素数について

上越教育大学　中川仁

2005 年 10 月 7 日

1　はじめに

正の実数 x に対して，x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ で表す．

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

ここで，和は x 以下のすべての素数 p をわたる．$\pi(x)$ について次の定理が成り立つ．

定理 1 (素数定理).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\left(\dfrac{x}{\log x}\right)} = 1.$$

素数定理が成り立つであろうという予想を最初に公表したのは，ルジャンドルであった．しかし，ガウスは既に 1792 年頃 (15 才のとき) このことに気付いていた．彼は数十万までの自然数を 1000 個ずつの区間に分け，各区間に素数が何個あるかを調べることによって，この予想に到達していたが，それを公表しなかった．この素数定理は 19 世紀の終わり，1896 年にアダマールとプーサンによって，全く独立に証明された．

本講演では，素数定理の証明は与えないが，素数分布について，素数定理の持つ雰囲気が伝わることで比較的容易なこととして，次の 3 つの定理について解説したい．

定理 2 (チェビシェフの定理). 正の定数 $A < B$ が存在して，

$$A\,\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq B\,\frac{x}{\log x}.$$

定理 3. 級数

$$\sum_p \frac{1}{p} \qquad (p\text{ はすべての素数をわたる})$$

は発散する．

3 と 5, 5 と 7, 11 と 13, 17 と 19, 29 と 31, …, などの素数のペアを**双子素数**という．

定理 4 (ブルンの定理)**.** p_n, p_n+2, $n=1,2,\ldots$ を双子素数の全体とする．そのとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n+2}\right)$$

は収束する．

2 部分和法

補題 5. $a<b$ を非負整数とする．$f(n)$, $u(n)$ を $\mathbb{N}$ 上の関数とし，

$$U(t)=\sum_{n\le t}u(n)$$

とおく．そのとき，

$$\sum_{n=a+1}^{b}u(n)f(n)=U(b)f(b)-U(a)f(a+1)-\sum_{n=a+1}^{b-1}U(n)(f(n+1)-f(n)).$$

[証明] $U(n)-U(n-1)=u(n)$ であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{n=a+1}^{b}u(n)f(n) &= \sum_{n=a+1}^{b}(U(n)-U(n-1))f(n)\\ &= \sum_{n=a+1}^{b}U(n)f(n)-\sum_{n=a+1}^{b}U(n-1)f(n)\\ &= \sum_{n=a+1}^{b}U(n)f(n)-\sum_{n=a}^{b-1}U(n)f(n+1)\\ &= U(b)f(b)+\sum_{n=a+1}^{b-1}U(n)f(n)-U(a)f(a+1)-\sum_{n=a+1}^{b-1}U(n)f(n+1)\\ &= U(b)f(b)-U(a)f(a+1)-\sum_{n=a+1}^{b-1}U(n)(f(n+1)-f(n))\end{aligned}$$

□

補題 6 (部分和法)**.** $f(n)$, $u(n)$ を $\mathbb{N}$ 上の関数，$x\ge 1$ を実数，$f(t)$ を区間 $I=[1,x]$ で定義された微分可能な関数で，$f'(t)$ は I で連続であるとする．$U(t)$ は補題 5 の通りとする．そのとき，

$$\sum_{n\le x}u(n)f(n)=U(x)f(x)-\int_1^x U(t)f'(t)\,dt.$$

[証明]　$b=[x]$(x を超えない最大の整数) とし，$a=0$ とすれば，$U(0)=0$ であるから，補題 5 より，

$$\sum_{n\le x}u(n)f(n)=\sum_{n=1}^{b}u(n)f(n)$$
$$=U(b)f(b)-\sum_{n=1}^{b-1}U(n)(f(n+1)-f(n)). \tag{1}$$

ここで，$b\le x<b+1$ であり，$t\in[b,b+1)$ のとき，$U(t)=U(b)$ であるから，

$$\int_b^x U(t)f'(t)\,dt=U(b)\int_b^x f'(t)\,dt=U(b)(f(x)-f(b)). \tag{2}$$

同様に，$1\le n\le b-1$ に対して，$t\in[n,n+1)$ のとき，$U(t)=U(n)$ であるから，

$$\int_n^{n+1}U(t)f'(t)\,dt=U(n)\int_n^{n+1}f'(t)\,dt=U(n)(f(n+1)-f(n)). \tag{3}$$

したがって，(2), (3) より，

$$\int_1^x U(t)f'(t)\,dt=\int_b^x U(t)f'(t)\,dt+\sum_{n=1}^{b-1}\int_n^{n+1}U(t)f'(t)\,dt$$
$$=U(b)(f(x)-f(b))+\sum_{n=1}^{b-1}U(n)(f(n+1)-f(n)).$$

これから，$U(b)=U(x)$ に注意すれば，

$$U(b)f(b)-\sum_{n=1}^{b-1}U(n)(f(n+1)-f(n))=U(x)f(x)-\int_1^x U(t)f'(t)\,dt \tag{4}$$

を得る．(1) と (4) から，補題を得る．　□

3　メルテンスの定理

定義 7. チェビシェフの関数 $\vartheta(x)$ と $\psi(x)$ を次の和として定義する．

$$\vartheta(x)=\sum_{p\le x}\log p,$$
$$\psi(x)=\sum_{p^k\le x}\log p.$$

実数 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．定義から明らかに，

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) \le \psi(x) &= \sum_{p^k \le x} \log p \\
&= \sum_{p \le x} \sum_{k=1}^{[\log x/\log p]} \log p \\
&= \sum_{p \le x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p \\
&\le \sum_{p \le x} \log x = \log x \sum_{p \le x} 1 = \pi(x) \log x,
\end{aligned}$$

したがって，

$$\vartheta(x) \le \psi(x) \le \pi(x) \log x. \tag{5}$$

定義 8. マンゴルドの関数 $\Lambda(n)$, $n \in \mathbb{N}$ を

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k \text{ (素数べきのとき)}, \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

によって定義する．

$\psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log p$ であるから，

$$\psi(x) = \sum_{1 \le n \le x} \Lambda(n). \tag{6}$$

補題 9. $n \in \mathbb{N}$, $N = \binom{2n}{n} (= {}_{2n}\mathrm{C}_{\mathrm{n}})$ とおく．そのとき，

$$N < 2^{2n} \le 2nN.$$

[証明]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\binom{2n}{k-1}} \binom{2n}{k} - 1 &= \frac{(k-1)!(2n-k+1)!(2n)!}{(2n)!k!(2n-k)!} - 1 \\
&= \frac{2n-k+1}{k} - 1 \\
&= \frac{2(n-k)+1}{k}.
\end{aligned}$$

この右辺は，$k \le n$ のとき正，$k > n$ のとき負である．したがって，$1 \le k \le n$ のとき，$\binom{2n}{k} > \binom{2n}{k-1}$ であり，$n < k \le 2n$ のとき，$\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k-1}$ である．

ゆえに，$N = \binom{2n}{n}$ は，$N = \binom{2n}{k}$, $0 \leq k \leq 2n$，の中で最大である．

$$\begin{aligned} N = \binom{2n}{n} < (1+1)^{2n} &= 2^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} + 1 \\ &\leq 2 + (2n-1)N \leq 2nN. \end{aligned}$$

□

補題 10. すべての $x \geq 2$ に対して，$\vartheta(x) \leq (4\log 2)x$ が成り立つ．

[証明]　$n \in \mathbb{N}$, $N = \binom{2n}{n} (= {}_{2n}\mathrm{C}_{\mathrm{n}})$ とおけば，補題 9 より，

$$\frac{1}{2n} 2^{2n} \leq N < 2^{2n}.$$

一方，$N = \dfrac{(2n)!}{n!^2}$ は自然数であるから，p を $n < p \leq 2n$ となる素数とすれば，p は N を割り切る．したがって，N はこのような素数すべての積で割り切れる．特に，

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq N < 2^{2n}.$$

特に，$r \in \mathbb{N}$ とし，$n = 2^{r-1}$ とおけば，

$$\prod_{2^{r-1}<p\leq 2^r} p \leq N < 2^{2^r}.$$

これから，任意の $R \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\begin{aligned} \prod_{p\leq 2^R} p &= \prod_{r=1}^{R} \prod_{2^{r-1}<p\leq 2^r} p \\ &< \prod_{r=1}^{R} 2^{2^r} = 2^{2+2^2+\cdots+2^R} \\ &= 2^{2^{R+1}-2} < 2^{2^{R+1}}. \end{aligned}$$

いま，実数 $x \geq 2$ に対して，$R \in \mathbb{N}$ を $2^{R-1} < x \leq 2^R$ となるようにとる．そのとき，上の不等式から，

$$\prod_{p\leq x} p \leq \prod_{p\leq 2^R} p < 2^{2^{R+1}}.$$

ここで，$2^{R-1} < x$ であるから，$2^{R+1} < 4x$ である．したがって，

$$\prod_{p\le x} p < 2^{4x}.$$

対数をとれば，

$$\vartheta(x) = \sum_{p\le x}\log p = \log\left(\prod_{p\le x} p\right) < \log 2^{4x} = 4x\log 2.$$

□

定義 11. p を素数とする．自然数 n が丁度 p^k で割り切れるとき，すなわち，n は p^k で割り切れるが，p^{k+1} では割り切れないとき，

$$v_p(n) = k$$

とかく．このとき，$p^k \le n$ であるから，対数をとって，

$$v_p(n) \le \frac{\log n}{\log p}.$$

また，二つの自然数 n, m について，明らかに，

$$v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n).$$

補題 12. 自然数 n に対して，

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

[証明]

$$\begin{aligned}
v_p(n!) &= v_p\left(\prod_{m=1}^{n} m\right) = \sum_{m=1}^{n} v_p(m)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\#\{m\in\mathbb{N}\,|\,1\le m\le n,\ v_p(m)=k\}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\left\{(n\text{ 以下の }p^k\text{ の倍数の個数}) - (n\text{ 以下の }p^{k+1}\text{ の倍数の個数})\right\}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\left\{\left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} k\left[\frac{n}{p^k}\right] - \sum_{k=1}^{\infty} k\left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\left[\frac{n}{p^k}\right] - \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\left[\frac{n}{p^k}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right].
\end{aligned}$$

□

命題 13. $c_1 = 2 + 8\log 2$ とおけば，すべての $x \geq 2$ に対して，

$$\frac{1}{3}x \leq \pi(x)\log x \leq c_1 x.$$

[証明]

$$\begin{aligned}\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p &\geq \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \log p \\ &\geq \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \log \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{2}\log x \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} 1 \\ &= \frac{1}{2}(\log x)(\pi(x) - \pi(\sqrt{x})).\end{aligned}$$

ここで，$\pi(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x}$ であるから，

$$\vartheta(x) \geq \frac{1}{2}(\log x)(\pi(x) - \sqrt{x}).$$

補題 10 より，$\vartheta(x) < (4\log 2)x$ であるから，

$$\frac{1}{2}(\log x)(\pi(x) - \sqrt{x}) \leq \vartheta(x) < (4\log 2)x.$$

したがって，

$$\pi(x)\log x < (8\log 2)x + \sqrt{x}\log x. \tag{7}$$

$\sqrt{x} < e^{\sqrt{x}}$ より，$\frac{1}{2}\log x < \sqrt{x}$, $\log x < 2\sqrt{x}$ である．これを (7) に代入して，

$$\pi(x)\log x < (8\log 2 + 2)x = c_1 x.$$

次に，$\pi(x)\log x$ を下から評価しよう．

$$N = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \prod_{p \leq 2n} p^{v_p((2n)!) - 2v_p(n!)}$$

を用いる．任意の実数 t に対して，

$$[2t] - 2[t] = \big[[2t] + \{2t\}\big] - [2t] = [\{2t\}] = \begin{cases} 0, & 0 \leq \{2t\} < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq \{2t\} < 1. \end{cases}$$

であるから，補題 12 より，

$$\begin{aligned}v_p((2n)!) - 2v_p(n!) &= \sum_{k=1}^{[\log 2n/\log p]} \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right) \\ &\leq \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right] \leq \frac{\log 2n}{\log p}.\end{aligned}$$

したがって，補題 9 より，

$$\begin{aligned}\frac{2^{2n}}{2n} <N &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\\ &= \prod_{p\le 2n} p^{v_p((2n)!)-2v_p(n!)}\\ &\le \prod_{p\le 2n} p^{\frac{\log 2n}{\log p}} = \prod_{p\le 2n} 2n = (2n)^{\pi(2n)}.\end{aligned}$$

対数をとって，

$$\pi(2n)\log 2n > 2n\log 2 - \log 2n.$$

いま，$n = \left[\dfrac{x}{2}\right]$ とする．そのとき，$n \le \frac{x}{2} < n+1$, $2n \le x < 2n+2$ であるから，

$$\begin{aligned}\pi(x)\log x \ge \pi(2n)\log 2n &> 2n\log 2 - \log 2n\\ &> (x-2)\log 2 - \log x = (\log 2)x - 2\log 2 - \log x.\end{aligned}$$

ここで，$F(x) = (\log 2 - 3^{-1})x - 2\log 2 - \log x$ は $x \ge 3$ で単調増加であり，

$$F(16) = 16(\log 2 - 3^{-1}) - 2\log 2 - 4\log 2 = 10\log 2 - \frac{16}{3} \ge 0$$

である．よって，$x \ge 16$ のとき，

$$\pi(x)\log x \ge \frac{1}{3}x.$$

これは，$2 \le x \le 16$ のときも成り立っている． □

補題 14. 実数 $x \ge 1$ に対して，次の不等式が成り立つ．

$$0 \le \sum_{n\le x} \log\left(\frac{x}{n}\right) < x.$$

[証明]　$h(t) = \log\left(\dfrac{x}{t}\right)$ は区間 $[1, x]$ において非負単調減少であるから，$b = [x]$ とおけば，

$$\begin{aligned}0 \le \sum_{n\le x}\log\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{b}\log\left(\frac{x}{n}\right) = \log x + \sum_{n=2}^{b}\log\left(\frac{x}{n}\right)\\ &< \log x + \sum_{n=1}^{b-1}\int_n^{n+1}\log\left(\frac{x}{t}\right)\,dt\\ &= \log x + \int_1^b \log\left(\frac{x}{t}\right)\,dt \le \log x + \int_1^x \log\left(\frac{x}{t}\right)\,dt\\ &= \log x + \int_1^x \log x\,dt - \int_1^x \log t\,dt\\ &= \log x + (x-1)\log x - [t\log t - t]_1^x\\ &= x\log x - (x\log x - x + 1) = x - 1 < x.\end{aligned}$$

□

命題 15. $c_2 = 2c_1 = 4 + 16\log 2$ とおけば，任意の $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$ に対して，

$$\log x - 1 \leq \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} \leq \log x + c_2.$$

[証明]　$N = [x]$ とおく．そのとき，

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{n \leq x} \log\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n \leq N} \log\left(\frac{x}{n}\right) \\
&= N \log x - \sum_{n \leq N} \log n = N \log x - \log\left(\prod_{n \leq N} n\right) \\
&= N \log x - \log N! = x \log x - \log N! + (N - x) \log x.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\log N! = x \log x + (N - x) \log x - \sum_{n \leq x} \log\left(\frac{x}{n}\right).$$

ここで，$N \leq x < N + 1$ であるから，$-1 < N - x \leq 0$. また，$\log x \leq x - 1 < x$ である．これらと補題 14 より，

$$0 \leq \sum_{n \leq x} \log\left(\frac{x}{n}\right) < x$$

であるから，

$$x \log x - x < \log N! \leq x \log x. \tag{8}$$

一方，補題 12 より，

$$\begin{aligned}
\log N! = \log\left(\prod_{p \leq N} p^{v_p(N!)}\right) &= \sum_{p \leq N} v_p(N!) \log p \\
&= \sum_{p \leq N} \sum_{k=1}^{\left[\frac{\log N}{\log p}\right]} \left[\frac{N}{p^k}\right] \log p = \sum_{p^k \leq N} \left[\frac{N}{p^k}\right] \log p \\
&= \sum_{p^k \leq x} \left[\frac{N}{p^k}\right] \log p.
\end{aligned}$$

ここで，

$$\left[\frac{N}{p^k}\right] \leq \frac{N}{p^k} \leq \frac{x}{p^k} < \frac{N+1}{p^k},$$

$$\frac{x}{p^k} - 2 < \frac{x}{p^k} - \frac{1}{p^k} - 1 < \frac{N}{p^k} - 1 < \left[\frac{N}{p^k}\right]$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\left(\frac{x}{n}-2\right)\Lambda(n) &= \sum_{p^k\le x}\left(\frac{x}{p^k}-2\right)\log p\\
&< \log N!\\
&\le \sum_{p^k\le x}\frac{x}{p^k}\log p\\
&= \sum_{n\le x}\frac{x}{n}\Lambda(n).
\end{aligned}$$

ここで，(6) と命題 13, (5) より，

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)=\psi(x)\le\pi(x)\log x\le c_1x$$

であるから，

$$x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}-2\psi(x)<\log N!\le x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}. \tag{9}$$

(8), (9) より，

$$x\log x-x<x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}<x\log x+2c_1x,$$

$$\log x-1<\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}<\log x+2c_1.$$

□

定理 16 (メルテンス)**.** 正の定数 c_3 が存在して，任意の $x\in\mathbb{R}$, $x\ge 1$ に対して，

$$\log x-c_3\le\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}\le\log x+c_2.$$

[証明]

$$\begin{aligned}
0 &\le \sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}\\
&= \sum_{p^k\le x,\,k\ge 2}\frac{\log p}{p^k}\\
&\le \sum_{p\le x}\log p\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{p^k}\\
&= \sum_{p\le x}\frac{\log p}{p(p-1)}\\
&\le 2\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p^2}\le 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}<\infty.
\end{aligned}$$

これと，命題 15 より，$c_3 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} = 2.87\cdots$ とおけば,

$$\log x - c_3 \le \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} \le \log x + c_2.$$

□

定理 17 (メルテンス)**.** 定数 b_1 が存在して，$x \ge 2$ に対して,

$$\log\log x + b_1 - \frac{c_2}{\log x} \le \sum_{p \le x} \frac{1}{p} \le \log\log x + b_1 + \frac{c_2}{\log x}.$$

[証明]

$$f(t) = \frac{1}{\log t}, \qquad u(n) = \begin{cases} \dfrac{\log p}{p}, & n \text{ が素数 } p \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

とおけば,

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \sum_{p \le x} f(p)u(p) = \sum_{n \le x} f(n)u(n).$$

$U(t)$, $g(t)$ を

$$U(t) = \sum_{n \le t} u(n) = \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p}, \quad g(t) = U(t) - \log t$$

によって定義する．そのとき，$t < 2$ について，$U(t) = 0$ であり，定理 16 より，$|g(t)| \le c_2$ である．したがって，積分

$$\left| \int_2^{\infty} \frac{g(t)}{t(\log t)^2}\,dt \right| \le \int_2^{\infty} \frac{|g(t)|}{t(\log t)^2}\,dt \le c_2 \left[-\frac{1}{\log t} \right]_2^{\infty} = \frac{c_2}{\log 2}.$$

補題 6 より,

$$\begin{aligned} \sum_{p \le x} \frac{1}{p} &= \sum_{n \le x} f(n)u(n) \\ &= U(x)f(x) - \int_1^x U(t)f'(t)\,dt \\ &= U(x)f(x) - \int_2^x U(t)f'(t)\,dt \\ &= \frac{\log x + g(x)}{\log x} - \int_2^x (\log t + g(t))f'(t)\,dt. \end{aligned}$$

ここで，$f'(t) = -t^{-1}(\log t)^{-2}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\sum_{p \le x} \frac{1}{p} &= \frac{\log x + g(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{t \log t} + \int_2^x \frac{g(t)}{t(\log t)^2}\, dt \\
&= 1 + \frac{g(x)}{\log x} + \Big[\log\log t \Big]_2^x + \int_2^x \frac{g(t)}{t(\log t)^2}\, dt \\
&= 1 + \frac{g(x)}{\log x} + \log\log x - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{g(t)}{t(\log t)^2}\, dt - \int_x^\infty \frac{g(t)}{t(\log t)^2}\, dt.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$b_1 = 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{g(t)}{t(\log t)^2}\, dt$$

とおけば，

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log\log x + b_1 + \frac{g(x)}{\log x} - \int_x^\infty \frac{g(t)}{t(\log t)^2}\, dt.$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\left| \int_x^\infty \frac{g(t)}{t(\log t)^2}\, dt \right| &\le \int_x^\infty \frac{|g(t)|}{t(\log t)^2}\, dt \\
&\le c_2 \int_x^\infty \frac{1}{t(\log t)^2}\, dt \\
&= c_2 \left[-\frac{1}{\log t} \right]_x^\infty = \frac{c_2}{\log x}.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$\left| \sum_{p \le x} \frac{1}{p} - \log\log x - b_1 \right| \le \frac{2c_2}{\log x}.$$

□

定理 18 (メルテンスの公式)**.** 正の定数 c_4, c_5, c_6 が存在して，$x \ge 2$ に対して，

$$c_4 \log x - c_5 \le \prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \le c_4 \log x + c_6.$$

[証明]　まず,

$$
\begin{aligned}
0 < \sum_{p>x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp^k} &< \sum_{p>x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2p^k} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p>x}\frac{1}{p(p-1)} \\
&< \frac{1}{2}\sum_{n>x}\frac{1}{n(n-1)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=[x]+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2[x]} \\
&\leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\log x}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

これから，特に，級数

$$
b_2 = \sum_{p}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp^k}
$$

は収束することがわかる．したがって,

$$
\begin{aligned}
\log\left(\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right) &= \sum_{p\leq x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \\
&= \sum_{p\leq x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kp^k} \\
&= \sum_{p\leq x}\frac{1}{p} + \sum_{p\leq x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp^k} \\
&= \sum_{p\leq x}\frac{1}{p} + \sum_{p}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp^k} - \sum_{p>x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp^k} \\
&= \sum_{p\leq x}\frac{1}{p} + b_2 - \sum_{p>x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp^k}.
\end{aligned}
$$

これと (10), 定理 17 より,

$$
\log\log x + b_1 + b_2 - \frac{1+2c_2}{\log x} \leq \log\left(\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right) \leq \log\log x + b_1 + b_2 + \frac{2c_2}{\log x}.
$$

したがって，$c_4 = e^{b_1+b_2}$ とおけば,

$$
c_4(\log x)\exp\left(-\frac{1+2c_2}{\log x}\right) \leq \prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \leq c_4(\log x)\exp\left(\frac{2c_2}{\log x}\right).
$$

a を正の定数とするとき，$0 \leq t \leq a$ に対して，

$$e^t \leq 1 + \frac{e^a - 1}{a} t.$$

また任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{-t} \geq 1 - t.$$

$x \geq 2$ のとき，$\dfrac{2c_2}{\log x} \leq \dfrac{2c_2}{\log 2}$ であるから，$a = \dfrac{2c_2}{\log 2}$ とおけば，

$$\exp\left(\frac{2c_2}{\log x}\right) \leq 1 + \frac{e^a - 1}{a} \frac{2c_2}{\log x},$$
$$\exp\left(-\frac{1 + 2c_2}{\log x}\right) \geq 1 - \frac{1 + 2c_2}{\log x}.$$

したがって，

$$c_5 = c_4(1 + 2c_2), \qquad c_6 = 2c_2 c_4 \frac{e^a - 1}{a}$$

とおけば，

$$c_4 \log x - c_5 \leq \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leq c_4 \log x + c_6.$$

□

4 Brun のふるいと双子素数

3 と 5, 5 と 7, 11 と 13, 17 と 19, 29 と 31, ..., などの素数のペアを**双子素数**という．次の予想は現在でも未解決である．

予想 19 (双子素数の予想)**.** 素数 p で，$p + 2$ も素数であるようなものは無数に存在する．

$\pi_2(x)$ を素数 $p \leq x$ で，$p + 2$ も素数であるようなものの個数を表す．$\pi_2(x)$ を上から評価しよう．

補題 20. $\ell \geq 1$, $0 \leq m \leq \ell$ とするとき，

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\ell}{k} = (-1)^m \binom{\ell - 1}{m}.$$

[証明]　m に関する帰納法による．$m = 0$ のとき，左辺 $= \binom{\ell}{0} = 1 =$ 右辺．$1 \leq m \leq \ell$ として，$m-1$ について主張が正しいと仮定する．

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{\ell}{k} &= \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{\ell}{k} + (-1)^m\binom{\ell}{m} \\ &= (-1)^m\left(-\binom{\ell-1}{m-1} + \binom{\ell}{m}\right) \\ &= (-1)^m\binom{\ell-1}{m}.\end{aligned}$$

□

命題 21 (Brun のふるい). $X \neq \emptyset$ を N 個の元からなる有限集合とする．$P_1, \ldots, P_r$ を X の元が持ち得る r 個の異なる性質とする．X の元でこれらの性質のどれも持たないようなものの個数を N_0 とする．$\{1, 2, \ldots, r\}$ の任意の部分集合 $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ に対して，$N(I)$ によって，性質 $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ を持つような X の元の個数を表す．$N(\emptyset) = |X| = N$ とする．そのとき，$m \geq 0$ が偶数ならば，

$$N_0 \leq \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \sum_{|I|=k} N(I),$$

$m \geq 0$ が奇数ならば，

$$N_0 \geq \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \sum_{|I|=k} N(I).$$

[証明]　$I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して，関数 $f_I : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ を

$$f_I(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ が性質 } P_{i_1}, \ldots, P_{i_k} \text{ を持つとき}, \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

によって定義する．$I = \emptyset$ のときは，$f_\emptyset(x) = 1,\ \forall x \in X$ である．同様に，関数 $f_0 : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ を

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ が性質 } P_1, \ldots, P_r \text{ のいずれも持たないとき}, \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

によって定義する．明らかに，

$$\sum_{x \in X} f_I(x) = N(I), \qquad \sum_{x \in X} f_0(x) = N_0. \tag{11}$$

f_I たちを使って，関数 $F : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ を

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \sum_{|I|=k} f_I(x) \qquad (x \in X) \tag{12}$$

によって定義する．命題を証明するためには，(11), (12) より，任意の $x \in X$ に対して，$m \geq 0$ が偶数ならば，$f_0(x) \leq F(x)$, $m \geq 0$ が奇数ならば，$f_0(x) \geq F(x)$ であることを示せばよい．$x \in X$ を任意にとる．x は $P_1, \dots, P_r$ のうち丁度 ℓ 個の性質を持つとする．$\ell = 0$ ならば，$f_0(x) = 1$ であり，$f_\emptyset(x) = 1$, $f_I(x) = 0$, $\forall I \neq \emptyset$ であるから，$F(x) = 1$ である．ゆえに，この場合は，$f_0(x) = F(x)$ である．よって，$\ell \geq 1$ としてよい．そのとき，$f_0(x) = 0$ である．$F(x)$ を計算しよう．そのために，番号を付けかえて，x は性質 $P_1, P_2, \dots, P_\ell$ を持つとしてよい．そのとき，$i > \ell$ ならば，x は性質 P_i を持たない．$I \subset \{1, 2, \dots, r\}$ とする．もし，ある $i > \ell$ について，$i \in I$ ならば，x は性質 P_i を持たないから，$f_I(x) = 0$ である．$f_I(x) = 1$ となるのは，$I \subset \{1, \dots, \ell\} = J$ のときだけである．したがって，$F(x)$ は次のように計算される．$m \geq \ell$ ならば，$|I| = k$ を満たす $I \subset J$ は丁度 $\binom{\ell}{k}$ 個あるから，

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{|I|=k} f_I(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{|I|=k,\, I \subset J} f_I(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \sum_{|I|=k,\, I \subset J} 1 = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \binom{\ell}{k} \\
&= (1-1)^\ell = 0 = f_0(x).
\end{aligned}
$$

同様に，$m \leq \ell$ ならば，補題 20 より，

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{|I|=k,\, I \subset J} f_I(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{|I|=k,\, I \subset J} 1 \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\ell}{k} = (-1)^m \binom{\ell - 1}{m}.
\end{aligned}
$$

したがって，m が偶数ならば，$F(x) \geq 0 = f_0(x)$ であり，m が奇数ならば，$F(x) \leq 0 = f_0(x)$ である． □

補題 22. $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $x \geq 1$ とすれば，

$$
\#\{y \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \leq y \leq x,\ y \equiv a \pmod m\} = \frac{x}{m} + \theta, \quad |\theta| < 1.
$$

[証明]　もし，$x/m = q \in \mathbb{Z}$ ならば，

$$
\#\{y \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \leq y \leq x = mq,\ y \equiv a \pmod m\} = q = \frac{x}{m}.
$$

$x/m \notin \mathbb{Z}$ とする．$[x] = mq + r$, $0 \leq r \leq m - 1$ とする．そのとき，x の小数部分を $\{x\}$ で表せば，$x = [x] + \{x\}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
mq < x &= [x] + \{x\} = mq + r + \{x\} \\
&\leq mq + m - 1 + \{x\} \\
&< m(q+1).
\end{aligned}
$$

したがって，$q < \dfrac{x}{m} < q+1$ である．

$$
\begin{aligned}
&\#\{y \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \le y \le x,\ y \equiv a \pmod m\} \\
&= \#\{y \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \le y \le mq,\ y \equiv a \pmod m\} \\
&\quad + \#\{y \in \mathbb{Z} \,|\, mq < y \le x,\ y \equiv a \pmod m\} \\
&= \begin{cases} q, \\ q+1, \end{cases} \\
&= \frac{x}{m} + \theta, \qquad |\theta| < 1.
\end{aligned}
$$

□

補題 23. $x \ge 1$ とし，$p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ を相異なる奇素数とする．自然数 $n \le x$ で，

$$
n(n+2) \equiv 0 \pmod{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} \tag{13}
$$

を満たすものの個数を $N(i_1, \ldots, i_k)$ で表す．そのとき，

$$
N(i_1, \ldots, i_k) = \frac{2^k x}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} + 2^k \theta, \quad |\theta| < 1.
$$

[証明]　p が奇素数で，$n(n+2) \equiv 0 \pmod p$ ならば，$n \equiv 0 \pmod p$ または $n+2 \equiv 0 \pmod p$ である．さらに，$0 \equiv -2 \pmod p$ であるから，もし，n が合同式 (13) を満たせば，0 と -2 からなる数列 $u_1, \ldots, u_k$ で，

$$
\left.
\begin{array}{lcl}
n & \equiv & u_1 \pmod{p_{i_1}}, \\
n & \equiv & u_2 \pmod{p_{i_2}}, \\
 & \vdots & \\
n & \equiv & u_{k-1} \pmod{p_{i_{k-1}}}, \\
n & \equiv & u_k \pmod{p_{i_k}},
\end{array}
\right\} \tag{14}
$$

となるものが存在する．このような数列 $\{u_1, \ldots, u_k\}$ は全部で 2^k 個ある．その各々に対して，中国剰余定理により，唯一つの $a \in \mathbb{Z}$, $0 \le a \le p_{i_1} \cdots p_{i_k} - 1$ で $a \equiv u_j \pmod{p_{i_j}}$, $j = 1, \ldots, k$ を満たすものが存在する．そのとき，合同式 (14) は，$n \equiv a \pmod{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}$ と同値である．補題 22 より，

$$
\#\{n \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \le n \le x,\ n \equiv a \pmod{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}\} = \frac{x}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} + \theta(a), \quad |\theta(a)| < 1.
$$

したがって，2^k 個の数列 $\{u_1, \ldots, u_k\}$ に対応するような 2^k 個の $a \in \mathbb{Z}$, $0 \le a \le p_{i_1} \cdots p_{i_k} - 1$ について和をとれば，

$$
N(i_1, \ldots, i_k) = \frac{2^k x}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} + 2^k \theta, \quad |\theta| < 1.
$$

□

以上の準備の下で，双子素数について次のブルンの定理が証明できる．

定理 24 (ブルン). 正の定数 c_7 が存在して，

$$\pi_2(x) \le c_7 \frac{x(\log\log x)^2}{(\log x)^2}.$$

[証明]　$5 \le y < x$ とする (y は後で x に依存するものに特定する). $r = \pi(y) - 1$ を y 以下の奇素数の個数とする. これらの素数を，$p_1, p_2, \ldots, p_r$ とする. $\pi_2(y, x)$ によって，$y < p \le x$ を満たす素数 p で $p + 2$ も素数であるようなものの個数を表す. もし，$y < n \le x$ であり，n と $n + 2$ がともに素数ならば，$n > p_i$, $i = 1, \ldots, r$ であり,

$$n(n+2) \not\equiv 0 \pmod{p_i} \quad \forall i = 1, \ldots, r$$

である. したがって,

$$N_0(y, x) = \#\{n \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \le n \le x,\ n(n+2) \not\equiv 0 \pmod{p_i},\ \forall i = 1, \ldots, r\}$$

とおけば,

$$\pi_2(x) \le y + \pi_2(y, x) \le y + N_0(y, x).$$

$N_0(y, x)$ を上から評価するために，ブルンのふるい (命題 21) を用いる.

$$X = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \le n \le x\}$$

とする. P_i によって，$n(n+2)$ が p_i で割り切れるという性質を表す. 任意の部分集合 $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して,

$$N(I) = \#\{n \in X \,|\, n(n+2) \equiv 0 \pmod{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}\}$$

とおく. $N(I)$ は $n \in X$ で性質 $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ を持つようなものの個数である. そのとき，補題 23 より,

$$N(I) = N(i_1, \ldots, i_k) = \frac{2^k x}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} + 2^k \theta(I), \qquad |\theta(I)| < 1$$

である. m を $1 \le m \le r$ を満たす偶数とする. そのとき，命題 21 より,

$$\begin{aligned}
N_0(y, x) &\le \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{|I|=k} N(I) \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{|I|=k} \left(\frac{2^k x}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} + 2^k \theta(I) \right) \\
&\le x \sum_{k=0}^{m} \sum_{|I|=k} \frac{(-2)^k}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} + \sum_{k=0}^{m} \sum_{|I|=k} 2^k \\
&= x \sum_{k=0}^{m} \sum_{|I|=k} \frac{(-2)^k}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} + \sum_{k=0}^{m} \binom{r}{k} 2^k \\
&= x \sum_{k=0}^{r} \sum_{|I|=k} \frac{(-2)^k}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} - x \sum_{k=m+1}^{r} \sum_{|I|=k} \frac{(-2)^k}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} + \sum_{k=0}^{m} \binom{r}{k} 2^k.
\end{aligned}$$

この右辺の 3 項を別々に評価する．まず第 1 項を評価する．

$$
\begin{aligned}
0 < x\sum_{k=0}^{r}\sum_{|I|=k}\frac{(-2)^k}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}} &= x\prod_{2<p\le y}\left(1-\frac{2}{p}\right)\\
&< x\prod_{2<p\le y}\left(1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}\right)\\
&= x\prod_{2<p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2.
\end{aligned}
$$

ここで，定理 18 より，$c_8 > 0$ を十分大きな定数とすれば，

$$
\prod_{2<p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \ge \frac{1}{c_8}\log y.
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
0 < x\sum_{k=0}^{r}\sum_{|I|=k}\frac{(-2)^k}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}} &< x\prod_{2<p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\\
&\le c_8^2\frac{x}{(\log y)^2}.
\end{aligned}
$$

次に，第 2 項を評価する．$s_k(x_1,\ldots,x_r)$ によって，$x_1,\ldots,x_r$ の k 次基本対称式を表す．そのとき，非負実数 $x_1,\ldots,x_r$ について，

$$
\begin{aligned}
s_k(x_1,\ldots,x_r) &= \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,r\}} x_{i_1}\cdots x_{i_k}\\
&= \sum_{n_1+\cdots+n_r=k,\ n_i=0,1}\frac{1}{n_1!\cdots n_r!}x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}\\
&\le \frac{1}{k!}\sum_{n_1+\cdots+n_r=k,\ n_i\ge 0}\frac{k!}{n_1!\cdots n_r!}x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}\\
&= \frac{1}{k!}(x_1+\cdots+x_r)^k = \frac{1}{k!}s_1(x_1,\ldots,x_r)^k.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
k! &= \int_0^\infty t^k e^{-t}\,dt\\
&> \int_k^\infty t^k e^{-t}\,dt\\
&> k^k\int_k^\infty e^{-t}\,dt = k^k\Big[-e^{-t}\Big]_k^\infty\\
&= \left(\frac{k}{e}\right)^k.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$s_k(x_1, \ldots, x_r) < \left(\frac{e}{k}\right)^k s_1(x_1, \ldots, x_r)^k.$$

これから，第 2 項は，

$$\begin{aligned}
\left| x \sum_{k=m+1}^{r} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,r\}} \frac{(-2)^k}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}} \right| &= x \sum_{k=m+1}^{r} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,r\}} \left(\frac{2}{p_{i_1}}\right)\cdots\left(\frac{2}{p_{i_k}}\right) \\
&= x \sum_{k=m+1}^{r} s_k\left(\frac{2}{p_1}, \ldots, \frac{2}{p_r}\right) \\
&= x \sum_{k=m+1}^{r} \left(\frac{e}{k}\right)^k s_1\left(\frac{2}{p_1}, \ldots, \frac{2}{p_r}\right)^k \\
&= x \sum_{k=m+1}^{r} \left(\frac{e}{k}\right)^k \left(\frac{2}{p_1} + \cdots + \frac{2}{p_r}\right)^k \\
&< x \sum_{k=m+1}^{r} \left(\frac{2e}{m}\right)^k \left(\sum_{p\le y} \frac{1}{p}\right)^k.
\end{aligned}$$

ここで，定理 17 より，定数 $c_9 > 0$ が存在して，

$$\sum_{p\le y} \frac{1}{p} \le c_9 \log\log y.$$

よって，

$$\left| x \sum_{k=m+1}^{r} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,r\}} \frac{(-2)^k}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}} \right| < x \sum_{k=m+1}^{r} \left(\frac{2c_9 e \log\log y}{m}\right)^k.$$

偶数 m を $4c_9 e \log\log y < m \le r$ にとれば，

$$x \sum_{k=m+1}^{r} \left(\frac{2c_9 e \log\log y}{m}\right)^k < x \sum_{k=m+1}^{r} \left(\frac{1}{2}\right)^k < \frac{x}{2^m}.$$

最後に，第 3 項を評価する．r は y 以下の奇素数の個数であるから，$2r < 2r+1 \le y$ である．また，$\binom{r}{k} = \dfrac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} < r^k$ であるから，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} \binom{r}{k} 2^k &< \sum_{k=0}^{m} (2r)^k \\
&= \frac{(2r)^{m+1} - 1}{2r - 1} \\
&< \frac{2r}{2r-1}(2r)^m \\
&\le 2y^m.
\end{aligned}$$

以上によって,

$$\begin{aligned}\pi_2(x) &\le y + N_0(y,x)\\ &\le y + c_8^2\frac{x}{(\log y)^2} + \frac{x}{2^m} + 2y^m\\ &\le c_8^2\frac{x}{(\log y)^2} + \frac{x}{2^m} + 3y^m.\end{aligned}$$

ここで,

$$c = \max(4c_9e, (\log 2)^{-1})$$

とおいて,

$$y = \exp\left(\frac{\log x}{3c\log\log x}\right), \quad m = 2[c\log\log x]$$

とおく．x が十分大ならば，例えば，$\log\log x \ge 1/(3c)$ ならば,

$$\log x \ge \frac{\log x}{3c\log\log x} = \log y,$$

$$c\log\log x \ge c\log\log y \ge 4c_9e\log\log y.$$

よって,

$$m = 2[c\log\log x] \ge c\log\log x \ge 4c_9e\log\log y.$$

また，$e^t \ge t^2/2$ と命題 13 より，x が十分大ならば,

$$\begin{aligned}r = \pi(y) - 1 &\ge \frac{y}{3\log y} - 1\\ &\ge \frac{\left(\frac{\log x}{3c\log\log x}\right)^2}{6\log y} - 1\\ &\ge \frac{\log x}{18c\log\log x} - 1 \ge 2c\log\log x\\ &\ge 2[c\log\log x] = m > 2c\log\log x - 2.\end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{x}{(\log y)^2} \le \frac{9c^2x(\log\log x)^2}{(\log x)^2},$$

$$\frac{x}{2^m} = \frac{4x}{2^{m+2}} < \frac{4x}{2^{2c\log\log x}} = \frac{4x}{(\log x)^{2c\log 2}} \le \frac{4x}{(\log x)^2}.$$

最後に,

$$\begin{aligned}y^m &\le y^{2c\log\log x}\\ &= \exp\left(2c\log\log x\frac{\log x}{3c\log\log x}\right)\\ &= \exp\left(\frac{2\log x}{3}\right) = x^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

以上によって，正の定数 c_7 がとれ，

$$\pi_2(x) \le c_7 \frac{x(\log\log x)^2}{(\log x)^2}.$$

□

系 25. $p_n, p_n+2,\ n=1,2,\ldots$ を双子素数の全体とする．そのとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n+2}\right)$$

は収束する．

[証明]　正の定数 b が存在して，$(\log\log x)^2 \le b(\log x)^{1/2}$ が成り立つから，定理 24 より，$x \ge 2$ に対して，

$$\pi_2(x) \le bc_7 \frac{x}{(\log x)^{\frac{3}{2}}}.$$

ゆえに，

$$n = \pi_2(p_n) \le bc_7 \frac{p_n}{(\log p_n)^{\frac{3}{2}}} \le bc_7 \frac{p_n}{(\log n)^{\frac{3}{2}}},$$

したがって，

$$\frac{1}{p_n} \le bc_7 \frac{1}{n(\log n)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n+2} &< \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n} \\
&\le \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{p_n} \\
&\le \frac{1}{3} + bc_7\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{\frac{3}{2}}} \\
&\le \frac{1}{3} + bc_7\frac{1}{2(\log 2)^{\frac{3}{2}}} + bc_7\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\log x)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

ここで，$t=\log x$ とおけば，$dt = x^{-1}dx$ であるから，

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\log x)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\log 2}^{\infty} t^{-\frac{3}{2}}\,dt = \Big[-2t^{-\frac{1}{2}}\Big]_{\log 2}^{\infty} = 2(\log 2)^{-\frac{1}{2}}.$$

□

参考文献

[1] ジョン・ダービーシャー，素数に憑かれた人たち，日経 BP 社，2004.

[2] Melvyn B. Nathanson, Additive Number Theory, Springer, 1996.