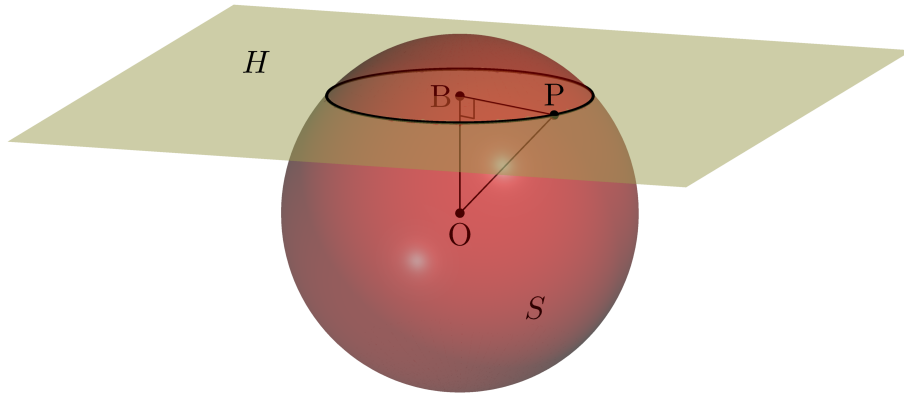


図 52 球面と平面の交わりは円になる

ある.

$0 < l < r$ とする. P を $S \cap H$ 上の任意の点とする. $OP = r$ である. よって三角形 OBP は $\angle OBP$ が直角であるような直角三角形であり, 斜辺 $OP = r$ と $OB = l$ は一定である. したがって直角三角形の合同条件により $S \cap H$ の別の点 P' をとっても $\triangle OBP \equiv \triangle OBP'$ であり, 特に $BP = BP'$ である. この一定の長さを h とすれば, $S \cap H$ は点 B を中心とする平面 H 上の半径 h の円である. $\square$

補題 A.6. O_1, O_2 を空間における異なる 2 点とする. O_i を中心とする球面 S_i ($i = 1, 2$) について, $S_1 \cap S_2$ が空でなく 1 点でもないとする. $S_1 \cap S_2$ は円である. 円 $S_1 \cap S_2$ を含む平面は中心を通る直線 O_1O_2 と垂直である. また $S_1 \cap S_2$ が 1 点 P であるとすれば, P は直線 O_1O_2 上の点であり, 2 つの球面は点 P で接している.

[証明] 直線 O_1O_2 を l で表し, $O_1O_2 = a$ とおく. $S_1 \cap S_2$ が空でないとする. 点 $P_0 \in S_1 \cap S_2$ をとる. 点 P_0 から直線 l におろした垂線と l の交点を B_0 とする. $h_0 = B_0P_0$ とおく. 三角形 $P_0O_1O_2$ について考える. 図 54 のようにこの三角形の三辺は $O_1O_2 = a$, $O_1P_0 = r_1$, $O_2P_0 = r_2$ であり, P_0 のとり方によらずに一定である. したがって O_1O_2 を底辺としたときの高さ h も一定である. さらに点 B_0 も P_0 のとり方によらずに一定である. したがって点 B_0 を通り直線 $l = O_1O_2$ と垂直な平面を H_0 とすれば, $P_0 \in H_0$ であり, H_0 も P_0 のとり方によらずに一定である.

いま $S_1 \cap S_2$ は 1 点でないとして, P_0 と異なる点 $P_1 \in S_1 \cap S_2$ をとる. 上に述べたことにより $P_1 \in H_0$ である. P_0, P_1 は $S_1 \cap H_0$ の異なる 2 点だから補題 A.5 より, $S_1 \cap H_0$ は B_0 を中心とする平面 H_0 上の半径 h の円 C である. 同様に P_0, P_1 は $S_2 \cap H_0$ の異なる 2 点だから $S_2 \cap H_0$ も B_0 を中心とする平面 H_0 上の半径 h の円 C である. 以上によ

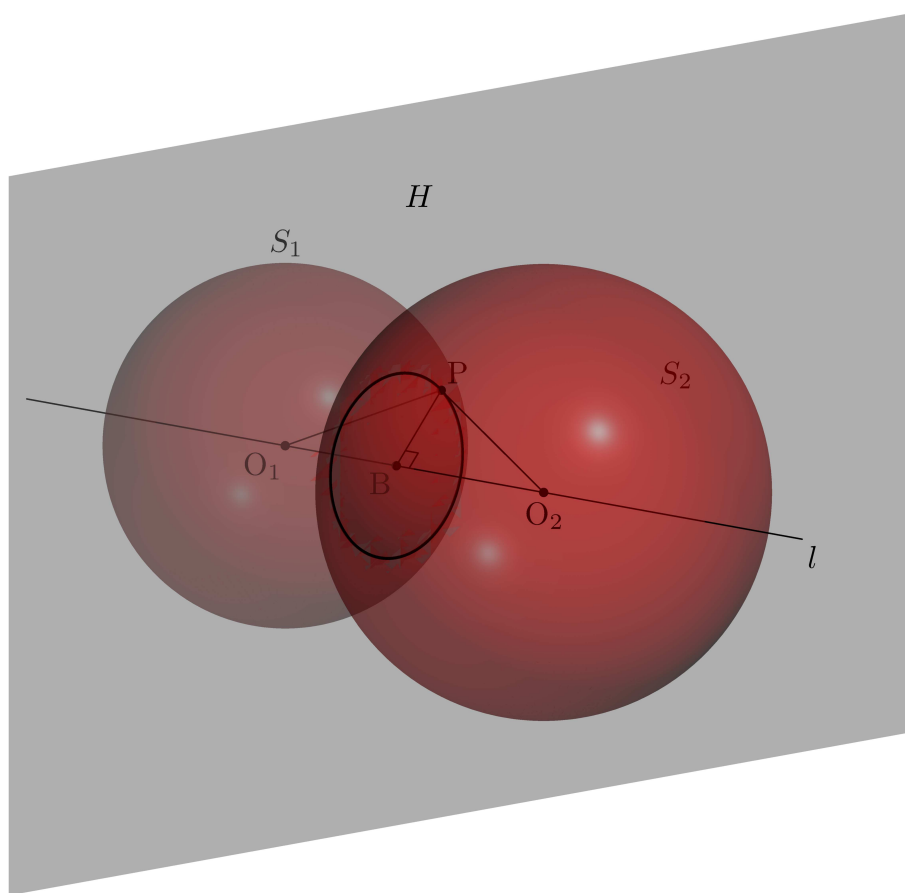


図 53 球面と球面の交わりは円になる

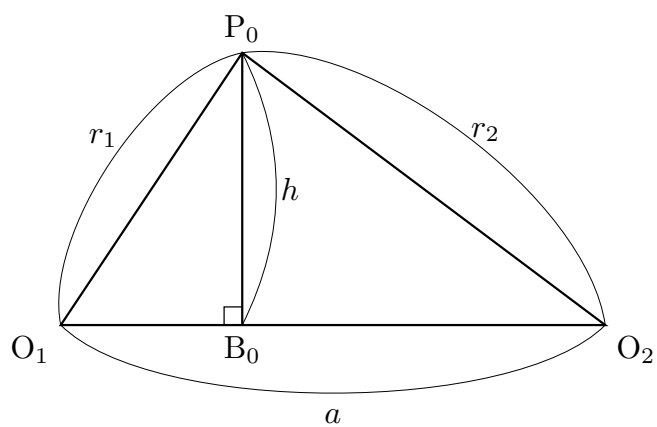


図 54 三角形 $P_0O_1O_2$

り $S_1 \cap S_2 \subset C \subset (S_1 \cap H_0) \cap (S_2 \cap H_0) \subset S_1 \cap S_2$ となって, $S_1 \cap S_2 = C$ を得る.

$S_1 \cap S_2$ が 1 点 P_0 であるとする. このとき $P_0 = B_0$ は直線 $l = O_1O_2$ 上の点である. P_0 において直線 l と垂直に交わる平面を H とすれば, S_1, S_2 とともに P_0 において平面 H と接している. $\square$

補題 A.7. 平面 H を空間における平面とし, P を H 上にない点, P' を H に関して P と対称である点とする. このとき

$$H = \{Q \mid QP = QP'\}$$

が成り立つ.

[証明] 直線 PP' と平面 H の交点を B とする. $Q \in H$ とすると, $\triangle PQB$ と $\triangle P'QB$ において $BP = BP'$, QB は共通, $\angle QBP = \angle QBP' = \text{直角}$ だから $\triangle PQB$ と $\triangle P'QB$ は合同である. したがって $QP = QP'$ である. 逆に点 Q が $QP = QP'$ を満たせば, Q から直線 PP' へおろした垂線と直線 PP' との交点を C とすると, $\triangle PQC$ と $\triangle P'QC$ は直角三角形であり斜辺 $QP = QP'$ であり, QC が共通だから直角三角形の合同条件により $\triangle PQC$ と $\triangle P'QC$ は合同である. よって $PC = P'C$ である. ゆえに $C = B$ であり, 直線 QB は直線 PP' と垂直だから $Q \in H$ である.

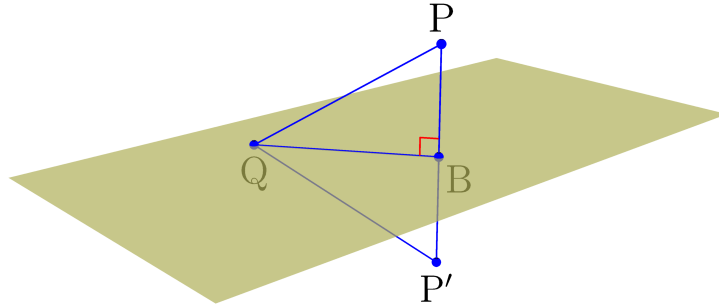


図 55 平面に関する鏡映

$\square$

補題 A.8. A_1, A_2, A_3 を空間における同一直線上にない 3 点とし, A_1, A_2, A_3 を含む平面を H とする. A_i を中心とする球面 S_i ($i = 1, 2, 3$) について, $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が空でないとする. $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 1 点または 2 点である. $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 2 点 P_1, P'_1 の場合は P_1 と P'_1 は平面 H に関して対称である. $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 1 点 P の場合は, P は平面 H 上にある.

[証明] S_i ($i = 1, 2, 3$) は平面 H に関して対称だから, $P \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$, $P \notin H$ ならば H に関して P と対称な点 P' も $P' \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$ を満たす. したがって $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 2 点以上の点からなる. ゆえに $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 1 点 P ならば $P \in H$ である.

$S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 2 点以上からなるとする. $C_{12} = S_1 \cap S_2$ とおくと補題 A.6 より C_{12} は円であり, C_{12} を含む平面 H_{12} は直線 A_1A_2 と垂直である. 同様に $C_{13} = S_1 \cap S_3$ とおくと C_{13} は円であり, C_{13} を含む平面 H_{13} は直線 A_1A_3 と垂直である. A_1, A_2, A_3 は同一直線上にないから H_{12} と H_{13} は異なる平面であり, H_{12} と H_{13} は平行ではない. よって $m = H_{12} \cap H_{13}$ は直線である. $C_{12} \subset H_{12}$, $C_{13} \subset H_{13}$ より

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = C_{12} \cap C_{13} \subset H_{12} \cap H_{13} = m$$

だから

$$(A.1) \quad S_1 \cap S_2 \cap S_3 \subset C_{12} \cap m$$

である. C_{12} と m は平面 H_{12} 上の円と直線だからその交点は高々 2 点である. (A.1) より $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ はちょうど 2 点 P, Q からなる. もし P, Q がともに H 上にあるとすれば, 平面 H 上の 3 つの円 $H \cap S_i$ ($i = 1, 2, 3$) の中心 A_i ($i = 1, 2, 3$) は P, Q の垂直二等分線上にあることになって同一直線上にないという仮定に矛盾する. ゆえに P, Q の少なくとも一方は H 上にない. P が H 上にないとしてよい. このとき H に関する P の対称点 P' も $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ 上にあるから, $Q = P'$ でなければならない. $\square$

補題 A.9. 空間の合同変換 f で同一直線上にない 3 点を固定するものは恒等変換または鏡映である. さらに同一平面上にない 4 点を固定するものは恒等変換である.

[証明] A_i ($i = 1, 2, 3$) を $f(A_i) = A_i$ となる同一直線上にない 3 点とする. この 3 点を含む平面を H とする. 点 P を A_i ($i = 1, 2, 3$) と異なるものとする. f は合同変換だから

$$d(A_i, f(P)) = d(f(A_i), f(P)) = d(A_i, P) \quad (i = 1, 2, 3)$$

を満たす. よって P および $f(P)$ は A_i を中心とする半径 $d(A_i, P)$ の球面 S_i 上にある. 補題 A.8 より $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は高々 2 点であり, $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 1 点ならば $f(P) = P$ となりこれは H 上の点である. $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 2 点 P_1, P'_1 ならば, $P_1 \notin H$, P'_1 は平面 H に関して P_1 と対称な点であり, $P, f(P) \in \{P_1, P'_1\}$ だから $f(P) = P$ または $f(P)$ は P と平面 H に関して対称な点 P' である.

いま平面 H 上にない点 C で $f(C) = C$ を満たすものがあるとする. このとき C は H

上にないから補題 A.7 より $d(C, P) \neq d(C, P')$ である.

$$d(C, f(P)) = d(f(C), f(P)) = d(C, P)$$

だから $f(P) = P$ でなければならない. すなわち f は恒等変換である. 平面 H 上にない点 C で $f(C) = C$ を満たすものが存在しないとする. このとき平面 H 上にない点 P はすべて $f(P) = P'$ を満たす. ゆえに f は平面 H に関する対称移動である. $\square$

[定理 A.4 の証明] f を合同変換とする. 任意の点 O をとる. $f(O) = A$ とする. f_1 を O を A にうつすような平行移動とする. f_1 の逆変換を f_1^{-1} で表す. $f_1(O) = A$ より $f_1^{-1}(A) = O$ である. よって $(f_1^{-1} \circ f)(O) = f_1^{-1}(f(O)) = f_1^{-1}(A) = O$ となり, 合成変換 $f_1^{-1} \circ f$ は O を固定する. $g = f_1^{-1} \circ f$ は合同変換の合成だから合同変換である. O と異なる任意の点 B をとる.

$$d(O, g(B)) = d(g(O), g(B)) = d(O, B)$$

より, $g(B)$ は O を中心とする半径 $d(O, B)$ の球面上にある. $O, B, g(B)$ を通る平面と点 O で垂直に交わる直線を l とする. 直線 l を軸とする適当な回転移動 f_2 で $f_2(B) = g(B)$ となるものが存在する. $f_2^{-1}(g(B)) = B$ である. $h = f_2^{-1} \circ g$ は合同変換の合成だから合同変換であり, 2 点 O と B を固定する. 次に直線 OB 上にない点 C をとる.

$$d(O, h(C)) = d(h(O), h(C)) = d(O, C),$$

$$d(B, h(C)) = d(h(B), h(C)) = d(B, C)$$

だから, $h(C)$ は O を中心とする半径 $d(O, C)$ の球面 S_1 と B を中心とする半径 $d(B, C)$ の球面 S_2 との交わり $S_1 \cap S_2$ の点である. 補題 A.6 により $S_1 \cap S_2$ は直線 OB と垂直な平面に含まれる円である. $C, h(C) \in S_1 \cap S_2$ だから直線 OB を軸とする適当な回転移動 f_3 をとれば $f_3(C) = h(C)$ である. $f_4 = f_3^{-1} \circ h$ とおけば f_4 は合同変換であり, 3 点 O, B, C を固定する.

補題 A.9 より f_4 は恒等変換または鏡映である. $f_4 = f_3^{-1} \circ h = f_3^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1} \circ f$ より

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$$

である. したがって $f_4 = \text{id}$ ならば $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ であり, f は回転移動 f_3 に続けて回転移動 f_2 を行いさらに平行移動 f_1 を行った変換である. また f_4 が鏡映ならば, $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$ であり, f は鏡映 (平面に関する対称移動) f_4 に続けて, 回転移動 f_3 , f_2 と平行移動 f_1 を行った変換である. $\square$

系 A.10. 合同変換は空間から空間への全単射である.

以上の準備の下で四面体の合同について次の定理を証明できる.

定理 A.11 (四面体の合同). 空間における四面体 $A_1A_2A_3A_4$ と四面体 $B_1B_2B_3B_4$ について, 6 つの辺の長さが等しい, すなわち

$$A_iA_j = B_iB_j \quad (1 \leq i < j \leq 4)$$

ならば, 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ と四面体 $B_1B_2B_3B_4$ は合同である.

[証明] 適当な合同変換により, 面 $A_1A_2A_3$ と面 $B_1B_2B_3$ が同じ平面 H 上にあるとしてよい. $\triangle A_1A_2A_3$ と $\triangle B_1B_2B_3$ は合同だから適当な合同変換により $\triangle B_1B_2B_3$ を $\triangle A_1A_2A_3$ に重ね合わせることができる. すなわち $B_1 = A_1, B_2 = A_2, B_3 = A_3$ であるとしてよい. このとき $A_iA_4 = A_iB_4$ ($i = 1, 2, 3$) である. $r_i = A_iA_4$ ($i = 1, 2, 3$) とおいて, A_i を中心とする半径 r_i の球面を S_i とする:

$$S_i = \{P \mid A_iP = r_i\} \quad (i = 1, 2, 3).$$

$A_4, B_4 \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は平面 H 上にないから補題 A.8 により, $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は H に関して対称な 2 点からなる. ゆえに $B_4 = A_4$ であるかまたは $B_4 = A'_4$ である. ここで A'_4 は A_4 と H に関して対称な点である. 前者の場合は 2 つの四面体は一致し, 後者の場合は一方の四面体を H に関する鏡映でうつせばもう一方に一致する. ゆえに四面体 $A_1A_2A_3A_4$ と四面体 $B_1B_2B_3B_4$ は合同である. $\square$

B 空間ベクトルの内積と外積

3 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

によって定義する. 内積は実数である. また $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ のノルムを

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

によって定義する. 内積は次の性質を持つ:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が直交する

$$\iff \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$$

$$\iff (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$\iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

$$\iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

さらに $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角度を θ とすれば、余弦定理によって

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

この左辺は

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\end{aligned}$$

だから

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

3次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

によって定義する．外積は3次元ベクトルである． $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ と直交する．
実際,

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 \\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_1a_3b_2 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_3b_1 = 0, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2)b_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)b_3 \\ &= a_2b_1b_3 - a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 = 0.\end{aligned}$$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角度を θ とすると $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ は次のように求まる．

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &\quad + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 \\ &\quad + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\ &\quad + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_2a_3b_2b_3 + 2a_1a_3b_1b_3 \\ &= a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

すなわち

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta.$$

外積は次の性質を持つ：

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \times \mathbf{a} &= -\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

C 凸体の表面積と体積

この節の議論は [2] を参考にしたものである。

定義 C.1. 空間において有限個の多角形からなる面で囲まれた図形を**多面体**という。

定義 C.2. 空間における図形 E が**凸体**であるとは、 E の任意の 2 点 P, Q に対して線分 PQ が E に含まれることをいう。

凸多面体 E の表面積を $a(E)$ 、体積を $v(E)$ で表す。また空間における平面図形 F の面積を $|F|$ で表す。空間における 2 点 A, B の距離を $d(A, B)$ で表す。

補題 C.3. P を凸 n 角形 F を底面として O を頂点とする凸多角錐とする。このとき

$$a(P) > 2|F|$$

が成り立つ。 P の頂点 O は原点とし、底面 F の頂点を原点 O からみて反時計回りに $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ とする。 A_i の位置ベクトルを $\mathbf{a}_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) とし、 $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_0$ とする。このとき

$$|F| = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_{i-1} \times \mathbf{a}_i) \right\|$$

である。

[証明] $\mathbf{p}_i = \mathbf{a}_{i-1} \times \mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とおく. $\mathbf{p}_i$ は三角形 $\triangle OA_{i-1}A_i$ を含む平面と垂直で凸多角錐 P の外側を向いたベクトルで, $|\triangle OA_{i-1}A_i| = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}_i\|$ を満たす. $\triangle OA_0A_1$ を含む平面と $\triangle OA_1A_2$ を含む平面は異なる平面で平行でもないから, その法線ベクトル $\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ は 1 次独立である.

底面 F の面積 $|F|$ を求める. $\mathbf{s}$ を底面 F の P の外側を向いた単位法ベクトルとする. 底面 F を $n-2$ 個の三角形 $\triangle A_0A_iA_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-2$) に分割する. ベクトル $(\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_0) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0)$ はすべて $\mathbf{s}$ の正の実数倍だから

$$(\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_0) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0) = \lambda_i \mathbf{s}, \quad \lambda_i > 0$$

とかけ, $|\triangle A_0A_iA_{i+1}| = \frac{1}{2}\|\lambda_i \mathbf{s}\| = \frac{1}{2}\lambda_i$ である. よって

$$\mathbf{p}_0 = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \mathbf{s} = \left(\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \right) \mathbf{s}$$

とおけば, $\mathbf{p}_0$ は底面 F と垂直で P の外側を向いたベクトルであり

$$|F| = \sum_{i=1}^{n-2} |\triangle A_0A_iA_{i+1}| = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{2} \lambda_i = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}_0\|$$

を満たす. ここで

$$\begin{aligned} \lambda_i \mathbf{s} &= (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_0) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0) = \mathbf{a}_{i+1} \times \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0 \times \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1} \times \mathbf{a}_0 \\ &= -\mathbf{p}_{i+1} + \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_{i+1} \times \mathbf{a}_0 \end{aligned}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n-2} (-\mathbf{p}_{i+1} + \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_{i+1} \times \mathbf{a}_0) \\ &= -\sum_{i=1}^{n-2} \mathbf{p}_{i+1} + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_{n-1} \times \mathbf{a}_0 = -\sum_{i=2}^{n-1} \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_n = -\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} |F| &= \frac{1}{2} \|\mathbf{p}_0\| = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\| + \sum_{i=3}^n \|\mathbf{p}_i\| < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{p}_i\| = (P \text{ の側面積}). \end{aligned}$$

最後の不等式には $\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ が 1 次独立であることを用いた。この両辺に $|F|$ を加えれば、 $2|F| < a(P)$ を得る。 $\square$

[補題 C.3 の前半の別証] 底面 F を含む平面を H_F とする。 P の頂点 O から平面 H_F へおろした垂線と H_F との交点を E とする。 多角錐 P の高さを $h = OE$ とする。 凸 n 角形 F の頂点を A_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) とする。 さらに $A_n = A_0$ とする。 $d(O, A_i) = a_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), $d(A_i, A_{i+1}) = l_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) とおく。 直線 $A_i A_{i+1}$ に E からおろした垂線と直線 $A_i A_{i+1}$ の交点を Q_i とする ($i = 0, 1, \dots, n-1$)。

$$|\triangle EA_i A_{i+1}| = \frac{1}{2} l_i d(E, Q_i).$$

直線 OQ_i は直線 $A_i A_{i+1}$ と垂直だから

$$|\triangle OA_i A_{i+1}| = \frac{1}{2} l_i d(O, Q_i).$$

また三平方の定理により

$$d(O, Q_i)^2 = d(O, E)^2 + d(E, Q_i)^2 > d(E, Q_i)^2.$$

よって $d(O, Q_i) > d(E, Q_i)$ である。 したがって

$$(C.1) \quad |\triangle OA_i A_{i+1}| > |\triangle EA_i A_{i+1}|.$$

点 E が凸多角形 F の内部にあるときは F はちょうど n 個の三角形 $\triangle EA_i A_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) に分割されるから、 $\sum_{i=0}^{n-1} |\triangle EA_i A_{i+1}| = |F|$ である。 そうでないときは $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, E$ を頂点とする凸 $(n+1)$ 角形を F' とすれば、 $F' \supset F$ であり F' は A_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) を適当に並べ替えれば、 F' は $n-1$ 個の三角形 $\triangle EA_i A_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-2$) に分割され、 $\triangle EA_{n-1} A_0$ はそれらの和集合に含まれる。 したがってこの場合は

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\triangle EA_i A_{i+1}| = |F'| + |\triangle EA_{n-1} A_0| \geq |F'| \geq |F|$$

となる。 ゆえにいずれの場合も (C.1) を $i = 0, 1, \dots, n-1$ について加えれば

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\triangle OA_i A_{i+1}| > \sum_{i=0}^{n-1} |\triangle EA_i A_{i+1}| \geq |F|$$

を得る。 この左辺は $a(P) - |F|$ に等しいから、 $a(P) > 2|F|$ が示された。 $\square$

補題 C.4. 空間における凸多面体の表面積は 1 つの面の面積の 2 倍よりも大きい。

[証明] P を凸多面体とする．必要ならば平行移動によって原点 O は P の内部にあるとしてよい． P の面の全体を $F_1, \dots, F_m$ とする． O を頂点とし， F_i を底面とする錐体を P_i とする． F_i は凸 n_i 角形であるとする． F_i の頂点を O からみて反時計回りに $A_{i0}, A_{i1}, \dots, A_{in_i-1}$ とし，それらの位置ベクトルを $\mathbf{a}_{i0}, \mathbf{a}_{i1}, \dots, \mathbf{a}_{in_i-1}$ とする．また $\mathbf{p}_{ik} = \mathbf{a}_{ik-1} \times \mathbf{a}_{ik}$ ($k = 1, \dots, n_i$) とおく．ただし $A_{in_i} = A_{i0}$, $\mathbf{a}_{in_i} = \mathbf{a}_{i0}$ とする．補題 C.3 とその証明より

$$|F_i| = \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{p}_{ik} \right\|$$

であり， $\sum_{k=1}^{n_2} \mathbf{p}_{2k}$ は F_2 の法線ベクトルの実数倍であり， $\sum_{k=1}^{n_3} \mathbf{p}_{3k}$ は F_3 の法線ベクトルの実数倍である．したがってこの 2 つは 1 次独立だから

$$(C.2) \quad \sum_{i=2}^m |F_i| = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^m \left\| \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{p}_{ik} \right\| > \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=2}^m \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{p}_{ik} \right\|.$$

ベクトルの和

$$(C.3) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{p}_{ik}$$

を考える．和 (C.3) の各項 $\mathbf{p}_{ik} = \mathbf{a}_{ik-1} \times \mathbf{a}_{ik}$ について， F_i の辺 $A_{ik-1}A_{ik}$ を共有する面 F_j がちょうど 1 つ存在して，ただ 1 つの l について $A_{ik} = A_{jl-1}$, $A_{ik-1} = A_{jl}$ となる．このとき

$$\mathbf{p}_{ik} = \mathbf{a}_{ik-1} \times \mathbf{a}_{ik} = \mathbf{a}_{jl} \times \mathbf{a}_{jl-1} = -\mathbf{a}_{jl-1} \times \mathbf{a}_{jl} = -\mathbf{p}_{jl}$$

である．したがって，(C.3) において，このような 2 項はキャンセルする．結局，(C.3) のすべての項はキャンセルしてしまい，

$$(C.4) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{p}_{ik} = \mathbf{0}$$

が成り立つ．したがって，(C.4) と (C.2) より

$$|F_1| = \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{n_1} \mathbf{p}_{1k} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=2}^m \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{p}_{ik} \right\| < \sum_{i=2}^m |F_i|.$$

この両辺に $|F_1|$ を加えれば $2|F_1| < \sum_{i=1}^m |F_i| = a(P)$ を得る． $\square$

命題 C.5. 空間における 2 つの凸多面体 P, Q が $P \subset Q$ を満たすとすれば， $a(P) \leq a(Q)$ が成り立つ．

[証明] 原点 O は P の内部にあるとしてよい. P の面の全体を $F_1, F_2, \dots, F_n$ とする. 面 F_i を含む平面を H_i とする. 平面 H_1 は凸多面体 Q を 2 つの凸多面体 Q_1 と Q'_1 に分割する. ここで Q_1 は原点 O を含むものとする. このとき Q_1 と Q'_1 は $Q \cap H_1$ を共通の面としてもつから

$$a(Q) = a(Q_1) + a(Q'_1) - 2|Q \cap H_1|$$

が成り立つ. 補題 C.4 より $a(Q'_1) \geq 2|Q \cap H_1|$ だから $a(Q) \geq a(Q_1)$ を得る. また H_1 は P の面 F_1 を含む平面だから, $Q_1 \subset P$ である. 次に Q_1 を平面 H_2 によって 2 つの凸多面体 Q_2 と Q'_2 に分割する. ここで Q_2 は原点 O を含むものとする. 上と同様に $a(Q_1) \geq a(Q_2)$ かつ $Q_2 \subset P$ である. この操作を繰り返せば

$$\begin{aligned} a(Q) &\geq a(Q_1) \geq a(Q_2) \geq \dots \geq a(Q_n), \\ Q &\supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_n \supset P \end{aligned}$$

となる凸多面体の列 $Q_1, \dots, Q_n$ が得られる. 構成の仕方から Q_i は平面 H_j ($j = 1, \dots, i$) の原点 O を含む側の半空間に含まれることがわかる. したがって $Q_n = P$ である. ゆえに $a(Q) \geq a(P)$ である. $\square$

凸体 E 自身が凸多面体ならば, $v(E) = \inf_{P \supset E} v(P)$ が成り立つ. 実際, 任意の凸多面体 $P \supset E$ に対して $v(P) \geq v(E)$ である. したがって $\inf_{P \supset E} v(P) \geq v(E)$ である. しかし $P = E$ にとれるから, $v(E) \geq \inf_{P \supset E} v(P)$ である.

凸多面体 E の表面積についても, $a(E) = \inf_{P \supset E} a(P)$ が成り立つ. 実際, 命題 C.5 より任意の凸多面体 $P \supset E$ に対して $a(P) \geq a(E)$ である. したがって $\inf_{P \supset E} a(P) \geq a(E)$ である. しかし $P = E$ にとれるから, $a(E) \geq \inf_{P \supset E} a(P)$ である.

そこで一般の凸体の表面積を次のように定義する.

定義 C.6. E を空間における凸体とする. E の表面積 $a(E)$ を

$$a(E) = \inf_{P \supset E} a(P)$$

によって定義する. ここで P は凸多面体である.

上の表面積の定義は, 凸体 E を含むような凸多面体 P の表面積で近似するというものであるが, 凸体 E に含まれるような凸多面体 P の表面積で近似しても同じものになるかということが自然に問題になる. 以下においてこれが正しいことを証明する.

定義 C.7. 正の実数 δ と空間の点 A に対して A を中心とする半径 δ の開球を $U_\delta(A)$, 閉

球を $K_\delta(A)$ で表す：

$$\begin{aligned} U_\delta(A) &= \{B \mid d(A, B) < \delta\}, \\ K_\delta(A) &= \{B \mid d(A, B) \leq \delta\}. \end{aligned}$$

定義 C.8. E を空間における凸体とする．このとき

$$E_\delta = \bigcup_{A \in E} K_\delta(A)$$

を E の平行体という．

補題 C.9. E を凸体とすれば，任意の $\delta > 0$ に対して平行体 E_δ も凸体である．

[証明] P, Q を E_δ の任意の 2 点として，線分 PQ が E_δ に含まれることを示せばよい． E_δ の定義より， E の点 A, B で $P \in K_\delta(A)$ ， $Q \in K_\delta(B)$ となるものが存在する． E は凸体だから線分 AB は E に含まれる．したがって

$$\bigcup_{C \in AB} K_\delta(C) \subset \bigcup_{C \in E} K_\delta(C) = E_\delta$$

である．線分 PQ は $\bigcup_{C \in AB} K_\delta(C)$ に含まれる．実際， A, B, P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ として，線分 PQ 上の任意の点 R の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とすれば，ある実数 $0 \leq t \leq 1$ があって $\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ とあらわせる．このとき $\mathbf{s} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ とおき， $\mathbf{s}$ を位置ベクトルとする点を S とすれば， S は線分 AB 上の点だから $S \in E$ である．さらに

$$\begin{aligned} d(S, R) &= \|\mathbf{r} - \mathbf{s}\| = \|(1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} - \{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}\}| \\ &= \|(1-t)(\mathbf{p} - \mathbf{a}) + t(\mathbf{q} - \mathbf{b})\| \\ &\leq (1-t)\|\mathbf{p} - \mathbf{a}\| + t\|\mathbf{q} - \mathbf{b}\| < (1-t)\delta + t\delta = \delta. \end{aligned}$$

すなわち $R \in K_\delta(S) \subset \bigcup_{C \in AB} K_\delta(C) \subset E_\delta$ である． R は線分 PQ 上の任意の点だから，線分 PQ は E_δ に含まれることが示された． $\square$

定義 C.10. 空間における有限個の点からなる集合 $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ が与えられたとき， S を含むような最小の凸集合を $\text{conv } S$ であらわし， S の凸包とよぶ．

定義 C.11. 空間における有限個の点 $A_1, \dots, A_k$ が与えられたとき， A_i の位置ベクトルを $\mathbf{a}_i$ として，非負実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ で $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ を満たすものを係数とする 1 次結合

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$$

を位置ベクトルとしてもつ点 A を $A_1, \dots, A_k$ の凸結合とよぶ.

補題 C.12. 空間における有限個の点からなる集合 $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ が与えられたとき, S の凸包 $\text{conv } S$ は S の点 $A_1, \dots, A_k$ の凸結合の全体からなる集合

$$P = \{A \mid \overrightarrow{OA} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0\}$$

と一致する. ここで $\mathbf{a}_i$ は A_i の位置ベクトルである.

[証明] $Q = \text{conv}\{A_1, \dots, A_k\}$ とおく. P の 2 点 A, B をとる. A, B の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ とすると, $\lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \sum_{i=1}^k \mu_i = 1$ なる実数 λ_i, μ_i を用いて

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{a}_i$$

とかける. C を線分 AB 上の任意の点とすれば, C の位置ベクトル $\mathbf{c}$ は $0 \leq t \leq 1$ なる実数 t を用いて

$$\mathbf{c} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \nu_i \mathbf{a}_i, \quad \nu_i = (1-t)\lambda_i + t\mu_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

とかける. ここで $\nu_i \geq 0$ かつ

$$\sum_{i=1}^k \nu_i = (1-t) \sum_{i=1}^k \lambda_i + t \sum_{i=1}^k \mu_i = (1-t) + t = 1$$

である. したがって $C \in P$ であり, 線分 AB は P に含まれる. ゆえに P は凸集合である. 明らかに P は $\{A_1, \dots, A_k\}$ を含むから $Q = \text{conv}\{A_1, \dots, A_k\} \subset P$ である. 逆に定義より $\text{conv}\{A_1, \dots, A_k\}$ は凸集合であり $A_1, \dots, A_k$ を含むから, 線分 $A_1 A_2$ 上の点を含む. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ とすると, $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$ なる点 A は $\lambda_3 = 1$ ならば $A = A_3 \in Q$ である. $\lambda_3 < 1$ ならば

$$\overrightarrow{OA} = (1-\lambda_3) \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_3} \mathbf{a}_1 + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_3} \mathbf{a}_2 \right) + \lambda_3 \mathbf{a}_3$$

であり, $\overrightarrow{OB} = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_3} \mathbf{a}_1 + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_3} \mathbf{a}_2$ なる点 B は線分 $A_1 A_2$ 上の点だから Q の点であり, したがって線分 BA_3 上の点 A も Q の点である. この議論を繰り返せば P の点はすべて Q の点であることがわかり, $P \subset Q$ がいえる. 以上により $Q = P$ が示された. $\square$

定義 C.13. 空間の点 $A_1, \dots, A_m$ が**アフィン従属**であるとは、それらの位置ベクトルを $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ とするとき、少なくとも 1 つは 0 でない実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ で $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$ かつ $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ となるものが存在することである。アフィン従属でないとき、**アフィン独立**という。

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{e}_4 = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ を位置ベクトルとする空間の 4 個の点 E_1, E_2, E_3, O は明らかにアフィン独立である。

命題 C.14. 空間の 5 個以上の点はアフィン従属である。

[証明] $A_1, \dots, A_m$ を空間における m 個の点とし、 $m \geq 5$ とする。 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ を $A_1, \dots, A_m$ の位置ベクトルとする。このとき $m - 1$ 個のベクトル $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_1$ は 1 次従属だから、少なくとも 1 つは 0 でない実数 $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ で

$$\alpha_2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) + \alpha_3(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1) + \dots + \alpha_m(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_1) = \mathbf{0}$$

となるものが存在する。 $\alpha_1 = -\alpha_2 - \dots - \alpha_m$ とおけば

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 0$$

だから、 $A_1, \dots, A_m$ はアフィン従属である。 □

定理 C.15 (カラテオドリ). S を空間における有限個の点からなる集合とし、 $P = \text{conv } S$ とする。各 $A \in P$ は S の 4 個以下の元の凸結合としてあらわせる。

[証明] $A \in P$ とし、 A の位置ベクトルを $\mathbf{a}$ とする。 $A_1, \dots, A_k \in S$ が存在して、 A_i の位置ベクトルを $\mathbf{a}_i$ として

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, k)$$

とかける。そのようなあらわし方で $k \leq 4$ であるものが存在することを示す。もし $k > 4$ であるとする、命題 C.14 より $A_1, \dots, A_k$ はアフィン従属だから、少なくとも 1 つは 0 でない実数 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ で

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

となるものが存在する。よって

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k &= \mathbf{a}, \\ \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

が成り立つ. $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ の少なくとも 1 つは 0 でないから, 必要ならば番号を付けかえて $\alpha_k \neq 0$ としてよい. もし $\alpha_k < 0$ ならばすべての α_i を $-\alpha_i$ で置き換えて, $\alpha_k > 0$ としてよい. 必要ならばさらに番号を付けかえて, $\alpha_k > 0$ かつ, $\alpha_i > 0$ であるようなすべての i について $\lambda_k/\alpha_k \leq \lambda_i/\alpha_i$ であるとしてよい. このとき $1 \leq i \leq k$ に対して $\beta_i = \lambda_i - (\lambda_k/\alpha_k)\alpha_i$ とおけば, $\beta_k = 0$ であり

$$\sum_{i=1}^k \beta_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 - 0 = 1.$$

さらに $\beta_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, k$) である. 実際, $\alpha_i \leq 0$ ならば $\beta_i \geq \lambda_i \geq 0$ である. $\alpha_i > 0$ ならば $\beta_i = \alpha_i(\lambda_i/\alpha_i - \lambda_k/\alpha_k) \geq 0$ である. このとき

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \mathbf{a}_i &= \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) \mathbf{a}_i \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{a} - \mathbf{0} = \mathbf{a}. \end{aligned}$$

よって A は $A_1, \dots, A_k$ の中の $k-1$ 個の点の凸結合としてあらわせた. この過程を繰り返せば A は S の高々 4 個の点の凸結合としてあらわせることがわかる. $\square$

$k \geq 4$ として, 空間における k 個の点 $A_1, \dots, A_k$ は同一平面上にないとする. このとき $P = \text{conv}\{A_1, \dots, A_k\}$ は凸多面体であることを示そう. $A_1, \dots, A_k$ から 4 点 A_{i_j} ($j = 1, 2, 3, 4$) を選んで $P_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \text{conv}\{A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}\}$ とおく. $P_{i_1 i_2 i_3 i_4} \subset P$ である. したがってこのような $P_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ のすべての和集合は P に含まれる:

$$\bigcup P_{i_1 i_2 i_3 i_4} \subset P.$$

逆に任意の点 $A \in P$ は定理 C.15 により $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ の中の 4 個以下の点の凸結合としてあらわされる. ゆえに

$$P = \bigcup P_{i_1 i_2 i_3 i_4}$$

である. $P_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ は 4 点 $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}$ が同一平面上になればこれらを頂点とする四面体である. 4 点 $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}$ が同一平面上にあるが一直線上にはないとき, $P_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ はこれらを頂点とする四角形または三角形である. 4 点 $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}$ が一直線上にあるとき, $P_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ は線分になる. これから P は凸多面体であることがわかる.

補題 C.16. E を凸体とすれば, 各正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して凸多面体 P で

$$P \subset E \subset P_\varepsilon$$

となるものが存在する．ここで P_ε は P の平行体である．

[証明] E はコンパクトだから有限個の E の点 $A_1, \dots, A_k$ が存在して

$$(C.5) \quad E \subset \bigcup_{i=1}^k K_\varepsilon(A_i)$$

が成り立つ． $P = \text{conv}\{A_1, \dots, A_k\}$ とおく．各 A_i は凸体 E の点だから E は $\{A_1, \dots, A_k\}$ を含む凸集合であり，凸包 P は $\{A_1, \dots, A_k\}$ を含む最小の凸集合だから $P \subset E$ である． $A \in E$ ならば (C.5) よりある i について $A \in K_\varepsilon(A_i)$ である． $A_i \in P$ だから $A \in P_\varepsilon$ である．よって $E \subset P_\varepsilon$ である． $\square$

定義 C.17. C を空間における図形とする．空間の任意の点 P に対して， P と C との距離を

$$d(P, C) = \inf\{d(P, Q) \mid Q \in C\}$$

によって定義する．

補題 C.18. C を空間における図形とする．点 P について， $d(P, C) = 0$ であるためには， $P \in \overline{C}$ となることが必要十分である．ここで $\overline{C}$ は C の閉包 (C と C の境界をあわせたもの) である．

[証明] $P \notin \overline{C}$ とすると， $\varepsilon > 0$ で $U_\varepsilon(P) \cap C = \emptyset$ となるものが存在する．よって任意の $Q \in C$ に対して $d(P, Q) \geq \varepsilon$ であり， $d(P, C) = \inf_{Q \in C} d(P, Q) \geq \varepsilon > 0$ である．

逆に $d(P, C) = \delta > 0$ とすると，任意の $Q \in C$ に対して， $d(P, Q) \geq \delta$ だから， $U_\delta(P) \cap C = \emptyset$ である．よって $P \notin \overline{C}$ である． $\square$

補題 C.19. 関数 $P \mapsto d(P, C)$ は連続である．

[証明] P, P' と $Q \in C$ に対して

$$d(P, C) \leq d(P, Q) \leq d(P, P') + d(P', Q)$$

である． P, P' を固定して， Q が C を動くときの下限をとれば，

$$d(P, C) \leq d(P, P') + d(P', C), \quad d(P, C) - d(P', C) \leq d(P, P')$$

を得る． P と P' を入れかえれば， $d(P', C) - d(P, C) \leq d(P, P')$ を得る．すなわち

$$|d(P, C) - d(P', C)| \leq d(P, P')$$

である．ゆえに $P \mapsto d(P, C)$ は連続である． $\square$

注意 C.20. E を凸体とし, E の内部を E° , E の境界を ∂E で表す. 原点 O は E の内部 E° に含まれるとするとする. このとき $r > 0$ を十分小さくとれば原点 O を中心とする半径 r の閉球 $K = K_r(O)$ は E° に含まれるようにできる. $A \in K$ ならば $A \notin \partial E$ だから, 補題 C.18 より $d(A, \partial E) > 0$ ($A \in K$) である. 補題 C.19 より, 連続関数 $A \mapsto d(A, \partial E)$ はコンパクト集合 K 上で最小値 α をとるが, 上に述べたことから $\alpha > 0$ である. $0 < \varepsilon < \alpha$ とする. 原点 O を中心とする 1 辺が $\varepsilon/\sqrt{3}$ の開立方体を V とすれば

$$E \subset \bigcup_{B \in E} V_B, \quad V \subset U_{\varepsilon/2}(O)$$

である. ここで V_B は点 B を中心とする 1 辺が $\varepsilon/\sqrt{3}$ の開立方体である. E はコンパクトだから, 有限個の $B_1, \dots, B_k \in E$ を用いて

$$E \subset \bigcup_{i=1}^k V_{B_i}$$

が成り立つ. $V_{B_i} \cap K \neq \emptyset$ とすれば, $\overline{V_{B_i}} \subset E$ である. 実際, もしそうでないすると $C \in V_{B_i}$ で $C \notin E$ となるものが存在する. $V_{B_i} \cap K \neq \emptyset$ より, $A \in V_{B_i} \cap K$ がとれる. このとき $V_{B_i} \subset U_{\varepsilon/2}(B_i)$ だから

$$d(A, C) \leq d(A, B_i) + d(B_i, C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$A \in K \subset E^\circ$, $C \notin E$ だから線分 AC 上に E の境界 ∂E の点 Q がある. よって $d(A, Q) \leq d(A, C) < \varepsilon$ である. しかし

$$\alpha \leq d(A, \partial E) \leq d(A, Q) < \varepsilon$$

となって矛盾である. ゆえに $V_{B_i} \cap K \neq \emptyset$ のとき $\overline{V_{B_i}} \subset E$ である. このような立方体 V_{B_i} の頂点を A_{ij} , $j = 1, \dots, 8$ とし, $B_1, \dots, B_k$ にこのような A_{ij} をすべて追加した有限集合を S とし, $P = \text{conv } S$ とおく. $S \subset E$ より $P \subset E$ である. また $A \in E$ ならば, ある i について $A \in V_{B_i} \subset U_{\varepsilon/2}(B_i) \subset K_\varepsilon(B_i)$, $B_i \in P$ だから $A \in P_\varepsilon$ である. ゆえに $E \subset P_\varepsilon$ である. さらに

$$K \subset \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k \\ V_{B_i} \cap K \neq \emptyset}} V_{B_i}$$

であり, $V_{B_i} \cap K \neq \emptyset$ のとき, S は立方体 V_{B_i} の頂点 A_{ij} , $j = 1, \dots, 8$ をすべて含むから

$$P = \text{conv } S \supset \text{conv}\{A_{i1}, \dots, A_{i8}\} = V_{B_i}$$

である。よって

$$(C.6) \quad K \subset \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k \\ V_{B_i} \cap \bar{K} \neq \emptyset}} V_{B_i} \subset P \subset E \subset P_\varepsilon$$

が成り立つ。

命題 C.21. E を凸体とし、原点 O は E の内部に含まれるとする。このとき各 $\delta > 1$ に対して凸多面体 P で

$$P \subset E \subset \delta P$$

となるものが存在する。ここで

$$\delta P = \{A \mid \overrightarrow{OA} = \delta \overrightarrow{OB}, B \in P\}$$

である。

[証明] O は E の内部の点だから、 $r > 0$ を十分小さくとれば原点 O を中心とする半径 r の閉球 $K = K_r(O)$ が E の内部に含まれるようにできる。 $\varepsilon > 0$ を

$$(C.7) \quad 0 < \varepsilon < r(\delta - 1), \quad \varepsilon < \alpha = \min\{d(A, \partial E) \mid A \in K\}$$

を満たすように選ぶ。補題 C.16 と注意 C.20 より、凸多面体 P で

$$(C.8) \quad K \subset P \subset E \subset P_\varepsilon$$

となるものが存在する。 F を P の面とすると、 δF は δP の面であり、 F と δF は平行である。 $d(F)$ によって原点 O と F を含む超平面との距離をあらわせば、 $d(\delta F) = \delta d(F)$ である。したがって F と δF の距離は

$$(C.9) \quad d(\delta F) - d(F) = (\delta - 1)d(F)$$

で与えられる。

$P_\varepsilon \subset \delta P$ を示す。いま $A \in P_\varepsilon \setminus P$ とする。 $A \notin \delta P$ として矛盾を導けばよい。このとき δP のある面が存在して、それを含む平面に関して A は原点 O と反対側にある。その面を δF 、 F は P の面とかくことができる。 F を含む平面を H とすれば、 H に関して A は原点 O と反対側にある。 $A \in P_\varepsilon$ だから、 $B \in P$ で $d(A, B) \leq \varepsilon$ となるものが存在する。 $K = K_r(O) \subset P$ より $r \leq d(F)$ である。したがって (C.7) より

$$d(A, B) \leq \varepsilon < r(\delta - 1) \leq (\delta - 1)d(F)$$

を得る．線分 AB と δH の交点を A' ，線分 AB と H の交点を B' とすれば

$$d(A', B') \leq d(A, B) \leq \varepsilon < (\delta - 1)d(F)$$

となる．これは H と δH の距離が $(\delta - 1)d(F)$ であることに矛盾する．ゆえに $A \in \delta P$ である．以上によって $P_\varepsilon \subset \delta P$ が示された． $\square$

定理 C.22. E を凸体とすれば

$$\begin{aligned} v(E) &= \sup_{P \subset E} v(P), \\ a(E) &= \sup_{P \subset E} a(P) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで P は凸多面体である．

[証明] $u(E) = \sup_{P \subset E} v(P)$, $b(E) = \sup_{P \subset E} a(P)$ とおく． P_1, P_2 が凸多面体で $P_1 \subset E \subset P_2$ を満たすとすれば，明らかに $v(P_1) \leq v(P_2)$ である．また命題 C.5 より $a(P_1) \leq a(P_2)$ である．したがって

$$\begin{aligned} u(E) &= \sup_{P_1 \subset E} v(P_1) \leq v(P_2), \\ b(E) &= \sup_{P_1 \subset E} a(P_1) \leq a(P_2). \end{aligned}$$

これがすべての凸多面体 $P_2 \supset E$ について成り立つから

$$\begin{aligned} u(E) &\leq \inf_{P_2 \supset E} v(P_2) = v(E), \\ b(E) &\leq \inf_{P_2 \supset E} a(P_2) = a(E) \end{aligned}$$

を得る．一般性を失うことなく原点 O は E の内部にあるとしてよい． $\delta > 1$ に対して命題 C.21 より，凸多面体 Q で， $Q \subset E \subset \delta Q$ となるものが存在する．このとき δQ は Q と相似だから $v(\delta Q) = \delta^3 v(Q)$, $a(\delta Q) = \delta^2 a(Q)$ が成り立つ． $Q \subset E \subset \delta Q$ より

$$\begin{aligned} v(Q) &\leq \sup_{P \subset E} v(P) = u(E) \leq v(E) = \inf_{P \supset E} v(P) \leq v(\delta Q), \\ a(Q) &\leq \sup_{P \subset E} a(P) = b(E) \leq a(E) = \inf_{P \supset E} a(P) \leq a(\delta Q). \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} 0 &\leq v(E) - u(E) \leq v(\delta Q) - v(Q) = (\delta^3 - 1)v(Q), \\ 0 &\leq a(E) - b(E) \leq a(\delta Q) - a(Q) = (\delta^2 - 1)a(Q). \end{aligned}$$

$E \subset C$ となる立方体 C をとって固定すれば, $Q \subset E \subset C$ より, $v(Q) \leq v(C)$, $a(Q) \leq a(C)$ である. よって

$$0 \leq v(E) - u(E) \leq (\delta^3 - 1)v(C),$$

$$0 \leq a(E) - b(E) \leq (\delta^2 - 1)a(C).$$

$\delta > 1$ は任意だから $\delta \rightarrow 1$ として $v(E) = u(E)$, $a(E) = b(E)$ を得る.

□

参考文献

- [1] 小林昭七, 続 微分積分読本 多変数, 裳華房, 2001.
- [2] S. R. Lay, Convex Sets and Their Applications, Dover, 2007.
- [3] 中川仁, 反比例のグラフについての考察, 上越数学教育研究, **36** (2021), 17–26.
<https://www.juen.ac.jp/math/journal/files/vol36/Nakagawa2.pdf>
- [4] 斎藤憲, よみがえる天才アルキメデス, 岩波書店, 2006.
- [5] 上野健爾, 測る, 東京図書, 2009.