代数学演習

– テータ関数 –

中川 仁

2007 年度後期

記号

$\mathbb{Z}$:有理整数環，$\mathbb{Q}$:有理数全体の集合，$\mathbb{R}$:実数全体の集合，$\mathbb{C}$:複素数全体の集合.

目 次

目標　複素関数論の基礎について復習してから，楕円関数，テータ関数について，テータ関数による複素トーラスの射影空間への埋め込みを中心に解説する．

1 正則関数

1.1 Green の定理

ここでは，実 2 変数の微積分，特に，Green の定理について述べる．関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ の領域 D の閉包 $\bar{D}$ で定義された連続関数で，x, y それぞれについて偏微分可能であり，偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ は連続であるとする．

補題 1.1. D が x について縦線型，すなわち，

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi(x) < y < \varphi(x),\, a < x < b\}$$

であるとする．ここで，$\psi(x)$, $\varphi(x)$ を $a \leq x \leq b$ で定義された連続関数で，$a < x < b$ のとき，$\psi(x) < \varphi(x)$ を満たすものである．D の周を正の向きに一周する曲線を C とする．そのとき，

$$\iint_D f_y(x,y)\,dxdy = -\int_C f(x,y)\,dx$$

が成り立つ．同様に，D が y について縦線型ならば,

$$\iint_D f_x(x,y)\,dxdy = \int_C f(x,y)\,dy$$

が成り立つ.

[証明]

$$\begin{aligned}
\iint_D f_y(x,y)\,dxdy &= \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f_y(x,y)\,dy \right) dx \\
&= \int_a^b \big[f(x,y)\big]_{\psi(x)}^{\varphi(x)}\,dx \\
&= \int_a^b \left(f(x,\varphi(x)) - f(x,\psi(x))\right)\,dx.
\end{aligned}$$

$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ と分解される．ここで,

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{(x,\psi(x)) \mid a \leq x \leq b\}, \\
C_2 &= \{(b,t) \mid \psi(b) \leq t \leq \varphi(b)\}, \\
C_3 &= \{(-t,\varphi(-t)) \mid -b \leq t \leq -a\}, \\
C_4 &= \{(a,-t) \mid -\varphi(a) \leq t \leq -\psi(a)\}
\end{aligned}$$

である．線積分の定義から，

$$\begin{aligned}
&\int_{C_2} f(x,y)\,dx = \int_{C_4} f(x,y)\,dx = 0, \\
&\int_{C_1} f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,\psi(x))\,dx, \\
&\int_{C_3} f(x,y)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-t,\varphi(-t))\,dt = -\int_a^b f(x,\varphi(x))\,dx.
\end{aligned}$$

よって，

$$\int_C f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,\psi(x))\,dx - \int_a^b f(x,\varphi(x))\,dx$$

したがって，

$$-\int_C f(x,y)\,dx = \int_a^b \left(f(x,\varphi(x)) - f(x,\psi(x))\right)\,dx = \iint_D f_y(x,y)\,dxdy.$$

D が y について縦線型ならば，右側は下から上へ，左側は上から下へ積分するから，符号は $+$ になる． □

定理 1.2 (Green の定理)．有界な領域 D の境界は区分的に滑らかな有限個の単一閉曲線 $C_1,\ldots,C_m$ からなるとする．これらのすべてに D に関する正の向きを付けたものを ∂D とする．さらに，D を有限個の座標軸に平行な線分で区切って，有限個の x についても y についても縦線型である領域 $D_1,\ldots,D_n$ に分割できるとする．$P(x,y)$, $Q(x,y)$ を $\bar{D}$ において，偏微分可能であり，偏導関数が連続であるような関数とする．そのとき，

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy = \int_{\partial D}(P\,dx + Q\,dy).$$

[証明]　各 D_i について，補題 1.1 を用いる．それをすべて加えると，区切りに入れた線分はすべて反対向きに 2 回ずつ積分されるので打ち消し合い，D の境界上の積分だけ残って定理を得る． □

微分形式 $\omega = P\,dx + Q\,dy$ に対して，その**外微分**$d\omega$ を

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy$$

によって定義すれば，Green の定理は

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

と表される．

1.2　複素関数の微分

定義 1.3. $D \subset \mathbb{C}$ を複素平面上の領域とし，$f(z)$ を D 上定義された複素変数 $z \in D$ の複素数値関数とする．$f(z)$ が $z_0 \in D$ において**微分可能**であるとは，極限値

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

が存在することである．この極限値を $f'(z_0)$ で表し，$f(z)$ の $z = z_0$ における**微分係数**という．D の各点で $f(z)$ が微分可能であるとき，各点 $z \in D$ に対して，$f'(z)$ を対応させることによって，$f(z)$ の**導関数** $f'(z)$ が得られる．$f(z)$ が D の各点で微分可能であり，導関数 $f'(z)$ が D で連続であるとき，$f(z)$ は D で**正則**であるという．

上の定義は実 1 変数の微分係数の定義と形式的には同じものである．しかし，複素平面上で，z が z_0 に近づくときの，近づき方は 2 次元的であるから，どんな近づき方をしても一つの極限値に近づくということは，かなり強い条件である．これを詳しくみてみよう．

$f(z)$ は $z_0 \in D$ において微分可能であるとし，

$$\alpha = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

とおく．このとき，

$$\varepsilon(z, z_0) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \alpha, & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

とおけば，

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z, z_0), \tag{1.1}$$

$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0 \tag{1.2}$$

である．今，実部と虚部に分けて，$z = x+iy$, $z_0 = x_0+iy_0$, x, y は実変数，$x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ とかく．同様に，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ は 2 変数 x, y の実数値関数とかく．さらに，$\alpha = a + ib$, $\varepsilon(z, z_0) = \varepsilon_1(x, y, x_0, y_0) + i\varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)$ とかく．そのとき，(1.1), (1.2) をかきなおせば，

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + (a + \varepsilon_1(x, y, x_0, y_0))(x - x_0) - (b + \varepsilon_2(x, y, x_0, y_0))(y - y_0),$$
$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + (b + \varepsilon_2(x, y, x_0, y_0))(x - x_0) + (a + \varepsilon_1(x, y, x_0, y_0))(y - y_0),$$
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \varepsilon_j(x, y, x_0, y_0) = 0, \quad j = 1, 2.$$

これは，$u(x,y)$, $v(x,y)$ が点 (x_0,y_0) において全微分可能であることを示している．したがって，$u(x,y)$, $v(x,y)$ が点 (x_0,y_0) において偏微分可能であり，偏微分係数は

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=a,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-b,\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=b,\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)=a$$

となる．これから，u, v は **Cauchy-Riemann の関係式**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3}$$

を満たす．$f'(z_0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ であるから，$f'(z)$ が連続であることは，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ および，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ が連続であることである．

1.3 複素積分

定義 1.4. $D\subset\mathbb{C}$ を複素平面上の領域とし，$f(z)$ を D 上定義された正則関数とする．$z=x+iy$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とかく．C を D 内の区分的に滑らかな曲線

$$z=z(t)=x(t)+iy(t),\quad 0\le t\le 1$$

とする．このとき，積分

$$\begin{aligned}&\int_C (u(x,y)+iv(x,y))\,(dx+idy)\\&=\int_0^1\left(u(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}-v(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right)dt\\&+i\int_0^1\left(u(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}+v(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}\right)dt\end{aligned}$$

を $f(z)$ の**積分路**C に沿う**複素積分**といい，

$$\int_C f(z)\,dz$$

で表す．

1.4 Cauchy の積分定理，積分公式

Cauchy-Riemann の関係式 (1.3) と Green の定理 1.2 から，次の定理が導かれる．

定理 1.5 (Cauchy の積分定理). $f(z)$ が有界領域 D で正則で，D の閉包 $\bar{D}$ で連続であるとする．さらに，D の境界 ∂D は有限個の互いに交わらない区分的に滑らかな単一閉曲線からなるとする．そのとき，境界 ∂D に沿う複素積分について，

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$$

が成り立つ．

[証明]　複素積分の定義と Green の定理より，

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz &= \int_{\partial\Delta}(u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial\Delta}(u\,dy + v\,dx)\\ &= -\iint_{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy + i\iint_{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.\end{aligned}$$

Cauchy-Riemann の関係式により，右辺の被積分関数はいずれも 0 であるから，この積分は 0 である．　□

定理 1.6 (Cauchy の積分公式). $D,\ f(z)$ を定理 *1.5* の通りとする．このとき，D の内点 z に対して，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

が成り立つ．

[証明]　$r > 0$ を十分小さくとって，$\Delta_r = \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta - z| \le r\} \subset D$ となるようにする．$E = D - \Delta_r$ とする．そのとき，E 上の正則関数 $\varphi(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ に定理 1.5 を適用すれば，

$$\int_{\partial E}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0.$$

ここで，∂E は ∂D を正の向きにまわったものと $\partial\Delta_r$ を負の向きにまわったものと合わせたものであるから，

$$\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_{\partial\Delta_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

を得る．上の式の値が $2\pi i f(z)$ であることを示せばよい．$\partial\Delta_r$ をパラメータ表示する．$z = x + iy$ として，

$$\zeta = x(\theta) + iy(\theta), \quad x(\theta) = x + r\cos\theta,\ y(\theta) = y + r\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

そのとき，

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta_r}\frac{d\zeta}{\zeta - z} &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}\left(\frac{dx}{d\theta} + i\frac{dy}{d\theta}\right)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}(-r\sin\theta + ir\cos\theta)\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i.\end{aligned}$$

したがって，
$$\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z) = \int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$
とかける．任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$r > 0$ を十分小さくとれば，任意の $\zeta \in \Delta_r$ に対して，
$$|f(\zeta) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$
となるようにできる．したがって，
$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| &\leq \int_{\partial\Delta_r} \left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\right| |d\zeta| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2\pi r} r\, d\theta = \varepsilon.\end{aligned}$$
$\varepsilon > 0$ は任意だから，r によらない積分の値は
$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z) = \int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z) = 0$$
でなければならない．以上によって，
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$
が示された． □

次に，正則関数は何回でも微分できて，その高階導関数も連続であることを示そう．

補題 1.7. $n \geq 0,\ r > 0$ とし，$w, z \in \mathbb{C}$ を $|w| \geq r,\ |z| \geq r,\ w \neq z$ とする．そのとき，
$$\left|\frac{1}{w - z}\left(\frac{1}{w^{n+1}} - \frac{1}{z^{n+1}}\right) + \frac{n+1}{z^{n+2}}\right| \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2r^{n+3}}|w - z|.$$

[証明]
$$\begin{aligned}\frac{1}{w - z}\left(\frac{1}{w^{n+1}} - \frac{1}{z^{n+1}}\right) &= \frac{1}{w - z}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{w^n} + \frac{1}{w^{n-1}z} + \cdots + \frac{1}{wz^{n-1}} + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{zw}\right)\left(\frac{1}{w^n} + \frac{1}{w^{n-1}z} + \cdots + \frac{1}{wz^{n-1}} + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{w^{k+1}z^{n+1-k}}.\end{aligned}$$

したがって，
$$\left|\frac{1}{w^{n+1}} - \frac{1}{z^{n+1}}\right| \leq |w - z| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{|w|^{k+1}|z|^{n+1-k}} \leq \frac{(n+1)}{r^{n+2}}|w - z|. \tag{1.4}$$

また,

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z}\left(\frac{1}{w^{n+1}}-\frac{1}{z^{n+1}}\right)+\frac{n+1}{z^{n+2}} &= -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{w^{k+1}z^{n+1-k}}+\frac{n+1}{z^{n+2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{z^{n+2}}-\frac{1}{w^{k+1}z^{n+1-k}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{z^{k+1}}-\frac{1}{w^{k+1}}\right)\frac{1}{z^{n+1-k}}.\end{aligned}$$

ここで，不等式 (1.4) で，$n+1$ を $k+1$ で置き換えたものを使えば,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{w-z}\left(\frac{1}{w^{n+1}}-\frac{1}{z^{n+1}}\right)+\frac{n+1}{z^{n+2}}\right| &\le \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{z^{k+1}}-\frac{1}{w^{k+1}}\right|\frac{1}{|z|^{n+1-k}} \\ &\le \sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)}{r^{k+2}}|w-z|\frac{1}{r^{n+1-k}} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2r^{n+3}}|w-z|.\end{aligned}$$

□

補題 1.8. D を定理 *1.5* の通りとし，$\varphi(\zeta)$ は ∂D 上定義された連続関数とする．$z \in D$ に対して,

$$f_n(z) = \int_{\partial D}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

とおけば，$f_n(z)$ は D 上の正則関数で,

$$f_n'(z) = (n+1)f_{n+1}(z)$$

が成り立つ．

[証明]　$z \in D$ とする．$r > 0$ を十分小さくとれば,

$$\Delta_{2r} = \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta - z| \le 2r\} \subset D$$

となるようにする．そのとき，$\zeta \in \partial D$ とすると，$\zeta \notin D$ であるから，$|\zeta - z| > 2r$ である．したがって，$0 < |h| < r, \zeta \in \partial D$ のとき，$|\zeta - z - h| \ge |\zeta - z| - |h| > 2r - r = r$ である．補題 1.7 において，z に $\zeta - z$, w を $\zeta - z - h$ で置き換えれば,

$$\left|-\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\zeta-z-h)^{n+1}}-\frac{1}{(\zeta-z)^{n+1}}\right)+\frac{n+1}{(\zeta-z)^{n+2}}\right| \le \frac{(n+1)(n+2)}{2r^{n+3}}|h|.$$

を得る．よって，

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f_n(z+h)-f_n(z)}{h}-(n+1)f_{n+1}(z)\right| \\
&=\left|\int_{\partial D}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\zeta-z-h)^{n+1}}-\frac{1}{(\zeta-z)^{n+1}}\right)-\frac{n+1}{(\zeta-z)^{n+2}}\right)\varphi(\zeta)\,d\zeta\right| \\
&\leq \int_{\partial D}\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\zeta-z-h)^{n+1}}-\frac{1}{(\zeta-z)^{n+1}}\right)-\frac{n+1}{(\zeta-z)^{n+2}}\right||\varphi(\zeta)|\,d|\zeta| \\
&\leq \int_{\partial D}\frac{(n+1)(n+2)}{2r^{n+3}}|h||\varphi(\zeta)|\,|d\zeta| \\
&=\frac{(n+1)(n+2)}{2r^{n+3}}ML|h|, \quad M=\max_{\zeta\in\partial D}|\varphi(\zeta)|,\ L=\int_{\partial D}|d\zeta|.
\end{aligned}
$$

これから，

$$
\lim_{h\to 0}\frac{f_n(z+h)-f_n(z)}{h}=(n+1)f_{n+1}(z)
$$

を得る． すなわち，$f_n(z)$ は D 上で微分可能であり，$f_n'(z)=(n+1)f_{n+1}(z)$ である．$f_{n+1}(z)$ も同様にして微分可能であるから，$f_{n+1}(z)$ は連続であり，したがって，$f_n'(z)$ は連続である．ゆえに，$f_n(z)$ は正則である． □

定理 1.9. *D, $f(z)$ を定理 1.5 の通りとすると，$f(z)$ は複素関数として無限回微分可能であり，任意の $n\geq 0$ について，*

$$
f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta
$$

が成り立つ．

[証明] 定理 1.6 より，

$$
f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.
$$

$\varphi(\zeta)=f(\zeta)$ として，補題 1.8 を適用すれば，

$$
f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta.
$$

$n\geq 1$ として，

$$
f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta.
$$

とすれば，補題 1.8 より，$f^{(n)}(z)$ は正則であり，

$$
f^{(n+1)}(z)=\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}}\,d\zeta.
$$

□

1.5 正則関数の Taylor 展開

定理 1.10. D を定理 *1.5* の通りとし，$f(z)$ を D 上の正則関数，$c \in D$ とする．$R > 0$ を $\Delta_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - c| \le R\} \subset D$ にとる．そのとき，$f(z)$ は Δ_R の内部で絶対収束するべき級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

に展開される．ここで，

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} \, d\zeta.$$

[証明] $0 < r < R$ とする．$|z - c| < r$ に対して，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

$\zeta \in \partial \Delta_R$, $|z - c| < r$ のとき，$\left| \dfrac{z - c}{\zeta - c} \right| < \dfrac{r}{R} < 1$ であるから，

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c)\left(1 - \dfrac{z - c}{\zeta - c}\right)} = \frac{1}{\zeta - c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - c}{\zeta - c} \right)^n .$$

この級数は，$\zeta \in \partial \Delta_R$ について一様収束している．したがって，積分と和の順序が交換でき，

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_R} \frac{1}{\zeta - c} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \left(\frac{z - c}{\zeta - c} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - c)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} \, d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} \, d\zeta = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}. \end{aligned}$$

□

命題 1.11. $f(z)$ を領域 D 上の正則関数で恒等的に 0 ではないとする．$c \in D$ を $f(z)$ の零点とすれば，c の十分小さい近傍内には c 以外の $f(z)$ の零点は存在しない．

[証明] 定理 1.10 より，$r > 0$ を十分小さくとれば，$|z - c| < r$ において，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

と Taylor 展開される．$a_0 = f(c) = 0$ である．$f(z)$ は恒等的には 0 でないから，$a_n = 0, n = 0, \dots, m-1, a_m \neq 0$ となる $m \geq 1$ が存在する．そのとき，

$$g(z) = a_m + a_{m+1}(z-c) + \cdots = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-c)^{n-m}$$

とおけば，これは，$|z-c| < r$ において絶対収束し，$g(z)$ はそこで正則である．また，$f(z) = (z-c)^m g(z)$ である．$g(c) = a_m \neq 0$ であり，$g(z)$ は $z = c$ で連続であるから，$0 < \delta < r$ を十分小さくとれば，$|z-c| < \delta$ において，$|g(z) - a_m| < |a_m|/2$ にできる．したがって，$|g(z)| \geq |a_m| - |g(z) - a_m| > |a_m|/2$ である．よって，$0 < |z-c| < \delta$ のとき，$f(z) = (z-c)^m g(z) \neq 0$ である． □

定理 1.12 (一致の定理)．領域 D で正則な関数 $f(z), g(z)$ が D 上の内部に集積点を持つ集合 E 上で $f(z) = g(z)$ を満たすならば，恒等的に $f(z) = g(z)$ である．

[証明]　$F(z) = f(z) - g(z)$ として，$c \in D$ を E の集積点とする．$c_n \in E, c_n \neq c$, $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ となる複素数の列をとる．$F(c_n) = f(c_n) - g(c_n) = 0$ であるから，$F(z)$ が恒等的に 0 でないとすれば，命題 1.11 に矛盾する． □

定理 1.13 (Liouville の定理)．$f(z)$ を全複素平面上で正則な関数 *(*整関数*)* で，有界であるとする．そのとき，$f(z)$ は定数である．

[証明]　任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，$|f(z)| \leq M$ であるとする．$R > 0$ とすれば，定理 1.10 より，$|z| < R$ において，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

である．ここで，$\Delta_R = \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta| \leq R\}$ とすれば，

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta$$

である．したがって，

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \Delta_R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}} \, |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi R^{n+1}} 2\pi R = \frac{M}{R^n}.$$

$R > 0$ は任意だから，$R \to \infty$ として，$a_n = 0, n \geq 1$ を得る．そのとき，$f(z) = a_0$ である． □

1.6　孤立特異点

D を領域，$c \in D$ とし，$\Delta_R \subset D$ を c を中心とする半径 R の閉円板とする．

命題 1.14. $D-\{c\}$ で正則な関数 $f(z)$ は，Δ_R の内部において絶対収束する級数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$$

に展開される．ここで，

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}\,d\zeta\quad(0<r<R).$$

[証明]　$0<|z-c|<R$ なる z をとる．$\varepsilon,\varepsilon'>0$, $r,r'>0$ を $0<\varepsilon<\varepsilon'\leq|z-c|\leq r'<r<R$ にとる．$g(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$ とおけば，$g(\zeta)$ は $\zeta\in D-\{c,z\}$ において正則である．定理 1.10 より，$\zeta=z$ のある近傍において，

$$f(\zeta)=f(z)+b_1(\zeta-z)+b_2(\zeta-z)^2+\cdots$$

と Taylor 展開される．したがって，

$$g(\zeta)=\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}=b_1+b_2(\zeta-z)+\cdots$$

は $\zeta=z$ の近傍で絶対収束し，ζ の正則関数である．ゆえに，$g(\zeta)$ は $\zeta\in D-\{c\}$ において正則である．$g(\zeta)$ は $\{\zeta\in D\,|\,\varepsilon\leq|\zeta-c|\leq r\}$ を含む領域で正則であるから，定理 1.5 より，$\Delta_r=\{\zeta\,|\,|\zeta-c|\leq r\}$, $\Delta_\varepsilon=\{\zeta\,|\,|\zeta-c|\leq\varepsilon\}$ とおけば，

$$\int_{\partial(\Delta_r-\Delta_\varepsilon)}g(\zeta)\,d\zeta=0.$$

すなわち，

$$\int_{\partial\Delta_r}g(\zeta)\,d\zeta=\int_{\partial\Delta_\varepsilon}g(\zeta)\,d\zeta.$$

一方，定数 1 について，定理 1.6 を用いれば，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r}\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta=1.$$

また，$1/(\zeta-z)$ は Δ_ε を含む領域で正則であるから，定理 1.5 より，

$$\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta=0.$$

以上によって，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r} g(\zeta)\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r}\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - f(z) \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon} g(\zeta)\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.
\end{aligned}
$$

これから，

$$
f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.
$$

この右辺の第 1 の積分において，

$$
\frac{1}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}
$$

は $\zeta\in\partial\Delta_r$ に対して，一様に絶対収束するから，積分と和の順序を交換でき，

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}\,d\zeta.
$$

第 2 の積分において，

$$
\frac{1}{\zeta-z} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-c)^n}{(z-c)^{n+1}}
$$

は $\zeta\in\partial\Delta_\varepsilon$ に対して，一様に絶対収束するから，積分と和の順序を交換でき，

$$
-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-1}(z-c)^{-n-1}, \quad a_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}(\zeta-c)^n f(\zeta)\,d\zeta.
$$

□

定義 1.15. 命題 1.14 の級数を $f(z)$ の $z=c$ に関する **Laurent 級数**という．また，c を $f(z)$ の**孤立特異点**という．Laurent 展開における $z-c$ の負べきの項

$$
\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-c)^n
$$

を孤立特異点 c における $f(z)$ の**主要部**という．主要部には次の 3 つの場合がある．

(i) 主要部がない場合． $f(z)$ は $z=c$ でも正則になる．D で正則な関数 $f(z)$ が $z=c$ において $f(c)=0$ となるとき，c を $f(z)$ の**零点**という．そのとき，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$$

とすると，$a_0 = f(c) = 0$ である．$f(z)$ は恒等的には 0 でないとすると，$a_1, a_2, \dots$ のうち 0 でない最初の係数を a_m とすれば，

$$f(z)=(z-c)^m(a_m+a_{m+1}(z-c)+a_{m+2}(z-c)^2+\cdots), \quad a_m\neq 0.$$

このとき，m を $f(z)$ の m 位の零点という．

$$f(z)-(z-c)^m g(z)$$

とかけば，$g(z)=a_m+a_{m+1}(z-c)+a_{m+2}(z-c)^2+\cdots$ は c の十分小さい近傍では，$g(z)\neq 0$ である．

(ii) 主要部が有限項の場合．$0<|z-c|<R$ において，

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-c)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n, \quad a_{-m}\neq 0$$

とかける．このとき，c を $f(z)$ の m 位の**極**という．明らかに，

$$g(z)=(z-c)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-c)+a_{-m+2}(z-c)^2+\cdots$$

は $|z-c|<R$ で正則な関数であり，$g(c)=a_{-m}\neq 0$ であるから，c の十分小さい近傍において $g(z)\neq 0$ である．

(iii) 主要部が無限級数の場合．c を $f(z)$ の**真性特異点**という．

係数 a_{-1} を $f(z)$ の c における**留数**といい，$\mathrm{Res}_{z=c}[f(z)]$ で表す．命題 1.14 より，$r>0$ を十分小さくとれば，c を中心とする半径 r の閉円板 Δ_r について，

$$\int_{\partial\Delta_r} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=c}[f(z)].$$

定理 1.16 (留数の定理). $f(z)$ が D で有限個の孤立特異点 $c_1,\dots,c_m$ を除いて正則であり，$\bar{D}$ で連続であるとする．そのとき，

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}_{z=c_j}[f(z)].$$

[証明]　$r > 0$ を十分小さくとって，c_j を中心とする半径 r の閉円板を $\Delta_r(c_j)$ とすると，$E = D - \cup_{j=1}^m \Delta_r(c_j)$ において $f(z)$ は正則であり，$\bar{E} = \bar{D} - \cup_{j=1}^m \Delta_r(c_j)^o$ で連続である．定理 1.5 より，

$$\int_{\partial E} f(z)\, dz = 0$$

である．$\partial E = \partial D - \cup_{j=1}^m \partial\Delta_r(c_j)$ であるから，

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^m \int_{\partial \Delta_r(c_j)} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \mathrm{Res}_{z=c_j}[f(z)].$$

□

2　楕円関数

2.1　楕円関数の定義

定義 2.1. $f(z)$ が $\mathbb{C}$ 上の**有理型関数**であるとは，$\mathbb{C}$ の各点 c の近傍 U_c において，$f(z) = g(z)/h(z)$, $g(z)$, $h(z)$ は U_c 上の正則関数で，$h(z) \neq 0$ と表せることである．このとき，$f(z)$ の特異点は高々極であり，それ以外では正則である．

定義 2.2. $f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上の有理型関数とする．$\omega \in \mathbb{C}$ について

$$f(z+\omega) = f(z)$$

が成り立つとき，ω は $f(z)$ の**周期**であるという．Ω を $f(z)$ の周期全体のなす集合とすれば，Ω は加群である．

定義 2.3. $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(z)$ が，$\mathbb{R}$ 上 1 次独立な ω_1, ω_2 を周期として持つとき，$f(z)$ は 2 重周期 ω_1, ω_2 の**楕円関数**であるという．そのとき，ω_1, ω_2 によって生成される加群を $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ とすれば，

$$f(z+\omega) = f(z), \quad \forall \omega \in \Omega$$

である．

2.2　複素トーラス

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上 1 次独立とする．Ω を ω_1, ω_2 によって生成される加群とする．$\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ である．$\mathbb{C}$ の部分加群 Ω に関する剰余群 $\mathbb{C}/\Omega$ を考える．すなわち，$z, w \in \mathbb{C}$ について，$w - z \in \Omega$ のとき，

$$w \equiv z \pmod{\Omega}$$

とかく．これは $\mathbb{C}$ 上の同値関係を与える．この同値類全体の集合を $\mathbb{C}/\Omega$ で表す．z の同値類を $[z]$ で表す．$\mathbb{C}/\Omega$ における加法を

$$[z_1] + [z_2] = [z_1 + z_2]$$

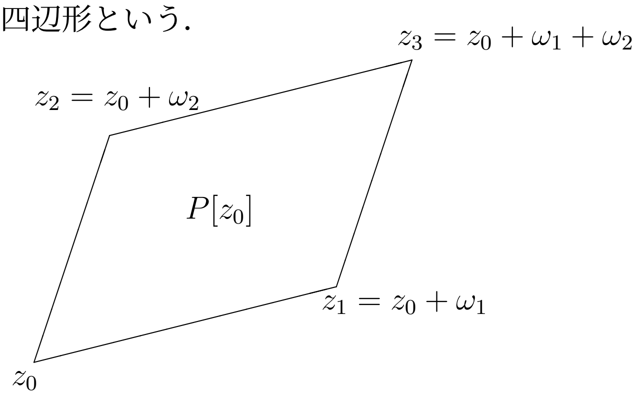
によって定義する．これによって，$\mathbb{C}/\Omega$ はアーベル群になる．

次に，$\mathbb{C}/\Omega$ に位相を導入する．これは商位相を入れる．すなわち，$p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Omega$, $p(z) = [z]$ を自然な写像とする．そのとき，$U \subset \mathbb{C}/\Omega$ が開集合とは，$p^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ が開集合であることとする．

$z_0 \in \mathbb{C}$ とする．z_0, $z_1 = z_0 + \omega_1$, $z_2 = z_0 + \omega_2$, $z_3 = z_0 + \omega_1 + \omega_2$ とおく．平行四辺形 $z_0z_1z_2z_3$ を $P[z_0]$ とかく．ただし，辺 z_1z_3, z_2z_3 上の点は除く．

$$P[z_0] = \{z = z_0 + r\omega_1 + s\omega_2 \,|\, 0 \le r, s < 1\}$$

である．$P[z_0]$ を周期平行四辺形という．



命題 2.4. $z \in \mathbb{C}$ とすると，$z' \in P[z_0]$ で，

$$z \equiv z' \pmod{\Omega}$$

となるものがただ一つ存在する．

U_0 を周期平行四辺形 $P[z_0]$ の内点全体の集合とする．そのとき，$p(U_0) \subset \mathbb{C}/\Omega$ は開集合である．実際，

$$p^{-1}(p(U_0)) = \bigcup_{\omega \in \Omega} (\omega + U_0)$$

は開集合の和であるから開集合である．これから同様にして，$p|_{U_0} : U_0 \longrightarrow p(U_0)$ は開写像であることがわかる．命題 2.4 より，これは単射である．したがって，これは同相写像である．位相空間 $\mathbb{C}/\Omega$ は平行四辺形 $\bar{U}_0$ の縁を辺 z_0z_2 上の点 $z_0 + s\omega_2$, $0 \le s \le 1$ を辺 z_1z_3 上の点 $z_0 + \omega_1 + s\omega_2$, $0 \le s \le 1$ と同一視し，辺 z_0z_1 上の点 $z_0 + r\omega_1$, $0 \le r \le 1$ を辺 z_2z_3 上の点 $z_0 + r\omega_1 + \omega_2$, $0 \le r \le 1$ と同一視する．これによって，位相空間 $\mathbb{C}/\Omega$ はドーナッツ (円環面) であることがわかった．

最後に，$\mathbb{C}/\Omega$ に 1 次元複素多様体としての構造を導入しよう．$q \in \mathbb{C}/\Omega$ として，q の近傍での複素構造を次のように定める．$p(z) = q$ となる点 $z \in \mathbb{C}$ をとる．z を中心とした半径が十分小さな開円板を $D_z \subset \mathbb{C}$ とする．$p(D_z)$ は開集合であり，

$$p|_{D_z} : D_z \longrightarrow p(D_z)$$

は同相写像である．特に，$V_q = p(D_z)$ は q の開近傍である．写像

$$f = (p|_{D_z})^{-1} : V_q = p(D_z) \longrightarrow D_z \subset \mathbb{C}$$

を V_q 上の複素座標と定める．2 つの点 $q_1, q_2 \in \mathbb{C}/\Omega$ および $p(z_1) = q_1$, $p(z_2) = q_2$ なる点 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ から定まる座標系を

$$f_1 : V_{q_1} \longrightarrow D_{z_1}, \quad f_2 : V_{q_2} \longrightarrow D_{z_2}$$

とする．$q \in V_{q_1} \cap V_{q_2}$ とすると，$p(f_1(q)) = p(f_2(q)) = q$ より，$f_1(q) - f_2(q) = \omega \in \Omega$ である．よって，$f_1(q) = \omega_0 + f_2(q) \in D_{z_1} \cap (\omega + D_{z_2})$ である．ここで，D_{z_1}, D_{z_2} は十分小さく選んであるので，$V_{q_1} \cap V_{q_2}$ は連結であり，連続写像

$$V_{q_1} \cap V_{q_2} \longrightarrow \Omega, \quad q \longmapsto f_1(q) - f_2(q)$$

は定数である．ゆえに，

$$f_1(q) = f_2(q) + \omega, \quad \forall q \in V_{q_1} \cap V_{q_2}.$$

これは座標変換

$$f_1 \circ f_2^{-1} : f_2(V_{q_1} \cap V_{q_2}) \longrightarrow f_1(V_{q_1} \cap V_{q_2})$$

が正則関数 $z \longmapsto z + \omega$ で与えられることを示している．よって，上のように複素座標系を与えると，$\mathbb{C}/\Omega$ はコンパクトな 1 次元複素多様体 (Riemann 面) になる．これを**複素トーラス**という．

注意 2.5. $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ とする．$\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ に対して，線形写像 $z \longmapsto \alpha z$ による Ω の像を $\alpha\Omega$ とすると，$\alpha\Omega = \mathbb{Z}\alpha\omega_1 + \mathbb{Z}\alpha\omega_2$ であり，複素トーラスの間の写像

$$\mathbb{C}/\Omega \longrightarrow \mathbb{C}/\alpha\Omega$$

を引き起こす．これは群としても同型であり，複素多様体としても同型である．特に，$\alpha = \omega_1^{-1}$ とすると，$\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$ であるから，$\Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0$ である．必要ならば ω_2/ω_1 を $-\omega_2/\omega_1$ で置き換えることによって，$\Im(\omega_2/\omega_1) > 0$ としてよい．以上によって，複素トーラスを考えるときは，$\Im\tau > 0$ となる複素数 τ をとって 1 と τ によって生成される加群 $\Omega = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ から作られる複素トーラス $\mathbb{C}/\Omega$ を考えればよい．

2.3　楕円関数の基本性質

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上 1 次独立とし，$\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ とする．Ω を周期に持つ楕円関数の全体を $K(\Omega)$ とする．定数関数は $K(\Omega)$ に属する．また，$K(\Omega)$ は体である．さらに，$f(z) \in K(\Omega)$ ならば，$f'(z) \in K(\Omega)$ である．

命題 2.6. 楕円関数は周期平行四辺形 $P[z_0]$ 上で有限個の極を持つ．

[証明]　楕円関数 $f(z)$ が周期平行四辺形 $P[z_0]$ において無限個の極を持ったとすれば，その集積点 c が存在する．c の近傍 U において，$f(z) = g(z)/h(z)$, $g(z), h(z)$ は U 上の正則関数とかく．そのとき，$h(z)$ の零点の集合は c を集積点に持つ．したがって，$h(z) = 0$ となって矛盾である．□

$a_1, \ldots, a_n$ を楕円関数 $f(z)$ の周期平行四辺形 $P[z_0]$ 上の極の全体とする．a_i における極の位数を m_i とする．

$$\sum_{i=1}^{n} m_i$$

を楕円関数 $f(z)$ の**位数**という．

命題 2.7. 複素平面 $\mathbb{C}$ 上で正則な楕円関数 $f(z)$ は定数である．

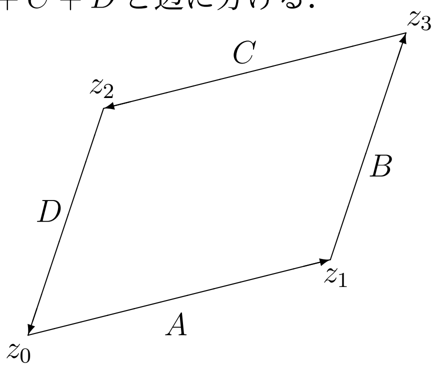
[証明]　連続関数 $|f(z)|$ はコンパクト集合 $\overline{P[z_0]}$ 上で最大値 M をとる．

$$\mathbb{C} = \cup_{\omega \in \Omega}(\omega + P[z_0])$$

であり，$f(z+\omega) = f(z)$ であるから，M は $|f(z)|$ の $\mathbb{C}$ 上での最大値である．定理 1.13 より，$f(z)$ は定数である．□

命題 2.8. 楕円関数 $f(z)$ の周期平行四辺形 $P[z_0]$ 上のすべての極にわたる留数の和は 0 である．

[証明]　まず，周期平行四辺形 $P[z_0]$ の辺上に $f(z)$ の極がない場合を考える．次のように $\partial P[z_0] = A + B + C + D$ と辺に分ける．



定理 1.16 より，

$$(\text{求める留数の総和}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{A+B+C+D} f(z)\,dz.$$

ここで,

$$\int_{A+C} f(z)\,dz = \int_A (f(z) - f(z+\omega_2))\,dz = 0,$$
$$\int_{B+D} f(z)\,dz = \int_D (f(z) - f(z+\omega_1))\,dz = 0.$$

ゆえに,(求める留数の総和) $= 0$ である.

次に,周期平行四辺形 $P[z_0]$ の辺上に $f(z)$ の極がある場合を考える.この場合は,命題 2.6 より,問題になる極は有限個であるので,z_0 の近くに z_0' をとりなおして,

$$\{P[z_0]\ \text{上の}\ f(z)\ \text{の極}\} = \{P[z_0']\ \text{上の}\ f(z)\ \text{の極}\}$$

にできるから,辺上に極がない場合に帰着される. □

系 2.9. 位数 1 の楕円関数は存在しない.

[証明] 位数 1 の楕円関数 $f(z)$ が存在したとする.周期平行四辺形 $P[z_0]$ 上にただ一つの位数 1 の極を持つ.したがって,そこでの留数は 0 でない.これは命題 2.8 に矛盾する. □

命題 2.10. $f(z)$ を位数 $r \geq 2$ の楕円関数とする.任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して,$f(z) - c$ は周期平行四辺形 $P[z_0]$ 上で丁度 r 個の零点を持つ.

[証明] $g(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z) - c}$ とおく.$g(z)$ も楕円関数である.b が位数 n の $f(z) - c$ の零点とすると,$f(z) - c = (z-b)^n h(z)$, $h(z)$ は $z = b$ の近傍で正則で,$h(z) \neq 0$ である.そのとき,

$$g(z) = \frac{n(z-b)^{n-1}h(z) + (z-b)^n h'(z)}{(z-b)^n h(z)} = \frac{n}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

であり,$\dfrac{h'(z)}{h(z)}$ は $z = b$ で正則である.よって,

$$\operatorname{Res}_{z=b} g(z) = n$$

である.また,a が位数 m の $f(z) - c$ の極とすると,$f(z) - c = (z-a)^{-m} h(z)$, $h(z)$ は $z = a$ の近傍で正則で,$h(z) \neq 0$ である.そのとき,

$$g(z) = \frac{-m(z-a)^{-m-1}h(z) + (z-a)^{-m}h'(z)}{(z-a)^{-m}h(z)} = \frac{-m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

であり,$\dfrac{h'(z)}{h(z)}$ は $z = a$ で正則である.よって,

$$\operatorname{Res}_{z=a} g(z) = -m$$

である．以上によって，$P[z_0]$ 上の $f(z)-c$ の零点の全体を $b_1,\dots,b_\ell$, その位数を，$n_1,\dots,n_\ell$ とし，$P[z_0]$ 上の $f(z)-c$ の極の全体を $a_1,\dots,a_k$, その位数を，$m_1,\dots,m_k$ とすれば，$g(z)$ の極の全体は，$a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_\ell$ であり，そこでの留数は，$-m_1,\dots,-m_k,n_1,\dots,n_\ell$ である．命題2.8 より，$g(z)$ の $P[z_0]$ における留数の和は 0 であるから，

$$-m_1-\cdots-m_k+n_1+\cdots+n_\ell=0.$$

したがって，$n_1+\cdots+n_\ell=m_1+\cdots+m_k=r$ である． □

以下，位数 r の楕円関数 $f(z)$ の周期平行四辺形 $P[z_0]$ 上の極が

$$a_1,\dots,a_r$$

であるというときは重複度を込めてかいたものとする．たとえば，a_1 が位数 2 の極ならば，a_1 は丁度 2 回現れるとする．零点についても同様とする．

定理 2.11 (Abel の定理)**.** 位数 r の楕円関数 $f(z)$ の周期平行四辺形 $P[z_0]$ 上の極を

$$a_1,\dots,a_r$$

とし，$f(z)$ の周期平行四辺形 $P[z_0]$ 上の零点を

$$b_1,\dots,b_r$$

とすると，合同式

$$a_1+\cdots+a_r\equiv b_1+\cdots+b_r \pmod{\Omega}$$

が成り立つ．

[証明]　まず，周期平行四辺形 $P[z_0]$ の辺上に $f(z)$ の極も零点もない場合を考える．$\varphi(z)=z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ とおく．$f(z)=(z-c)^kh(z)$, $h(z)$ は $z=c$ の近傍で正則であり，$h(z)\neq 0$ とかく．そのとき，

$$\varphi(z)=z\frac{k}{z-c}+z\frac{h'(z)}{h(z)}=\frac{kc}{z-c}+k+z\frac{h'(z)}{h(z)}$$

であるから，$\mathrm{Res}_{z=c}\,\varphi(z)=kc$ である．これを用いて

$$\int_{\partial P[z_0]}\varphi(z)\,dz$$

を計算する．極 a_i の位数を k_i，零点 b_j の位数を ℓ_j とし，$\sum'$ によって $P[z_0]$ 内のすべての極，すべての零点をわたる和を表すとすれば，定理1.16 より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P[z_0]}\varphi(z)\,dz &= {\sum}'\mathrm{Res}_{z=a_i}\,\varphi(z)+{\sum}'\mathrm{Res}_{z=b_j}\,\varphi(z)\\ &= {\sum}'(-k_i)a_i+{\sum}'\mathrm{Res}_{z=b_j}\,(\ell_j)b_j\\ &= \sum_{j=1}^r b_j-\sum_{i=1}^r a_i.\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}\varphi(z+\omega_1)-\varphi(z) &= (z+\omega_1)\frac{f'(z+\omega_1)}{f(z+\omega_1)} - z\frac{f'(z)}{f(z)}\\ &= (z+\omega_1)\frac{f'(z)}{f(z)} - z\frac{f'(z)}{f(z)} = \omega_1\frac{f'(z)}{f(z)},\end{aligned}$$

同様にして，

$$\varphi(z+\omega_2)-\varphi(z) = \omega_2\frac{f'(z)}{f(z)}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_{A+C}\varphi(z)\,dz &= \int_A (\varphi(z)-\varphi(z+\omega_2))\,dz\\ &= -\omega_2\int_A \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{B+D}\varphi(z)\,dz &= \int_D (\varphi(z)-\varphi(z+\omega_1))\,dz\\ &= -\omega_1\int_D \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.\end{aligned}$$

ここで，

$$\int_A \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \in 2\pi i\mathbb{Z}, \quad \int_D \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

である．実際，$0 \le x \le 1$ に対して，

$$F(x) = \int_0^x \frac{f'(z_0+t\omega_1)}{f(z_0+t\omega_1)}\omega_1\,dt$$

とおけば，$F(0)=0$, $F(1) = \displaystyle\int_A \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ である．さらに，$H(x) = e^{-F(x)}f(z_0+x\omega_1)$ とおけば，$F'(x) = \dfrac{f'(z_0+x\omega_1)}{f(z_0+x\omega_1)}\omega_1$ であるから，

$$\begin{aligned}H'(x) &= -F'(x)e^{-F(x)}f(z_0+x\omega_1) + e^{-F(x)}f'(z_0+x\omega_1)\omega_1\\ &= -\frac{f'(z_0+x\omega_1)}{f(z_0+x\omega_1)}\omega_1 e^{-F(x)}f(z_0+x\omega_1) + e^{-F(x)}f'(z_0+x\omega_1)\omega_1\\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって，$H(x)$ は定数である．$H(1)=H(0)$ より，

$$e^{-F(1)}f(z_0+\omega_1) = e^{-F(0)}f(z_0)$$

を得る．ここで，$f(z_0+\omega_1)=f(z_0)\neq 0$ であるから，$e^{F(1)}=1$ である．よって，$F(1)=\displaystyle\int_A \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=-2n\pi i, n\in\mathbb{Z}$ とかける．同様にして，$\displaystyle\int_D \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=-2m\pi i$, $m\in\mathbb{Z}$ とかける．以上によって，

$$\sum_{j=1}^r b_j-\sum_{i=1}^r a_i=\frac{1}{2\pi i}\int_{A+C}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{B+D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=n\omega_2+m\omega_1\in\Omega.$$

周期平行四辺形 $P[z_0]$ の辺上に $f(z)$ の極または零点がある場合には，z_0' を z_0 の近くにとりなおしても，$P[z_0']$ 上の $f(z)$ 極と零点は a_i, b_j と $\mathrm{mod}\,\Omega$ ではかわらないから，辺上に極や零点がない場合に帰着される． □

3 テータ関数

3.1 テータ関数の導入

注意 2.5 で述べたように，複素トーラスを考えるとき，

$$\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau),\quad \tau\in\mathbb{C},\Im\tau>0$$

となるものを考えればよい．

$$\mathbb{H}=\{\tau\in\mathbb{C}\,|\,\Im\tau>0\}$$

を**複素上半平面**という．関数 $\exp(2\pi ix)$ をよく考えるので，

$$\boldsymbol{e}(x)=\exp(2\pi ix)$$

とおく．

命題 3.1. $(z,\tau)\in\mathbb{C}\times\mathbb{H}$ に対して，級数

$$\theta(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau+nz\right)$$

を考えると，$\theta(z,\tau)$ は $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$ 上広義一様に絶対収束し，$\theta(z,\tau)$ は $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$ 上の正則関数となる．

[証明] $|\Im z|<r$, $\Im\tau>s>0$ とする．この条件のもとで，$\theta(z,\tau)$ は一様に絶対収束することを示そう．まず，$\alpha=a+ib\in\mathbb{C}$ について，

$$\boldsymbol{e}(\alpha)=\exp(2\pi i(a+ib))=\exp(2\pi ai)\exp(-2\pi b)$$

より，$|\boldsymbol{e}(\alpha)| = \exp(-2\pi b) = \exp(-2\pi\Im\alpha)$ であることを注意しておく．したがって，

$$\left|\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau + nz\right)\right| = \exp(-\pi n^2\Im\tau - 2\pi n\Im z) < \exp(-\pi s)^{n^2}\exp(2\pi r)^{|n|}. \tag{3.1}$$

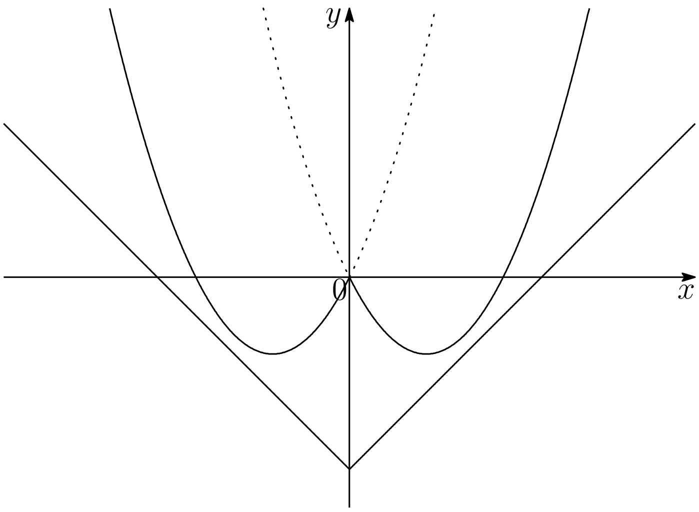
整数 n_0 を十分大きくとって，$2r < n_0 s$ となるようにする．そのとき，

$$\exp(-\pi s)^{n^2}\exp(2\pi r)^{|n|} < \exp(-\pi s)^{n^2 - n_0|n|} \tag{3.2}$$

となる．定数 $a > 0, b$ を選んで，任意の $n \in \mathbb{Z}$ について，

$$n^2 - n_0|n| > a|n| + b \tag{3.3}$$

が成り立つようにできる．



(3.2), (3.3) より，

$$\left|\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau + nz\right)\right| < \exp(-\pi s)^{a|n|+b} = C_1 C_2^{|n|}. \tag{3.4}$$

ここで，$C_1 = \exp(-\pi bs)$, $C_2 = \exp(-\pi as)$ とおいた．$-as\pi < 0$ であるから，$0 < C_2 < 1$ である．したがって，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau + nz\right)\right| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_1 C_2^{|n|} = C_1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} C_1 C_2^n < \infty.$$

これは $\theta(z,\tau)$ が $|\Im z| < r$, $\Im\tau > s > 0$ において，一様に絶対収束することを示している． $\square$

$$a_n(\tau) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau\right)$$

とおくと，テータ級数の定義は

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(\tau)\boldsymbol{e}(nz) \tag{3.5}$$

とかける．$\boldsymbol{e}(n(z+1)) = \boldsymbol{e}(nz)$ であるから，

$$\theta(z+1,\tau) = \theta(z,\tau) \tag{3.6}$$

すなわち，z の関数として，$\theta(z,\tau)$ は周期 1 の周期関数である．さらに，$\theta(z,\tau)$ は 2 重周期性に近い性質を持っている．

$$\begin{aligned}
\theta(z+\tau,\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau + n(z+\tau)\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n+1)^2\tau - \frac{1}{2}\tau + nz\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n+1)^2\tau - \frac{1}{2}\tau + (n+1)z - z\right) \\
&= \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau - z\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n+1)^2\tau + (n+1)z\right) \\
&= \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau - z\right)\theta(z,\tau).
\end{aligned}$$

すなわち，

$$\theta(z+\tau,\tau) = \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau - z\right)\theta(z,\tau) \tag{3.7}$$

が成り立つ．(3.6), (3.7) より，一般に $m,n\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$\theta(z+m\tau+n,\tau) = \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}m^2\tau - mz\right)\theta(z,\tau) \tag{3.8}$$

が成り立つ．

3.2 指標付きのテータ関数

$a,b\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\theta_{a,b}(z,\tau) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + a(z+b)\right)\theta(z+a\tau+b,\tau)$$

とおく．級数でかけば，

$$\begin{aligned}
\theta_{a,b}(z,\tau) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + a(z+b)\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau + n(z+a\tau+b)\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n+a)^2\tau + (n+a)(z+b)\right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

これから次がわかる.

$$\theta_{0,0}(z,\tau) = \theta(z,\tau), \tag{3.10}$$

$$\theta_{a,b}(z+b',\tau) = \theta_{a,b+b'}(z,\tau), \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a'^2\tau + a'z\right)\theta_{a,b}(z+a'\tau,\tau) = \boldsymbol{e}(-a'b)\theta_{a+a',b}(z,\tau), \tag{3.12}$$

$$\theta_{a+p,b+q}(z,\tau) = \boldsymbol{e}(aq)\theta_{a,b}(z,\tau). \tag{3.13}$$

ここで，$(z,\tau) \in \mathbb{C}\times\mathbb{H}$, $a,a',b,b' \in \mathbb{R}$, $p,q \in \mathbb{Z}$ である.

[(3.12), (3.13) の証明]

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a'^2\tau + a'z\right)\theta_{a,b}(z+a'\tau,\tau) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n+a)^2\tau + (n+a)(z+a'\tau+b) + \frac{1}{2}a'^2\tau + a'z\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n+a+a')^2\tau + (n+a+a')(z+b) - a'b\right) \\
&= \boldsymbol{e}(-a'b)\theta_{a+a',b}(z,\tau), \\
\theta_{a+p,b+q}(z,\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n+a+p)^2\tau + (n+a+p)(z+b+q)\right) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(m+a)^2\tau + (m+a)(z+b) + mq + aq\right) \\
&= \boldsymbol{e}(aq)\theta_{a,b}(z,\tau).
\end{aligned}$$

$\tau \in \mathbb{H}$ を固定し,

$V = \{f(z) \mid f(z)$ は整関数, $f(z+2m\tau+2n) = \boldsymbol{e}(-2m^2\tau - 2mz)f(z)$ $(\forall m,n \in \mathbb{Z})\}$

とおく. V は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である.

補題 3.2. 整関数 $f(z)$ に関する次の条件は互いに同値である.

(i) $f(z) \in V$.

(ii) $f(z+2m\tau) = \boldsymbol{e}(-2m^2\tau - 2mz)f(z)$, $f(z+2n) = f(z)$, $\forall m,n \in \mathbb{Z}$.

(iii) $f(z+2\tau) = \boldsymbol{e}(-2\tau - 2z)f(z)$, $f(z+2) = f(z)$.

[証明] $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$ は明らか. $(ii) \Rightarrow (i)$.

$$f(z+2m\tau+2n) = f(z+2m\tau) = \boldsymbol{e}(-2m^2\tau - 2mz)f(z).$$

ゆえに，$f(z) \in V$ である．$(iii) \Rightarrow (ii)$．$f(z+2) = f(z)$ を繰り返せば，$f(z+2n) = f(z)$ を得る．$f(z+2\tau) = \boldsymbol{e}(-2\tau - 2z)f(z)$ が成り立つとする．$m = 1$ のときは，$f(z+2\tau+2n) = f(z+2\tau) = \boldsymbol{e}(-2\tau-2z)f(z)$ である．$m \geq 1$ として，

$$f(z+2m\tau) = \boldsymbol{e}(-2m^2\tau - 2mz)f(z)$$

が成り立つとすると，

$$\begin{aligned} f(z+2(m+1)\tau) &= f(z+2m\tau+2\tau) \\ &= \boldsymbol{e}(-2\tau - 2(z+2m\tau))f(z+2m\tau) \\ &= \boldsymbol{e}(-2\tau - 2(z+2m\tau))\boldsymbol{e}(-2m^2\tau - 2mz)f(z) \\ &= \boldsymbol{e}(-2(m+1)^2\tau - 2(m+1)z)f(z). \end{aligned}$$

$m < 0$ のときも同様. □

補題 3.3. $M > 0$ とし，$f(z)$ を整関数で，$f(z+M) = f(z)$ を満たすとする．そのとき，

$$f(z) = \sum_{n \in (1/M)\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}(nz), \quad c_n \in \mathbb{C}$$

と展開される．

[証明]　$f(z)$ は周期 M を持つから，$z = x + iy$ とかくとき，

$$f(z) = \sum_{n \in (1/M)\mathbb{Z}} c_n(y) \boldsymbol{e}(nx),$$

$$c_n(y) = \frac{1}{M}\int_0^M f(u+iy)\boldsymbol{e}(-nu)\,du$$

とフーリエ展開される．

$$\begin{aligned} c_n(y)\boldsymbol{e}(nx) &= \frac{1}{M}\int_0^M f(u+iy)\boldsymbol{e}(-nu+nx)\,du \\ &= \frac{1}{M}\int_0^M f(t+x+iy)\boldsymbol{e}(-nt)\,dt \\ &= \boldsymbol{e}(nz)\frac{1}{M}\int_0^M f(t+z)\boldsymbol{e}(-n(t+z))\,dt \\ &= \boldsymbol{e}(nz)\frac{1}{M}\int_z^{z+M} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw. \end{aligned}$$

この最後の積分は定数であることを示そう．実際，$z = x+iy$, $z' = x'+iy' \in \mathbb{C}$ として，z, $z+M$, z', $z'+M$ を頂点とする平行四辺形の周を C とする．そのとき，Cauchy の積分定理から，

$$\int_C f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw = 0.$$

一方，周期性を使ってこの積分を計算すれば，

$$\begin{aligned}\int_C f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw &= \int_z^{z+M} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw + \int_{z+M}^{z'+M} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw \\ &\quad + \int_{z'+M}^{z'} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw + \int_{z'}^{z} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw \\ &= \int_z^{z+M} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw + \int_z^{z'} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw \\ &\quad - \int_{z'}^{z'+M} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw - \int_z^{z'} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw \\ &= \int_z^{z+M} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw - \int_{z'}^{z'+M} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\int_{z'}^{z'+M} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw = \int_z^{z+M} f(w)\boldsymbol{e}(-nw)\,dw$$

である．この定数を c_n とかけば，$c_n(y)\boldsymbol{e}(nx) = c_n\boldsymbol{e}(nz)$ であり，

$$f(z) = \sum_{n\in(1/M)\mathbb{Z}} c_n\boldsymbol{e}(nz).$$

□

補題 3.4. 整関数 $f(z)$ に関する次の条件は互いに同値である．

(i) $f(z) \in V$.

(ii) $f(z) = \displaystyle\sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c_n\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau + nz\right)$ と展開でき，さらに，$m \equiv n \pmod{2\mathbb{Z}}$ ならば，$c_m = c_n$ である．

[証明]　$(i) \Rightarrow (ii)$. $f(z) \in V$ とすれば，$f(z+2) = f(z)$ であるから，補題 3.3 より，

$$f(z) = \sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c'_n\boldsymbol{e}(nz)$$

とフーリエ展開される．$c'_n = c_n\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau\right)$ とおくと，

$$f(z) = \sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c_n\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau\right)\boldsymbol{e}(nz)$$

となる．また，$f(z+2\tau)=\boldsymbol{e}(-2\tau-2z)f(z)$ が成り立つので，これをフーリエ展開で見ると，

$$\begin{aligned} f(z+2\tau) &= \sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau\right)\boldsymbol{e}(n(z+2\tau)) \\ &= \sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau+2n\tau\right)\boldsymbol{e}(nz), \\ \boldsymbol{e}(-2\tau-2z)f(z) &= \boldsymbol{e}(-2\tau-2z)\sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau\right)\boldsymbol{e}(nz) \\ &= \sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n^2-4)\tau\right)\boldsymbol{e}((n-2)z). \end{aligned}$$

ここで，$n-2=m$ とおけば，$n^2-4=m^2+4m$ であるから，

$$\boldsymbol{e}(-2\tau-2z)f(z)=\sum_{m\in(1/2)\mathbb{Z}} c_{m+2}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}m^2\tau+2m\tau\right)\boldsymbol{e}(mz).$$

したがって，$\forall n\in(1/2)\mathbb{Z})$ に対して，$c_{n+2}=c_n$ である．逆に，(ii) が満たされているとする．$f(z+2)=f(z)$ である．また，上の計算を逆にたどって，

$$\begin{aligned} f(z+2\tau) &= \sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau+n(z+2\tau)\right) \\ &= \sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n+2)^2\tau+(n+2)z-2\tau-2z\right) \\ &= \boldsymbol{e}(-2\tau-2z)\sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c_{n-2}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau+nz\right) \\ &= \boldsymbol{e}(-2\tau-2z)\sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c_{n}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau+nz\right) \\ &= \boldsymbol{e}(-2\tau-2z)f(z). \end{aligned}$$

補題 3.2 より，$f(z)\in V$ である． □

命題 3.5. $\dim_{\mathbb{C}} V=4.$

[証明]　ベクトル空間 V の元 $f(z)$ は

$$f(z)=\sum_{n\in(1/2)\mathbb{Z}} c_n\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau+nz\right),\quad c_{n+2}=c_n$$

とかける．補題 3.4 より，4 つの係数 c_0, $c_{1/2}$, c_1, $c_{3/2}$ は自由に選べ，$c_{n+2}=c_n$ によって他の係数はすべて定まる．したがって，$\dim_{\mathbb{C}} V=4$ である． □

命題 3.6. $\theta_{0,0}(z,\tau)$, $\theta_{0,\frac{1}{2}}(z,\tau)$, $\theta_{\frac{1}{2},0}(z,\tau)$, $\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)$ は V の基底である．

[証明]　$a=0,\frac{1}{2}$, $b=0,\frac{1}{2}$ とする．$\theta_{a,b}(z,\tau)$ の定義 (3.9) から，

$$\begin{aligned}\theta_{a,b}(z,\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n+a)^2\tau+(n+a)(z+b)\right)\\ &= \sum_{m\in(1/2)\mathbb{Z}} c_m \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}m^2\tau+mz\right).\end{aligned}$$

ここで，

$$c_m = \begin{cases} \boldsymbol{e}(mb), & m\equiv a \pmod{\mathbb{Z}},\\ 0, & m\not\equiv a \pmod{\mathbb{Z}}\end{cases}$$

である．$m'\equiv m \pmod{2\mathbb{Z}}$ のとき，$m'b\equiv mb \pmod{\mathbb{Z}}$ であるから，$c_{m'}=c_m$ である．よって，補題 3.4 より，$\theta_{a,b}(z,\tau)\in V$ である．これらが 1 次独立であることを示そう．$k_{a,b}$ を定数として，

$$k_{0,0}\theta_{0,0}(z,\tau)+k_{0,\frac{1}{2}}\theta_{0,\frac{1}{2}}(z,\tau)+k_{\frac{1}{2},0}\theta_{\frac{1}{2},0}(z,\tau)+k_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)=0$$

とする．$m=0,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}$ に対して $\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}m^2\tau+mz\right)$ の係数をみれば，

$$\begin{aligned}k_{0,0}+k_{0,\frac{1}{2}}&=0,\\ k_{\frac{1}{2},0}+k_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{4}\right)&=0,\\ k_{0,0}-k_{0,\frac{1}{2}}&=0,\\ k_{\frac{1}{2},0}+k_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{3}{4}\right)&=0.\end{aligned}$$

これから，$k_{0,0}=k_{0,\frac{1}{2}}=0$, $k_{\frac{1}{2},0}=k_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=0$ を得る．ゆえに，これら 4 つのテータ関数は 1 次独立な V の元である．命題 3.5 より，$\dim_{\mathbb{C}} V=4$ であるから，これら 4 つのテータ関数は V の基底である．　□

$$V_1=\left\{f(z)\,|\,f(z) \text{ は整関数},\ f(z+m\tau+n)=\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}m^2\tau-mz\right)f(z)\ (\forall m,n\in\mathbb{Z})\right\}$$

とおく．V_1 は V の部分空間である．補題 3.2 と同様にして，

$$f(z)\in V_1 \Longleftrightarrow f(z+1)=f(z),\ f(z+\tau)=\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau-z\right)f(z)$$

が成り立つ．さらに，補題 3.4 と同様に，$f(z)\in V_1$ は

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau+nz\right)$$

とフーリエ展開される．

$$\begin{aligned}
f(z+\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau + n(z+\tau)\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n+1)^2\tau + (n+1)z - \frac{1}{2}\tau - z\right) \\
&= \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau - z\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(n+1)^2\tau + (n+1)z\right) \\
&= \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau - z\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n-1} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau + nz\right), \\
\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau - z\right) f(z) &= \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau - z\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau + nz\right).
\end{aligned}$$

したがって，$f(z) \in V_1$ ならば，$c_{n-1} = c_n, \forall n \in \mathbb{Z}$ である．よって，$c_n = c_0, \forall n \in \mathbb{Z}$ である．したがって，$\dim_{\mathbb{C}} V_1 = 1$ であり，$\theta(z,\tau) \in V_1$ であるから，V_1 は $\theta(z,\tau)$ の定数倍全体である．

3.3 Heisenberg 群

$a, b \in (1/2)\mathbb{Z}$ のとき，$f(z) \in V$ に対して，

$$(S_b f)(z) = f(z+b), \quad (T_a f)(z) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + az\right) f(z+a\tau)$$

とおく．$2a, 2b \in \mathbb{Z}$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}
(S_b f)(z+2) &= f(z+2+b) = f(z+b) = (S_b f)(z), \\
(S_b f)(z+2\tau) &= f(z+2\tau+b) = \boldsymbol{e}(-2\tau - 2z - 2b) f(z+b) = \boldsymbol{e}(-2\tau - 2z)(S_b f)(z), \\
(T_a f)(z+2) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + a(z+2)\right) f(z+2+a\tau) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + az\right) f(z+a\tau) \\
&= (T_a f)(z), \\
(T_a f)(z+2\tau) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + a(z+2\tau)\right) f(z+2\tau+a\tau) \\
&= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + a(z+2\tau)\right) \boldsymbol{e}(-2\tau - 2(z+a\tau)) f(z+a\tau) \\
&= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + az - 2\tau - 2z\right) f(z+a\tau) = \boldsymbol{e}\left(-2\tau - 2z\right)(T_a f)(z).
\end{aligned}$$

補題 3.2 より，$S_b f, T_a f \in V$ である．また，

$$S_{b_1} S_{b_2} = S_{b_1+b_2}, \quad T_{a_1} T_{a_2} = T_{a_1+a_2}$$

が成り立つ．S_bT_a, T_aS_b を計算してみよう．

$$
\begin{aligned}
(S_bT_a)f(z) &= S_b[(T_af)(z)] = S_b\left[\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + az\right)f(z+a\tau)\right] \\
&= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + a(z+b)\right)f(z+a\tau+b), \\
(T_aS_b)f(z) &= T_a[(S_bf)(z)] = T_a(f(z+b)) \\
&= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + az\right)f(z+a\tau+b),
\end{aligned}
$$

したがって，$S_bT_a = \boldsymbol{e}(ab)T_aS_b$ である．そこで，$\mathbb{C}_1^\times = \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$ とおく．

$$
\rho : \mathbb{C}_1^\times \times ((1/2)\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times ((1/2)\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow GL(V)
$$

を，$\rho(c,a,b) = c\,T_aS_b$ によって定義する．ρ は単射であり，ρ の像は $GL(V)$ の部分群である．実際，

$$
\begin{aligned}
\rho(c_1,a_1,b_1)\rho(c_2,a_2,b_2) &= c_1\,T_{a_1}S_{b_1}c_2\,T_{a_2}S_{b_2} = c_1c_2\,T_{a_1}\boldsymbol{e}(a_2b_1)T_{a_2}S_{b_1}S_{b_2} \\
&= c_1c_2\boldsymbol{e}(a_2b_1)\,T_{a_1+a_2}S_{b_1+b_2}, \\
\rho(c,a,b)^{-1} &= c^{-1}\,(S_b)^{-1}(T_a)^{-1} = c^{-1}\,S_{-b}T_{-a} = c^{-1}\boldsymbol{e}(ab)\,T_{-a}S_{-b}
\end{aligned}
$$

である．逆写像 ρ^{-1} によって，ρ の像の群構造を $\mathbb{C}_1^\times \times ((1/2)\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times ((1/2)\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に移すことができる．この群 $\mathcal{G}$ を **Heisenberg 群**という．

$\theta_{0,0}(z,\tau)$, $\theta_{0,\frac{1}{2}}(z,\tau)$, $\theta_{\frac{1}{2},0}(z,\tau)$, $\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau) \in V$ を $\theta_{00}(z)$, $\theta_{01}(z)$, $\theta_{10}(z)$, $\theta_{11}(z)$ とかく．そのとき，

$$
\begin{aligned}
S_{1/2}\,\theta_{00}(z) &= \theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}\right) = \theta_{01}(z), \\
S_{1/2}\,\theta_{01}(z) &= \theta_{01}\left(z+\frac{1}{2}\right) = \theta_{00}(z+1) = \theta_{00}(z), \\
S_{1/2}\,\theta_{10}(z) &= \theta_{10}\left(z+\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau + \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}\right) \\
&= \theta_{11}(z), \\
S_{1/2}\,\theta_{11}(z) &= \theta_{11}\left(z+\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau + \frac{1}{2}(z+1)\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}\tau+1\right) \\
&= -\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau + \frac{1}{2}z\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}\tau\right) = -\theta_{10}(z),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{1/2}\,\theta_{00}(z) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}\tau\right)=\theta_{10}(z),\\
T_{1/2}\,\theta_{01}(z) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\theta_{01}\left(z+\frac{1}{2}\tau\right)\\
&= \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{4}\right)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{4}\right)\theta_{11}(z),\\
T_{1/2}\,\theta_{10}(z) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\theta_{10}\left(z+\frac{1}{2}\tau\right)\\
&= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\tau\right)\right)\theta_{00}(z+\tau)\\
&= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\tau\right)\right)\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau-z\right)\theta_{00}(z)=\theta_{00}(z),\\
T_{1/2}\,\theta_{11}(z) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\theta_{11}\left(z+\frac{1}{2}\tau\right)\\
&= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}\right)\right)\theta_{00}\left(z+\tau+\frac{1}{2}\right)\\
&= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+z+\frac{1}{4}\right)\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau-z-\frac{1}{2}\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{4}\right)\theta_{01}(z).
\end{aligned}
$$

したがって，これを行列で表せば,

$$
\begin{aligned}
\rho\left(1,0,\frac{1}{2}\right)(\theta_{00}(z),\theta_{01}(z),\theta_{10}(z),\theta_{11}(z)) &= (\theta_{00}(z),\theta_{01}(z),\theta_{10}(z),\theta_{11}(z))R_S,\\
\rho\left(1,\frac{1}{2},0\right)(\theta_{00}(z),\theta_{01}(z),\theta_{10}(z),\theta_{11}(z)) &= (\theta_{00}(z),\theta_{01}(z),\theta_{10}(z),\theta_{11}(z))R_T,
\end{aligned}
$$

$$
R_S=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad R_T=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-i\\1&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}.
$$

これから，$a,b\in(1/2)\mathbb{Z}$, $c\in\mathbb{C}_1^\times$ のとき，$R(c,a,b)=c\,(R_T)^{2a}(R_S)^{2b}\in GL_4(\mathbb{C})$ とおけば,

$$
\rho(c,a,b)(\theta_{00}(z),\theta_{01}(z),\theta_{10}(z),\theta_{11}(z))=(\theta_{00}(z),\theta_{01}(z),\theta_{10}(z),\theta_{11}(z))R(c,a,b)
$$

であり，$\mathcal{G}\ni(c,a,b)\longmapsto R(c,a,b)\in GL_4(\mathbb{C})$ は群の準同型である.

$$
\rho(c,a,b)\theta_{ij}(z)=c\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau+az\right)\theta_{ij}(z+a\tau+b)
$$

であるから,

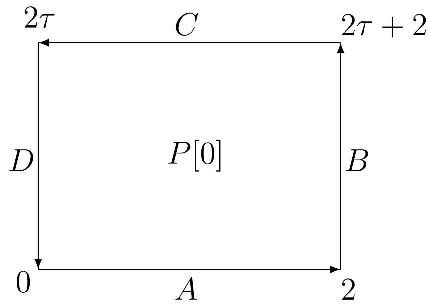
$$
\begin{aligned}
&c\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau+az\right)(\theta_{00}(z+a\tau+b),\theta_{01}(z+a\tau+b),\theta_{10}(z+a\tau+b),\theta_{11}(z+a\tau+b))\\
&=(\theta_{00}(z),\theta_{01}(z),\theta_{10}(z),\theta_{11}(z))R(c,a,b). \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

3.4 複素トーラスの射影空間への埋め込み

$\Omega(\tau) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $E_\tau = \mathbb{C}/\Omega(\tau)$ とおく．テータ関数を用いて，複素トーラス E_τ を射影空間 $\mathbb{P}^3$ へ埋め込もう．

補題 3.7. $0 \neq f(z) \in V$ とすると，$f(z)$ は $2\Omega(\tau)$ の周期平行四辺形内に丁度 4 個の零点を持つ．

[証明]　$2\Omega(\tau)$ の周期平行四辺形 $P[0]$ をとる．



$f(z)$ の零点が個の平行四辺形の辺上にあるときは少しずらせばよいので，ないとしてもよい．

$$P[0]\text{ 内の零点の個数} = \frac{1}{2\pi i}\int_{A+B+C+D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

いま，$f(z+2) = f(z)$, $f(z+2\tau) = \boldsymbol{e}(-2\tau - 2z)f(z)$ より，$f'(z+2) = f'(z)$, $f'(z+2\tau) = -4\pi i\boldsymbol{e}(-2\tau-2z)f(z) + \boldsymbol{e}(-2\tau-2z)f'(z)$ である．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{B+D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{D}\left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f'(z+2)}{f(z+2)}\right)dz \\
&= 0, \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{A+C}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{A}\left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f'(z+2\tau)}{f(z+2\tau)}\right)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{A}\left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{-4\pi i f(z) + f'(z)}{f(z)}\right)dz \\
&= 2\int_A dz = 4.
\end{aligned}$$

□

補題 3.8. z の関数として，$\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)$ は奇関数である．すなわち，

$$\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-z,\tau) = -\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau).$$

したがって，

$$\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(0,\tau) = 0$$

が成り立つ．

[証明]　(3.9) より，

$$\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\tau+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)$$

であるから，n を $-n-1$ でおきかえて，

$$\begin{aligned}\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-z,\tau)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\tau+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(-z+\frac{1}{2}\right)\right)\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(-n-1+\frac{1}{2}\right)^2\tau+\left(-n-1+\frac{1}{2}\right)\left(-z+\frac{1}{2}\right)\right)\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\tau+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)\right)\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\tau+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)-n-\frac{1}{2}\right)\\&=-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\tau+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)\\&=-\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau).\end{aligned}$$

□

命題 3.9. $\theta(z,\tau)$ の零点全体のなす集合は

$$\left\{\left(p+\frac{1}{2}\right)\tau+\left(q+\frac{1}{2}\right)\,\middle|\,p,q\in\mathbb{Z}\right\}$$

である．

[証明]　$\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)=\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{2})\right)\theta\left(z+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2},\tau\right)$ であるから，補題 3.8 より，$\theta\left(\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2},\tau\right)=0$ である．したがって，(3.8) より，

$$\theta\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\tau+\left(q+\frac{1}{2}\right),\tau\right)=0,\quad\forall p,q\in\mathbb{Z}$$

である．$2\Omega(\tau)$ の周期平行四辺形 $P[0]$ 内の $\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)$ の零点は補題 3.7 より，丁度 4 個である．したがって，それは，0, 1, τ, $\tau+1$ の 4 個である．ゆえに，$\theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(z,\tau)$ の零点は，$z=p\tau+q$, $p,q\in\mathbb{Z}$ とかける．ゆえに，$\theta(z,\tau)$ の零点は，

$$z=\left(p+\frac{1}{2}\right)\tau+\left(q+\frac{1}{2}\right),\quad p,q\in\mathbb{Z}$$

とかける．　□

系 3.10. $a, b \in \{0, 1/2\}$ に対して，$\theta_{a,b}(z,\tau)$ の零点全体のなす集合は

$$\left\{ \left(-a+p+\frac{1}{2}\right)\tau + \left(-b+q+\frac{1}{2}\right) \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

である．したがって，$(a,b) \neq (a',b')$ ならば，$\theta_{a,b}(z,\tau)$ と $\theta_{a',b'}(z,\tau)$ は共通零点を持たない．

[証明]　$\theta_{a,b}(z,\tau) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}a^2\tau + a(z+b)\right)\theta(z+a\tau+b,\tau)$ であるから，命題 3.9 からわかる．　□

系 3.10 より，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\left(\theta_{0,0}(2z,\tau),\, \theta_{0,\frac{1}{2}}(2z,\tau),\, \theta_{\frac{1}{2},0}(2z,\tau),\, \theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(2z,\tau)\right) \neq (0,0,0,0)$$

である．したがって，射影空間 $\mathbb{P}^3$ の点

$$\left(\theta_{0,0}(2z,\tau) : \theta_{0,\frac{1}{2}}(2z,\tau) : \theta_{\frac{1}{2},0}(2z,\tau) : \theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(2z,\tau)\right)$$

が定まる．すなわち，解析写像

$$\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

を

$$\Phi(z) = \left(\theta_{0,0}(2z,\tau) : \theta_{0,\frac{1}{2}}(2z,\tau) : \theta_{\frac{1}{2},0}(2z,\tau) : \theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(2z,\tau)\right)$$

によって定義される．$a, b \in \{0, 1/2\}$ に対して，命題 3.6 より $\theta_{a,b}(z,\tau) \in V$ であるから，$\theta_{a,b}(2(z+1),\tau) = \theta_{a,b}(2z,\tau)$, $\theta_{a,b}(2(z+\tau),\tau) = \boldsymbol{e}(-2\tau-4z)\theta_{a,b}(2z,\tau)$ を満たす．したがって，Φ は解析写像

$$\varphi : E_\tau = \mathbb{C}/\Omega(\tau) \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

を引き起こす．$a, b \in (1/2)\mathbb{Z}$ とすると，(3.14) より，

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(z + \frac{a\tau+b}{2}\right) \\
&= (\theta_{00}(2z+a\tau+b) : \theta_{01}(2z+a\tau+b) : \theta_{10}(2z+a\tau+b) : \theta_{11}(2z+a\tau+b)) \\
&= (\theta_{00}(2z) : \theta_{01}(2z) : \theta_{10}(2z) : \theta_{11}(2z))\, R(1,a,b).
\end{aligned}$$

ここで，$\theta_{\frac{i}{2},\frac{j}{2}}(z,\tau)$ を $\theta_{ij}(z)$ とかいた．よって，次を得た．

補題 3.11. $a, b \in (1/2)\mathbb{Z}$ のとき，

$$\varphi\left(z + \frac{a\tau+b}{2}\right) = \varphi(z)R(1,a,b).$$

定理 3.12. 解析写像 $\varphi : E_\tau \longrightarrow \mathbb{P}^3$ は複素トーラス $E_\tau = \mathbb{C}/\Omega(\tau)$ の射影空間 $\mathbb{P}^3$ への埋め込みである．

[証明]　まず，φ が単射であることを示す．$z_1, z_2 \in E_\tau$, $z_1 \neq z_2$ として，$\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ であるとする．$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ と考えて，$z_1 \not\equiv z_2 \bmod \Omega(\tau)$ とする．$a, b \in (1/2)\mathbb{Z}$ をうまく選んで，

$$z_1' = z_1 + \frac{a\theta + b}{2}, \quad z_2' = z_2 + \frac{a\theta + b}{2}$$

とおくとき，z_1, z_2, z_1', z_2' が E_τ の相異なる 4 点となるようにできる．実際，

$$\frac{a\tau + b}{2} \not\equiv 0, \pm(z_1 - z_2) \pmod{\Omega(\tau)}$$

となるようにとればよい．さらに，$w_1 \in \mathbb{C}$ を選んで，5 個の点 $z_1, z_2, z_1', z_2', w_1$ が E_τ の相異なる 5 点となるようにする．さて，$f(z) \in V$, $f(z) \neq 0$ で，

$$f(2z_1) = f(2z_1') = f(2z_2) = f(2z_2') = f(2w_1) = 0$$

となるものが存在する．なぜならば，$c_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, 2, 3$ として，

$$f(z) = c_0\theta_{00}(z) + c_1\theta_{01}(z) + c_2\theta_{10}(z) + c_3\theta_{11}(z)$$

とおいて，4 個の未知数 c_0, c_1, c_2, c_3 を持つ 3 個の 1 次方程式

$$\begin{cases} f(2z_1) &=& c_0\theta_{00}(2z_1) + c_1\theta_{01}(2z_1) + c_2\theta_{10}(2z_1) + c_3\theta_{11}(2z_1) &=& 0, \\ f(2z_1') &=& c_0\theta_{00}(2z_1') + c_1\theta_{01}(2z_1') + c_2\theta_{10}(2z_1') + c_3\theta_{11}(2z_1') &=& 0, \\ f(2w_1) &=& c_0\theta_{00}(2w_1) + c_1\theta_{01}(2w_1) + c_2\theta_{10}(2w_1) + c_3\theta_{11}(2w_1) &=& 0 \end{cases}$$

を考えると，これは非自明な解 $(c_0, c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0, 0)$ を持つ．これを用いて，

$$f(z) = c_0\theta_{00}(z) + c_1\theta_{01}(z) + c_2\theta_{10}(z) + c_3\theta_{11}(z)$$

とおけば，$f(z) \in V$, $f(z) \neq 0$ であり，

$$f(2z_1) = f(2z_1') = f(2w_1) = 0$$

を満たす．さて，$\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ であるから，$c \in \mathbb{C}^\times$ が存在して，

$$\theta_{ij}(2z_1) = c\,\theta_{ij}(2z_2), \quad i, j = 0, 1$$

が成り立つ．$f(2z_1) = 0$ より，

$$\begin{aligned} cf(2z_2) &= cc_0\theta_{00}(2z_2) + cc_1\theta_{01}(2z_2) + cc_2\theta_{10}(2z_2) + cc_3\theta_{11}(2z_2) \\ &= c_0\theta_{00}(2z_1) + c_1\theta_{01}(2z_1) + c_2\theta_{10}(2z_1) + c_3\theta_{11}(2z_1) \\ &= f(2z_1) = 0. \end{aligned}$$

よって，$f(2z_2)=0$ である．また，補題 3.11 より，

$$\varphi(z_2') = \varphi\left(z_2 + \frac{a\tau+b}{2}\right) = \varphi(z_2)R(1,a,b)$$

であるから，

$$\begin{aligned} cf(2z_2') &= cc_0\theta_{00}(2z_2') + cc_1\theta_{01}(2z_2') + cc_2\theta_{10}(2z_2') + cc_3\theta_{11}(2z_2') \\ &= c(\theta_{00}(2z_2'), \theta_{01}(2z_2'), \theta_{10}(2z_2'), \theta_{11}(2z_2'))^t(c_0, c_1, c_2, c_3) \\ &= c(\theta_{00}(2z_2), \theta_{01}(2z_2), \theta_{10}(2z_2), \theta_{11}(2z_2))R(1,a,b)^t(c_0, c_1, c_2, c_3) \\ &= (\theta_{00}(2z_1), \theta_{01}(2z_1), \theta_{10}(2z_1), \theta_{11}(2z_1))R(1,a,b)^t(c_0, c_1, c_2, c_3) \\ &= (\theta_{00}(2z_1'), \theta_{01}(2z_1'), \theta_{10}(2z_1'), \theta_{11}(2z_1'))^t(c_0, c_1, c_2, c_3) \\ &= f(2z_1') = 0. \end{aligned}$$

よって，$f(2z_2')=0$ である．$f(z)\in V$ は $\mathrm{mod}\,2\Omega(\tau)$ で相異なる 5 個の点 $2z_1$, $2z_2$, $2z_1$, $2z_1'$, $2w_1$ において零点を持つ．これは補題 3.7 に矛盾する．ゆえに，φ は単射である．次に，φ は埋め込みであることを示す．すなわち，線形写像

$$d\varphi(z_1) : T_{z_1} \longrightarrow T_{\varphi(z_1)}$$

が単射であることを示す．$d\varphi(z_1)$ が単射でないとすると，T_{z_1} は 1 次元ベクトル空間であるので，$d\varphi(z_1)=0$ である．$a,b\in(1/2)\mathbb{Z}$ とし，点 $\dfrac{a\tau+b}{2}$ による平行移動を考えることにより，$z_2\in\mathbb{C}$ で，$z_2\not\equiv z_1 \pmod{\Omega(\tau)}$, $d\varphi(z_2)=0$ となるものが存在する．実際，$\varphi\left(z+\dfrac{a\tau+b}{2}\right)=\varphi(z)R(1,a,b)$ より，

$$d\varphi\left(z_1+\frac{a\tau+b}{2}\right) = d\varphi(z_1)R(1,a,b) = 0.$$

$z_2 = z_1 + \dfrac{a\tau+b}{2}$ とおけばよい．さらに，点 $w_1\in\mathbb{C}$ を z_1, z_2, w_1 は $\mathrm{mod}\,\Omega(\tau)$ で相異なる 3 個の点であるようにとる．さらに，$c_0, c_1, c_2, c_3\in\mathbb{C}$ をうまく選んで，$f(z)=c_0\theta_{00}(z)+c_1\theta_{01}(z)+c_2\theta_{10}(z)+c_3\theta_{11}(z)\neq 0$,

$$f(2z_1)=f(2z_2)=f(2w_1)=0$$

を満たすようにとる．$d\varphi(z_1)=0$ であるから，$(\theta_{ij}'(2z_1))=0$ である．よって，$z=2z_1$ は $f(z)$ の 2 重の零点である．同様に，$d\varphi(z_2)=0$ であるから，$z=2z_2$ も $f(z)$ の 2 重の零点である．以上により，$f(z)\in V$, $f(z)\neq 0$ は $\mathrm{mod}\,2\Omega(\tau)$ で重複度も込めて，$2+2+1=5$ 個の零点を持つ．これは補題 3.7 に矛盾する． □

さて，$c_0, c_1, c_2, c_3\in\mathbb{C}$ の少なくとも一つは 0 でないとして，平面

$$H = \{(\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3)\in\mathbb{P}^3 \mid c_0\xi_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3=0\}$$

を考える．

命題 3.13. $H \cap \varphi(E_\tau) \subset \mathbb{P}^3$ は重複度を込めて丁度 4 個の点からなる．

[証明]　$f(z) = c_0\theta_{00}(z) + c_1\theta_{01}(z) + c_2\theta_{10}(z) + c_3\theta_{11}(z)$ とおけば，$f(z) \in V$, $f(z) \neq 0$ である．したがって，$z_0 \in \mathbb{C}$ について，

$$\varphi(z_0) \in H \Longleftrightarrow f(2z_0) = 0$$

である．φ は単射であるから，補題 3.7 より，

$$\#(H \cap \varphi(E_\tau)) = \#\{z_0 \bmod \Omega(\tau) \mid f(2z_0) = 0\} = 4.$$

$\square$

これから，$\varphi(E_\tau)$ は射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内の 4 次曲線になることがわかる．後に具体的に $\varphi(E_\tau)$ の定義方程式を求める．定義式 (3.9) から，

$$\theta_{00}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau + nz\right), \tag{3.15}$$

$$\theta_{01}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}n^2\tau + n\left(z+\frac{1}{2}\right)\right), \tag{3.16}$$

$$\theta_{10}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\tau + \left(n+\frac{1}{2}\right)z\right), \tag{3.17}$$

$$\theta_{11}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\tau + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)\right). \tag{3.18}$$

一方，指標付きテータ関数の最初の定義から，

$$\begin{aligned}
\theta_{00}(z) &= \theta(z,\tau),\\
\theta_{01}(z) &= \theta\left(z+\frac{1}{2},\tau\right),\\
\theta_{10}(z) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\theta\left(z+\frac{1}{2}\tau,\tau\right),\\
\theta_{11}(z) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)\theta\left(z+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2},\tau\right).
\end{aligned}$$

命題 3.9 より，これらの関数の零点は次の表のようになる．

	零点
$\theta_{00}(z)$	$z = \left(p+\frac{1}{2}\right)\tau + \left(q+\frac{1}{2}\right),\quad p,q\in\mathbb{Z}$
$\theta_{01}(z)$	$z = \left(p+\frac{1}{2}\right)\tau + q,\quad p,q\in\mathbb{Z}$
$\theta_{10}(z)$	$z = p\tau + \left(q+\frac{1}{2}\right),\quad p,q\in\mathbb{Z}$
$\theta_{11}(z)$	$z = p\tau + q,\quad p,q\in\mathbb{Z}$

補題 3.8 より，$\theta_{11}(z)$ は奇関数である．同様にして，$\theta_{00}(z), \theta_{01}(z), \theta_{10}(z)$ は偶感数であることがわかる．すなわち，

$$\theta_{00}(-z) = \theta_{00}(z),\ \theta_{01}(-z) = \theta_{01}(z),\ \theta_{10}(-z) = \theta_{10}(z),\ \theta_{11}(z) = -\theta_{11}(z).$$

$q = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau\right) = e^{\pi i\tau}$, $w = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}z\right) = e^{\pi iz}$ とおく．これを用いてテータ関数の定義式をかけば,

$$\theta_{00}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} w^{2n}. \tag{3.19}$$

これより,

$$\theta_{00}(0,\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}. \tag{3.20}$$

同様にして,

$$\theta_{01}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} w^{2n}, \tag{3.21}$$

$$\theta_{01}(0,\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}, \tag{3.22}$$

$$\theta_{10}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} w^{2n+1}, \tag{3.23}$$

$$\theta_{10}(0,\tau) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}, \tag{3.24}$$

$$\theta_{11}(z,\tau) = i\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} w^{2n+1}, \tag{3.25}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\theta_{11}(z,\tau)\right|_{z=0} = \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{n+1}(2n+1) q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}, \tag{3.26}$$

3.5 Riemann の関係式

Riemann のテータ関係式はテータ関数の 4 次の関係式である．計算によって,

補題 3.14.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，${}^t\!AA = A{}^t\!A = 4I_4$ が成り立つ．いいかえれば，$\frac{1}{2}A$ は直交行列である．

系 3.15. $u_1, u_2, u_3, u_4,\ v_1, v_2, v_3, v_4$ を変数とするとき,

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$\sum_{i=1}^{4} u_i' v_i' = \sum_{i=1}^{4} u_i v_i$$

が成り立つ.

[証明]

$${}^t(u_i')(v_j') = {}^t(u_i)\,{}^t\!\left(\frac{1}{2}A\right)\left(\frac{1}{2}A\right)(v_j) = {}^t(u_i)(v_j).$$

$\square$

テータ関数の定義により,

$$\theta_{00}(x_1)\theta_{00}(x_2)\theta_{00}(x_3)\theta_{00}(x_4) = \sum_{m_1,m_2,m_3,m_4\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i^2\right)\tau + \sum_{i=1}^{4} m_i x_i\right).$$

同様にして,

$$\theta_{01}(x_1)\theta_{01}(x_2)\theta_{01}(x_3)\theta_{01}(x_4)$$
$$= \sum_{m_1,m_2,m_3,m_4\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} m_i + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i^2\right)\tau + \sum_{i=1}^{4} m_i x_i\right),$$

$$\theta_{10}(x_1)\theta_{10}(x_2)\theta_{10}(x_3)\theta_{10}(x_4)$$
$$= \sum_{m_1,m_2,m_3,m_4\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4}\left(m_i + \frac{1}{2}\right)^2\right)\tau + \sum_{i=1}^{4}\left(m_i + \frac{1}{2}\right)x_i\right),$$

$$\theta_{11}(x_1)\theta_{11}(x_2)\theta_{11}(x_3)\theta_{11}(x_4)$$
$$= \sum_{m_1,m_2,m_3,m_4\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\left(m_i + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4}\left(m_i + \frac{1}{2}\right)^2\right)\tau + \sum_{i=1}^{4}\left(m_i + \frac{1}{2}\right)x_i\right).$$

これらを加えると,

$$\begin{aligned}&\theta_{00}(x_1)\theta_{00}(x_2)\theta_{00}(x_3)\theta_{00}(x_4) + \theta_{01}(x_1)\theta_{01}(x_2)\theta_{01}(x_3)\theta_{01}(x_4)\\ &+\theta_{10}(x_1)\theta_{10}(x_2)\theta_{10}(x_3)\theta_{10}(x_4) + \theta_{11}(x_1)\theta_{11}(x_2)\theta_{11}(x_3)\theta_{11}(x_4)\\ &= 2{\sum}'_{m_1,m_2,m_3,m_4\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i^2\right)\tau + \sum_{i=1}^{4} m_i x_i\right).\end{aligned}$$

ここで, 和 ${\sum}'$ は次の条件 (1) または (2) を満たすすべての $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ をわたる和を表す.

(1) $i=1,2,3,4$ について，$m_i \in \mathbb{Z}$, $m_1+m_2+m_3+m_4 \in 2\mathbb{Z}$.

(2) $i=1,2,3,4$ について，$m_i \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, $m_1+m_2+m_3+m_4 \in 2\mathbb{Z}$.

次に,

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

とおく．具体的にかけば,

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3+m_4), & y_1 &= \frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4), \\
n_2 &= \frac{1}{2}(m_1+m_2-m_3-m_4), & y_2 &= \frac{1}{2}(x_1+x_2-x_3-x_4), \\
n_3 &= \frac{1}{2}(m_1-m_2+m_3-m_4), & y_3 &= \frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3-x_4), \\
n_4 &= \frac{1}{2}(m_1-m_2-m_3+m_4), & y_4 &= \frac{1}{2}(x_1-x_2-x_3+x_4).
\end{aligned}$$

そのとき,

補題 3.16. m_1, m_2, m_3, m_4 に関する次の条件は互いに同値である.

(i) m_1, m_2, m_3, m_4 は上の条件 *(1)* または *(2)* を満たす.

(ii) $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}$.

[証明] (i) $\Rightarrow$ (ii). (1) を満たすとする．$m_i \in \mathbb{Z}$, $i=1,2,3,4$, $\sum_{i=1}^4 m_i \in 2\mathbb{Z}$ より，$n_1 \in \mathbb{Z}$ である．(2) を満たすとしても，$m_i \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, $\sum_{i=1}^4 m_i \in 2\mathbb{Z}$ より，$n_1 \in \mathbb{Z}$ である．いずれの場合も，$n_1+n_2 = m_1+m_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1+n_3 = m_1+m_3 \in \mathbb{Z}$, $n_1+n_4 = m_1+m_4 \in \mathbb{Z}$ より，$n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}$ である.

(ii) $\Rightarrow$ (i). $n_i \in \mathbb{Z}$, $i=1,2,3,4$ とする．$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = \frac{1}{2}A$ であるから,

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{1}{2}(n_1+n_2+n_3+n_4), \\
m_2 &= \frac{1}{2}(n_1+n_2-n_3-n_4), \\
m_3 &= \frac{1}{2}(n_1-n_2+n_3-n_4), \\
m_4 &= \frac{1}{2}(n_1-n_2-n_3+n_4)
\end{aligned}$$

である．よって，$m_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $i=1,2,3,4$ である．$m_1 \in \mathbb{Z}$ とすると，$m_1+m_2 = n_1+n_2 \in \mathbb{Z}$, $m_1+m_3 = n_1+n_3 \in \mathbb{Z}$, $m_1+m_4 = n_1+n_4 \in \mathbb{Z}$ より，$m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z}$

である．$m_1 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ とすると，$m_1+m_2=n_1+n_2 \in \mathbb{Z}, m_1+m_3=n_1+n_3 \in \mathbb{Z}$, $m_1+m_4=n_1+n_4 \in \mathbb{Z}$ より，$m_2, m_3, m_4 \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ である． □

補題 3.15 より，

$$\sum_{i=1}^{4} m_i^2 = \sum_{i=1}^{4} n_i^2, \quad \sum_{i=1}^{4} m_i x_i = \sum_{i=1}^{4} n_i y_i$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}
&\theta_{00}(x_1)\theta_{00}(x_2)\theta_{00}(x_3)\theta_{00}(x_4) + \theta_{01}(x_1)\theta_{01}(x_2)\theta_{01}(x_3)\theta_{01}(x_4) \\
&+\theta_{10}(x_1)\theta_{10}(x_2)\theta_{10}(x_3)\theta_{10}(x_4) + \theta_{11}(x_1)\theta_{11}(x_2)\theta_{11}(x_3)\theta_{11}(x_4) \\
&= 2 \sum_{n_1,n_2,n_3,n_4 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} n_i^2\right)\tau + \sum_{i=1}^{4} n_i y_i\right) \\
&= 2\theta_{00}(y_1)\theta_{00}(y_2)\theta_{00}(y_3)\theta_{00}(y_4)
\end{aligned}$$

を得る．すなわち，**Rimenann のテータ公式**

$$\text{(R1)} \quad \prod_{i=1}^{4}\theta_{00}(x_i) + \prod_{i=1}^{4}\theta_{01}(x_i) + \prod_{i=1}^{4}\theta_{10}(x_i) + \prod_{i=1}^{4}\theta_{11}(x_i) = 2\prod_{i=1}^{4}\theta_{00}(y_i)$$

を得た．別の公式を導こう．Heisenberg 群の定義の後で計算したように，

$$S_{\frac{1}{2}}\theta_{00}(z) = \theta_{01}(z),\ S_{\frac{1}{2}}\theta_{01}(z) = \theta_{00}(z),\ S_{\frac{1}{2}}\theta_{10}(z) = \theta_{11}(z),\ S_{\frac{1}{2}}\theta_{11}(z) = -\theta_{10}(z)$$

であるから，

補題 3.17.

$\theta_{00}(z+1) = \theta_{00}(z),\ \theta_{01}(z+1) = \theta_{01}(z),\ \theta_{10}(z+1) = -\theta_{10}(z),\ \theta_{11}(z+1) = -\theta_{11}(z).$

公式 (R1) において，x_1 に x_1+1 を代入すると，y_i は $y_i+\frac{1}{2}$ になるから，$\theta_{00}\left(y_i+\frac{1}{2}\right) = \theta_{01}(y_i)$ であることと補題 3.17 から，

$$\text{(R2)} \quad \prod_{i=1}^{4}\theta_{00}(x_i) + \prod_{i=1}^{4}\theta_{01}(x_i) - \prod_{i=1}^{4}\theta_{10}(x_i) - \prod_{i=1}^{4}\theta_{11}(x_i) = 2\prod_{i=1}^{4}\theta_{01}(y_i).$$

Heisenberg 群の定義の後で計算したように，

$$T_{\frac{1}{2}}\theta_{00}(z) = \theta_{10}(z),\ T_{\frac{1}{2}}\theta_{01}(z) = -i\theta_{11}(z),\ T_{\frac{1}{2}}\theta_{10}(z) = \theta_{00}(z),\ T_{\frac{1}{2}}\theta_{11}(z) = -i\theta_{01}(z)$$

であるから，

補題 3.18.

$$\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+z\right)\theta_{00}(z+\tau) = \theta_{00}(z), \quad \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+z\right)\theta_{01}(z+\tau) = -\theta_{01}(z),$$

$$\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+z\right)\theta_{10}(z+\tau) = \theta_{10}(z), \quad \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+z\right)\theta_{11}(z+\tau) = -\theta_{11}(z).$$

公式 (R1) において，x_1 に $x_1+\tau$ を代入して，両辺に $\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+x_1\right)$ をかける．y_i は $y_i+\frac{1}{2}\tau$ になるから，$\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}y_i\right)\theta_{00}\left(y_i+\frac{1}{2}\tau\right)=\theta_{10}(y_i)$, $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 y_i=x_1$ に注意すれば，補題 3.18 から，

$$\text{(R3)}\qquad \prod_{i=1}^4\theta_{00}(x_i)-\prod_{i=1}^4\theta_{01}(x_i)+\prod_{i=1}^4\theta_{10}(x_i)-\prod_{i=1}^4\theta_{11}(x_i)=2\prod_{i=1}^4\theta_{10}(y_i).$$

補題 3.17, 補題 3.18 より，

補題 3.19.

$$\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+z\right)\theta_{00}(z+\tau+1)=\theta_{00}(z),\quad \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+z\right)\theta_{01}(z+\tau+1)=-\theta_{01}(z),$$

$$\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+z\right)\theta_{10}(z+\tau+1)=-\theta_{10}(z),\quad \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+z\right)\theta_{11}(z+\tau+1)=\theta_{11}(z).$$

公式 (R1) において，x_1 に $x_1+\tau+1$ を代入して，両辺に $\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+x_1\right)$ をかける．y_i は $y_i+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}$ になるから，$\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}\left(y_i+\frac{1}{2}\right)\right)\theta_{00}\left(y_i+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}\right)=\theta_{11}(y_i)$, $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 y_i=x_1$ に注意すれば，補題 3.18 から，

$$\text{(R4)}\qquad \prod_{i=1}^4\theta_{00}(x_i)-\prod_{i=1}^4\theta_{01}(x_i)-\prod_{i=1}^4\theta_{10}(x_i)+\prod_{i=1}^4\theta_{11}(x_i)=2\prod_{i=1}^4\theta_{11}(y_i).$$

公式を略記するために，積 $\theta_{ab}(x_1)\theta_{cd}(x_2)\theta_{ef}(x_3)\theta_{gh}(x_4)$ を

$$[ab,cd,ef,gh]$$

とかき，積 $\theta_{ab}(y_1)\theta_{cd}(y_2)\theta_{ef}(y_3)\theta_{gh}(y_4)$ を

$$[ab,cd,ef,gh]'$$

とかく．この記号を用いれば，(R1)–(R4) は次のように表せる．

$$[00,00,00,00]+[01,01,01,01]+[10,10,10,10]+[11,11,11,11]=2[00,00,00,00]',$$
$$[00,00,00,00]+[01,01,01,01]-[10,10,10,10]-[11,11,11,11]=2[01,01,01,01]',$$
$$[00,00,00,00]-[01,01,01,01]+[10,10,10,10]-[11,11,11,11]=2[10,10,10,10]',$$
$$[00,00,00,00]-[01,01,01,01]-[10,10,10,10]+[11,11,11,11]=2[11,11,11,11]'.$$

さらに，次の関係式 (R5)–(R20) も成り立つ．

$$[00,00,01,01]+[01,01,00,00]+[10,10,11,11]+[11,11,10,10]=2[01,01,00,00]',$$
$$[00,00,01,01]+[01,01,00,00]-[10,10,11,11]-[11,11,10,10]=2[00,00,01,01]',$$
$$[00,00,01,01]-[01,01,00,00]+[10,10,11,11]-[11,11,10,10]=-2[11,11,10,10]',$$
$$[00,00,01,01]-[01,01,00,00]-[10,10,11,11]+[11,11,10,10]=-2[10,10,11,11]'.$$

$$[00,00,10,10]+[01,01,11,11]+[10,10,00,00]+[11,11,01,01]=2[00,00,10,10]',$$
$$[00,00,10,10]+[01,01,11,11]-[10,10,00,00]-[11,11,01,01]=2[01,01,11,11]',$$
$$[00,00,10,10]-[01,01,11,11]+[10,10,00,00]-[11,11,01,01]=2[10,10,00,00]',$$
$$[00,00,10,10]-[01,01,11,11]-[10,10,00,00]+[11,11,01,01]=2[11,11,01,01]'.$$

$$[00,00,11,11]+[01,01,10,10]+[10,10,01,01]+[11,11,00,00]=2[01,01,10,10]',$$
$$[00,00,11,11]+[01,01,10,10]-[10,10,01,01]-[11,11,00,00]=2[00,00,11,11]',$$
$$[00,00,11,11]-[01,01,10,10]+[10,10,01,01]-[11,11,00,00]=-2[11,11,00,00]',$$
$$[00,00,11,11]-[01,01,10,10]-[10,10,01,01]+[11,11,00,00]=-2[10,10,01,01]'.$$

$$[00,01,10,11]+[01,00,11,10]+[10,11,00,01]+[11,10,01,00]=2[11,10,01,00]',$$
$$[00,01,10,11]+[01,00,11,10]-[10,11,00,01]-[11,10,01,00]=-2[10,11,00,01]',$$
$$[00,01,10,11]-[01,00,11,10]+[10,11,00,01]-[11,10,01,00]=-2[01,00,11,10]',$$
$$[00,01,10,11]-[01,00,11,10]-[10,11,00,01]+[11,10,01,00]=2[00,01,10,11]'.$$

これらの関係式も Riemann のテータ関係式と呼ばれる．

3.6 テータ関数の加法公式

$\theta_{11}(0)=0$であった．Riemannのテータ関係式 (R1), (R4) において，$x_1=x_2=x$, $x_3=x_4=u$ とおくと，$y_1=x+u$, $y_2=x-u$, $y_3=0$, $y_4=0$ となるから，

$$\begin{aligned}
&\theta_{00}(x)^2\theta_{00}(u)^2+\theta_{01}(x)^2\theta_{01}(u)^2+\theta_{10}(x)^2\theta_{10}(u)^2+\theta_{11}(x)^2\theta_{11}(u)^2\\
&=2\theta_{00}(x+u)\theta_{00}(x-u)\theta_{00}(0)^2,\\
&\theta_{00}(x)^2\theta_{00}(u)^2-\theta_{01}(x)^2\theta_{01}(u)^2-\theta_{10}(x)^2\theta_{10}(u)^2+\theta_{11}(x)^2\theta_{11}(u)^2\\
&=0.
\end{aligned}$$

$$(A1)\qquad \begin{aligned}\theta_{00}(x+u)\theta_{00}(x-u)\theta_{00}(0)^2&=\theta_{00}(x)^2\theta_{00}(u)^2+\theta_{11}(x)^2\theta_{11}(u)^2\\
&=\theta_{01}(x)^2\theta_{01}(u)^2+\theta_{10}(x)^2\theta_{10}(u)^2.\end{aligned}$$

同様に，(R2), (R4) より，

$$\begin{aligned}
&\theta_{00}(x)^2\theta_{00}(u)^2+\theta_{01}(x)^2\theta_{01}(u)^2-\theta_{10}(x)^2\theta_{10}(u)^2-\theta_{11}(x)^2\theta_{11}(u)^2\\
&=2\theta_{01}(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{01}(0)^2,\\
&\theta_{00}(x)^2\theta_{00}(u)^2-\theta_{01}(x)^2\theta_{01}(u)^2-\theta_{10}(x)^2\theta_{10}(u)^2+\theta_{11}(x)^2\theta_{11}(u)^2\\
&=0.
\end{aligned}$$

$$(A2)\qquad \theta_{01}(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{01}(0)^2 = \theta_{00}(x)^2\theta_{00}(u)^2 - \theta_{10}(x)^2\theta_{10}(u)^2$$
$$= \theta_{01}(x)^2\theta_{01}(u)^2 - \theta_{11}(x)^2\theta_{11}(u)^2.$$

(R3), (R4) より，

$$\theta_{00}(x)^2\theta_{00}(u)^2 - \theta_{01}(x)^2\theta_{01}(u)^2 + \theta_{10}(x)^2\theta_{10}(u)^2 - \theta_{11}(x)^2\theta_{11}(u)^2$$
$$= 2\theta_{10}(x+u)\theta_{10}(x-u)\theta_{10}(0)^2,$$
$$\theta_{00}(x)^2\theta_{00}(u)^2 - \theta_{01}(x)^2\theta_{01}(u)^2 - \theta_{10}(x)^2\theta_{10}(u)^2 + \theta_{11}(x)^2\theta_{11}(u)^2$$
$$= 0.$$

$$(A3)\qquad \theta_{10}(x+u)\theta_{10}(x-u)\theta_{10}(0)^2 = \theta_{00}(x)^2\theta_{00}(u)^2 - \theta_{01}(x)^2\theta_{01}(u)^2$$
$$= \theta_{10}(x)^2\theta_{10}(u)^2 - \theta_{11}(x)^2\theta_{11}(u)^2.$$

(R17) において，$x_1 = x_3 = x$, $x_2 = x_4 = u$ とおけば，

$$2\theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(u)\theta_{11}(u) + 2\theta_{01}(x)\theta_{11}(x)\theta_{00}(u)\theta_{10}(u)$$
$$= 2\theta_{11}(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{10}(0)\theta_{00}(0),$$

$$(A4)\quad \theta_{11}(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{10}(0)\theta_{00}(0) = \theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(u)\theta_{11}(u) + \theta_{01}(x)\theta_{11}(x)\theta_{00}(u)\theta_{10}(u).$$

(R14), (R15) において，$x_1 = x_2 = x$, $x_3 = x_4 = u$ とおけば，

$$\theta_{00}(x)^2\theta_{11}(u)^2 + \theta_{01}(x)^2\theta_{10}(u)^2 - \theta_{10}(x)^2\theta_{01}(u)^2 - \theta_{11}(x)^2\theta_{00}(u)^2$$
$$= 0,$$
$$\theta_{00}(x)^2\theta_{11}(u)^2 - \theta_{01}(x)^2\theta_{10}(u)^2 + \theta_{10}(x)^2\theta_{01}(u)^2 - \theta_{11}(x)^2\theta_{00}(u)^2$$
$$= -2\theta_{11}(x+u)\theta_{11}(x-u)\theta_{00}(0)^2,$$

$$(A5)\quad \theta_{11}(x+u)\theta_{11}(x-u)\theta_{00}(0)^2 = \theta_{11}(x)^2\theta_{00}(u)^2 - \theta_{00}(x)^2\theta_{11}(u)^2$$
$$= \theta_{01}(x)^2\theta_{10}(u)^2 - \theta_{10}(x)^2\theta_{01}(u)^2.$$

(R6) において，$x_1 = x_3 = x$, $x_2 = x_4 = u$ とおけば，

$$2\theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{00}(u)\theta_{01}(u) - 2\theta_{10}(x)\theta_{11}(x)\theta_{10}(u)\theta_{11}(u)$$
$$= 2\theta_{00}(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{00}(0)\theta_{01}(0),$$

$$(A6)\quad \theta_{00}(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{00}(0)\theta_{01}(0) = \theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{00}(u)\theta_{01}(u) - \theta_{10}(x)\theta_{11}(x)\theta_{10}(u)\theta_{11}(u).$$

(R16) において，$x_1 = x_3 = x$, $x_2 = x_4 = u$ とおけば，

$$2\theta_{00}(x)\theta_{11}(x)\theta_{00}(u)\theta_{11}(u) - 2\theta_{01}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(u)\theta_{10}(u)$$
$$= -2\theta_{10}(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{10}(0)\theta_{01}(0),$$

$(A7) \quad \theta_{10}(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{10}(0)\theta_{01}(0) = \theta_{01}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(u)\theta_{10}(u) - \theta_{00}(x)\theta_{11}(x)\theta_{00}(u)\theta_{11}(u).$

(A1), (A5) において，$u = 0$ とおけば，次の関係式を得る．

$$\theta_{00}(x)^2\theta_{00}(0)^2 = \theta_{01}(x)^2\theta_{01}(0)^2 + \theta_{10}(x)^2\theta_{10}(0)^2, \tag{3.27}$$

$$\theta_{11}(x)^2\theta_{00}(0)^2 = \theta_{01}(x)^2\theta_{10}(0)^2 - \theta_{10}(x)^2\theta_{01}(0)^2. \tag{3.28}$$

$\theta_{a,b}(z,\tau)$ に $z = 0$ を代入して得られる τ の関数 $\theta_{a,b}(0,\tau)$ を**テータ定数**という．(3.27) において，$x = 0$ を代入すると，テータ定数の間の **Jacobi の公式**

$$\theta_{00}(0)^4 = \theta_{01}(0)^4 + \theta_{10}(0)^4 \tag{3.29}$$

を得る．(3.27)$\times\theta_{01}(0)^2$+(3.28)$\times\theta_{10}(0)^2$ を計算すれば，(3.29) より，

$$\begin{aligned}\left(\theta_{00}(x)^2\theta_{01}(0)^2 + \theta_{11}(x)^2\theta_{10}(0)^2\right)\theta_{00}(0)^2 &= \theta_{01}(x)^2\left(\theta_{01}(0)^4 + \theta_{10}(0)^4\right)\\ &= \theta_{01}(x)^2\theta_{00}(0)^4,\end{aligned}$$

したがって，

$$\theta_{01}(x)^2\theta_{00}(0)^2 = \theta_{00}(x)^2\theta_{01}(0)^2 + \theta_{11}(x)^2\theta_{10}(0)^2. \tag{3.30}$$

(3.27) と (3.28) には次のような幾何学的意味がある．解析写像

$$\varphi : E_\tau = \mathbb{C}/\Omega(\tau) \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

は複素トーラスの埋め込みであることを示した．ここで，

$$\varphi(z) = (\theta_{00}(2z,\tau) : \theta_{01}(2z,\tau) : \theta_{10}(2z,\tau) : \theta_{11}(2z,\tau))$$

であった．(3.27), (3.28) より，

$$\begin{aligned}&\theta_{00}(0)^2\theta_{00}(2z)^2 - \theta_{01}(0)^2\theta_{01}(2z)^2 - \theta_{10}(0)^2\theta_{10}(2z)^2 = 0,\\ &\theta_{00}(0)^2\theta_{11}(2z)^2 - \theta_{10}(0)^2\theta_{01}(2z)^2 + \theta_{01}(0)^2\theta_{10}(2z)^2 = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．これは $\mathbb{P}^3$ の点 $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3) = (\theta_{00}(2z) : \theta_{01}(2z) : \theta_{10}(2z) : \theta_{11}(2z)$ が 2 つの関係式

$$\begin{aligned}&\theta_{00}(0)^2a_0^2 - \theta_{01}(0)^2a_1^2 - \theta_{10}(0)^2a_2^2 = 0,\\ &\theta_{00}(0)^2a_3^2 - \theta_{10}(0)^2a_1^2 + \theta_{01}(0)^2a_2^2 = 0\end{aligned}$$

を満たすことを示している．すなわち，点 $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3) \in \mathbb{P}^3$ は $\mathbb{P}^3$ の 2 つの 2 次曲面

$$\begin{aligned}&\theta_{00}(0)^2a_0^2 - \theta_{01}(0)^2a_1^2 - \theta_{10}(0)^2a_2^2 = 0,\\ &\theta_{00}(0)^2a_3^2 - \theta_{10}(0)^2a_1^2 + \theta_{01}(0)^2a_2^2 = 0\end{aligned}$$

上にある．いいかえると，

$$
\begin{aligned}
f_1(x_0,x_1,x_2,x_3) &= \theta_{00}(0)^2x_0^2-\theta_{01}(0)^2x_1^2-\theta_{10}(0)^2x_2^2,\\
f_2(x_0,x_1,x_2,x_3) &= \theta_{00}(0)^2x_3^2-\theta_{10}(0)^2x_1^2+\theta_{01}(0)^2x_2^2
\end{aligned}
$$

とおくとき，$f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,x_3]$ は 2 次同次式であり，$f_1=f_2=0$ で定義される代数多様体

$$
V(f_1,f_2)=\{(x_0:x_1:x_2:x_3)\in\mathbb{P}^3 \mid f_1(x_0,x_1,x_2,x_3)=f_2(x_0,x_1,x_2,x_3)=0\}
$$

に φ の像が含まれること，

$$
\varphi(E_\tau)\subset V(f_1,f_2) \tag{3.31}
$$

を示している．ここで，等号が成り立ち，

$$
\varphi(E_\tau)=V(f_1,f_2) \tag{3.32}
$$

であることを示そう．$V(f_1,f_2)$ は $\mathbb{P}^3$ 内の 4 次曲線を表す．(3.32) が成り立たないとする．そのとき，(3.31) より，$\varphi(E_\tau)\subsetneq V(f_1,f_2)$ であるから，$\mathbb{P}^3$ 内の曲線 C' が存在して，

$$
V(f_1,f_2)=\varphi(E_\tau)\cup C' \tag{3.33}
$$

とかける．ここで，$\mathbb{P}^3$ 内の一般の超平面

$$
H=\{(x_0:x_1:x_2:x_3)\in\mathbb{P}^3 \mid b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0\}
$$

をとる．ここで，$b_0,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{C}$ の少なくとも 1 つは 0 でない．超平面 H と曲線 $V(f_1,f_2)$ の交点を考える．$V(f_1,f_2)$ は 4 次曲線であるから，

$$
\#\,(H\cap V(f_1,f_2))=4
$$

である．一方，補題 3.7 より，

$$
b_0\theta_{00}(2z)+b_1\theta_{01}(2z)+b_2\theta_{10}(2z)+b_3\theta_{11}(2z)=0
$$

は $\Omega(\tau)$ の基本平行四辺形で丁度 4 個の零点を持つ．よって，

$$
\#\,(H\cap\varphi(E_\tau))=4
$$

である．(3.33) より，

$$
\#\,(H\cap C')=\emptyset.
$$

となる．これは矛盾である．したがって，

$$
\varphi(E_\tau)=V(f_1,f_2)
$$

が成り立つ．

テータ関数の加法公式 (A4), (A2) から

$$\theta_{11}(x+y)\theta_{01}(x-y)\theta_{10}\theta_{00} = \theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(y)\theta_{11}(y) + \theta_{01}(x)\theta_{11}(x)\theta_{00}(y)\theta_{10}(y),$$
$$\theta_{01}(x+y)\theta_{01}(x-y)\theta_{01}^2 = \theta_{01}(x)^2\theta_{01}(y)^2 - \theta_{11}(x)^2\theta_{11}(y)^2.$$

両辺の比をとれば，

$$\frac{\theta_{11}(x+y)}{\theta_{01}(x+y)}\frac{\theta_{10}\theta_{00}}{\theta_{01}^2} = \frac{\theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(y)\theta_{11}(y) + \theta_{01}(x)\theta_{11}(x)\theta_{00}(y)\theta_{10}(y)}{\theta_{01}(x)^2\theta_{01}(y)^2 - \theta_{11}(x)^2\theta_{11}(y)^2} \tag{3.34}$$

を得る．同様に，テータ関数の加法公式 (A6), (A2) から

$$\theta_{00}(x+y)\theta_{01}(x-y)\theta_{00}\theta_{01} = \theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{00}(y)\theta_{01}(y) - \theta_{10}(x)\theta_{11}(x)\theta_{10}(y)\theta_{11}(y),$$
$$\theta_{01}(x+y)\theta_{01}(x-y)\theta_{01}^2 = \theta_{01}(x)^2\theta_{01}(y)^2 - \theta_{11}(x)^2\theta_{11}(y)^2.$$

両辺の比をとれば，

$$\frac{\theta_{00}(x+y)}{\theta_{01}(x+y)}\frac{\theta_{00}}{\theta_{01}} = \frac{\theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{00}(y)\theta_{01}(y) - \theta_{10}(x)\theta_{11}(x)\theta_{10}(y)\theta_{11}(y)}{\theta_{01}(x)^2\theta_{01}(y)^2 - \theta_{11}(x)^2\theta_{11}(y)^2} \tag{3.35}$$

を得る．テータ関数の加法公式 (A7), (A2) から

$$\theta_{10}(x+y)\theta_{01}(x-y)\theta_{10}\theta_{01} = \theta_{01}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(y)\theta_{10}(y) - \theta_{00}(x)\theta_{11}(x)\theta_{00}(y)\theta_{11}(y),$$
$$\theta_{01}(x+y)\theta_{01}(x-y)\theta_{01}^2 = \theta_{01}(x)^2\theta_{01}(y)^2 - \theta_{11}(x)^2\theta_{11}(y)^2.$$

両辺の比をとれば，

$$\frac{\theta_{10}(x+y)}{\theta_{01}(x+y)}\frac{\theta_{10}}{\theta_{01}} = \frac{\theta_{01}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(y)\theta_{10}(y) - \theta_{00}(x)\theta_{11}(x)\theta_{00}(y)\theta_{11}(y)}{\theta_{01}(x)^2\theta_{01}(y)^2 - \theta_{11}(x)^2\theta_{11}(y)^2} \tag{3.36}$$

を得る．ここで，テータ定数 $\theta_{ij}(0)$ を θ_{ij} とかいた．このようにテータ関数の比については，通常の意味での加法定理が成り立つ．$u = \pi\theta_{00}^2 x$ とおき，**Jacobi の楕円関数** $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} u &= -\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}}\frac{\theta_{11}(x)}{\theta_{01}(x)}, \\ \operatorname{cn} u &= \frac{\theta_{01}}{\theta_{10}}\frac{\theta_{10}(x)}{\theta_{01}(x)}, \\ \operatorname{dn} u &= \frac{\theta_{01}}{\theta_{00}}\frac{\theta_{00}(x)}{\theta_{01}(x)}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

$\omega = \dfrac{\pi}{2}\theta_{00}^2$ とおけば，φ が E_τ 上定義されることから，これらの関数は 2 重周期 $4\omega, 4\omega\tau$ を持つ．また，

$$\kappa = \frac{\theta_{10}^2}{\theta_{00}^2}, \quad \kappa' = \frac{\theta_{01}^2}{\theta_{00}^2} \tag{3.38}$$

とおく．(3.34), (3.36), (3.35) より，

定理 3.20.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(u+v) &= \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},\\
\mathrm{cn}(u+v) &= \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},\\
\mathrm{dn}(u+v) &= \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - \kappa^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}.
\end{aligned}$$

3.7 空間楕円曲線の群構造

前節において，複素トーラス $E_\tau = \mathbb{C}/\Omega(\tau)$ の射影空間 $\mathbb{P}^3$ への埋め込みの像が 2 つの 2 次曲面の交点として定義される 4 次曲線 $V(f_1, f_2)$ であることを示した．複素トーラス E_τ は自然な群構造を持っていた．その群構造を空間 4 次曲線 $V(f_1, f_2)$ に移すことができる．方程式を少し変えるために，写像 $\varphi : E_\tau \longrightarrow \mathbb{P}^3$ と 1 次変換

$$\sigma(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = \left(x_1 : \frac{\theta_{01}}{\theta_{00}}x_0 : \frac{\theta_{01}}{\theta_{10}}x_2 : -\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}}x_3\right)$$

を合成して，$\tilde{\varphi} = \sigma \circ \varphi : E_\tau \longrightarrow \mathbb{P}^3$ を考える．$\tilde{\varphi}(z) = \sigma(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (X_0 : X_1 : X_2 : X_3)$ とおけば，$f_i(x) = 0$, $i = 1, 2$ より，

$$\begin{aligned}
X_2^2 + X_3^2 &= \left(\frac{\theta_{01}}{\theta_{10}}x_2\right)^2 + \left(-\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}}x_3\right)^2 = \frac{1}{\theta_{10}^2}\left(\theta_{01}^2 x_2^2 + \theta_{00}^2 x_3^2\right)\\
&= \frac{1}{\theta_{10}^2}\theta_{10}^2 x_1^2 = x_1^2 = X_0^2,\\
X_1^2 + \kappa^2 X_3^2 &= \left(\frac{\theta_{01}}{\theta_{00}}x_0\right)^2 + \left(\frac{\theta_{10}^2}{\theta_{00}^2}\right)^2\left(-\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}}x_3\right)^2 = \frac{\theta_{01}^2}{\theta_{00}^4}\theta_{00}^2 x_0^2 + \frac{\theta_{10}^2}{\theta_{00}^4}\theta_{00}^2 x_3^2\\
&= \frac{\theta_{01}^2}{\theta_{00}^4}\left(\theta_{01}^2 x_1^2 + \theta_{10}^2 x_2^2\right) + \frac{\theta_{10}^2}{\theta_{00}^4}\left(\theta_{10}^2 x_1^2 - \theta_{01}^2 x_2^2\right)\\
&= \frac{\theta_{01}^4 + \theta_{10}^4}{\theta_{00}^4}x_1^2 = x_1^2 = X_0^2
\end{aligned}$$

以上によって，$(X_0 : X_1 : X_2 : X_3) = \tilde{\varphi}(z)$ は

$$X_2^2 + X_3^2 = X_0^2, \quad X_1^2 + \kappa^2 X_3^2 = X_0^2$$

を満たす．この空間曲線を $E(-1, -\kappa^2)$ で表す．$\tilde{\varphi} : E_\tau \cong E(-1, -\kappa^2)$ である．

補題 3.21. $(X_0 : X_1 : X_2 : X_3) \in E(-1, -\kappa^2)$ とすると，$X_i = X_j = 0$ となる $0 \leq i < j \leq 3$ は存在しない．

(3.37) と $\tilde{\varphi}$ の定義より，$\theta_{01}(2z) \neq 0$ のとき，

$$\tilde{\varphi}(z) = (1 : \mathrm{dn}\,2u : \mathrm{cn}\,2u : \mathrm{sn}\,2u)$$

である．ここで，$u = \pi\theta_{00}^2 z$ とおいた．

$$(X_0 : X_1 : X_2 : X_3) = \tilde{\varphi}(z), \quad (Y_0 : Y_1 : Y_2 : Y_3) = \tilde{\varphi}(z')$$

とおけば，定理 3.20 より，

$$\tilde{\varphi}(z+z') = (W_0 : W_1 : W_2 : W_3)$$

は次のようになる．

$$\begin{aligned}
W_0 &= X_0^2Y_0^2 - \kappa^2 X_3^2Y_3^2, \\
W_1 &= X_0X_1Y_0Y_1 - \kappa^2 X_2X_3Y_2Y_3, \\
W_2 &= X_0X_2Y_0Y_2 - X_1X_3Y_1Y_3, \\
W_3 &= X_0X_3Y_1Y_2 + X_1X_2Y_0Y_3.
\end{aligned}$$

ここで，$Z_0 = X_0X_3Y_1Y_2 - X_1X_2Y_0Y_3$ とおけば，

$$\begin{aligned}
Z_0W_0 &= (X_0X_3Y_1Y_2 - X_1X_2Y_0Y_3)W_0, \\
Z_0W_1 &= (X_0X_3Y_1Y_2 - X_1X_2Y_0Y_3)(X_0X_1Y_0Y_1 - \kappa^2 X_2X_3Y_2Y_3) \\
&= X_0^2X_1X_3Y_0Y_1^2Y_2 - \kappa^2 X_0X_2X_3^2Y_1Y_2^2Y_3 - X_0X_1^2X_2Y_0^2Y_1Y_3 + \kappa^2 X_1X_2^2X_3Y_0Y_2Y_3^2 \\
&= X_1X_3Y_0Y_2(X_0^2Y_1^2 + \kappa^2 X_2^2Y_3^2) - X_0X_2Y_1Y_3(X_1^2Y_0^2 + \kappa^2 X_3^2Y_2^2) \\
&= X_1X_3Y_0Y_2\left(X_0^2(Y_0^2 - \kappa^2Y_3^2) + \kappa^2(X_0^2 - X_3^2)Y_3^2\right) \\
&\quad - X_0X_2Y_1Y_3\left((X_0^2 - \kappa^2X_3^2)Y_0^2 + \kappa^2X_3^2(Y_0^2 - Y_3^2)\right) \\
&= (X_1X_3Y_0Y_2 - X_0X_2Y_1Y_3)(X_0^2Y_0^2 - \kappa^2X_3^2Y_3^2) \\
&= (X_1X_3Y_0Y_2 - X_0X_2Y_1Y_3)W_0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_0W_2 &= (X_0X_3Y_1Y_2 - X_1X_2Y_0Y_3)(X_0X_2Y_0Y_2 - X_1X_3Y_1Y_3) \\
&= X_0^2X_2X_3Y_0Y_1Y_2^2 - X_0X_1X_3^2Y_1^2Y_2Y_3 - X_0X_1X_2^2Y_0^2Y_2Y_3 + X_1^2X_2X_3Y_0Y_1Y_3^2 \\
&= X_2X_3Y_0Y_1(X_0^2Y_2^2 + X_1^2Y_3^2) - X_0X_1Y_2Y_3(X_3^2Y_1^2 + X_2^2Y_0^2) \\
&= X_2X_3Y_0Y_1(X_0^2(Y_0^2 - Y_3^2) + (X_0^2 - \kappa^2X_3^2)Y_3^2) \\
&\quad - X_0X_1Y_2Y_3(X_3^2(Y_0^2 - \kappa^2Y_3^2) + (X_0^2 - X_3^2)Y_0^2) \\
&= (X_2X_3Y_0Y_1 - X_0X_1Y_2Y_3)(X_0^2Y_0^2 - \kappa^2X_3^2Y_3^2) \\
&= (X_2X_3Y_0Y_1 - X_0X_1Y_2Y_3)W_0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_0W_3 &= (X_0X_3Y_1Y_2 - X_1X_2Y_0Y_3)(X_0X_3Y_1Y_2 + X_1X_2Y_0Y_3) \\
&= X_0^2X_3^2Y_1^2Y_2^2 - X_1^2X_2^2Y_0^2Y_3^2 \\
&= X_0^2X_3^2(Y_0^2 - \kappa^2Y_3^2)(Y_0^2 - Y_3^2) - (X_0^2 - \kappa^2X_3^2)(X_0^2 - X_3^2)Y_0^2Y_3^2 \\
&= X_0^2X_3^2(Y_0^4 - (1+\kappa^2)Y_0^2Y_3^2 + \kappa^2Y_3^4) - (X_0^4 - (1+\kappa^2)X_0^2X_3^2 + \kappa^2X_3^4)Y_0^2Y_3^2 \\
&= X_0^2Y_0^2(X_3^2Y_0^2 - X_0^2Y_3^2) - \kappa^2X_3^2Y_3^2(X_3^2Y_0^2 - X_0^2Y_3^2) \\
&= (X_3^2Y_0^2 - X_0^2Y_3^2)(X_0^2Y_0^2 - \kappa^2X_3^2Y_3^2) \\
&= (X_3^2Y_0^2 - X_0^2Y_3^2)W_0.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
Z_0 &= X_0X_3Y_1Y_2 - X_1X_2Y_0Y_3, \\
Z_1 &= X_1X_3Y_0Y_2 - X_0X_2Y_1Y_3, \\
Z_2 &= X_2X_3Y_0Y_1 - X_0X_1Y_2Y_3, \\
Z_3 &= X_3^2Y_0^2 - X_0^2Y_3^2
\end{aligned}$$

とおけば，$Z_0W_0 \neq 0$ のとき，$\mathbb{P}^3$ の点として，

$$(W_0 : W_1 : W_2 : W_3) = (Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3)$$

である．われわれは，$Z_0W_i = Z_iW_0$, $i = 0, 1, 2, 3$ を示した．すなわち，

$$\begin{vmatrix} W_0 & W_1 \\ Z_0 & Z_1 \end{vmatrix} = 0$$

である．同様にして，$1 \leq i < j \leq 3$ について，直接

$$\begin{vmatrix} W_i & W_j \\ Z_i & Z_j \end{vmatrix} = 0$$

であることを示すことができる．あるいは，間接的に，

$$\begin{aligned}
W_0 \begin{vmatrix} W_i & W_j \\ Z_i & Z_j \end{vmatrix} &= W_0(W_iZ_j - Z_iW_j) = W_i(Z_jW_0) - W_j(Z_iW_0) \\
&= W_i(Z_0W_j) - W_j(Z_0W_i) = 0.
\end{aligned}$$

したがって，$W_0 \neq 0$ のとき，$\begin{vmatrix} W_i & W_j \\ Z_i & Z_j \end{vmatrix} = 0$ である． 一致の定理より，これは恒等的に成り立つ．以上によって，行列

$$\begin{pmatrix} W_0 & W_1 & W_2 & W_3 \\ Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

の階数は 1 以下であることがわかった．この階数が 0 であるとして矛盾を導く．$Z_i = W_i = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$ とする．$Z_0 = W_3 = 0$ より，$X_0X_3Y_1Y_2 = X_1X_2Y_0Y_3 = 0$ である．

(i) $X_0 = 0$ のとき．$Z_3 = 0$ より，$X_3^2Y_0^2 = 0$ である．補題 3.21 より，$X_0 = 0$ のとき，$X_3 \neq 0$ である．よって，$Y_0 = 0$ である．$W_2 = 0$ より，$X_1X_3Y_1Y_3 = 0$ である．$X_0 = Y_0 = 0$ であるから，補題 3.21 より，$X_1X_3 \neq 0$, $Y_1Y_3 \neq 0$ であり，矛盾である．$Y_0 = 0$ としても同様である．よって，$X_0Y_0 \neq 0$ である．(ii) $X_1 = 0$ のとき．$W_2 = 0$ より，$X_0X_2Y_0Y_2 = 0$ である．$X_1 = 0$ であるから，補題 3.21 よ

り，$X_0X_2 \neq 0$ である．よって，$Y_0Y_2 = 0$ である．$Y_0 \neq 0$ より，$Y_2 = 0$ である．$Z_2 = 0$ より，$X_2X_3Y_0Y_1 = 0$ である．しかし，$X_1 = 0$ より，$X_2X_3 \neq 0$ であり，$Y_2 = 0$ より，$Y_0Y_1 \neq 0$ であるから，これは矛盾である．$Y_1 = 0$ としても同様である．よって，$X_0Y_0X_1Y_1 \neq 0$ である．(iii) $X_2 = 0$ のとき．$X_3 \neq 0$ であるから，$X_0X_3Y_1Y_2 = 0$ より，$Y_2 = 0$ である．このとき，$W_1 = X_0X_1Y_0Y_1 \neq 0$ となって矛盾である．$Y_2 = 0$ のときも同様である．よって，$X_0Y_0X_1Y_1X_2Y_2 \neq 0$ である．このとき，$X_3 = Y_3 = 0$ となるが，$W_0 = X_0^2Y_0^2 \neq 0$ となって矛盾である．以上によって，(3.39) の行列の階数は 1 であることが示された．したがって，$\lambda \in \mathbb{C}^\times$ が存在して，$(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) = \lambda(W_0, W_1, W_2, W_3)$ であること，すなわち，$\mathbb{P}^3$ において，

$$(Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3) = (W_0 : W_1 : W_2 : W_3)$$

であることが示された．以上によって，$E(1, \kappa^2)$ 上の 2 点 $X = (X_0 : X_1 : X_2 : X_3)$，$Y = (Y_0 : Y_1 : Y_2 : Y_3)$ に対して，

$$X + Y = \begin{cases} (W_0 : W_1 : W_2 : W_3), & (W_0, W_1, W_2, W_3) \neq (0,0,0,0), \\ (Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3), & (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) \neq (0,0,0,0), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_0 &= X_0^2Y_0^2 - \kappa^2X_3^2Y_3^2, & Z_0 &= X_0X_3Y_1Y_2 - X_1X_2Y_0Y_3, \\ W_1 &= X_0X_1Y_0Y_1 - \kappa^2X_2X_3Y_2Y_3, & Z_1 &= X_1X_3Y_0Y_2 - X_0X_2Y_1Y_3, \\ W_2 &= X_0X_2Y_0Y_2 - X_1X_3Y_1Y_3, & Z_2 &= X_2X_3Y_0Y_1 - X_0X_1Y_2Y_3, \\ W_3 &= X_0X_3Y_1Y_2 + X_1X_2Y_0Y_3, & Z_3 &= X_3^2Y_0^2 - X_0^2Y_3^2. \end{aligned}$$

と定義することにより，空間曲線 $E(-1, -\kappa^2)$ 上にアーベル群の構造が導入された．この群における零元は

$$O = \tilde{\varphi}(0) = (1 : 1 : 1 : 0)$$

である．$M, N \in \mathbb{C}^\times$, $M \neq N$ とし，空間曲線

$$E(M, N) = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 \,|\, x_2^2 - Mx_3^2 = x_0^2,\ x_1^2 - Nx_3^2 = x_0^2\}$$

を考える．$(X_0 : X_1 : X_2 : X_3) = (x_0 : x_1 : x_2 : \sqrt{-M}x_3)$ とおくことによって，$E(M, N) \cong E(-1, -N/M)$ である．$\kappa^2 = \dfrac{N}{M}$ とすれば，この同型によって，空間曲線 $E(M, N)$ 上にアーベル群の構造が導入される．具体的にかけば，$E(M, N)$ 上の 2 点 $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, $y = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ に対して，

$$x + y = \begin{cases} (w_0 : w_1 : w_2 : w_3), & (w_0, w_1, w_2, w_3) \neq (0,0,0,0), \\ (z_0 : z_1 : z_2 : z_3), & (z_0, z_1, z_2, z_3) \neq (0,0,0,0), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w_0 &= x_0^2y_0^2 - MNx_3^2y_3^2, & z_0 &= x_0x_3y_1y_2 - x_1x_2y_0y_3, \\ w_1 &= x_0x_1y_0y_1 + Nx_2x_3y_2y_3, & z_1 &= x_1x_3y_0y_2 - x_0x_2y_1y_3, \\ w_2 &= x_0x_2y_0y_2 + Mx_1x_3y_1y_3, & z_2 &= x_2x_3y_0y_1 - x_0x_1y_2y_3, \\ w_3 &= x_0x_3y_1y_2 + x_1x_2y_0y_3, & z_3 &= x_3^2y_0^2 - x_0^2y_3^2. \end{aligned}$$

例 3.22. $M=5,\ N=-5$ とする．

$$E(5,-5)=\{(x_0:x_1:x_2:x_3)\in\mathbb{P}^3\,|\,x_2^2-5x_3^2=x_0^2,\ x_1^2+5x_3^2=x_0^2\}.$$

点 $x=(41:31:49:12)$ は $E(5,-5)$ 上にある．実際,

$$\begin{aligned}49^2-5\cdot 12^2&=2401-720=1681=41^2,\\ 31^2+5\cdot 12^2&=961+720=1681=41^2.\end{aligned}$$

そのとき,

$$\begin{aligned}2x&=(41^4+25\cdot 12^4:41^2\cdot 31^2-5\cdot 49^2\cdot 12^2:41^2\cdot 49^2+5\cdot 31^2\cdot 12^2:2\cdot 41\cdot 31\cdot 49\cdot 12)\\ &=(3344161:-113279:4728001:1494696).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4728001^2-5\cdot 1494696^2&=11183412793921=3344161^2,\\ (-113279)^2+5\cdot 1494696^2&=11183412793921=3344161^2.\end{aligned}$$

3.8 Jacobi の微分公式

$\theta_{11}(0,\tau)=0$ であった．

$$\theta'_{11}(0,\tau)=\left.\frac{\partial}{\partial z}\theta_{11}(z,\tau)\right|_{z=0}$$

については次の公式が成り立つ．

定理 3.23 (Jacobi の微分公式)**.** $\tau\in\mathbb{H}$ の関数の間の等式

$$\theta'_{11}(0,\tau)=-\pi\,\theta_{00}(0,\tau)\theta_{01}(0,\tau)\theta_{10}(0,\tau)$$

が成り立つ．

まず，次の補題を示す．

補題 3.24. $a,b=0,1$ について,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\theta_{ab}(z,\tau)=4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\theta_{ab}(z,\tau).$$

[証明]

$$\theta_{ab}(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{a}{2}\right)^2\tau+\left(n+\frac{a}{2}\right)\left(z+\frac{b}{2}\right)\right)$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^2}\theta_{ab}(z,\tau) &= (2\pi i)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(n+\frac{a}{2}\right)^2 \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{a}{2}\right)^2\tau + \left(n+\frac{a}{2}\right)\left(z+\frac{b}{2}\right)\right), \\
\frac{\partial}{\partial \tau}\theta_{ab}(z,\tau) &= \pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(n+\frac{a}{2}\right)^2 \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\left(n+\frac{a}{2}\right)^2\tau + \left(n+\frac{a}{2}\right)\left(z+\frac{b}{2}\right)\right), \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}\theta_{ab}(z,\tau) &= 4\pi i \frac{\partial}{\partial \tau}\theta_{ab}(z,\tau).
\end{aligned}
$$

□

注意 3.25. 上の補題の偏微分方程式を**熱方程式**という.

[定理 3.23 の証明] $\theta_{ab}(z,\tau)$ を $\theta_{ab}(z)$ とかく．各 $\theta_{ab}(z)$ を $z=0$ で Taylor 展開して，Riemann の関係式 (R17)

$$[00,01,10,11]+[01,00,11,10]+[10,11,00,01]+[11,10,01,00]=2[11,10,01,00]'$$

をかけば，

$$
\begin{aligned}
&\left(\theta_{00}+\frac{1}{2}\theta''_{00}x_1^2+\cdots\right)\left(\theta_{01}+\frac{1}{2}\theta''_{01}x_2^2+\cdots\right) \\
&\quad\times\left(\theta_{10}+\frac{1}{2}\theta''_{10}x_3^2+\cdots\right)\left(\theta'_{11}x_4+\frac{1}{6}\theta'''_{11}x_4^3+\cdots\right) \\
&+\left(\theta_{01}+\frac{1}{2}\theta''_{01}x_1^2+\cdots\right)\left(\theta_{00}+\frac{1}{2}\theta''_{00}x_2^2+\cdots\right) \\
&\quad\times\left(\theta'_{11}x_3+\frac{1}{6}\theta'''_{11}x_3^3+\cdots\right)\left(\theta_{10}+\frac{1}{2}\theta''_{10}x_4^2+\cdots\right) \\
&+\left(\theta_{10}+\frac{1}{2}\theta''_{10}x_1^2+\cdots\right)\left(\theta'_{11}x_2+\frac{1}{6}\theta'''_{11}x_2^3+\cdots\right) \\
&\quad\times\left(\theta_{00}+\frac{1}{2}\theta''_{00}x_3^2+\cdots\right)\left(\theta_{01}+\frac{1}{2}\theta''_{01}x_4^2+\cdots\right) \\
&+\left(\theta'_{11}x_1+\frac{1}{6}\theta'''_{11}x_1^3+\cdots\right)\left(\theta_{10}+\frac{1}{2}\theta''_{10}x_2^2+\cdots\right) \\
&\quad\times\left(\theta_{01}+\frac{1}{2}\theta''_{01}x_3^2+\cdots\right)\left(\theta_{00}+\frac{1}{2}\theta''_{00}x_4^2+\cdots\right) \\
&=2\left(\theta'_{11}y_1+\frac{1}{6}\theta'''_{11}y_1^3+\cdots\right)\left(\theta_{10}+\frac{1}{2}\theta''_{10}y_2^2+\cdots\right) \\
&\quad\times\left(\theta_{01}+\frac{1}{2}\theta''_{01}y_3^2+\cdots\right)\left(\theta_{00}+\frac{1}{2}\theta''_{00}y_4^2+\cdots\right).
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4),\\
y_2 &= \frac{1}{2}(x_1+x_2-x_3-x_4),\\
y_3 &= \frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3-x_4),\\
y_4 &= \frac{1}{2}(x_1-x_2-x_3+x_4)
\end{aligned}
$$

である．この等式で，$x_2=x_3=x_4=0$ とおけば，$y_i=\dfrac{1}{2}x_1$, $i=1,2,3,4$ であり,

$$
\begin{aligned}
&\theta_{10}\theta_{01}\theta_{00}\left(\theta'_{11}x_1+\frac{1}{6}\theta'''_{11}x_1^3+\cdots\right)\\
&=2\left(\theta'_{11}\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{6}\theta'''_{11}\frac{1}{8}x_1^3+\cdots\right)\left(\theta_{10}+\frac{1}{2}\theta''_{10}\frac{1}{4}x_1^2+\cdots\right)\\
&\quad\times\left(\theta_{01}+\frac{1}{2}\theta''_{01}\frac{1}{4}x_1^2+\cdots\right)\left(\theta_{00}+\frac{1}{2}\theta''_{00}\frac{1}{4}x_1^2+\cdots\right).
\end{aligned}
$$

両辺の x_1^3 の係数を比較して,

$$
\frac{1}{6}\theta'''_{11}\theta_{10}\theta_{01}\theta_{00}=\frac{1}{24}\theta'''_{11}\theta_{10}\theta_{01}\theta_{00}+\frac{1}{8}\theta'_{11}\theta''_{10}\theta_{01}\theta_{00}+\frac{1}{8}\theta'_{11}\theta_{10}\theta''_{01}\theta_{00}+\frac{1}{8}\theta'_{11}\theta_{10}\theta_{01}\theta''_{00}.
$$

したがって,

$$
\theta'''_{11}\theta_{10}\theta_{01}\theta_{00}=\theta'_{11}\theta''_{10}\theta_{01}\theta_{00}+\theta'_{11}\theta_{10}\theta''_{01}\theta_{00}+\theta'_{11}\theta_{10}\theta_{01}\theta''_{00}.
$$

両辺を $\theta'_{11}\theta_{10}\theta_{01}\theta_{00}$ でわって,

$$
\frac{\theta'''_{11}}{\theta'_{11}}=\frac{\theta''_{10}}{\theta_{10}}+\frac{\theta''_{01}}{\theta_{01}}+\frac{\theta''_{00}}{\theta_{00}},
$$

$$
\frac{\theta'''_{11}}{\theta'_{11}}-\frac{\theta''_{10}}{\theta_{10}}-\frac{\theta''_{01}}{\theta_{01}}-\frac{\theta''_{00}}{\theta_{00}}=0.
$$

補題 3.24 より,

$$
\theta''_{ab}=4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\theta_{ab},\quad \theta'''_{11}=4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\theta'_{11}
$$

であるから，$F=\dfrac{\theta'_{11}}{\theta_{10}\theta_{01}\theta_{00}}$ とおけば,

$$
\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial\tau}=\frac{\theta'''_{11}}{\theta'_{11}}-\frac{\theta''_{10}}{\theta_{10}}-\frac{\theta''_{01}}{\theta_{01}}-\frac{\theta''_{00}}{\theta_{00}}=0.
$$

したがって，$F = \dfrac{\theta'_{11}}{\theta_{10}\theta_{01}\theta_{00}}$ は定数である．一方，(3.20), (3.22), (3.24), (3.26) より，$\tau \to i\infty$ とすれば，$q = e^{\pi i \tau} \to 0$ であるから，

$$\theta_{00}(0,\tau) \to 1, \quad \theta_{01}(0,\tau) \to 1,$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\tau\right)\theta_{10}(0,\tau) \to 1, \quad \frac{1}{2}\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\tau\right)\theta'_{11}(0,\tau) \to -\pi$$

である．ゆえに，$F = -\pi$ である． □

3.9 テータ関数の無限積表示

命題 3.26. コンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ において，関数列 $u_n(z)$ は正則であるとする．さらに，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ は K 上で一様収束するとする．そのとき，無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(z))$$

は K 上で一様収束し，したがって，正則である．

[証明] 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ は K 上で一様収束するから，任意の $0 < \varepsilon < 1/2$ に対して，番号 $N = N(\varepsilon)$ が存在して，

$$\sum_{n=N}^{\infty} |u_n(z)| < \varepsilon \quad (\forall z \in K)$$

が成り立つ．$|u| < 1$ において，

$$\log(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}$$

であり，正の定数 B が存在して，$|u| \leq 1/2$ において，

$$|\log(1+u)| \leq B|u|$$

が成り立つ．各 $n \geq N$ について，$|u_n(z)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |u_n(z)| < \varepsilon$ であるから，

$$|\log(1+u_n(z))| \leq B|u_n(z)|$$

である．したがって，

$$\sum_{n=N}^{\infty} |\log(1+u_n(z))| \leq B\sum_{n=N}^{\infty} |u_n(z)| < B\varepsilon.$$

これは $\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1+u_n(z))|$ が K 上一様収束することを示している．したがって，$s(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n(z))$ は K 上一様収束して正則である．ゆえに，$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$ は $e^{s(z)}$ に K 上一様収束して正則である． □

z の関数 $\theta(z,\tau)$ を無限積に展開しよう．$\theta(z,\tau)$ の零点は

$$\left\{ \left(m+\frac{1}{2}\right)\tau + \left(n+\frac{1}{2}\right) \,\middle|\, m,n \in \mathbb{Z} \right\}$$

であった．指数関数の性質から，次の補題が容易に得られる．

補題 3.27. $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$ について，次の条件は互いに同値である．

(i) $\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau - z\right) = -1.$

(ii) $\exists n \in \mathbb{Z}$, $2\pi i\left(z - \left(m+\frac{1}{2}\right)\tau\right) = (2n+1)\pi i.$

(iii) $\exists n \in \mathbb{Z}$, $z = \left(m+\frac{1}{2}\right)\tau + \left(n+\frac{1}{2}\right).$

無限積

$$p(z,\tau) = \prod_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau - z\right)\right] \left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau + z\right)\right] \right\}$$

は $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$ 上で広義一様に絶対収束する．実際，$c,d>0$ として，$|\Im z| \le c$, $\Im\tau \ge d$ ならば，

$$\left|\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau \pm z\right)\right| \le e^{2\pi c}\left(e^{-\pi d}\right)^{2m+1}$$

であるから，命題 3.26 より，$p(z,\tau)$ は $|\Im z| \le c$, $\Im\tau \ge d$ において，一様に絶対収束し，そこで正則である．c,d は任意の正の実数であるから，$p(z,\tau)$ は $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$ 上の正則関数である．

補題 3.27 より，$p(z,\tau)$ の零点は

$$\left\{ \left(m+\frac{1}{2}\right)\tau + \left(n+\frac{1}{2}\right) \,\middle|\, m,n \in \mathbb{Z} \right\}$$

であり，これは $\theta(z,\tau)$ の零点と一致する．

補題 3.28. $p(z,\tau)$ は次の性質を持つ．

(i) $p(z+1,\tau) = p(z,\tau).$

(ii) $p(z+\tau,\tau) = \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau - z\right)p(z,\tau).$

[証明]　(i) は $p(z,\tau)$ の定義から明らか．(ii)

$$
\begin{aligned}
&p(z+\tau,\tau)\\
&=\prod_{m=0}^{\infty}\left\{\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau-z-\tau\right)\right]\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau+z+\tau\right)\right]\right\}\\
&=\prod_{m=0}^{\infty}\left\{\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m-\frac{1}{2}\right)\tau-z\right)\right]\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{3}{2}\right)\tau+z\right)\right]\right\}\\
&=\left[1+\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau-z\right)\right]\prod_{m=1}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m-\frac{1}{2}\right)\tau-z\right)\right]\\
&\quad\times\prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{3}{2}\right)\tau+z\right)\right]\\
&=\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau-z\right)\left[1+\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau+z\right)\right]\prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau-z\right)\right]\\
&\quad\times\prod_{m=1}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau+z\right)\right]\\
&=\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau-z\right)\prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau-z\right)\right]\times\prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau+z\right)\right]\\
&=\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau-z\right)p(z,\tau).
\end{aligned}
$$

□

定理 3.29. テータ関数 $\theta(z,\tau)$ は次のように無限積に展開される．

$$\theta(z,\tau)=c(\tau)p(z,\tau),\quad c(\tau)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\boldsymbol{e}(m\tau)\right).$$

[証明]　まず，無限積 $c(\tau)$ が収束することをみる．$\Im\tau>0$ であるから，

$$\sum_{m=1}^{\infty}|\boldsymbol{e}(m\tau)|=\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m\Im\tau}<\infty.$$

したがって，無限積 $\displaystyle\prod_{m=1}^{\infty}(1-\boldsymbol{e}(m\tau))$ は収束し，任意の $\tau\in\mathbb{H}$ に対して，$c(\tau)\neq 0$ である．

補題 3.28 より，$0\neq p(z,\tau)\in V_1$ であり，V_1 は $\theta(z,\tau)$ で生成される 1 次元の $\mathbb{C}$-ベクトル空間であった．したがって，0 にならない τ の関数 $c'(\tau)$ が存在して，

$$\theta(z,\tau)=c'(\tau)p(z,\tau)\tag{3.40}$$

とかける．$c'(\tau)$ は τ の正則関数である．$c(\tau) = c'(\tau)$ を示せばよい．(3.40) と $\theta_{01}(z,\tau)$, $\theta_{10}(z,\tau)$, $\theta_{11}(z,\tau)$ の定義から，

$$\begin{aligned}
\theta_{01}(z,\tau) &= \theta\left(z+\frac{1}{2},\tau\right) \\
&= c'(\tau)\prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau - z - \frac{1}{2}\right)\right] \\
&\quad \times \prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau + z + \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= c'(\tau)\prod_{m=0}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau - z\right)\right] \times \prod_{m=0}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau + z\right)\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{10}(z,\tau) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\theta\left(z+\frac{1}{2}\tau,\tau\right) \\
&= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)c'(\tau)\prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau - z - \frac{1}{2}\tau\right)\right] \\
&\quad \times \prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau + z + \frac{1}{2}\tau\right)\right] \\
&= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)c'(\tau)\prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(m\tau - z\right)\right] \times \prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left((m+1)\tau + z\right)\right] \\
&= c'(\tau)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\left[1+\boldsymbol{e}\left(-z\right)\right]\prod_{m=1}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(m\tau - z\right)\right] \times \prod_{m=1}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(m\tau + z\right)\right] \\
&= c'(\tau)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau\right)\left[\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}z\right)+\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}z\right)\right]\prod_{m=1}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(m\tau - z\right)\right]\left[1+\boldsymbol{e}\left(m\tau + z\right)\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{11}(z,\tau) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)\theta\left(z+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2},\tau\right) \\
&= i\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)c'(\tau)\prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau - z - \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{2}\right)\right] \\
&\quad \times \prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau + z + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= i\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)c'(\tau)\prod_{m=0}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left(m\tau - z\right)\right] \times \prod_{m=0}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left((m+1)\tau + z\right)\right] \\
&= ic'(\tau)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\left[1-\boldsymbol{e}\left(-z\right)\right]\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left(m\tau - z\right)\right] \times \prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left(m\tau + z\right)\right] \\
&= ic'(\tau)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau\right)\left[\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}z\right)-\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}z\right)\right]\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left(m\tau - z\right)\right]\left[1-\boldsymbol{e}\left(m\tau + z\right)\right].
\end{aligned}$$

これらの式で，$z=0$ とおけば,

$$\theta_{00}(0,\tau) = c'(\tau)\prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau\right)\right]^2,$$
$$\theta_{01}(0,\tau) = c'(\tau)\prod_{m=0}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau\right)\right]^2,$$
$$\theta_{10}(0,\tau) = 2c'(\tau)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(m\tau\right)\right]^2.$$

また,

$$\theta_{11}(z,\tau) = \left[\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}z\right)-\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}z\right)\right]h(z),$$
$$h(z) = ic'(\tau)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left(m\tau-z\right)\right]\left[1-\boldsymbol{e}\left(m\tau+z\right)\right]$$

とかいて，これを z で微分して，$z=0$ とおけば,

$$\begin{aligned}\theta'_{11}(0,\tau) &= 2\pi i\, h(0)\\ &= -2\pi c'(\tau)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left(m\tau\right)\right]^2.\end{aligned}$$

これらを定理 3.23 の Jacobi の微分公式に代入すれば,

$$\begin{aligned}&-2\pi c'(\tau)\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left(m\tau\right)\right]^2\\ &= -2\pi c'(\tau)^3\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau\right)\prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau\right)\right]^2\\ &\quad\times\prod_{m=0}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau\right)\right]^2\times\prod_{m=1}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(m\tau\right)\right]^2.\end{aligned}$$

これから，

$$c'(\tau)^2 = \frac{\displaystyle\prod_{m=1}^{\infty}[1-\boldsymbol{e}\,(m\tau)]^2}{\displaystyle\prod_{m=0}^{\infty}\left[1+\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau\right)\right]^2\left[1-\boldsymbol{e}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau\right)\right]^2\prod_{m=1}^{\infty}[1+\boldsymbol{e}\,(m\tau)]^2}$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{m=0}^{\infty}[1-\boldsymbol{e}\,(2m+1)\tau)]^2\prod_{m=1}^{\infty}[1-\boldsymbol{e}\,(2m\tau)]^2}{\displaystyle\prod_{m=0}^{\infty}[1-\boldsymbol{e}\,((2m+1)\tau)]^2\prod_{m=1}^{\infty}[1+\boldsymbol{e}\,(m\tau)]^2}$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty}[1-\boldsymbol{e}\,(m\tau)]^2 = c(\tau)^2.$$

よって，$c'(\tau) = c(\tau)$ または $c'(\tau) = -c(\tau)$ である．しかし，$\Im\tau \to \infty$ のとき，$c(\tau) \to 1$ である．一方，$p(z,\tau), \theta(z,\tau)$ の定義から，$\Im\tau \to \infty$ のとき，$p(z,\tau) \to 1$, $\theta(z,\tau) \to 1$ である．したがって，$c'(\tau) = c(\tau)$ である． $\square$

3.10 Jacobi, Euler の公式

$q = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau\right)$, $w = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}z\right)$ とおく．$\theta(z,\tau)$ の無限積展開は次のようにかける．

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2}w^{2m} = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})\prod_{m=0}^{\infty}(1+q^{2m+1}w^2)(1+q^{2m+1}w^{-2})$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1+q^{2m-1}w^2)(1+q^{2m-1}w^{-2}). \tag{3.41}$$

これを **Jacobi の 3 重積公式**という．(3.41) において，w に $iq^{1/4}$ を，q に $q^{3/2}$ を代入すれば，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m+1)}{2}} = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{3m})(1-q^{3m-1})(1-q^{3m-2})$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m).$$

すなわち，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m+1)}{2}} = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m). \tag{3.42}$$

これを **Euler の 5 角数公式**という．

(3.41) において，それぞれ，$w=1$, $w=i$ を代入すれば，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1+q^{2m-1})^2, \tag{3.43}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1-q^{2m-1})^2. \tag{3.44}$$

3.11 テータ関数の変換公式

補題 3.30. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して，

$$\Omega(\tau) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau = \mathbb{Z}(a\tau+b) + \mathbb{Z}(c\tau+d).$$

上の補題から，

$$\mathbb{C}/\Omega(\tau) \cong \mathbb{C}/\left(\mathbb{Z}(a\tau+b)+\mathbb{Z}(c\tau+d)\right). \tag{3.45}$$

$\Im\tau > 0$, $c, d \in \mathbb{Z}$ より，$c\tau + d \neq 0$ である．$\dfrac{1}{c\tau+d}$ 倍する写像

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto \frac{1}{c\tau+d} z \in \mathbb{C}$$

によって，

$$\mathbb{C}/\left(\mathbb{Z}(a\tau+b)+\mathbb{Z}(c\tau+d)\right) \cong \mathbb{C}/\left(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right). \tag{3.46}$$

補題 3.31. $\tau \in \mathbb{H}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して，

(i) $\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d} \in \mathbb{H}$.

(ii) $\dfrac{1}{c\tau+d}$ 倍写像は複素トーラスの同型

$$\mathbb{C}/\Omega(\tau) \cong \mathbb{C}/\Omega\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$

を引き起こす.

[証明] (i)

$$\frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{(a\tau+b)(c\bar{\tau}+d)}{|c\tau+d|^2} = \frac{ac|\tau|^2+bd+ad\tau+bc\bar{\tau}}{|c\tau+d|^2}$$

より,
$$\Im\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\frac{(ad-bc)\Im\tau}{|c\tau+d|^2}=\frac{\Im\tau}{|c\tau+d|^2}>0.$$
(ii) は (3.45), (3.46) から明らか. □

補題 3.31 より，テータ関数の変換
$$\theta\left(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$
と $\theta(z,\tau)$ を比較することは自然である．$a=d=0$, $b=-1$, $c=1$ の場合が，次の定理である.

定理 3.32 (Jacobi の変換公式).
$$\theta_{00}\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)=\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\right)\tau^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{z^2}{2\tau}\right)\theta_{00}(z,\tau).$$
ここで，$\tau^{\frac{1}{2}}$ は，$\sigma^2=\tau$, $\Im\sigma>0$ となる $\sigma\in\mathbb{H}$ を表す.

[証明] $\tau'=-\dfrac{1}{\tau}$ とおく．$\theta_{00}(z,\tau)$ の零点と，$\theta_{00}(-\tau'z,\tau')$ の零点はそれぞれ,
$$z=\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau+\left(n+\frac{1}{2}\right),\quad -\tau'z=\left(n'+\frac{1}{2}\right)\tau'+\left(m'+\frac{1}{2}\right)$$
であり，これらはすべて 1 位の零点である．ここで，$m,n,m',n'\in\mathbb{Z}$ である．これをかきなおせば,
$$z=m\tau+n+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2},\quad z=m'\tau-n'+\frac{1}{2}\tau-\frac{1}{2}$$
である．結局，$\theta_{00}(z,\tau)$ の零点と，$\theta_{00}(-\tau'z,\tau')$ の零点は一致している．したがって，商
$$\psi(z)=\frac{\theta_{00}(-\tau'z,\tau')}{\boldsymbol{e}\left(-\dfrac{z^2\tau'}{2}\right)\theta_{00}(z,\tau)}$$

は z の整関数である．補題 3.17, 補題 3.18 より，

$$\begin{aligned}
\psi(z+1) &= \frac{\theta_{00}(-\tau'(z+1),\tau')}{\boldsymbol{e}\left(-\dfrac{(z+1)^2\tau'}{2}\right)\theta_{00}(z+1,\tau)} \\
&= \frac{\theta_{00}(-\tau' z-\tau',\tau')}{\boldsymbol{e}\left(-\dfrac{(z+1)^2\tau'}{2}\right)\theta_{00}(z,\tau)} \\
&= \frac{\boldsymbol{e}\left(-\dfrac{1}{2}\tau'+(-\tau' z)\right)\theta_{00}(-\tau' z,\tau')}{\boldsymbol{e}\left(-\dfrac{(z+1)^2\tau'}{2}\right)\theta_{00}(z,\tau)} \\
&= \frac{\theta_{00}(-\tau' z,\tau')}{\boldsymbol{e}\left(-\dfrac{z^2\tau'}{2}\right)\theta_{00}(z,\tau)} = \psi(z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(z+\tau) &= \frac{\theta_{00}(-\tau'(z+\tau),\tau')}{\boldsymbol{e}\left(-\dfrac{(z+\tau)^2\tau'}{2}\right)\theta_{00}(z+\tau,\tau)} \\
&= \frac{\theta_{00}(-\tau' z+1,\tau')}{\boldsymbol{e}\left(-\dfrac{(z+\tau)^2\tau'}{2}\right)\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau-z\right)\theta_{00}(z,\tau)} \\
&= \frac{\theta_{00}(-\tau' z,\tau')}{\boldsymbol{e}\left(-\dfrac{z^2\tau'}{2}\right)\theta_{00}(z,\tau)} = \psi(z).
\end{aligned}$$

以上によって，$\psi(z)$ は極を持たない 2 重周期関数であるから，命題 2.7 より，$\psi(z) = A$ は定数である．$\psi(z)$ の定義から，

$$\theta_{00}(-\tau' z,\tau') = A\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2}\right)\theta_{00}(z,\tau) \tag{3.47}$$

である．$A = \boldsymbol{e}\left(-\dfrac{1}{8}\right)\tau^{\frac{1}{2}}$ を示せばよい．(3.47) の z に各々，$z+\dfrac{1}{2}$, $z+\dfrac{1}{2}\tau$, $z+\dfrac{1}{2}\tau+\dfrac{1}{2}$ を代入すれば，§ 3.3 の計算によって，

$$\begin{aligned}
\theta_{00}\left(-\tau' z-\frac{1}{2}\tau',\tau'\right) &= A\boldsymbol{e}\left(-\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\tau'}{2}\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2},\tau\right) \\
&= A\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2}-\frac{z\tau'}{2}-\frac{\tau'}{8}\right)\theta_{01}(z,\tau), \\
\theta_{00}\left(-\tau' z-\frac{1}{2}\tau',\tau'\right) &= \theta_{00}\left(\tau' z+\frac{1}{2}\tau',\tau'\right) = \boldsymbol{e}\left(-\frac{\tau'}{8}-\frac{z\tau'}{2}\right)\theta_{10}(\tau' z,\tau').
\end{aligned}$$

したがって,

$$\theta_{10}(\tau' z, \tau') = A\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2}\right)\theta_{01}(z,\tau).$$

$$\begin{aligned}
\theta_{00}\left(-\tau' z + \frac{1}{2}, \tau'\right) &= A\boldsymbol{e}\left(-\frac{\left(z+\frac{1}{2}\tau\right)^2\tau'}{2}\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}\tau, \tau\right) \\
&= A\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2} - \frac{z\tau\tau'}{2} - \frac{\tau^2\tau'}{8}\right)\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\tau - \frac{1}{2}z\right)\theta_{10}(z,\tau) \\
&= A\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2}\right)\theta_{10}(z,\tau), \\
\theta_{00}\left(-\tau' z + \frac{1}{2}, \tau'\right) &= \theta_{00}\left(\tau' z - \frac{1}{2}, \tau'\right) = \theta_{00}\left(\tau' z + \frac{1}{2}, \tau'\right) = \theta_{01}(\tau' z, \tau').
\end{aligned}$$

したがって,

$$\theta_{01}(\tau' z, \tau') = A\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2}\right)\theta_{10}(z,\tau).$$

$$\begin{aligned}
\theta_{00}\left(-\tau' z - \frac{1}{2}\tau' + \frac{1}{2}, \tau'\right) &= A\boldsymbol{e}\left(-\frac{\left(z+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}\right)^2\tau'}{2}\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}, \tau\right) \\
&= A\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2} - \frac{z(\tau+1)\tau'}{2} - \frac{(\tau+1)^2\tau'}{8}\right) \\
&\quad \times \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\tau - \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)\theta_{11}(z,\tau), \\
&= A\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2} - \frac{z\tau'}{2} - \frac{1}{8}\tau'\right)\theta_{11}(z,\tau), \\
\theta_{00}\left(-\tau' z - \frac{1}{2}\tau' + \frac{1}{2}, \tau'\right) &= \theta_{00}\left(\tau' z + \frac{1}{2}\tau' - \frac{1}{2}, \tau'\right) = \theta_{00}\left(\tau' z + \frac{1}{2}\tau' + \frac{1}{2}, \tau'\right) \\
&= \boldsymbol{e}\left(-\frac{\tau'}{8} - \frac{1}{2}\left(z\tau' + \frac{1}{2}\right)\right)\theta_{11}(\tau' z, \tau').
\end{aligned}$$

したがって,

$$\theta_{11}(\tau' z, \tau') = iA\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2}\right)\theta_{11}(z,\tau).$$

まとめると,

$$\theta_{10}(\tau' z, \tau') = A\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2}\right)\theta_{01}(z,\tau), \tag{3.48}$$

$$\theta_{01}(\tau' z, \tau') = A\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2}\right)\theta_{10}(z,\tau), \tag{3.49}$$

$$\theta_{11}(\tau' z, \tau') = iA\boldsymbol{e}\left(-\frac{z^2\tau'}{2}\right)\theta_{11}(z,\tau). \tag{3.50}$$

最後の式を z で微分して，$z=0$ とおけば，

$$\tau'\theta'_{11}(0,\tau') = iA\theta'_{11}(0,\tau). \tag{3.51}$$

一方，Jacobi の微分公式 (定理 3.23) によって，

$$\theta'_{11}(0,\tau) = -\pi\theta_{00}(0,\tau)\theta_{01}(0,\tau)\theta_{10}(0,\tau), \tag{3.52}$$
$$\theta'_{11}(0,\tau') = -\pi\theta_{00}(0,\tau')\theta_{01}(0,\tau')\theta_{10}(0,\tau'). \tag{3.53}$$

であるから，(3.53), (3.47), (3.48), (3.49), (3.52) より，

$$\begin{aligned}\tau'\theta'_{11}(0,\tau') &= \tau'(-\pi)\theta_{00}(0,\tau')\theta_{01}(0,\tau')\theta_{10}(0,\tau')\\ &= \tau'(-\pi)A^3\theta_{00}(0,\tau)\theta_{01}(0,\tau)\theta_{10}(0,\tau)\\ &= \tau' A^3\theta'_{11}(0,\tau).\end{aligned}$$

これと (3.51) から，$A^2 = \dfrac{i}{\tau'} = -i\tau = \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{4}\right)\tau$ を得る．したがって，$A = \pm\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\right)\tau^{\frac{1}{2}}$ である．この符号を決めるために次のようにする．(3.47) において，$z=0$ を代入すると，

$$\theta_{00}(0,\tau') = A\theta_{00}(0,\tau).$$

この両辺は $\tau\in\mathbb{H}$ の正則関数であるから，τ が純虚数のときに A の符号を決めればよい．このときは，$\tau' = -\dfrac{1}{\tau}$ も純虚数であり，$q = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\tau\right)$ とおくとき，

$$\theta_{00}(0,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$$

であるから，$\theta_{00}(0,\tau)$, $\theta_{00}(0,\tau')$ ともに正の実数である．したがって，A も正の実数である．$\tau^{\frac{1}{2}}$ のとりかたから，$\arg\tau^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$ であり，

$$-\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\right)\tau^{\frac{1}{2}} < 0 < \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\right)\tau^{\frac{1}{2}}$$

である．ゆえに，$A = \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\right)\tau^{\frac{1}{2}}$ である． □

(3.48), (3.49), (3.50) に $A = \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\right)\tau^{\frac{1}{2}}$ を代入して，$\theta_{10}(z,\tau)$, $\theta_{01}(z,\tau)$ が z の偶関数，$\theta_{11}(z,\tau)$ が z の奇関数であることを用いれば，次の系を得る．

系 3.33.

$$\theta_{10}\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\right)\tau^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{z^2}{2\tau}\right)\theta_{01}(z,\tau), \tag{3.54}$$

$$\theta_{01}\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\right)\tau^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{z^2}{2\tau}\right)\theta_{10}(z,\tau), \tag{3.55}$$

$$\theta_{11}\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = -i\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\right)\tau^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{z^2}{2\tau}\right)\theta_{11}(z,\tau). \tag{3.56}$$

次に，$\theta_{11}(z,\tau+1)$ と $\theta_{11}(z,\tau)$ を比較する．

定理 3.34. $\theta_{11}(z,\tau+1)=\boldsymbol{e}\left(\dfrac{1}{8}\right)\theta_{11}(z,\tau)$.

[証明]　$\theta_{11}(z,\tau+1)$ の零点と，$\theta_{11}(z,\tau)$ の零点はそれぞれ，

$$z=m(\tau+1)+n,\quad z=m\tau+n$$

である．ここで，$m,n,m',n'\in\mathbb{Z}$ である．容易にこれらは一致することがわかる．また，これらはすべて 1 位の零点である．したがって，商

$$\psi(z)=\frac{\theta_{11}(z,\tau+1)}{\theta_{11}(z,\tau)}$$

は z の整関数である．補題 3.17, 補題 3.18 より，

$$\psi(z+1)=\frac{\theta_{11}(z+1,\tau+1)}{\theta_{00}(z+1,\tau)}=\frac{(-1)\theta_{11}(z,\tau+1)}{(-1)\theta_{00}(z,\tau)}=\psi(z),$$

$$\begin{aligned}\psi(z+\tau)&=\frac{\theta_{11}(z+\tau,\tau+1)}{\theta_{11}(z+\tau,\tau)}=\frac{(-1)\theta_{11}(z+\tau+1,\tau+1)}{\theta_{11}(z+\tau,\tau)}\\&=\frac{(-1)(-1)\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}(\tau+1)-z\right)\theta_{11}(z,\tau+1)}{(-1)\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau-z\right)\theta_{11}(z,\tau)}\\&=\frac{\theta_{11}(z,\tau+1)}{\theta_{11}(z,\tau)}=\psi(z).\end{aligned}$$

以上によって，$\psi(z)$ は極を持たない 2 重周期関数であるから，命題 2.7 より，$\psi(z)=B$ は定数である．$\psi(z)$ の定義から，

$$\theta_{11}(z,\tau+1)=B\theta_{11}(z,\tau). \tag{3.57}$$

z で微分して，$z=0$ とおけば，

$$\theta'_{11}(0,\tau+1)=B\theta'_{11}(0,\tau). \tag{3.58}$$

テータ関数の無限積展開 (§ 3.9) の最後に示したように，

$$\theta'_{11}(0,\tau)=-2\pi\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau\right)c'(\tau)\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}(m\tau)\right]^2.$$

$c'(\tau)=c(\tau)=\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}(m\tau)\right]$ であるから，

$$\theta'_{11}(0,\tau)=-2\pi\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}(m\tau)\right]^3. \tag{3.59}$$

同様に,

$$\theta'_{11}(0,\tau+1)=-2\pi\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}(\tau+1)\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\boldsymbol{e}(m\tau)\right]^3. \tag{3.60}$$

(3.58), (3.59), (3.60) より．$B=\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\right)$ を得る． □

定理 3.34 において，z にそれぞれ，$z+\dfrac{1}{2}$, $z+\dfrac{1}{2}\tau$, $z+\dfrac{1}{2}\tau+\dfrac{1}{2}$ を代入すれば，§ 3.3 でみたように，

$$\begin{aligned}-\theta_{10}(z,\tau+1)&=\theta_{11}\left(z+\frac{1}{2},\tau+1\right)=\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\right)\theta_{11}\left(z+\frac{1}{2},\tau\right)\\&=-\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\right)\theta_{10}(z,\tau),\\\theta_{10}(z,\tau+1)&=\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\right)\theta_{10}(z,\tau).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}(\tau+1)-\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}\right)\theta_{01}(z,\tau+1)\\&=\theta_{11}\left(z+\frac{1}{2}(\tau+1),\tau+1\right)=\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\right)\theta_{11}\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\tau,\tau\right)\\&=\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\right)\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\tau-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\right)\theta_{01}\left(z+\frac{1}{2},\tau\right)\\&=\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\right)\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\tau-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\right)\theta_{00}(z,\tau),\end{aligned}$$

$$\theta_{01}(z,\tau+1)=\theta_{00}(z,\tau).$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}(\tau+1)-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\right)\theta_{00}(z,\tau+1)\\&=\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}(\tau+1)-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\right)\theta_{01}\left(z+\frac{1}{2},\tau+1\right)\\&=\theta_{11}\left(z+\frac{1}{2}(\tau+1)+\frac{1}{2},\tau+1\right)=\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\right)\theta_{11}\left(z+1+\frac{1}{2}\tau,\tau\right)\\&=\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\right)\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\tau-\frac{1}{2}(z+1)-\frac{1}{4}\right)\theta_{01}(z+1,\tau)\\&=\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\right)\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\tau-\frac{1}{2}(z+1)-\frac{1}{4}\right)\theta_{01}(z,\tau),\end{aligned}$$

$$\theta_{00}(z,\tau+1)=\theta_{01}(z,\tau).$$

以上まとめると,

系 3.35.

$$\begin{aligned}\theta_{00}(z,\tau+1) &= \theta_{01}(z,\tau),\\ \theta_{01}(z,\tau+1) &= \theta_{00}(z,\tau),\\ \theta_{10}(z,\tau+1) &= \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\right)\theta_{10}(z,\tau).\end{aligned}$$

$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1\right\}$ は行列の積に関して群になる．$SL_2(\mathbb{Z})$ は 2 つの行列 $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ によって生成される．これは次のようにわかる．γ_1 と γ_2 によって生成される $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群を Γ で表す．$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ とする．$|a|$ に関する帰納法によって，$\gamma \in \Gamma$ を示す．$a=0$ のとき，$-bc=1$ より，$\gamma = \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d\end{pmatrix}$ である．そのとき，

$$\gamma_2^{-1}\gamma = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \pm\gamma_1^d \in \Gamma.$$

よって，$\gamma = \gamma_2\gamma_1^d$ または $\gamma = \gamma_2^3\gamma_1^d$ であり，$\gamma \in \Gamma$ である．$n \geq 1$ として，$|a| < n$ のとき，$\gamma \in \Gamma$ であると仮定する．$|a| = n$ のとき，$c = aq + r,\ q, r \in \mathbb{Z},\ |r| < |a|$ とする．

$$\begin{aligned}\gamma_1^q\gamma_2\gamma &= \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -r & -d+bq \\ a & b\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

帰納法の仮定から，$\gamma_1^q\gamma_2\gamma \in \Gamma$, したがって，$\gamma \in \Gamma$ である．

定理 3.36. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),\ c \geq 0$ とすると，

$$\theta_{11}\left(\frac{z}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \varepsilon(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{2(c\tau+d)}z^2\right)\theta_{11}(z,\tau)$$

が成り立つ．ここで，ε は 1 の 8 乗根であり，$(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}$ は $\sigma^2 = c\tau+d,\ \Im\sigma \geq 0,\ \Re\sigma \geq 0$ となる複素数である．

[証明] $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のときは，系3.33と定理3.34より，定理の主張は正しい．2つの $SL_2(\mathbb{Z})$ の元 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して，定理の主張が正しいとする．ここで，$c \geq 0, r \geq 0$ とする．そのとき，

$$\begin{aligned}
\theta_{11}\left(\frac{z}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) &= \varepsilon(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{2(c\tau+d)}z^2\right)\theta_{11}(z,\tau), \\
\theta_{11}\left(\frac{z}{r\tau+s}, \frac{p\tau+q}{r\tau+s}\right) &= \varepsilon'(r\tau+s)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{r}{2(r\tau+s)}z^2\right)\theta_{11}(z,\tau).
\end{aligned}$$

$AB = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ とかく．最初の式の τ に $\dfrac{p\tau+q}{r\tau+s}$ を，z に $\dfrac{z}{r\tau+s}$ を代入して，

$$\begin{aligned}
\frac{a\dfrac{p\tau+q}{r\tau+s}+b}{c\dfrac{p\tau+q}{r\tau+s}+d} &= \frac{(ap+br)\tau+(aq+bs)}{(cp+dr)\tau+(cq+ds)} = \frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'}, \\
\frac{\dfrac{z}{r\tau+s}}{c\dfrac{p\tau+q}{r\tau+s}+d} &= \frac{z}{(cp+dr)\tau+(cq+ds)} = \frac{z}{c'\tau+d'}, \\
\left(c\frac{p\tau+q}{r\tau+s}+d\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{((cp+dr)\tau+(cq+ds))^{\frac{1}{2}}}{(r\tau+s)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(c'\tau+d')^{\frac{1}{2}}}{(r\tau+s)^{\frac{1}{2}}}, \\
\frac{c}{2\left(c\dfrac{p\tau+q}{r\tau+s}+d\right)}\left(\frac{z}{r\tau+s}\right)^2 &= \frac{c}{2(r\tau+s)\left\{(cp+dr)\tau+(cq+ds)\right\}}z^2 \\
&= \frac{c}{2(r\tau+s)(c'\tau+d')}z^2
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}
\theta_{11}\left(\frac{z}{c'\tau+d'}, \frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'}\right) &= \varepsilon\frac{(c'\tau+d')^{\frac{1}{2}}}{(r\tau+s)^{\frac{1}{2}}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{2(r\tau+s)(c'\tau+d')}z^2\right)\theta_{11}\left(\frac{z}{r\tau+s}, \frac{p\tau+q}{r\tau+s}\right), \\
&= \varepsilon\frac{(c'\tau+d')^{\frac{1}{2}}}{(r\tau+s)^{\frac{1}{2}}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{2(r\tau+s)(c'\tau+d')}z^2\right) \\
&\quad \times \varepsilon'(r\tau+s)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{r}{2(r\tau+s)}z^2\right)\theta_{11}(z,\tau) \\
&= \varepsilon\varepsilon'(c'\tau+d')^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c+r(c'\tau+d')}{2(r\tau+s)(c'\tau+d')}z^2\right)\theta_{11}(z,\tau) \\
&= \varepsilon\varepsilon'(c'\tau+d')^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c'}{2(c'\tau+d')}z^2\right)\theta_{11}(z,\tau).
\end{aligned}$$

$\square$

定理 3.32 と系 3.35 より，

定理 3.37. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, ab, cd は偶数，$c \geq 0$ とすると，

$$\theta_{00}\left(\frac{z}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \varepsilon(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{2(c\tau+d)}z^2\right)\theta_{00}(z,\tau)$$

が成り立つ．ここで，ε は 1 の 8 乗根であり，$(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}$ は $\sigma^2 = c\tau+d$, $\Im\sigma \geq 0$, $\Re\sigma \geq 0$ となる複素数である．さらに，$\varepsilon^4 = (-1)^c$ である．

[証明] (i) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b は偶数のとき，系 3.35 より，定理の主張は成り立っている．

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，定理 3.32 より，定理の主張は成り立っている．一般の場合を $|c|+|d|$ に関する帰納法で証明しよう．$|c|+|d|=1$ のときは，上に示した場合である．$|c|+|d|>1$ とする．$|d|>|c|$ のとき，$|d|-2|c|<|d|$, $-|d|+2|c|<|d|$ であるから，$||d|-2|c||<|d|$ である．よって，$|d\pm 2c|<|d|$ となるように符号 $\pm$ を定めることができる．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \pm 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b\pm 2a \\ c & d\pm 2c \end{pmatrix}$$

である．$|c|+|d\pm 2c|<|c|+|d|$ であるから，帰納法の仮定によって，

$$\theta_{00}\left(\frac{z}{c\tau+d\pm 2c}, \frac{a\tau+b\pm 2a}{c\tau+d\pm 2c}\right) = \varepsilon(c\tau+d\pm 2c)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{2(c\tau+d\pm 2c)}z^2\right)\theta_{00}(z,\tau).$$

$\varepsilon^4 = (-1)^c$ である．ここで，τ を $\tau \mp 2$ でおきかえれば，

$$\begin{aligned}
&\theta_{00}\left(\frac{z}{c(\tau\mp 2)+d\pm 2c}, \frac{a(\tau\mp 2)+b\pm 2a}{c(\tau\mp 2)+d\pm 2c}\right) \\
&= \varepsilon(c(\tau\mp 2)+d\pm 2c)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{2(c(\tau\mp 2)+d\pm 2c)}z^2\right)\theta_{00}(z,\tau\mp 2), \\
&\theta_{00}\left(\frac{z}{ctau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) \\
&= \varepsilon(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{2(c\tau+d)}z^2\right)\theta_{00}(z,\tau\mp 2), \\
&= \varepsilon(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{2(c\tau+d)}z^2\right)\theta_{00}(z,\tau).
\end{aligned}$$

$\gcd(c,d)=1$, cd は偶数であるから，$|d|=|c|$ は起こらない．$|d|<|c|$ とする．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

である．$|d|+|-c|=|c|+|d|$, $|d|<|c|$ であるから，上で示したことから，

$$\theta_{00}\left(\frac{z}{d\tau-c},\frac{b\tau-a}{d\tau-c}\right)=\varepsilon(d\tau-c)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{d}{2(d\tau-c)}z^2\right)\theta_{00}(z,\tau).$$

$\varepsilon^4=(-1)^d$ である．ここで，τ を $-\dfrac{1}{\tau}$ でおきかえ，z を $\dfrac{z}{\tau}$ でおきかえれば，

$$\begin{aligned}
&\theta_{00}\left(\frac{\frac{z}{\tau}}{-\frac{d}{\tau}-c},\frac{-\frac{b}{\tau}-a}{-\frac{d}{\tau}-c}\right)\\
&=\varepsilon\left(-\frac{d}{\tau}-c\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{d}{2\left(-\frac{d}{\tau}-c\right)}\left(\frac{z}{\tau}\right)^2\right)\theta_{00}\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right),\\
&\theta_{00}\left(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\\
&=\varepsilon\left(\frac{c\tau+d}{-\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(-\frac{d}{2\tau\left(c\tau+d\right)}z^2\right)\theta_{00}\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right),\\
&=\varepsilon\left(\frac{c\tau+d}{-\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(-\frac{d}{2\tau\left(c\tau+d\right)}z^2\right)\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\right)\tau^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{z^2}{2\tau}\right)\theta_{00}(z,\tau)\\
&=\varepsilon(-1)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{8}\right)(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{2\tau\left(c\tau+d\right)}z^2\right)\theta_{00}(z,\tau)\\
&=\varepsilon'(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{2\tau\left(c\tau+d\right)}z^2\right)\theta_{00}(z,\tau).
\end{aligned}$$

ここで，$\gcd(c,d)=1$, cd は偶数であるから，$c\equiv d+1 \pmod 2$ でり，

$$(\varepsilon')^4=-\varepsilon^4=-(-1)^d=(-1)^{d+1}=(-1)^c.$$

$\square$

4　Jacobi の楕円関数

4.1　$\mathrm{sn}(u,\kappa)$, $\mathrm{cn}(u,\kappa)$, $\mathrm{dn}(u,\kappa)$

$\tau\in\mathbb{H}$ を固定し，$\theta_{00}(z,\tau)$, $\theta_{01}(z,\tau)$, $\theta_{10}(z,\tau)$, $\theta_{11}(z,\tau)$ を $\theta_{00}(z)$, $\theta_{01}(z)$, $\theta_{10}(z)$, $\theta_{11}(z)$ とかく．さらに，$\theta_{00}(0)$, $\theta_{01}(0)$, $\theta_{10}(0)$, $\theta_{11}'(0)$ を θ_{00}, θ_{01}, θ_{10}, θ_{11}' とかく．

$u = \pi\theta_{00}^2 z$ とおき，**Jacobi の楕円関数** $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ を次のように定義した．

$$\begin{aligned}\operatorname{sn} u &= -\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}}\frac{\theta_{11}(z)}{\theta_{01}(z)},\\ \operatorname{cn} u &= \frac{\theta_{01}}{\theta_{10}}\frac{\theta_{10}(z)}{\theta_{01}(z)},\\ \operatorname{dn} u &= \frac{\theta_{01}}{\theta_{00}}\frac{\theta_{00}(z)}{\theta_{01}(z)}.\end{aligned}$$

また，

$$\kappa = \frac{\theta_{10}^2}{\theta_{00}^2}, \quad \kappa' = \frac{\theta_{01}^2}{\theta_{00}^2}$$

とおいた．

$$\operatorname{sn} 0 = 0, \quad \operatorname{cn} 0 = 1, \quad \operatorname{dn} 0 = 1$$

である．z の関数として，$\theta_{00}(z,\tau)$, $\theta_{01}(z,\tau)$, $\theta_{10}(z,\tau)$ は偶関数, $\theta_{11}(z,\tau)$ は奇関数であるから，$\operatorname{sn} u$ は奇関数であり，$\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ は偶関数である．κ を**モジュラス**, κ' を**補モジュラス**という．(3.29) より，

$$\kappa^2 + \kappa'^2 = \frac{\theta_{10}^4 + \theta_{01}^4}{\theta_{00}^4} = 1. \tag{4.1}$$

テータ関数の変換公式 (定理 3.32, 系 3.33) より，$\tau' = -\dfrac{1}{\tau}$ とおくと，

$$\frac{\theta_{10}(0,\tau')^2}{\theta_{00}(0,\tau)^2} = \frac{-i\tau\theta_{01}(0,\tau)^2}{-i\tau\theta_{00}(0,\tau)^2} = \frac{\theta_{01}(0,\tau)^2}{\theta_{00}(0,\tau)^2} = \kappa'. \tag{4.2}$$

注意 4.1. $\tau \in \mathbb{H}$ の関数 $\theta_{01}(0,\tau)$, $\theta_{10}(0,\tau)$ は 0 をとらないので，$\kappa(\tau)^2 = 0, 1$ となる $\tau \in \mathbb{H}$ は存在しない．逆に，任意の $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0, 1$ に対して，$\kappa(\tau)^2 = a$ となる $\tau \in \mathbb{H}$ が存在する (保型関数 $j(\tau)$ の性質を用いて示される)．

§ 3.7 において，

$$\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = 1, \tag{4.3}$$

$$\operatorname{dn}^2 u + \kappa^2 \operatorname{sn}^2 u = 1 \tag{4.4}$$

が成り立つことを示した．次に，$\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ の満たす微分方程式をテータ関数の加法公式から導こう．

$$\frac{d}{dz}\frac{\theta_{11}(z)}{\theta_{01}(z)} = \frac{\theta_{11}'(z)\theta_{01}(z) - \theta_{11}(z)\theta_{01}'(z)}{\theta_{01}(z)^2}$$

である．加法公式 (A4) より，

$$\theta_{11}(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{10}\theta_{00} = \theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(u)\theta_{11}(u) + \theta_{01}(x)\theta_{11}(x)\theta_{00}(u)\theta_{10}(u).$$

これを u で微分して，$u=0$ とおく．$\theta_{00}(u)$, $\theta_{01}(u)$ は偶関数であるから，$\theta_{00}'(0)=\theta_{01}'(0)=0$ に注意すれば,

$$\left(\theta_{11}'(x)\theta_{01}(x)-\theta_{11}(x)\theta_{01}'(x)\right)\theta_{10}\theta_{00}=\theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}\theta_{11}'.$$

Jacobi の微分公式 (定理 3.23) より，$\theta_{11}'=-\pi\theta_{00}\theta_{01}\theta_{10}$ であるから,

$$\theta_{11}'(z)\theta_{01}(z)-\theta_{11}(z)\theta_{01}'(z)=-\pi\theta_{00}(z)\theta_{10}(z)\theta_{01}^2.$$

したがって,

$$\frac{d}{dz}\frac{\theta_{11}(z)}{\theta_{01}(z)}=-\pi\theta_{01}^2\frac{\theta_{00}(z)}{\theta_{01}(z)}\frac{\theta_{10}(z)}{\theta_{01}(z)}$$

これから,

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\operatorname{sn}u&=\frac{dz}{du}\frac{d}{dz}\left(\frac{-\theta_{00}\theta_{11}(z)}{\theta_{10}\theta_{01}(z)}\right)\\&=\frac{1}{\pi\theta_{00}^2}\frac{(-\theta_{00})}{\theta_{10}}(-\pi\theta_{01}^2)\frac{\theta_{00}(z)}{\theta_{01}(z)}\frac{\theta_{10}(z)}{\theta_{01}(z)}\\&=\frac{\theta_{01}\theta_{10}(z)}{\theta_{10}\theta_{01}(z)}\frac{\theta_{01}\theta_{00}(z)}{\theta_{00}\theta_{01}(z)}\\&=\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u.\end{aligned}$$

(4.3) を微分して,

$$2\operatorname{cn}u\frac{d}{du}\operatorname{cn}u+2\operatorname{sn}u\frac{d}{du}\operatorname{sn}u=0.$$

これに $\dfrac{d}{du}\operatorname{sn}u=\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u$ を代入して,

$$\frac{d}{du}\operatorname{cn}u=-\operatorname{dn}u\operatorname{sn}u$$

を得る．(4.4) を微分して,

$$2\operatorname{dn}u\frac{d}{du}\operatorname{dn}u+2\kappa^2\operatorname{sn}u\frac{d}{du}\operatorname{sn}u=0.$$

これに $\dfrac{d}{du}\operatorname{sn}u=\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u$ を代入して,

$$\frac{d}{du}\operatorname{dn}u=-\kappa^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u.$$

以上まとめると，$\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$ は微分方程式系

$$\begin{cases}\dfrac{d}{du}\operatorname{sn}u&=&\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u,\\ \dfrac{d}{du}\operatorname{cn}u&=&-\operatorname{dn}u\operatorname{sn}u,\\ \dfrac{d}{du}\operatorname{dn}u&=&-\kappa^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\end{cases}\tag{4.5}$$

を満たす．ただし，初期条件は

$$\mathrm{sn}\,0 = 0, \quad \mathrm{cn}\,0 = 1, \quad \mathrm{dn}\,0 = 1$$

である．さらに，(4.3), (4.4), (4.6) より，

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d}{du}\,\mathrm{sn}\,u\right)^2 &= (1-\mathrm{sn}^2 u)(1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 u), \\ \left(\dfrac{d}{du}\,\mathrm{cn}\,u\right)^2 &= (1-\mathrm{cn}^2 u)(\kappa'^2+\kappa^2\,\mathrm{cn}^2 u), \\ \left(\dfrac{d}{du}\,\mathrm{dn}\,u\right)^2 &= -(1-\mathrm{dn}^2 u)(\kappa'^2-\mathrm{dn}^2 u). \end{cases} \tag{4.6}$$

4.2 楕円積分の逆関数としての $\mathrm{sn}\,u$

楕円積分

$$F(v) = \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}$$

を考える．ここで，$\kappa \neq 0, \pm 1$ とする．x の関数 $f(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}$ には 2 つの枝があるが，$x=0$ の近傍で，$f(0)=1$ なる枝をとっておく．v は 0 の近傍を動くものとする．$\mathrm{sn}\,0 = 0$ であり，$\mathrm{sn}'\,0 = \mathrm{cn}\,0\,\mathrm{dn}\,0 = 1$ であるから，u が 0 の近傍にあるとき，$\mathrm{sn}\,u$ も 0 の近傍にあり，

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}\,u = \sqrt{(1-\mathrm{sn}^2 u)(1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 u)}$$

である．一方，

$$\frac{dF}{dv} = \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)(1-\kappa^2 v^2)}}$$

であるから，合成関数 $F(\mathrm{sn}\,u)$ は

$$\frac{d}{du}F(\mathrm{sn}\,u) = \frac{1}{\sqrt{(1-\mathrm{sn}^2 u)(1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 u)}}\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}\,u = \frac{\sqrt{(1-\mathrm{sn}^2 u)(1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 u)}}{\sqrt{(1-\mathrm{sn}^2 u)(1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 u)}} = 1.$$

ゆえに，

$$F(\mathrm{sn}\,u) = u + C, \quad C \text{ は定数}$$

となるが，$u=0$ を代入すれば，$\mathrm{sn}\,0 = 0$, $F(0) = 0$ であるから，$C = 0$ を得る．よって，

$$F(\mathrm{sn}\,u) = u$$

を得る．これは，0 の近傍において，$\mathrm{sn}\,u$ が楕円積分 $F(v)$ の逆関数であることを示している．したがって，$v=0$ の近傍において，

$$\mathrm{sn}\,F(v) = v$$

が成り立つ．

いま，κ は $0 < \kappa < 1$ を満たす実数であるとする．楕円積分 $F(v)$ は $v = 0$ の近傍で正則であるから，収束べき級数に Taylor 展開される．$v = 0$ の回りでの Taylor 展開を求めよう．一般の二項定理によって，$|x| < 1$ において，

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n.$$

したがって，

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

とおけば，$v = 0$ のある近傍において，

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dv} &= \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)(1-\kappa^2 v^2)}} \\
&= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell v^{2\ell} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \kappa^{2m} v^{2m} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell+m=n} a_\ell \, a_m \kappa^{2m} \right) v^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n v^{2n}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$b_n = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} a_m \kappa^{2m}$$

とおいた．$F(0) = 0$ であるから，$v = 0$ のある近傍において，

$$F(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2n+1} v^{2n+1}. \tag{4.7}$$

この右辺の収束半径を考える．(4.7) の右辺で $v = 1$ を代入した和

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2n+1}$$

を考える．これは正項級数だから，

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} a_m \kappa^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \, a_{n-m} \right) a_m \kappa^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+2m+1} \, a_\ell \right) a_m \kappa^{2m}.
\end{aligned}$$

ここで，$|x|<1$ のとき，

$$\frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell x^{2\ell+2m}$$

であるから，$|v|<1$ のとき，

$$\int_0^v \frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+2m+1}\,a_\ell\,v^{2\ell+2m+1}.$$

ここで，Stirling の公式から，$a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ であるから，ある定数 $C>0$ について，

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+2m+1}\,a_\ell \le \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1}\,a_\ell \le \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{C}{(2\ell+1)^{\frac{3}{2}}} < \infty.$$

Abel の連続性定理により，

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+2m+1}\,a_\ell.$$

を得る．この左辺は，$x=\sin t$ と置換することによって，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2m} t}{\cos t}\cos t\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} t\,dt = I_m\end{aligned}$$

とおけば，部分積分によって，$m\ge 1$ のとき，

$$\begin{aligned}I_m &= [-\cos t\sin^{2m-1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2m-1)\cos^2 t\sin^{2m-2} t\,dt \\ &= (2m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{2m-2} t - \sin^{2m} t)\,dt \\ &= (2m-1)I_{m-1} - (2m-1)I_m.\end{aligned}$$

よって，$I_m = \dfrac{2m-1}{2m} I_{m-1}$ である．これを繰り返し用いれば，

$$I_m = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} I_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}a_m$$

を得る．以上によって，

$$S = \frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{\infty} a_m^2 \kappa^{2m}$$

であり，$a_m^2 \sim 1/(\pi m)$, $0 < \kappa < 1$ であるから，S は収束する．したがって，$|v| < 1$ において，(4.7) が成り立つ．

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x-\kappa^2 x^2)}}$$

とおけば，Abel の連続定理によって，

$$K = \lim_{v \to 1-0} F(v) = S$$

を得る．一方，$v = 0$ のある近傍で，$\operatorname{sn} F(v) = v$ が成り立っているから，一致の定理により，$|v| < 1$ において，$\operatorname{sn} F(v) = v$ が成り立つ．この両辺で，$v \to 1-0$ とすれば，

$$\operatorname{sn} K = 1$$

を得る．

4.3 楕円関数としての $\operatorname{sn} u$

補題 3.17, 3.18, 3.19 より，

$$\begin{aligned}
\theta_{00}(z+1) &= \theta_{00}(z), & \theta_{01}(z+1) &= \theta_{01}(z), \\
\theta_{10}(z+1) &= -\theta_{10}(z), & \theta_{11}(z+1) &= -\theta_{11}(z), \\
\theta_{00}(z+\tau) &= k\theta_{00}(z), & \theta_{01}(z+\tau) &= -k\theta_{01}(z), \\
\theta_{10}(z+\tau) &= k\theta_{10}(z), & \theta_{11}(z+\tau) &= -k\theta_{11}(z), \\
\theta_{00}(z+\tau+1) &= k\theta_{00}(z), & \theta_{01}(z+\tau+1) &= -k\theta_{01}(z), \\
\theta_{10}(z+\tau+1) &= -k\theta_{10}(z), & \theta_{11}(z+\tau+1) &= k\theta_{11}(z).
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$k = \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}\tau - z\right)$ とおいた．$u = \pi\theta_{00}^2 z$ であるから，

$$\omega = \frac{\pi}{2}\theta_{00}^2, \quad \omega' = \frac{\pi}{2}\theta_{00}^2\tau \tag{4.8}$$

とおくとき，z に $z+1$, $z+\tau$ を代入することは，u に $u+2\omega$, $u+2\omega'$ を代入することである．したがって，$\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ の定義と上の変換式から，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sn}(u+2\omega) &= -\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}}\frac{\theta_{11}(z+1)}{\theta_{01}(z+1)} = -\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}}\frac{(-1)\theta_{11}(z)}{\theta_{01}(z)} = -\operatorname{sn} u,\\
\operatorname{sn}(u+2\omega') &= -\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}}\frac{\theta_{11}(z+\tau)}{\theta_{01}(z+\tau)} = -\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}}\frac{(-k)\theta_{11}(z)}{(-k)\theta_{01}(z)} = \operatorname{sn} u,\\
\operatorname{cn}(u+2\omega) &= \frac{\theta_{01}}{\theta_{10}}\frac{\theta_{10}(z+1)}{\theta_{01}(z+1)} = \frac{\theta_{01}}{\theta_{10}}\frac{(-1)\theta_{10}(z)}{\theta_{01}(z)} = -\operatorname{cn} u,\\
\operatorname{cn}(u+2\omega') &= \frac{\theta_{01}}{\theta_{10}}\frac{\theta_{10}(z+\tau)}{\theta_{01}(z+\tau)} = \frac{\theta_{01}}{\theta_{10}}\frac{k\theta_{10}(z)}{(-k)\theta_{01}(z)} = -\operatorname{cn} u,\\
\operatorname{dn}(u+2\omega) &= \frac{\theta_{01}}{\theta_{00}}\frac{\theta_{00}(z+1)}{\theta_{01}(z+1)} = \frac{\theta_{01}}{\theta_{00}}\frac{\theta_{00}(z)}{\theta_{01}(z)} = \operatorname{dn} u,\\
\operatorname{dn}(u+2\omega') &= \frac{\theta_{01}}{\theta_{00}}\frac{\theta_{00}(z+\tau)}{\theta_{01}(z+\tau)} = \frac{\theta_{01}}{\theta_{00}}\frac{k\theta_{00}(z)}{(-k)\theta_{01}(z)} = -\operatorname{dn} u.
\end{aligned}
$$

まとめると，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sn}(u+2\omega) = -\operatorname{sn} u, \quad &&\operatorname{sn}(u+2\omega') = \operatorname{sn} u,\\
&\operatorname{cn}(u+2\omega) = -\operatorname{cn} u, \quad &&\operatorname{cn}(u+2\omega') = -\operatorname{cn} u,\\
&\operatorname{dn}(u+2\omega) = \operatorname{dn} u, \quad &&\operatorname{dn}(u+2\omega') = -\operatorname{dn} u.
\end{aligned}
$$

したがって，$\operatorname{sn} u$ は周期 $4\omega, 2\omega'$，$\operatorname{cn} u$ は周期 $4\omega, 2\omega+2\omega'$，$\operatorname{dn} u$ は周期 $2\omega, 4\omega'$ を持つ楕円関数である．

$\theta_{00}(z)$, $\theta_{01}(z)$, $\theta_{10}(z)$, $\theta_{11}(z)$ の零点から $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ の零点と極は次の表のようになる．ただし，$n, n' \in \mathbb{Z}$ である．

	零点	極
$\operatorname{sn} u$	$2n\omega + 2n'\omega'$	$2n\omega + (2n'+1)\omega'$
$\operatorname{cn} u$	$(2n+1)\omega + 2n'\omega'$	$2n\omega + (2n'+1)\omega'$
$\operatorname{dn} u$	$(2n+1)\omega + (2n'+1)\omega'$	$2n\omega + (2n'+1)\omega'$

さて，アファイン 4 次曲線

$$
C : y^2 = (1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)
$$

を考える．$\kappa \neq 0, \pm 1$ とすると，C は非特異である．C のコンパクト化 $\bar{C}$ を次のように構成する．2 つのアフィン平面 $W = \mathbb{C}^2$ と $W' = \mathbb{C}^2$ を以下の規則で貼り合わせる．点 $(x, y) \in W$ と点 $(x', y') \in W'$ は次の条件 (i),(ii) を満たすとき同一視する:

$$
(i) \;\; xx' = 1, \quad (ii) \;\; y = \frac{y'}{x'^2}.
$$

$C \subset W$ と考える．すなわち，

$$C = \{(x, y) \in W \mid y^2 = (1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)\}$$

と考える．さらに別の曲線

$$C' = \{(x', y') \in W' \mid y'^2 = (x'^2 - 1)(x'^2 - \kappa^2)\}$$

を考えると，C と C' は $W \cap W'$ 上で一致し，代数曲線 $\bar{C}$ を得る．この $\bar{C}$ は次の空間射影曲線 $\tilde{C}$ と同型である．

$$\tilde{C} = \{(w_0 : w_1 : w_2 : w_3) \in \mathbb{P}^3 \mid w_0 w_1 - w_2^2 = 0,\ (w_0 - w_1)(w_0 - \kappa^2 w_1) - w_3^2 = 0\}.$$

同型は

$$\tilde{C} \ni (w_0 : w_1 : w_2 : w_3) \longmapsto \begin{cases} \left(\dfrac{w_2}{w_0}, \dfrac{w_3}{w_0}\right) \in C, & w_0 \neq 0, \\ \left(\dfrac{w_2}{w_1}, \dfrac{w_3}{w_1}\right) \in C', & w_1 \neq 0 \end{cases}$$

によって定義される．

一方，$\mathrm{cn}^2 u \, \mathrm{dn}^2 u = (1 - \mathrm{sn}^2 u)(1 - \kappa^2 \mathrm{sn}^2 u)$, $\mathrm{sn}' u = \mathrm{cn}\, u \, \mathrm{dn}\, u$ が成り立つ．これから，有理写像

$$\mathbb{C} \ni u \longmapsto (\mathrm{sn}\, u, \mathrm{cn}\, u \, \mathrm{dn}\, u) = (\mathrm{sn}\, u, \mathrm{sn}' u) \in C$$

は解析写像

$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \bar{C} = C \cup C'$$

を定義する．$\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{sn}' u = \mathrm{cn}\, u \, \mathrm{dn}\, u$ はそれぞれ，$4\omega, 2\omega'$ を周期とする位数 2，位数 4 の楕円関数である．したがって，$\Omega = \mathbb{Z}(4\omega) + \mathbb{Z}(2\omega')$ とおくとき，φ は解析写像

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{C}/\Omega \longrightarrow \bar{C} = C \cup C'$$

を引き起こす．これは定値写像でないから開写像であり，$\tilde{\varphi}(\mathbb{C}/\Omega)$ は開集合である．一方，$\mathbb{C}/\Omega$ はコンパクトであるから，$\tilde{\varphi}(\mathbb{C}/\Omega)$ はコンパクト，したがって，閉集合である．ゆえに，$\tilde{\varphi}(\mathbb{C}/\Omega) = \bar{C}$ である．すなわち，$\tilde{\varphi}$ は全射である．$\tilde{\varphi}$ が単射でないとすると，$u_1, u_2 \in \mathbb{C}$, $u_1 \not\equiv u_2 \pmod{\Omega}$ で，$\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$ となるものが存在する．$\mathrm{sn}\, u_1 = \mathrm{sn}\, u_2$, $\mathrm{sn}' u_1 = \mathrm{sn}' u_2$ である．$\mathrm{sn}\, u$ は奇関数，$\mathrm{sn}' u$ は偶関数，$\mathrm{sn}(u + 2\omega) = -\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{sn}'(u + 2\omega) = -\mathrm{sn}' u$ を用いる．$f(u) = \mathrm{sn}\, u - \mathrm{sn}\, u_1$ とおく．$f(u_1) = f(u_2) = 0$ であり，$f(u)$ は Ω に関する 2 位の楕円関数であるから，$f(u) = 0$ の解は $\mathrm{mod}\Omega$ で，u_1, u_2 の 2 つだけである．したがって，$u = u_1$ は $f(u) = 0$ の 1 位の零点であり，$f'(u_1) = \mathrm{sn}' u_1 \neq 0$ である．しかし，$\mathrm{sn}(2\omega - u_1) = -\mathrm{sn}(-u_1) = \mathrm{sn}\, u_1$ であるから，$f(2\omega - u_1) = 0$ である．よって，$i = 1$ または 2 について，$2\omega - u_1 \equiv u_i \pmod{\Omega}$ である．$\mathrm{sn}' u_1 = \mathrm{sn}' u_i = \mathrm{sn}'(2\omega - u_1) = -\mathrm{sn}'(-u_1) = -\mathrm{sn}'(u_1)$ より，$\mathrm{sn}' u_1 = 0$ となり矛盾である．ゆえに，$\tilde{\varphi}$ は単射である．以上によって，$\tilde{\varphi} : \mathbb{C}/\Omega \longrightarrow \bar{C}$ は同型である．

4.4　楕円積分をテータ定数で表す Jacobi の公式

定積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}$$

のような平方根を含んだ定積分を考えるとき，積分路と平方根の符号をはっきりさせなければならない．

$\kappa \neq 0, \pm 1$ として，$B(x) = (1-x^2)(1-\kappa^2x^2)$ とおく．$B(x) = 0$ の根を $\alpha = -\kappa^{-1}$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, $\delta = \kappa^{-1}$ とする．

$$p : C \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad p' : C' \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

を，$p(\xi, \eta) = (1 : \xi)$, $p'(\xi', \eta') = (\xi' : 1)$ によって定義する．そのとき，p と p' は $C \cap C'$ 上で一致し，正則写像

$$\bar{p} : \bar{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

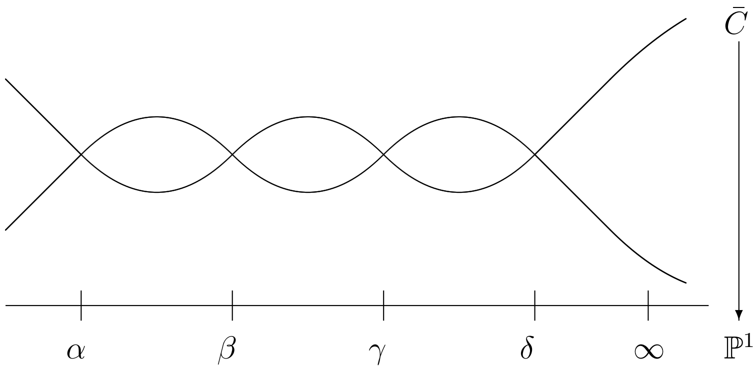
を定義する．$P = (1 : a) \in \mathbb{P}^1$ とすると，$p^{-1}(P) = (a : \pm\sqrt{B(a)}) \in C$ であるので，

$$\bar{p}^{-1}(P) = \begin{cases} 1\text{ 点}, & P = (1:\alpha), (1:\beta), (1:\gamma), (1:\delta), \\ 2\text{ 点}, & P \text{ は上記の 4 点以外} \end{cases}$$

となる．$P = (0 : 1)$ のとき，$p' : C' \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を考えることによって，$\bar{p}^{-1}(P) = \{(0, \kappa), (0, \kappa')\}$ である．したがって，$P \in \mathbb{P}^1$ について，

$$\bar{p}^{-1}(P) = \begin{cases} 1\text{ 点}, & P = (1:\alpha), (1:\beta), (1:\gamma), (1:\delta), \\ 2\text{ 点}, & P \text{ は上記の 4 点以外} \end{cases}$$

となる．



写像 $\bar{p} : \bar{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ によって，$\bar{C}$ は $\mathbb{P}^1$ を 2 重に覆っている．点 $P = (1 : \alpha)$, $(1 : \beta)$, $(1 : \gamma)$, $(1 : \delta)$ に限って，$\bar{p}^{-1}(P)$ は 1 点となっている．これらの点において，$\bar{p}$ は**分岐する**という．$\bar{C}$ は自然に複素多様体と考えられる．このとき，位相的に $\bar{C}$ がどうなっているかを考える．$\bar{C}$ は曲線

$$C : y = \pm\sqrt{B(x)}$$

に2点からなる集合 $\bar{p}^{-1}((0:1))$ を加えたものである．

まず，関数 $y=\pm\sqrt{x-a}$ について考えよう．これは，

$$y^2=x-a$$

を考えることに他ならない．$x_0\neq a$ を固定すると，$\eta^2=x_0-a$ を満たす $\eta\in\mathbb{C}$ は2つ決まる．それを η_1,η_2 とする．$\eta_1\neq 0,\eta_2\neq 0$ である．陰関数の定理により，$x=x_0$ の近傍での正則関数

$$\begin{aligned}
y_1(x)&=\eta_1+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots,\\
y_2(x)&=\eta_2+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots
\end{aligned}$$

が定まり，$y_1(x)^2=x-a, y_2(x)^2=x-a$ となる．実際には，$y_2(x)=-y_1(x)$ である．x_0 から出発して，a を内部に含まない単純閉曲線 Γ に沿って $y_1(x)$ を解析接続しよう．

$$\Gamma: x(t)=a+(x_0-a)r(t)\boldsymbol{e}(\theta(t))\quad(0\leq t\leq 1), r(0)=r(1)=1,\ \theta(0)=\theta(1)=0$$

とする．これを $y_1(x)$ に代入すると，

$$\bar{y}_1(t)=y_1\left(a+(x_0-a)r(t)\boldsymbol{e}(\theta(t))\right)$$

を得る．$y_1(x)^2=x-a, y_1(x_0)=\eta_1$ より，

$$\bar{y}_1(t)^2=(x_0-a)r(t)\boldsymbol{e}(\theta(t)),\quad \eta_1^2=x_0-a.$$

したがって，

$$\bar{y}_1(t)=\pm\eta_1\sqrt{r(t)}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\theta(t)\right).$$

$\bar{y}_1(t)$ は t の連続関数であるから，

$$\bar{y}_1(t)=\eta_1\sqrt{r(t)}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\theta(t)\right)$$

を得る．ゆえに，

$$\bar{y}_1(1)=\eta_1$$

である．このことは，γ に沿って $y_1(x)$ を解析接続して得られる $x=x_0$ の近傍での正則関数を $\tilde{y}_1(x)$ とかくと，$\tilde{y}_1(x_0)=\eta_1$ であること，したがって，$\tilde{y}_1(x)=y_1(x)$ であることを示している．$y_2(x)$ についても同様である．

次に，a を中心とする円周に沿って解析接続しよう．

$$x=a+\boldsymbol{e}(\theta)(x_0-a)$$

とおく．これを

$$\bar{y}_1(\theta) = y_1\left(a + \boldsymbol{e}(\theta)(x_0 - a)\right)$$

を得る．$y_1(x)^2 = x - a$ より，

$$\bar{y}_1(\theta)^2 = \boldsymbol{e}(\theta)(x_0 - a).$$

一方，

$$\bar{y}_1(0) = y_1(x_0) = \eta_1.$$

これから，

$$\eta_1^2 = x_0 - a, \quad \bar{y}_1(\theta)^2 = \boldsymbol{e}(\theta)\eta_1^2.$$

したがって，$\bar{y}_1(\theta) = \pm\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\eta_1$ であるが，$\bar{y}_1(\theta)$ は θ の連続関数であるから，

$$\bar{y}_1(\theta) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\eta_1$$

である．ゆえに，

$$\bar{y}_1(1) = -\eta_1$$

である．このことは，a を中心とする円周に沿って $y_1(x)$ を解析接続して得られる $x = x_0$ の近傍での正則関数を $\tilde{y}_1(x)$ とかくと，$\tilde{y}_1(x_0) = -\eta_1$ であること，したがって，$\tilde{y}_1(x) = -y_1(x)$ であることを示している．同じ理由で，$y_2(x) = -y_1(x)$ を a を中心とする円周に沿って解析接続すると，$-y_2(x) = y_1(x)$ を得る．以上の考察を

$$y^2 = B(x) = \kappa^2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

に対して適用する．$x_0 \neq \alpha, \beta, \gamma, \delta$ を固定すれば，$x = x_0$ の近傍で 2 つの正則関数 $y_1(x), y_2(x)$ で，

$$y_i(x)^2 = \kappa^2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \quad (i = 1, 2)$$

となるものが存在する．$y_1(x)$ を単純閉曲線 Γ に沿って解析接続して得られる $x = x_0$ の近傍での正則関数を $\bar{y}_1(x)$ とすると，

$$\bar{y}_1(x) = \begin{cases} y_1(x), & \#\left((\Gamma\text{の内部}) \cap \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}\right) \text{ が偶数}, \\ -y_1(x), & \#\left((\Gamma\text{の内部}) \cap \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}\right) \text{ が奇数} \end{cases}$$

となる．曲線 $C = \{(\xi, \eta) \in W = \mathbb{C}^2 \mid \eta^2 = B(\xi)\}$ は 2 価関数 $y = y_1(x)$ のグラフ $\{(x, y_1(x)) \in \mathbb{C}^2 \mid x \in \mathbb{C}\}$ とみなせる．$\bar{C} = C \cup C'$ であり，C' についても同様の考察をすることによって，$\bar{C}$ の形は次のようになる．Riemann 球面に α と β を結ぶ線分，および γ と δ を結ぶ線分に沿って切れ目を入れた Riemann 面 R を考える．$\alpha\beta$ の一方の縁を λ_+，他方の縁を λ_- とする．同様に，$\gamma\delta$ の一方の縁を μ_+，他方

の縁を μ_- とする．$\alpha' = -\kappa$, $\beta' = -1$, $\gamma' = 1$, $\delta' = \kappa$ とおき，同じように $\alpha'\beta'$, $\gamma'\delta'$ に切れ目を入れた Riemann 面 R' を考える．切れ目の縁を λ'_+, λ'_-, μ'_+, μ'_- とし，2 つを次のように貼り合わせる．$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はそれぞれ他方の $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ に重ねる．一方の λ_+ を λ'_- に，λ_- を λ'_+ に，μ_+ を μ'_- に，μ_- を μ'_+ につなげる．このようにして円環面を得る．曲線 $\bar{C}$ は通常の位相に関して円環面と同相であることがわかった．Riemann 面 R 上では

$$f_i(x)^2 = (1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2) \quad (i = 1, 2)$$

となる 2 つの正則関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ が存在して，

$$f_1(x) = -f_2(x)$$

が成立する．

定理 4.2 (Jacobi の公式)**.**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)}} = \frac{\pi}{2} \theta_{00}(0, \tau)^2.$$

ここで，モジュラス κ は

$$\kappa = \frac{\theta_{10}(0, \tau)^2}{\theta_{00}(0, \tau)^2}$$

である．また，平方根 $f(x) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)}$ には上で定義した *Riemann* 面 R 上に 2 つの枝があるが，$f(0) = 1$ となる枝をとる．積分路は 0 と 1 を結ぶ線分をとる．

注意 4.3. 定理の等式の左辺を $\kappa \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$ の関数と考えると，多価関数となるが，上半平面 $\mathbb{H}$ は単連結であるから，$\kappa \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$ の多価関数

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)}}$$

のどの枝をとっても，κ に $\kappa(\tau) = \dfrac{\theta_{10}(0, \tau)^2}{\theta_{00}(0, \tau)^2}$ を代入して得られる $\tau \in \mathbb{H}$ の関数

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \kappa(\tau)^2 x^2)}}$$

は上半平面上 1 価正則である．この関数を定めるには，一致の定理によって，$\tau \in \mathbb{H}$ が純虚数の場合に積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \kappa(\tau)^2 x^2)}}$$

の値を定めれば十分である．すなわち，左辺は次の条件を満たす $\tau \in \mathbb{H}$ の正則関数 $h(\tau)$ を表すものとして定義する: $\tau \in \mathbb{H}$ が純虚数のとき，$\kappa(\tau)$ は $0 < \kappa(\tau) < 1$ となる実数であることがわかり，開区間 $(0,1)$ 上で $(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2) > 0$ であるので，

$$h(\tau) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa(\tau)^2 x^2)}}$$

と定める．ただし，平方根は $\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa(\tau)^2 x^2)}$ は通常のように正の値をとるものとする．

[定理 4.2 の証明] まず，

$$\mathrm{sn}\left(\frac{\pi}{2}\theta_{00}(0,\tau)^2\right) = 1$$

を示す．実際，$\mathrm{sn}\, u$ の定義から

$$\mathrm{sn}\left(\frac{\pi}{2}\theta_{00}(0,\tau)^2\right) = -\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}} \frac{\theta_{11}\left(\frac{1}{2},\tau\right)}{\theta_{01}\left(\frac{1}{2},\tau\right)}. \tag{4.9}$$

指標付きテータ関数の定義から，

$$\theta_{01}(z,\tau) = \theta_{00}\left(z+\frac{1}{2},\tau\right), \tag{4.10}$$

$$\theta_{10}(z,\tau) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}z\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}\tau,\tau\right), \tag{4.11}$$

$$\theta_{11}(z,\tau) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)\theta_{00}\left(z+\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2},\tau\right) \tag{4.12}$$

であるので，(4.10) より，

$$\theta_{01}\left(\frac{1}{2},\tau\right) = \theta_{00}(0,\tau). \tag{4.13}$$

(4.12) より，

$$\theta_{11}\left(\frac{1}{2},\tau\right) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau+\frac{1}{2}\right)\theta_{00}\left(\frac{1}{2}\tau,\tau\right). \tag{4.14}$$

一方，(4.11) より，

$$\theta_{10}\,(0,\tau) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{8}\tau\right)\theta_{00}\left(\frac{1}{2}\tau,\tau\right). \tag{4.15}$$

(4.14), (4.15) より，

$$\theta_{11}\left(\frac{1}{2},\tau\right) = -\theta_{10}(0,\tau). \tag{4.16}$$

したがって，(4.9), (4.13), (4.16) より，

$$\mathrm{sn}\left(\frac{\pi}{2}\theta_{00}(0,\tau)^2\right) = -\frac{\theta_{00}}{\theta_{10}} \frac{(-1)\theta_{10}(0,\tau)}{\theta_{00}(0,\tau)} = 1.$$

すでにみたように，$\omega = \dfrac{\pi}{2}\theta_{00}^2$ は $\operatorname{cn} u$ の 1 位の零点であり，

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u = (1 - \operatorname{sn} u)(1 + \operatorname{sn} u)$$

であるから，$\dfrac{\pi}{2}\theta_{00}^2$ は $\operatorname{sn} u - 1$ の 2 位の零点である．$\operatorname{sn} u$ は $\mathbb{Z}(4\omega) + \mathbb{Z}(2\omega')$ を周期とする位数 2 の楕円関数であるので，命題 2.10 より，基本周期平行四辺形 $P[0]$ 上の $1 - \operatorname{sn} u$ の零点は 2 位の零点 $u = \dfrac{\pi}{2}\theta_{00}^2$ のみである．したがって，$\mathbb{C}$ における $1 - \operatorname{sn} u$ の零点は

$$u = \frac{\pi}{2}\theta_{00}^2 + 4n\omega + 2n'\omega' \quad (n, n' \in \mathbb{Z})$$

である．

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)}}$$

とおけば，$\operatorname{sn} K = 1$ であった．したがって，ある $n, n' \in \mathbb{Z}$ について，

$$K = \frac{\pi}{2}\theta_{00}^2 + 4n\omega + 2n'\omega'$$

である．$n = n' = 0$ であることを示す必要がある．ここで，τ は純虚数であると仮定して定理を証明する．このとき，(3.20), (3.22), (3.24) より，

$$0 < \kappa = \frac{\theta_{10}^2}{\theta_{00}^2} \in \mathbb{R}, \quad \kappa' = \frac{\theta_{01}^2}{\theta_{00}^2} \in \mathbb{R}.$$

一方，$\kappa\kappa' \neq 0$ であり，

$$\kappa^2 + \kappa'^2 = 1$$

であるから，$0 < \kappa < 1$ である．また，(4.2) より，$0 < \kappa' < 1$ も成り立つ．

$$K = \frac{\pi}{2}\theta_{00}^2 + 4n\omega + 2n'\omega' = (4n + 1)\omega + 2n'\omega'$$

において，左辺は実数であり，右辺は $\omega = \dfrac{\pi}{2}\theta_{00}^2 \in \mathbb{R}$, $\omega' = \dfrac{\pi}{2}\theta_{00}^2\tau \in i\mathbb{R}$ であるから，$n' = 0$ を得る．すなわち，

$$K = (4n + 1)\omega = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\theta_{00}^2$$

である．$0 \leq s \leq 1$ の関数

$$F(s) = \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)}}$$

を考える．$K = F(1) > 0$ より，$n \geq 0$ である．$n \geq 1$ として矛盾を導く．$n \geq 1$ とすると，

$$\frac{\pi}{2}\theta_{00}^2 < F(1) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\theta_{00}^2$$

であるので，中間値の定理によって，$0 < a < 1$ で，

$$\frac{\pi}{2}\theta_{00}^2 = F(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}$$

となるものが存在する．§ 4.2 でみたように，$\mathrm{sn}\, F(a) = a$ であるから，

$$a = \mathrm{sn}\, F(a) = \mathrm{sn}\left(\frac{\pi}{2}\theta_{00}^2\right) = 1$$

となって，矛盾である．したがって，$n = 0$ でなければならない．以上によって，τ が純虚数のとき，

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}\theta_{00}^2$$

が証明された．

$$\kappa = \frac{\theta_{10}(0,\tau)^2}{\theta_{00}(0,\tau)^2}$$

であるから，定理の等式の両辺

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}, \quad \frac{\pi}{2}\theta_{00}(0,\tau)^2$$

はともに $\tau \in \mathbb{H}$ の正則関数であり，$\tau \in \mathbb{H} \cap i\mathbb{R}$ のとき，両者は一致する．したがって，一致の定理によって，任意の $\tau \in \mathbb{H}$ について，

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}\theta_{00}(0,\tau)^2$$

が成り立つ． □

さて，補モジュラス $\kappa' = \dfrac{\theta_{01}^2}{\theta_{00}^2}$ は，$\tau' = -1/\tau$ とおくと，

$$\kappa^2 + \kappa'^2 = 1, \quad \kappa' = \frac{\theta_{10}(0,\tau')^2}{\theta_{00}(0,\tau')^2}$$

であった．さらに，

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa'^2x^2)}}$$

とおく．ここで，平方根は $x = 0$ のとき，1 となる Riemann 面 R' 上の枝をとるものとし，積分路は 0 と 1 を結ぶ線分をとる．ただし，R' は R と同様に，Riemann 球面に $-1/\kappa'$ と -1 および，1 と $1/\kappa'$ を結ぶ線分に沿って切れ目を入れた Riemann 面を表すとする．したがって，定理 4.2 より，

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa'^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}\theta_{00}(0,\tau')^2$$

であり，K' は $\tau' \in \mathbb{H}$ の一価正則関数である．$\tau' = -1/\tau$ であるから，

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa'^2 x^2)}}$$

は $\tau \in \mathbb{H}$ の一価正則関数である．

補題 4.4.

$$K' = \int_1^{1/\kappa} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-\kappa^2 s^2)}}$$

が成り立つ．ここで，平方根は $s=0$ のとき，i となる *Riemann* 面 R 上の枝を表す．*Riemann* 面 R 上の積分路は 1 と $1/\kappa$ を結ぶ線分上の縁 μ_+ にとる．

ここでも，右辺の積分の意味が問題になるが，右辺は，$\tau \in \mathbb{H}$ が純虚数のとき，したがって，モジュラス κ が $0<\kappa<1$ となる実数のとき，平方根

$$\sqrt{(s^2-1)(1-\kappa^2 s^2)}$$

は s が 1 と $1/\kappa$ を結ぶ縁 μ_+ 上にあるとき，非負となる Riemann 面 R 上の枝を表すものとする．

以上の記号を用いて，右辺は $\mathbb{H}$ 上の関数 $g(\tau)$ であって，$\tau \in \mathbb{H}$ が純虚数のとき，したがって，モジュラス κ が $0<\kappa<1$ となる実数のとき，

$$g(\tau) = \int_1^{1/\kappa} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-\kappa^2 s^2)}}$$

となるものを表すとする．

[証明]　$\tau \in i\mathbb{R}$ とする．このとき，κ, κ' は実数であり，$\kappa > 0$ である．一方，$\kappa^2+\kappa'^2=1$ であるので，$0<\kappa<1$, $\kappa^2+\kappa'^2=1$ である．この仮定の下で，

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa'^2 t^2)}} = \int_1^{1/\kappa} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-\kappa^2 s^2)}} \tag{4.17}$$

を証明する．ここで，平方根は正の枝をとるとし，積分路は 0 と 1，1 と $1/\kappa$ を結ぶ線分とする．この場合，両辺は実関数の区間 $[0,1]$, $[1,1/\kappa]$ 上の広義積分である．変数変換

$$s = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa'^2 t^2}}, \quad 0<t<1$$

で右辺の積分を変換する．

$$s^2 = \frac{1}{1-\kappa'^2 t^2}$$

であるので，

$$s^2 - 1 = \frac{\kappa'^2 t^2}{1-\kappa'^2 t^2},$$
$$1-\kappa^2 s^2 = \frac{\kappa'^2(1-t^2)}{1-\kappa'^2 t^2}.$$

したがって，
$$(s^2-1)(1-\kappa^2 s^2)=\frac{\kappa'^4 t^2(1-t^2)}{(1-\kappa'^2t^2)^2}$$
である．一方，
$$\frac{ds}{dt}=\frac{\kappa'^2 t}{(1-\kappa'^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$
であるから，
$$\frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-\kappa^2s^2)}}=\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa'^2t^2)}}.$$
したがって，κ,κ' が $\kappa^2+\kappa'^2=1$ を満たす正の実数であるとき，(4.17) が証明された．すなわち，$\tau\in\mathbb{H}$ の正則関数である (4.17) の両辺は τ が純虚数のときに一致する．したがって，任意の $\tau\in\mathbb{H}$ に対して，(4.17) が成り立つ． □

定理 4.5.
$$K'=-i\frac{\pi}{2}\theta_{00}^2\tau.$$

[証明]
$$\kappa'=\frac{\theta_{10}\left(0,-\frac{1}{\tau}\right)^2}{\theta_{00}\left(0,-\frac{1}{\tau}\right)^2}=\frac{\theta_{01}\left(0,\tau\right)^2}{\theta_{00}\left(0,\tau\right)^2}$$
であるので，定理 4.2 より，
$$K'=\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-\kappa'^2s^2)}}=\frac{\pi}{2}\theta_{00}\left(0,-\frac{1}{\tau}\right)^2.$$
一方，定理 3.32 より，
$$\theta_{00}\left(0,-\frac{1}{\tau}\right)^2=-i\tau\,\theta_{00}(0,\tau)^2.$$
ゆえに，
$$K'=-i\frac{\pi}{2}\theta_{00}^2\tau.$$
□

4.5 楕円曲線の周期

§ 4.3 で考察した 4 次曲線
$$C:y^2=(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)$$
およびそのコンパクト化 $\bar{C}$ を考える．§ 4.3 の記号を用いる．代数曲線 C 上の微分
$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}=\frac{dx}{y}\tag{4.18}$$

を考える．平方根の符号は注意深く選ぶ必要がある．そうすることによって，定理 4.2, 補題 4.4, 定理 4.5 の意味がわかる．

$$y^2 = (1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)$$

の両辺の微分をとって，

$$2ydy = \left(-2x(1-\kappa^2x^2) - 2\kappa^2 x(1-x^2)\right) dx$$

より，

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x(1-\kappa^2x^2)+\kappa^2 x(1-x^2)}. \tag{4.19}$$

dx/y は $y \neq 0$ となる点 $(x,y) \in C$ で正則である．一方，(4.19) より，dx/y は $y=0$ なる点，すなわち，$\{(x,0) \in C \,|\, x=\pm 1,\, x=\pm\kappa^{-1}\}$ においても正則である．したがって，dx/y は C 上で正則である．一方，dx/y を

$$x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{y}{x^2}$$

を用いて表示すれば，

$$\frac{dx}{y} = \frac{1}{x^2y'}\left(-\frac{dx'}{x'^2}\right) = -\frac{dx'}{y'} \tag{4.20}$$

である．すなわち，dx/y は C' 上で $-dx'/y'$ とかける．微分 dx'/y' は上と同様にして，C' 上で正則である．したがって，dx/y は $\bar{C} = C \cup C'$ 上の正則な微分である．いいかえれば，dx/y は楕円曲線 $\bar{C}$ 上の第 1 種微分である．一方，§ 4.3 の同型写像 $\tilde{\varphi} : E = \mathbb{C}/\Omega \longrightarrow \bar{C}$, $\Omega = \mathbb{Z}(4\omega) + \mathbb{Z}(2\omega')$, による引き戻しである複素トーラス E 上の微分 $\tilde{\varphi}^*(dx/y)$ は，

$$x = \operatorname{sn} u, \quad y = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = \operatorname{sn}' u$$

を代入することによって求められるので，

$$\tilde{\varphi}^*\left(\frac{dx}{y}\right) = \frac{\operatorname{sn}' u du}{\operatorname{sn}' u} = du$$

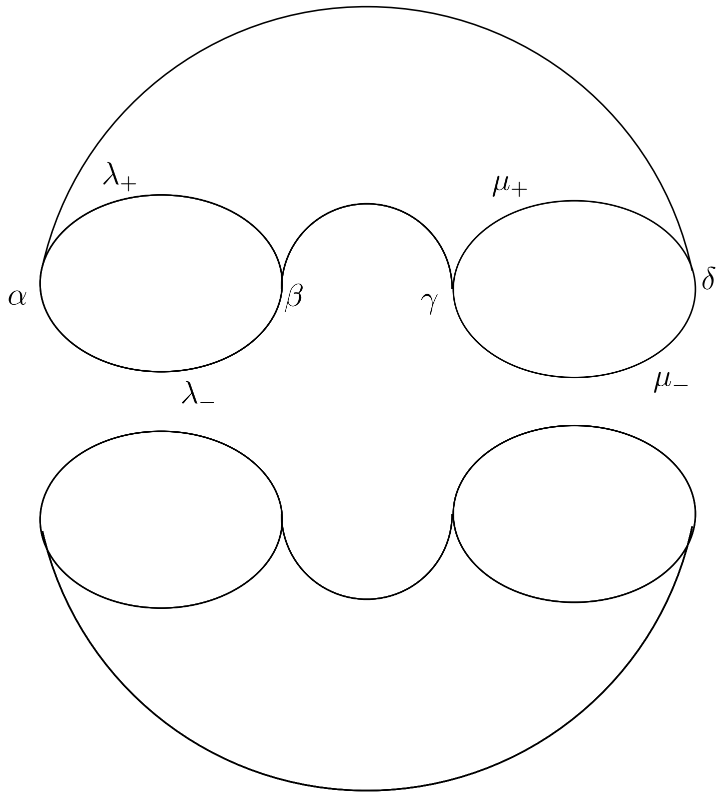
である．すなわち，

$$du = \tilde{\varphi}^*\left(\frac{dx}{y}\right)$$

が得られた．これからも，微分 dx/y が $\bar{C}$ 上の第 1 種微分であることがわかる．

$$\alpha = -\frac{1}{\kappa},\ \beta = -1,\ \gamma = 1,\ \delta = \frac{1}{\kappa}$$

とする．曲線 $\bar{C}$ は Riemann 面としては次の図のように得られた．



微分 dx/y を，β から出発して図の上の Riemann 面上を動いて γ に至り，γ から出発して図の下の Riemann 面上を動いて β に至る経路 Γ 上で積分する．ここで，積分路はそれぞれ，β と γ を結ぶ線分，γ と β を結ぶ線分とする．

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{dx}{y} &= \int_{-1,\text{上}}^{1} \frac{dx}{y} + \int_{1,\text{下}}^{-1} \frac{dx}{y} \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} + \int_{1}^{-1} \left(-\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} \right) \\
&= 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} \\
&= 4\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} = 4\frac{\pi}{2}\theta_{00}(0,\tau)^2 \\
&= 4\omega.
\end{aligned}$$

積分 $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dx}{y}$ を楕円曲線 $\bar{C}$ 上の第 1 種微分 dx/y のサイクル Γ に関する**周期**と呼ぶ．§ 4.1 で見たように，

$$\varphi(0) = (\mathrm{sn}\,0, \mathrm{sn}'\,0) = (0,1)$$

であるので，同型写像 $\tilde{\varphi} : E = \mathbb{C}/\Omega \cong \bar{C}$ によって，$\bar{C}$ 上の経路 Γ に対応する E 上の経路を Γ_E とする．$\tilde{\varphi}(0) = (0,1)$ より，Γ_E は $\bar{0} \in E$ から出発して $\bar{0} \in E$ に戻る

閉曲線である．上の等式から，

$$4\omega = \int_{\Gamma_E} \tilde{\varphi}^* \left(\frac{dx}{y} \right) = \int_{\Gamma_E} du \tag{4.21}$$

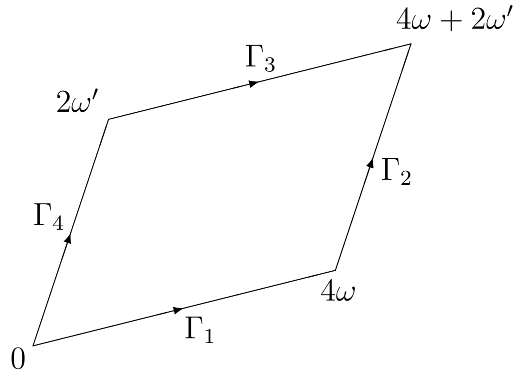
である．これは次のことを示している．$\mathbb{C}$ 上の 2 点 0 と 4ω を結ぶ線分を Γ_1 とする．自然な写像 $\mathbb{C} \longrightarrow E = \mathbb{C}/\Omega$ による Γ_1 の像を $\bar{\Gamma}_1$ とする．$\bar{\Gamma}_1$ は $\bar{0} \in E$ から $\bar{0}$ に戻る経路である．

$$4\omega = \int_0^{4\omega} du = \int_{\Gamma_1} du = \int_{\bar{\Gamma}_1} du \tag{4.22}$$

である．(4.21), (4.22) より，

$$\int_{\Gamma_E} du = \int_{\bar{\Gamma}_1} du. \tag{4.23}$$

これは複素トーラス E 上の 1-サイクル $\bar{\Gamma}_1$ と Γ_E がホモローグであることを示している．基本周期平行四辺形 $P[0]$ の閉包の各々の辺を向きを含めて下図のように定める．



複素トーラス $E = \mathbb{C}/\Omega$ は図の Γ_1 と Γ_3，Γ_2 と Γ_4 を同一視して得られる．ここで，自然な写像 $\mathcal{C} \longrightarrow E = \mathbb{C}/\Omega$ による Γ_i の像を $\bar{\Gamma}_i$ で表す $(i = 1, 2, 3, 4)$．楕円曲線 $\bar{C}$ にはもう一つ大切な 1-サイクル Γ' がある．図の上の Riemann 面上で $\gamma = 1$ から出発して μ_+ 上を動いて $\delta = 1/\kappa$ に至り，μ_- 上を動いて γ に戻る経路 Γ' である．第 1 種積分 dx/y のサイクル Γ' に関する周期，すなわち積分

$$\int_{\Gamma'} \frac{dx}{y}$$

も積分 $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{dx}{y}$ と同様に重要なはずである．前と同様にして計算する．補題 4.4, 定理 4.5 より，

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma'} \frac{dx}{y} &= \int_{1,\,\mu_+}^{1/\kappa} \frac{dx}{y} + \int_{1/\kappa,\,\mu_-}^{1} \frac{dx}{y} \\
&= \int_{1}^{1/\kappa} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} + \int_{1/\kappa}^{1} \left(- \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} \right) \\
&= 2\int_{1}^{1/\kappa} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}} \quad (\text{平方根は } x=0 \text{ で } 1) \\
&= \frac{2}{-i}\int_{1}^{1/\kappa} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-\kappa^2 s^2)}} \quad (\text{平方根は } s=0 \text{ で } i) \\
&= \frac{2}{-i}\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa'^2 x^2)}} \\
&= -\frac{2}{i}K' = \pi\theta_{00}^2\tau.
\end{aligned}
$$

定義より，$\omega' = \dfrac{\pi}{2}\theta_{00}^2\tau$ であるから，

$$
\int_{\Gamma'} \frac{dx}{y} = 2\omega'
$$

である．これから前と同様に，同型 $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}/\Omega \cong \bar{C}$ を通して，$\bar{C}$ 上のサイクル Γ' と E 上のサイクル $\bar{\Gamma}_2 = \bar{\Gamma}_4$ が対応することがわかる．

4.6　楕円曲線の周期と超幾何微分方程式

$a, b, c \in \mathbb{C}$，c は 0 以下の整数ではないとする．微分方程式

$$
u(1-u)\frac{d^2 f}{du^2} + (c-(a+b+1)u)\frac{df}{du} - abf = 0 \tag{4.24}
$$

を超幾何微分方程式という．$n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$ に対して，

$$
a^{(n)} = a(a+1)\cdots(a+n-2)(a+n-1), \quad a^{(0)} = 1
$$

とおくとき，級数

$$
F(a,b,c;u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)} b^{(n)}}{n! c^{(n)}} u^n \tag{4.25}
$$

を**ガウスの超幾何級数**と呼ぶ．

命題 4.6. 超幾何級数 $f(u) = F(a,b,c;u)$ は $|u| < 1$ において収束し，単位円板上の正則関数を表す．さらに，これは超幾何微分方程式 (4.24) を満たす．

[証明]　$A_n = \dfrac{a^{(n)}b^{(n)}}{n!c^{(n)}}$ とおくと，

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{(n+1)(c+n)}{(a+n)(b+n)} \to 1 \ \ (n \to \infty) \tag{4.26}$$

であるから，$F(a,b,c;u)$ の収束半径は 1 であり，$F(a,b,c;u)$ は $|u|<1$ 上の正則関数である．次に，微分作用素 $D = u\dfrac{d}{du}$ を考える．$Du^n = nu^n$ が成り立つことに注意する．そのとき，

$$\left[(a+D)(b+D) - (c+D)(1+D)\frac{1}{u}\right] F(a,b,c;u) = 0 \tag{4.27}$$

が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned}
&\left[(a+D)(b+D) - (c+D)(1+D)\frac{1}{u}\right] \sum_{n=0}^{\infty} A_n u^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a+D)(b+D)A_n u^n - \sum_{n=0}^{\infty}(c+D)(1+D)A_n u^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a+D)(b+D)A_n u^n - \sum_{n=-1}^{\infty}(c+D)(1+D)A_{n+1} u^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a+n)(b+n)A_n u^n - \sum_{n=-1}^{\infty}(c+n)(1+n)A_{n+1} u^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a+n)(b+n)A_n u^n - \sum_{n=0}^{\infty}(c+n)(1+n)A_{n+1} u^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(a+n)(b+n)A_n - (c+n)(1+n)A_{n+1}\right] u^n = 0.
\end{aligned}$$

ここで，最後に (4.26) を用いた．(4.28) を通常の微分方程式にかきなおそう．$D^2 f = D(Df) = u\dfrac{d}{du}\left(u\dfrac{df}{du}\right) = u\dfrac{df}{du} + u^2\dfrac{d^2 f}{du^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}
(a+D)(b+D)f &= (D^2 + (a+b)D + ab)f \\
&= u\frac{df}{du} + u^2\frac{d^2 f}{du^2} + (a+b)u\frac{df}{du} + abf.
\end{aligned}$$

一方，$D\left(\dfrac{1}{u}f\right) = u\left(-\dfrac{1}{u^2}f + \dfrac{1}{u}\dfrac{df}{du}\right) = -\dfrac{1}{u}f + \dfrac{df}{du}$ であるから，

$$\begin{aligned}
(c+D)(1+D)\frac{1}{u}f &= (c+D)\left[\frac{1}{u}f + D\left(\frac{1}{u}f\right)\right] \\
&= (c+D)\frac{df}{du} = c\frac{df}{du} + u\frac{d^2 f}{du^2}.
\end{aligned}$$

したがって，

$$(u^2-u)\frac{d^2f}{du^2}+((a+b+1)u-c)\frac{df}{du}+abf=0.$$

□

命題 4.6 は次のことを意味する．超幾何級数 $F(a,b,c;u)$ が表す単位円板上の正則関数が超幾何微分方程式 (4.24) を満たす．したがって，超幾何級数 $F(a,b,c;u)$ を解析接続して得られる正則関数も超幾何微分方程式 (4.24) を満たすことが結論される．

前節において，楕円曲線の周期

$$\int_{\Gamma}\frac{dx}{y}=4\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}},$$
$$\int_{\Gamma'}\frac{dx}{y}=2i\int_1^{1/\kappa}\frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-\kappa^2s^2)}}$$

を考察した．$\kappa^2=u$ とおいて，各々の積分を

$$F(u)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-ux^2)}},$$
$$G(u)=\int_1^{1/\sqrt{u}}\frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-us^2)}}$$

とおき，u の関数とみる．

定理 4.7. 楕円曲線 $y^2=(1-x^2)(1-ux^2)$ の周期

$$\int_{\Gamma}\frac{dx}{y}=4F(u),\quad \int_{\Gamma'}\frac{dx}{y}=2iG(u)$$

は，u の関数とみると，$a=b=1/2,\ c=1$ とした超幾何微分方程式

$$u(1-u)\frac{d^2f}{du^2}+(1-2u)\frac{df}{du}-\frac{1}{4}f=0 \tag{4.28}$$

の解である．

[証明]　§ 4.2 において計算したことから，

$$F(u)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2u^n$$

である．ここで，

$$\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2=\frac{(2n-1)!!(2n-1)!!}{(2n)!!(2n)!!}=\frac{2^n(1/2)^{(n)}2^n(1/2)^{(n)}}{2^nn!2^nn!}=\frac{(1/2)^{(n)}(1/2)^{(n)}}{n!\,1^{(n)}}$$

であるから，

$$\int_\Gamma \frac{dx}{y} = 4F(u) = 2\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; u\right)$$

を得る．命題 4.6 より，これは微分方程式 (4.24) を満たす．補題 4.4 より，

$$G(u) = \int_1^{1/\kappa} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-\kappa^2 s^2)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa'^2 x^2)}} = F(\kappa'^2)$$

である．$\kappa'^2 = u'$ とおけば，$G(u) = F(u')$ は u' の関数として，微分方程式

$$u'(1-u')\frac{d^2F(u')}{du'^2} + (1-2u')\frac{dF(u')}{du'} - \frac{1}{4}F(u') = 0 \tag{4.29}$$

を満たす．ここで，$\kappa^2 + \kappa'^2 = 1$ であるから，$u + u' = 1$ である．したがって，$G(u) = F(u')$ は微分方程式

$$u(1-u)\frac{d^2G}{du^2} + (1-2u)\frac{dG}{du} - \frac{1}{4}G = 0 \tag{4.30}$$

を満たす．したがって，周期

$$\int_{\Gamma'} \frac{dx}{y} = 2iG(u)$$

も微分方程式 (4.28) の解である． □

[定理 4.7 の別証] x と y の間には関係式

$$y^2 = (1-x^2)(1-ux^2)$$

が成り立つ．y を x, u の関数とみて，この両辺を u で偏微分し，$2y$ で割れば，

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-x^2(1-x^2)}{2y}.$$

同様に，第 1 種微分 dx/y を u で偏微分して，

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dx}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\,dx = \frac{x^2(1-x^2)}{2y^3}\,dx.$$

$y^2 = (1-x^2)(1-ux^2)$ より，

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dx}{y}\right) = \frac{x^2}{2(1-ux^2)}\frac{dx}{y}. \tag{4.31}$$

これを用いて，$\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{dx}{y}\right)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{dx}{y}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x^2}{2(1-ux^2)}\right)\frac{dx}{y} + \frac{x^2}{2(1-ux^2)}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dx}{y}\right) \\
&= \frac{x^4}{2(1-ux^2)^2}\frac{dx}{y} + \frac{x^4}{4(1-ux^2)^2}\frac{dx}{y} \\
&= \frac{3}{4}\frac{x^4}{(1-ux^2)^2}\frac{dx}{y}.
\end{aligned}$$

すなわち，

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{dx}{y}\right)=\frac{3}{4}\frac{x^4}{(1-ux^2)^2}\frac{dx}{y}. \tag{4.32}$$

(4.31), (4.32) より，

$$\begin{aligned}
&\left[u(1-u)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+(1-2u)\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{4}\right]\frac{dx}{y}\\
&=\left[\frac{3u(1-u)x^4}{4(1-ux^2)^2}+\frac{(1-2u)x^2}{2(1-ux^2)}-\frac{1}{4}\right]\frac{dx}{y}\\
&=\frac{3u(1-u)x^4+2(1-2u)x^2(1-ux^2)-(1-ux^2)^2}{4(1-ux^2)^2}\frac{dx}{y}\\
&=\frac{ux^4+2(1-u)x^2-1}{4(1-ux^2)^2}\frac{dx}{y}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

ここで，

$$d\left(\frac{xy}{(1-ux^2)^2}\right)=-\frac{ux^4+2(1-u)x^2-1}{4(1-ux^2)^2}\,\frac{dx}{y} \tag{4.34}$$

が成り立つ．実際，$y^2=(1-x^2)(1-ux^2)$ より，

$$\begin{aligned}
2ydy&=\big(-2x(1-ux^2)-2ux(1-x^2)\big)\,dx=2(2ux^3-ux-x)dx,\\
dy&=\frac{2ux^3-ux-x}{y}\,dx.
\end{aligned}$$

これから，

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{xy}{(1-ux^2)^2}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{(1-ux^2)^2}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{(1-ux^2)^2}\right)dy\\
&=-\frac{ux^4+2(1-u)x^2-1}{(1-ux^2)^2}\,\frac{dx}{y}.
\end{aligned}$$

(4.32), (4.34) より，

$$\left[u(1-u)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+(1-2u)\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{4}\right]\frac{dx}{y}=d\left(-\frac{xy}{(1-ux^2)^2}\right). \tag{4.35}$$

この両辺をサイクル Γ 上で積分すると，

$$\left[u(1-u)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+(1-2u)\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{4}\right]\int_\Gamma\frac{dx}{y}=\int_\Gamma d\left(-\frac{xy}{(1-ux^2)^2}\right)=0.$$

すなわち，$\displaystyle\int_\Gamma\frac{dx}{y}$ は微分方程式 (4.28) の解である．全く同様に，$\displaystyle\int_{\Gamma'}\frac{dx}{y}$ も微分方程式 (4.28) の解である． □

最初の証明の途中で次の等式が示された．

$$K=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\kappa^2\right). \tag{4.36}$$

4.7　第 2 種積分の周期

§ 4.4–§ 4.6 では第 1 種積分

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}$$

を考察した．この積分を κ の関数と考えて，

$$K(\kappa) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}}$$

とかく．さらに，

$$K'(\kappa) = K(\kappa')$$

とおく ($\kappa^2 + \kappa'^2 = 1$)．第 2 種積分と呼ばれる積分

$$E(\kappa) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{4.37}$$

を導入する．$x = \sin\theta$ と変換すれば，

$$E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}\,d\theta \tag{4.38}$$

である．$K'(\kappa)$ を定義したように，

$$E'(\kappa) = E(\kappa')$$

と定義する．

定理 4.8. $K(\kappa)$, $K'(\kappa)$ は 2 階線形微分方程式

$$(\kappa^3-\kappa)\frac{d^2y}{d\kappa^2} + (3\kappa^2-1)\frac{dy}{d\kappa} + \kappa y = 0 \tag{4.39}$$

の解である．

[証明]　$F(u) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-ux^2)}}$ とおけば，定理 4.7 より，$y = F(u)$ は微分方程式

$$u(1-u)\frac{d^2y}{du^2} + (1-2u)\frac{dy}{du} - \frac{1}{4}y = 0 \tag{4.40}$$

を満たす．$K(\kappa) = F(\kappa^2)$ であるから，

$$\frac{dK}{d\kappa} = 2\kappa\frac{dF}{du}(\kappa^2), \quad \frac{d^2K}{d\kappa^2} = 4\kappa^2\frac{d^2F}{du^2}(\kappa^2) + 2\frac{dF}{du}(\kappa^2),$$

したがって，

$$\frac{d^2F}{du^2}(\kappa^2) = \frac{1}{4\kappa^2}\frac{d^2K}{d\kappa^2} - \frac{1}{4\kappa^3}\frac{dK}{d\kappa}, \quad \frac{dF}{du}(\kappa^2) = \frac{1}{2\kappa}\frac{dK}{d\kappa}$$

である．これを

$$\kappa^2(1-\kappa^2)\frac{d^2F}{du^2}(\kappa^2) + (1-2\kappa^2)\frac{dF}{du}(\kappa^2) - \frac{1}{4}F(\kappa^2) = 0$$

に代入して整理すれば，

$$(\kappa^3-\kappa)\frac{d^2K}{d\kappa^2} + (3\kappa^2-1)\frac{dK}{d\kappa} + \kappa K = 0$$

を得る． $K'(\kappa) = G(\kappa^2)$ であり，G は F と同じ微分方程式を満たすから，K' は K と同じ微分方程式を満たす． □

アフィン代数曲線

$$C : y^2 = (1-x^2)(1-\kappa^2x^2)$$

を考える．ここで，$\kappa \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$ はパラメータとみる．§ 4.5 でみたように，

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}} = \frac{dx}{y}$$

は C のコンパクト化 $\bar{C}$ 上で正則な微分であった．これに対して，微分

$$\frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (1-\kappa^2x^2)\frac{dx}{y}$$

は，代数曲線 $\bar{C}$ 上の有理型微分 (極を持つことを許した微分，アーベル微分) である．$4K, 2E$ はそれぞれの周期に他ならない．

微分 $(1-\kappa^2x^2)\dfrac{dx}{y}$ の特異点をみよう．微分 dx/y は曲線 C 上正則であり，$1-\kappa^2x^2$ は C 上正則な関数であるから，$\zeta = (1-\kappa^2x^2)dx/y$ は C 上正則である．$\bar{C} = C \cup C'$ であった．ここで，

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = (1-x^2)(1-\kappa^2x^2)\},$$
$$C' = \{(x', y') \in \mathbb{C}^2 \mid y'^2 = (x'^2-1)(x'^2-\kappa^2)\}$$

であり，点 $(x, y) \in C$ と点 $(x', y') \in C'$ を

$$\text{(i) } xx' = 1, \quad \text{(ii) } y = \frac{y'}{x'^2}$$

のときに同一視した．したがって，曲線 C 上の微分 $\zeta = (1-\kappa^2x^2)dx/y$ を曲線 C' 上で表すには，$x = 1/x'$, $y = y'/x'^2$ を代入して ($dx/y = -dx'/y'$ であった),

$$\zeta = -\left(1 - \kappa^2\frac{1}{x'^2}\right)\frac{dx'}{y'}$$

である．dx'/y' は $\bar{C}$ 上で正則な微分であったから，C' 上で ζ が極を持つのは，$x'=0$ なる点においてのみである．したがって，微分 ζ は C' 上の 2 点 $(x',y')=(0,\kappa)$, $(0,-\kappa)$ のみにおいて極を持つ．点 $P=(0,\kappa)$ のまわりでの局所座標系 x' による微分 ζ の表示を求める．y' は x' の関数として考え，点 $P=(0,\kappa)$ において，

$$y'(x')=\kappa+a_1x'+a_2x'^2+\cdots$$

と展開される．ゆえに，

$$\frac{1}{y'(x')}=\frac{1}{\kappa}+b_1x'+b_2x'^2+\cdots$$

と展開される．これを

$$(x'^2-1)(x'^2-\kappa^2)y'^{-2}=1$$

に代入して，

$$(x'^2-1)(x'^2-\kappa^2)\left(\frac{1}{\kappa}+b_1x'+b_2x'^2+\cdots\right)^2=1.$$

これを $\mathrm{mod} x'^2$ でみて，$2\kappa b_1=0$, $b_1=0$ を得る．よって，

$$\frac{1}{y'(x')}=\frac{1}{\kappa}+b_2x'^2+\cdots$$

であり，これから

$$\begin{aligned}\zeta&=-\left(1-\kappa^2\frac{1}{x'^2}\right)\frac{dx'}{y'}\\&=-\left(1-\kappa^2\frac{1}{x'^2}\right)\left(\frac{1}{\kappa}+b_2x'^2+\cdots\right)dx'\\&=\left(\kappa\frac{1}{x'^2}+(x'\text{ のべき級数})\right)dx'.\end{aligned}$$

以上によって，ζ は点 $P=(0,\kappa)$ において 2 位の極を持ち，そこでの留数は 0 である．点 $(0,-\kappa)$ においても同様に ζ は 2 位の極を持ち，そこでの留数は 0 である．$\varphi(u)=(\mathrm{sn}\,u,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)$ によって定義される同型

$$\tilde{\varphi}:\mathbb{C}/\Omega\cong\bar{C},\quad \Omega=\mathbb{Z}(4\omega)+\mathbb{Z}(2\omega')$$

を用いて，代数曲線 $\bar{C}$ 上の微分 $\zeta=(1-\kappa^2x^2)dx/y$ を複素トーラス $\mathbb{C}/\Omega$ 上に写してみよう．$\tilde{\varphi}^*(dx/y)=du$ より，

$$\tilde{\varphi}^*\zeta=(1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2\,u)du=\mathrm{dn}^2\,u\,du$$

である．

定義 4.9. 一般に，射影代数曲線 X 上 (あるいはコンパクト Riemann 面上)，極を持つことを許した微分を ξ を考える．ξ が代数曲線 X 上，唯一の点 P のみで極を持つとき，ξ は X 上の**第 2 種微分**であるという．

ζ は楕円曲線 $\bar{C}$ 上の 2 点で 2 位の極を持ったので，$\bar{C}$ 上の第 2 種微分ではない．同型 $\tilde{\varphi}$ を通してみると，$\eta = \tilde{\varphi}^*\zeta$ とおけば，$\eta = \mathrm{dn}^2 u\, du$ であり，$\mathrm{dn}^2 u$ は $\Omega = \mathbb{Z}(4\omega) + \mathbb{Z}(2\omega')$ に関する基本周期平行四辺形 $P[0]$ の 2 点 ω', $2\omega + \omega'$ において極を持つから，複素トーラス $\mathbb{C}/\Omega$ 上の第 2 種微分ではない．しかし,

$$\mathrm{dn}(u + 2\omega) = \mathrm{dn}\, u, \quad \mathrm{dn}(u + 2\omega') = -\,\mathrm{dn}\, u$$

より，$\mathrm{dn}^2 u$ は $\Omega' = \mathbb{Z}(2\omega) + \mathbb{Z}(2\omega')$ を周期とする楕円関数であり，その極は $\omega' + \Omega' \in \mathbb{C}/\Omega'$ に限る．したがって，$\mathrm{dn}^2 u\, du$ は楕円曲線 $\mathbb{C}/\Omega'$ 上の第 2 種微分 η' とみなせる．すなわち，自然な写像

$$\psi : \mathbb{C}/\Omega \longrightarrow \mathbb{C}/\Omega'$$

を考えると，$\eta = \psi^*\eta'$ である．

補題 4.10.

$$d\left(\frac{xy}{1-\kappa^2x^2}\right) = \frac{\kappa^2x^4 - 2x^2 + 1}{1-\kappa^2x^2}\,\frac{dx}{y}.$$

左辺の d は曲線 $\bar{C}$ 上の外微分を表す.

[証明]　$y^2 = (1-x^2)(1-\kappa^2x^2)$ の両辺の微分をとって,

$$dy = \frac{2\kappa^2x^3 - \kappa^2x - x}{y}\,dx.$$

したがって,

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{xy}{1-\kappa^2x^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{1-\kappa^2x^2}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{1-\kappa^2x^2}\right)dy \\
&= \left[\frac{y}{1-\kappa^2x^2} + \frac{2\kappa^2x^2y}{(1-\kappa^2x^2)^2}\right]dx + \left(\frac{x}{1-\kappa^2x^2}\right)dy \\
&= \frac{y(1+\kappa^2x^2)}{(1-\kappa^2x^2)^2}\,dx + \frac{x^2(2\kappa^2x^2 - \kappa^2 - 1)}{(1-\kappa^2x^2)y}\,dx \\
&= \frac{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)(1+\kappa^2x^2)}{(1-\kappa^2x^2)^2y}\,dx + \frac{x^2(2\kappa^2x^2-\kappa^2-1)}{(1-\kappa^2x^2)y}\,dx \\
&= \frac{\kappa^2x^4 - 2x^2 + 1}{1-\kappa^2x^2}\,\frac{dx}{y}.
\end{aligned}$$

□

定理 4.11. $E(\kappa)$, $K(\kappa)$ は次の微分方程式系を満たす.

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{d\kappa} &= \dfrac{E-K}{\kappa}, \\ \\ \dfrac{dK}{d\kappa} &= \dfrac{E-\kappa'^2 K}{\kappa\kappa'^2}. \end{cases}$$

[証明]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right) &= \frac{-\kappa x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\,dx \\ &= \frac{-\kappa^2x^2}{\kappa\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\,dx = \frac{1-\kappa^2x^2-1}{\kappa\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\,dx \\ &= \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\kappa}\left(\zeta - \frac{dx}{y}\right). \end{aligned}$$

これを Γ に沿って積分すれば,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\kappa}\int_\Gamma \zeta = \frac{d}{d\kappa}\int_\Gamma \frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right) \\ = \frac{1}{\kappa}\left(\int_\Gamma \zeta - \int_\Gamma \frac{dx}{y}\right). \end{aligned}$$

以前に示したように,

$$\int_\Gamma \frac{dx}{y} = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\,dx = 4K(\kappa)$$

である. 同様にして,

$$\int_\Gamma \zeta = \int_\Gamma (1-\kappa^2x^2)\frac{dx}{y} = 4\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 4E(\kappa)$$

である. 以上によって,

$$\frac{dE}{d\kappa} = \frac{1}{\kappa}(E-K)$$

を得る. 2 番目の等式については,

$$\frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\right) = \frac{\kappa x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}(1-\kappa^2x^2)}\,dx$$

より,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\right) \\
&-\frac{1}{\kappa\kappa'^2}\left(\frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-\frac{\kappa'^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\,dx\right) \\
&=\frac{\kappa x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}(1-\kappa^2x^2)}\,dx-\frac{1}{\kappa\kappa'^2}\left(\frac{1-\kappa'^2-\kappa^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\right)dx \\
&=\frac{\kappa x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}(1-\kappa^2x^2)}\,dx-\frac{1}{\kappa\kappa'^2}\left(\frac{\kappa^2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\right)dx \\
&=\left(\frac{\kappa x^2}{1-\kappa^2x^2}-\frac{\kappa(1-x^2)}{\kappa'^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}} \\
&=-\frac{\kappa}{1-\kappa^2}\left(\frac{\kappa^2x^4-2x^2+1}{1-\kappa^2x^2}\right)\frac{dx}{y} \\
&=d\left(-\frac{\kappa}{1-\kappa^2}\frac{xy}{1-\kappa^2x^2}\right).
\end{aligned}
$$

最後の等号は補題 4.10 による。これを Γ に沿って積分すれば,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\kappa}\int_\Gamma\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x-\kappa^2x^2)}} \\
&=\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x-\kappa^2x^2)}}\right) \\
&=\frac{1}{\kappa\kappa'^2}\left(\int_\Gamma\frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-\int_\Gamma\frac{\kappa'^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\,dx\right) \\
&+\int_\Gamma d\left(-\frac{\kappa}{1-\kappa^2}\frac{xy}{1-\kappa^2x^2}\right) \\
&=\frac{1}{\kappa\kappa'^2}\left(\int_\Gamma\frac{\sqrt{1-\kappa^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-\int_\Gamma\frac{\kappa'^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}\,dx\right).
\end{aligned}
$$

これは,

$$\frac{dK}{d\kappa}=\frac{1}{\kappa\kappa'^2}\left(E-\kappa'^2K\right)$$

を示している. □

定理 4.12 (Legendre の関係式). $0<\kappa<1$ のとき,

$$E(\kappa)K'(\kappa)+E'(\kappa)K(\kappa)-K(\kappa)K'(\kappa)=\frac{\pi}{2}$$

が成り立つ.

[証明]　定理 4.8 より，$K(\kappa)$, $K'(\kappa)$ は微分方程式

$$(\kappa^3-\kappa)\frac{d^2y}{d\kappa^2}+(3\kappa^2-1)\frac{dy}{d\kappa}+\kappa y=0$$

の解であった．ここで，

$$y=\kappa^{-\frac{1}{2}}\kappa'^{-1}z$$

とおいて，z の満たす微分方程式を求める．まず，$\kappa^2+\kappa'^2=1$ より，$\dfrac{d\kappa'}{d\kappa}=-\dfrac{\kappa}{\kappa'}$ であるから，

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\kappa}&=\left(-\frac{1}{2}\kappa^{-\frac{3}{2}}\kappa'^{-1}-\kappa^{-\frac{1}{2}}\kappa'^{-2}\left(-\frac{\kappa}{\kappa'}\right)\right)z+\kappa^{-\frac{1}{2}}\kappa'^{-1}\frac{dz}{d\kappa},\\
&=\frac{1}{2}(3\kappa^2-1)\kappa^{-\frac{3}{2}}\kappa'^{-3}z+\kappa^{-\frac{1}{2}}\kappa'^{-1}\frac{dz}{d\kappa},\\
\frac{d^2y}{d\kappa^2}&=\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{1}{2}(3\kappa^2-1)\kappa^{-\frac{3}{2}}\kappa'^{-3}\right)z+(3\kappa^2-1)\kappa^{-\frac{3}{2}}\kappa'^{-3}\frac{dz}{d\kappa}+\kappa^{-\frac{1}{2}}\kappa'^{-1}\frac{d^2z}{d\kappa^2},\\
&=\frac{3}{4}\left(5\kappa^4-2\kappa^2+1\right)\kappa^{-\frac{5}{2}}\kappa'^{-5}z+(3\kappa^2-1)\kappa^{-\frac{3}{2}}\kappa'^{-3}\frac{dz}{d\kappa}+\kappa^{-\frac{1}{2}}\kappa'^{-1}\frac{d^2z}{d\kappa^2}
\end{aligned}$$

である．これから，

$$\begin{aligned}
&(\kappa^3-\kappa)\frac{d^2y}{d\kappa^2}+(3\kappa^2-1)\frac{dy}{d\kappa}+\kappa y\\
&=(\kappa^3-\kappa)\left(\frac{3}{4}\left(5\kappa^4-2\kappa^2+1\right)\kappa^{-\frac{5}{2}}\kappa'^{-5}z+(3\kappa^2-1)\kappa^{-\frac{3}{2}}\kappa'^{-3}\frac{dz}{d\kappa}+\kappa^{-\frac{1}{2}}\kappa'^{-1}\frac{d^2z}{d\kappa^2}\right)\\
&+(3\kappa^2-1)\left(\frac{1}{2}(3\kappa^2-1)\kappa^{-\frac{3}{2}}\kappa'^{-3}z+\kappa^{-\frac{1}{2}}\kappa'^{-1}\frac{dz}{d\kappa}\right)+\kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'^{-1}z\\
&=-\kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'\frac{d^2z}{d\kappa^2}-\frac{1}{4}(1+\kappa^2)^2\kappa^{-\frac{3}{2}}\kappa'^{-3}z\\
&=-\kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'\left(\frac{d^2z}{d\kappa^2}+\frac{1}{4}(1+\kappa^2)^2\kappa^{-2}\kappa'^{-4}z\right).
\end{aligned}$$

したがって，z は次の微分方程式を満たす．

$$\frac{d^2z}{d\kappa^2}+\frac{1}{4\kappa^2}\left(\frac{1+\kappa^2}{1-\kappa^2}\right)^2z=0. \tag{4.41}$$

したがって，$H_1(\kappa)=\kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'K(\kappa)$, $H_2(\kappa)=\kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'K'(\kappa)$ とおくと，$z=H_i(\kappa)$, $i=1,2$ は微分方程式 (4.41) の解である．よって，

$$W=\frac{dH_1}{d\kappa}H_2-H_1\frac{dH_2}{d\kappa}$$

とおけば，

$$\frac{dW}{d\kappa}=\frac{d^2H_1}{d\kappa^2}H_2-H_1\frac{d^2H_2}{d\kappa^2}=0.$$

したがって，W は定数である．

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{d}{d\kappa}\left(\kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'\right)K\kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'K' + \kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'\frac{dK}{d\kappa}\kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'K' \\
&\quad - \left(\frac{d}{d\kappa}\kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'\right)K'\kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'K - \kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'\frac{dK'}{d\kappa}\kappa^{\frac{1}{2}}\kappa'K \\
&= \kappa\kappa'^2\left(\frac{dK}{d\kappa}K' - K\frac{dK'}{d\kappa}\right).
\end{aligned}
$$

ここで，定理 4.11 より，$\kappa\kappa'^2\dfrac{dK}{d\kappa} = E - \kappa'^2K$ である．さらに，

$$
\kappa\kappa'^2\frac{dK'}{d\kappa} = -\kappa\kappa'^2\frac{dK}{d\kappa}(\kappa')\frac{\kappa}{\kappa'} = -\kappa^2\kappa'\frac{dK}{dk}(\kappa') = -E(\kappa') + k^2K(\kappa').
$$

よって，$\kappa^2 + \kappa'^2 = 1$ より，

$$
W = (E - \kappa'^2K)K' - K(-E(\kappa') + \kappa^2K(\kappa')) = EK' + E'K - KK'.
$$

以上によって，$W = EK' + E'K - KK'$ は定数であることが示された．$\lim\limits_{\kappa\to 0} W$ を計算することによってこの定数を求めよう．$K(0) = \dfrac{\pi}{2}$ である．また，

$$
E(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \big[\sin\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.
$$

$W = (E-K)K' + E'K$ であるから，

$$
\lim_{\kappa\to 0} W = \lim_{\kappa\to 0}(E-K)K' + E(1)K(0) = \lim_{\kappa\to 0}(E-K)K' + \frac{\pi}{2}.
$$

よって，$\lim\limits_{\kappa\to 0}(E-K)K' = 0$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
(K-E)K' &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}\,d\theta\right) \times K(\kappa') \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\kappa^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}}\,d\theta\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-\kappa^2)\sin^2\theta}}\right) \\
&\le \kappa\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}}\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\kappa\,d\theta}{\sqrt{1-(1-\kappa^2)\sin^2\theta}}\right) \\
&= \kappa K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\kappa\,d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \kappa^2\sin^2\theta}} \\
&\le \kappa K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\kappa\,d\theta}{\sqrt{\kappa^2\cos^2\theta + \kappa^2\sin^2\theta}} = \kappa K\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
0 < (K-E)K' \le \kappa K\frac{\pi}{2} \to 0 \quad (\kappa \to 0).
$$

□

5　楕円関数の応用

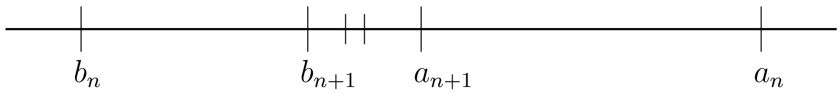
5.1　算術幾何平均と楕円積分

与えられた正の実数 $a \geq b$ から，$a_0 = a$, $b_0 = b$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

によって数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定義する．相加・相乗平均の不等式から，

$$b \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1 \leq a.$$



すなわち，数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列であり，数列 $\{b_n\}$ は上に有界な単調増加数列である．したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ が存在する．さらに，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

より，$\alpha = \beta$ を得る．極限値 α を a と b の**算術幾何平均**といい，$\mathrm{AGM}(a, b)$ で表す．

例 5.1. $\mathrm{AGM}(\sqrt{2}, 1)$ を計算してみよう．収束はかなり速いことがわかる．

n	a_n	b_n	$a_n - b_n$
0	1.41421356237	1.00000000000	0.41421356237
1	1.20710678119	1.18920711500	0.01789966618
2	1.19815694809	1.19812352149	0.00003342660
3	1.19814023479	1.19814023468	0.00000000012
4	1.19814023474	1.19814023474	0.00000000000

算術幾何平均の簡単な性質を挙げる．これは定義から容易にわかる．

命題 5.2. *(i)* 上の記号の下で，$\mathrm{AGM}(a, b) = \mathrm{AGM}(a_1, b_1) = \mathrm{AGM}(a_2, b_2) = \cdots$.

(ii) λ を正の実数とすれば，$\mathrm{AGM}(\lambda a, \lambda b) = \lambda\, \mathrm{AGM}(a.b)$.

算術幾何平均と第 1 種楕円積分

$$K(\kappa) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)}}$$

の関係について述べよう．

定義 5.3. $a \geq b > 0$ に対して，積分

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \tag{5.1}$$

を考える．κ, κ' を $\kappa^2 + \kappa'^2 = 1$ を満たす正の実数とするとき,

$$I(1,\kappa') = K(\kappa) \tag{5.2}$$

である．実際，$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ より,

$$\begin{aligned} I(1,\kappa') &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \kappa'^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-\kappa'^2)\sin^2\theta}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}} = K(\kappa). \end{aligned}$$

命題 5.4.

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a,b).$$

[証明]　$b\tan\theta = u$ とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{b}{\cos^2\theta}, \\ \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+u^2}}, \\ \frac{1}{\cos\theta}\frac{d\theta}{du} &= \frac{\cos^2\theta}{b\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{b} = \frac{1}{\sqrt{b^2+u^2}}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta\sqrt{a^2+b^2\tan^2\theta}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}\,du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}\,du. \end{aligned}$$

したがって,

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2\right)(ab+u^2)}}\,du.$$

ここで，$u = \dfrac{1}{2}\left(v - \dfrac{ab}{v}\right)$ とおけば,

$$\begin{aligned} ab + u^2 &= \frac{1}{4v^2}(ab+v^2)^2, \\ \frac{1}{\sqrt{ab+u^2}}\frac{du}{dv} &= \frac{2v}{ab+v^2}\frac{ab+v^2}{2v^2} = \frac{1}{v}, \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2 &= \frac{1}{4v^2}(a^2+v^2)(b^2+v^2) \end{aligned}$$

であり，v が 0 から ∞ まで動くとき，u は $-\infty$ から ∞ まで単調増加する．よって，

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2+v^2)(b^2+v^2)}}\,dv = I(a,b).$$

□

命題 5.5. $I(a,b) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\mathrm{AGM}(a,b)}$.

[証明]　命題 5.4 を繰り返し適用すれば,

$$I(a,b) = I(a_1,b_1) = \cdots = I(a_n,b_n).$$

したがって，$M = \mathrm{AGM}(a,b)$ とおけば，定義から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = M$ である．上の等式において，$n \to \infty$ とすれば,

$$I(a,b) = I(M,M) = \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{1}{M} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{AGM}(a,b)}.$$

□

(5.2) と命題 5.5 より,

$$K(\kappa) = I(1,\kappa') = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{AGM}(1,\kappa')}. \tag{5.3}$$

κ は実数ではないが，κ^2 が負の実数であるとき,

$$K(\kappa) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}}$$

において，$\theta' = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ で変換すれば,

$$K(\kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta'}{\sqrt{(1-\kappa^2)\cos^2\theta' + \sin^2\theta'}}$$

となる．命題 5.5 より,

$$K(\kappa) = I(\sqrt{1-\kappa^2}, 1) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{AGM}(\sqrt{1-\kappa^2}, 1)}$$

を得る．特に，$\kappa^2 = -1$ のとき,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{AGM}(\sqrt{2}, 1)}$$

を得る．これは，1799 年にガウスが計算の結果，発見した等式である．

補題 5.6. $0 < \kappa < 1$, $\kappa' = \sqrt{1-\kappa^2}$ とすると，次が成り立つ．

(i) $K(\kappa) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\mathrm{AGM}(1,\kappa')}$.

(ii) $K(\kappa) = \dfrac{1}{1+\kappa}K\left(\dfrac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}\right)$.

(iii) $K(\kappa) = \dfrac{2}{1+\kappa'}K\left(\dfrac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right)$.

(iv) $E(\kappa) = \dfrac{1+\kappa}{2}E\left(\dfrac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}\right) + \dfrac{\kappa'^2}{2}K(\kappa)$.

(v) $E(\kappa) = (1+\kappa')E\left(\dfrac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right) - \kappa' K(\kappa)$.

[証明]　(i) は既に示した．(ii) を示す．

$$\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}\right)^2} = \frac{1-\kappa}{1+\kappa}$$

であるから，(i) より，

$$K\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{AGM}\left(\dfrac{1-\kappa}{1+\kappa}, 1\right)}.$$

命題 5.2(ii) より，

$$(1+\kappa)\,\mathrm{AGM}\left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa}, 1\right) = \mathrm{AGM}(1-\kappa, 1+\kappa) = \mathrm{AGM}(1+\kappa, 1-\kappa).$$

一方，

$$\frac{(1+\kappa)+(1-\kappa)}{2} = 1, \quad \sqrt{(1+\kappa)(1-\kappa)} = \kappa'$$

であるから，命題 5.2(i) より，

$$\mathrm{AGM}(1+\kappa, 1-\kappa) = \mathrm{AGM}(1,\kappa').$$

したがって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\kappa}K\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}\right) &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{(1+\kappa)\,\mathrm{AGM}\left(\dfrac{1-\kappa}{1+\kappa}, 1\right)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{AGM}(1+\kappa, 1-\kappa)} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{AGM}(1,\kappa')} = K(\kappa).\end{aligned}$$

次に (iii) を示す．

$$\sqrt{1-\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right)^2}=\frac{2\sqrt{\kappa'}}{1+\kappa'}$$

であるから，(i) より，

$$K\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{AGM}\left(1,\dfrac{2\sqrt{\kappa'}}{1+\kappa'}\right)}.$$

一方，命題 5.2(ii), (i) より，

$$\frac{1+\kappa'}{2}\mathrm{AGM}\left(1,\frac{2\sqrt{\kappa'}}{1+\kappa'}\right)=\mathrm{AGM}\left(\frac{1+\kappa'}{2},\sqrt{\kappa'}\right)=\mathrm{AGM}(1,\kappa').$$

したがって，

$$\frac{2}{1+\kappa'}K\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathrm{AGM}(1,\kappa')}=K(\kappa).$$

(iv) を示そう．

$$f(\kappa)=\frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}$$

とおく．(ii) に $(1+\kappa)$ をかけて，

$$(1+\kappa)K(\kappa)=K(f(\kappa)).$$

これを κ で微分して，

$$(1+\kappa)\frac{dK}{d\kappa}(\kappa)+K(\kappa)=\frac{dK}{d\kappa}(f(\kappa))\frac{df}{d\kappa}(\kappa). \tag{5.4}$$

定理 4.11 より，

$$\frac{dK}{d\kappa}=\frac{1}{\kappa\kappa'^2}(E-\kappa'^2K), \tag{5.5}$$

$$E(\kappa)=\kappa\kappa'^2\frac{dK}{d\kappa}(\kappa)+\kappa'^2K(\kappa).$$

この κ に $f(\kappa)$ を代入して，

$$E(f(\kappa))=f(\kappa)g(\kappa)\frac{dK}{d\kappa}(f(\kappa))+g(\kappa)K(f(\kappa)) \tag{5.6}$$

を得る．ここで，

$$g(\kappa)=1-f(\kappa)^2=\left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right)^2$$

とおいた．(5.4) より，

$$\frac{dK}{d\kappa}(f(\kappa)) = \frac{1}{\dfrac{df}{d\kappa}(\kappa)}\left((1+\kappa)\frac{dK}{d\kappa}(\kappa) + K(\kappa)\right).$$

これを (5.6) に代入して，

$$E(f(\kappa)) = f(\kappa)g(\kappa)\frac{1}{\dfrac{df}{d\kappa}(\kappa)}\left((1+\kappa)\frac{dK}{d\kappa}(\kappa) + K(\kappa)\right) + g(\kappa)K(f(\kappa)). \tag{5.7}$$

(5.5) を (5.7) に代入し，さらに，(ii) より，$K(f(\kappa)) = (1+\kappa)K(\kappa)$ であるので，

$$\begin{aligned}E(f(\kappa)) &= f(\kappa)g(\kappa)\frac{1}{\dfrac{df}{d\kappa}(\kappa)}\left(\frac{1+\kappa}{\kappa\kappa'^2}(E(\kappa) - \kappa'^2K(\kappa)) + K(\kappa)\right) + g(\kappa)K(f(\kappa)) \\ &= f(\kappa)g(\kappa)\frac{1}{\dfrac{df}{d\kappa}(\kappa)}\left(\frac{1+\kappa}{\kappa\kappa'^2}(E(\kappa) - \kappa'^2K(\kappa)) + K(\kappa)\right) + g(\kappa)(1+\kappa)K(\kappa).\end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{df}{d\kappa}(\kappa) = \frac{1-\kappa}{\sqrt{\kappa}(1+\kappa)^2}, \quad f(\kappa)g(\kappa)\frac{1}{\dfrac{df}{d\kappa}(\kappa)} = \frac{2\kappa(1-\kappa)}{1+\kappa}, \quad g(\kappa)(1+\kappa) = \frac{(1-\kappa)^2}{1+\kappa}$$

を代入すれば，

$$\begin{aligned}E(f(\kappa)) &= \frac{2\kappa(1-\kappa)}{1+\kappa}\left(\frac{1+\kappa}{\kappa\kappa'^2}(E(\kappa) - \kappa'^2K(\kappa)) + K(\kappa)\right) + \frac{(1-\kappa)^2}{1+\kappa}K(\kappa) \\ &= \frac{2}{1+\kappa}(E(\kappa) - \kappa'^2K(\kappa)) + \frac{2\kappa(1-\kappa)}{1+\kappa}K(\kappa) + \frac{(1-\kappa)^2}{1+\kappa}K(\kappa) \\ &= \frac{2}{1+\kappa}E(\kappa) - (1-\kappa)K(\kappa).\end{aligned}$$

よって，(iv) が示された．最後に，(v) を示す．

$$\mu = \frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}$$

とおけば，

$$\mu'^2 = 1 - \mu^2 = \frac{4\kappa'}{(1+\kappa')^2},$$

$$\frac{1+\mu}{2} = \frac{1}{1+\kappa'}, \quad \frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu} = (1+\kappa')\sqrt{\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}} = \sqrt{1-\kappa'^2} = \kappa$$

であるから，(iv), (iii) より，

$$
\begin{aligned}
E(\mu) &= \frac{1+\mu}{2} E\left(\frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}\right) + \frac{\mu'^2}{2} K(\mu), \\
E\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right) &= \frac{1}{1+\kappa'} E(\kappa) + \frac{2\kappa'}{(1+\kappa')^2} K\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right) \\
&= \frac{1}{1+\kappa'} E(\kappa) + \frac{\kappa'}{1+\kappa'} K(\kappa), \\
E(\kappa) &= (1+\kappa') E\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right) - \kappa' K(\kappa).
\end{aligned}
$$

□

定義 5.7. $a > b > 0$ に対して，

$$J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

とおく．

$$J(1,\kappa') = E(\kappa) \tag{5.8}$$

である．実際，$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ より，

$$J(1,\kappa') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1^2 - (1-\kappa'^2)\sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}\, d\theta = E(\kappa).$$

以上の準備の下で，$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ と $J(a,b)$ の間に次の関係があることを示す．

命題 5.8.

$$2J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - J(a,b) = abI(a,b).$$

[証明]　$\kappa' = \dfrac{b}{a}$ とおけば，$\kappa = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$, $\dfrac{1-\kappa'}{1+\kappa'} = \dfrac{a-b}{a+b}$ である．

$$J(a,b) = aJ\left(1, \frac{b}{a}\right) = aJ(1,\kappa') = E(\kappa)$$

より，

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{a+b}{2} E\left(\sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}}\right) = \frac{a+b}{2} E\left(\frac{a-b}{a+b}\right).$$

よって，$J(a,b)=aE(\kappa)$ と $I(a,b)=\dfrac{1}{a}K(\kappa)$ に注意すれば，補題 5.6 の (v) より，

$$
\begin{aligned}
2J\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)-J(a,b) &= (a+b)E\left(\frac{a-b}{a+b}\right)-aE(\kappa)\\
&= (a+b)E\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right)-aE(\kappa)\\
&= (a+b)\left(\frac{1}{1+\kappa'}E(\kappa)+\frac{\kappa'}{1+\kappa'}K(\kappa)\right)-aE(\kappa)\\
&= bK(\kappa)=abI(a,b).
\end{aligned}
$$

□

補題 5.9. $c_n=\sqrt{a_n^2-b_n^2}$, $n=0,1,\ldots$ とおけば，$n\geq 1$ のとき，

$$
c_n=\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2}
$$

であり，

$$
\lim_{n\to\infty}2^n c_n^2=0
$$

が成り立つ．

[証明]　$n\geq 1$ のとき，

$$
c_n^2=a_n^2-b_n^2=\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)^2-a_{n-1}b_{n-1}=\left(\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2}\right)^2
$$

である．$a_{n-1}>b_{n-1}\geq b$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ より，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$ である．特に，ある番号 n_0 が存在して，$n\geq n_0$ ならば，$0<c_n<b$ である．よって，$n>n_0$ のとき，

$$
0<\frac{c_n}{b}=\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2b}=\frac{a_{n-1}^2-b_{n-1}^2}{2b(a_{n-1}+b_{n-1})}=\frac{c_{n-1}^2}{2b(a_{n-1}+b_{n-1})}<\frac{1}{4}\left(\frac{c_{n-1}}{b}\right)^2.
$$

これから，

$$
0<c_{n_0+m}<b\left(\frac{1}{4}\right)^{1+2+\cdots+2^{m-1}}\left(\frac{c_{n_0}}{b}\right)^{2^m}<b\left(\frac{1}{4}\right)^{2^m}=\frac{b}{2^{2^{m+1}}}.
$$

よって，

$$
0<2^{n_0+m}c_{n_0+m}^2<b^2\frac{2^{n_0+m}}{2^{2^{m+2}}}\longrightarrow 0\quad(m\longrightarrow\infty).
$$

□

命題 5.10.

$$
J(a,b)=\left(a^2-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n-1}c_n^2\right)I(a,b).
$$

[証明]　$A_n = 2^n\left(J(a_n,b_n) - a_n^2 I(a_n,b_n)\right)$ とおく．命題 5.8 と命題 5.4 より，

$$
\begin{aligned}
A_{n+1} - A_n &= 2^n\left(2J(a_{n+1},b_{n+1}) - J(a_n,b_n)\right) - 2^{n+1}a_{n+1}^2 I(a_{n+1},b_{n+1}) + 2^n a_n^2 I(a_n,b_n) \\
&= 2^n a_n b_n I(a_n,b_n) - 2^{n+1}a_{n+1}^2 I(a_n,b_n) + 2^n a_n^2 I(a_n,b_n) \\
&= 2^{n-1}\left(2a_nb_n - (a_n+b_n)^2 + 2a_n^2\right) I(a_n,b_n) \\
&= 2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2) I(a_n,b_n) = 2^{n-1}c_n^2 I(a,b).
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
-2^{-n}A_n &= a_n^2 I(a_n,b_n) - J(a_n,b_n) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n^2}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n^2 - a_n^2\cos^2\theta - b_n^2\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a_n^2 - b_n^2)\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= c_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta \le c_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}} = c_n^2 I(a_n,b_n).
\end{aligned}
$$

したがって，$0 < -A_n \le 2^n c_n^2 I(a_n,b_n) = 2^n c_n^2 I(a,b)$. 補題 5.9 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n c_n = 0$ が成り立つから，

$$
\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n+1} - A_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(A_{n+1} - A_n) = \lim_{N\to\infty}(A_{N+1} - A_0) = -A_0.
$$

これから，

$$
\begin{aligned}
J(a,b) - a^2 I(a,b) = A_0 &= -\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n+1} - A_n) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2 I(a,b) \\
&= -I(a,b)\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2, \\
J(a,b) &= \left(a^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2\right) I(a,b).
\end{aligned}
$$

□

5.2　算術幾何平均による円周率の計算

定理 5.11 (ガウスの公式). $a_0 = 1,\ b_0 = c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$ $c_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2},\ n = 0, 1, \ldots$ とすれば，

$$\pi = \frac{2\,\mathrm{AGM}\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2}.$$

$s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k c_k^2, \quad p_n = \dfrac{2a_n^2}{1 - s_n}$ とおけば，

p_1	3.	18767	26427	12108	62720	19299	70525	36923	26510
p_2	3.	14168	02932	97653	29391	80704	24560	00938	27957
p_3	3.	14159	26538	95446	49600	29147	58818	04348	61088
p_4	3.	14159	26535	89793	23846	63606	02706	63132	17577
p_5	3.	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971
π	3.	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971

p_3 は小数第 9 位まで，p_4 は小数第 20 位まで，p_5 は小数第 40 位まで，π と一致している．このように，算術幾何平均を用いたガウスの公式は，円周率 π を高速に計算することに適している．この公式によれば，p_{20} 程度で π を約 100 万桁計算できる．ガウスは数値計算によって，1799 年にこの公式を発見して日記に次のように記している．

この事実の証明は必ず解析学の全く新しい分野を開くであろう．

[ガウスの公式の証明]
$a = 1,\ b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおけば，$\kappa = \kappa' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．定理 4.12 より，

$$2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

命題 5.10 より，

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

よって，

$$\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2\right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

命題 5.5 より，

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

であるから，

$$\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}2^n c_n^2\right)\frac{\pi^2}{4\,\mathrm{AGM}\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\pi}{2}.$$

以上によって，ガウスの公式を得る．

A　微分可能性と正則性

定理 A.1. $f(z)$ が D 上で微分可能ならば，$f'(z)$ は連続であり，したがって，$f(z)$ は正則である．

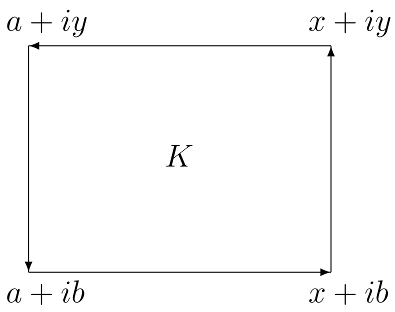
$a<x,\, b<y,\, K=\{t+is\,|\,a\leq t\leq x,\ b\leq s\leq y\}\subset D$ とする．そのとき，

補題 A.2. 長方形 K に関して，*Cauchy* の積分定理

$$\int_{\partial K}f(z)\,dz=0$$

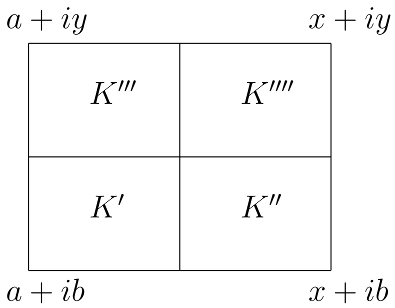
が成り立つ．

[証明]　$S(K)=\displaystyle\int_{\partial K}f(z)\,dz$ とおく．



$$S(K)=\int_a^x f(t+ib)\,dt+\int_b^y f(x+is)\,ids-\int_a^x f(t+iy)\,dt-\int_b^y f(a+is)\,ids \quad \text{(A.1)}$$

である．$S(K)=0$ となることを区間縮小法を用いて証明する．K を次のように 4 つの合同な長方形に分割する．



そのとき，

$$S(K) = S(K') + S(K'') + S(K''') + S(K'''')$$

である．したがって，

$$|S(K)| \leq |S(K')| + |S(K'')| + |S(K''')| + |S(K'''')|.$$

ゆえに，K', K'', K''', K'''' のいずれかについて，たとえば，$S(K'''')$ について，

$$\frac{1}{4}|S(K)| \leq |S(K'''')|$$

が成り立つ．このとき，$K_1 = K''''$ とおく．K_1 を同様にして，4 つの合同な長方形に分割したものを K_1', K_1'', K_1''', K_1'''' とすると，そのうちの少なくとも 1 つ，たとえば，K_1'' について，

$$\frac{1}{4}|S(K_1)| \leq |S(K_1'')|$$

が成り立つ．このとき，$K_2 = K_1''$ とおく．以下同様に，$K_3, K_4, \ldots$ を定めれば，

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_m \supset \cdots$$

であって，

$$\frac{1}{4}|S(K_{m-1})| \leq |S(K_m)|$$

である．したがって，

$$\frac{1}{4^m}|S(K)| \leq |S(K_m)| \tag{A.2}$$

である．長方形 K_m の辺の長さは，それぞれ $\dfrac{x-a}{2^m}$, $\dfrac{y-b}{2^m}$ であり，対角線の長さは

$$\delta(K_m) = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{2^m} = \frac{\delta(K)}{2^m} \to 0 \ \ (m \to \infty)$$

である．よって，$c \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} K_m = \{c\}$$

である．仮定によって，$f(z)$ は $c \in D$ において微分可能であるから，

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z-c) + (z-c)g(z), \quad g(z) \to 0 \ \ (z \to c)$$

である．z の 1 次関数 $f(c) + f'(c)(z-c)$ に対しては直接計算によって，

$$\int_{\partial K_m} (f(c) + f'(c)(z-c))\ dz = 0$$

がわかる．実際，K_m の頂点を $a_0 + ib_0$, $a_1 + ib_0$, $a_1 + ib_1$, $a_0 + ib_1$ として，$A = f'(c)$, $B = f(c) - cf'(c)$ とおけば，

$$\begin{aligned}\int_{\partial K_m} (Az+B)\,dz &= \int_{a_0}^{a_1} (A(t+b_0 i)+B)\,dt + \int_{b_0}^{b_1} (A(a_1+si)+B)\,ids \\ &\quad - \int_{a_0}^{a_1} (A(t+b_1 i)+B)\,dt - \int_{b_0}^{b_1} (A(a_0+si)+B)\,ids \\ &= A(b_0-b_1)(a_1-a_0)i + A(a_1-a_0)(b_1-b_0)i = 0.\end{aligned}$$

よって，

$$S(K_m) = \int_{\partial K_m} f(z)\,dz = \int_{\partial K_m} (z-c)g(z)\,dz.$$

$z \to c$ のとき，$g(z) \to 0$ であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|z-c| < \delta$ ならば，$|g(z)| < \varepsilon$ である．m を十分大きくとって，$\delta(K_m) < \delta$ となるようにする．そのとき，$z \in K_m$ ならば，$z, c \in K_m$ より，$|z-c| \le \delta(K_m) < \delta$，したがって，$|g(z)| < \varepsilon$ である．$\ell = 2(x-a) + 2(y-b)$ とおけば，

$$\begin{aligned}|S(K_m)| &= \left|\int_{\partial K_m} (z-c)g(z)\,dz\right| \le \int_{\partial K_m} |z-c||g(z)|\,|dz| \\ &\le \delta(K_m)\,\varepsilon \int_{\partial K_m} |dz| = \delta(K_m)\,\varepsilon \frac{\ell}{2^m} = \frac{\varepsilon\delta(K)\ell}{2^{2m}}.\end{aligned}$$

これと (A.2) より，

$$\frac{|S(K)|}{2^{2m}} \le |S(K_m)| \le \frac{\varepsilon\delta(K)\ell}{2^{2m}},$$

$$|S(K)| \le \varepsilon\delta(K)\ell.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから，$S(K) = 0$ でなければならない．

[定理 A.1 の証明]

$z = x + iy$ の関数 $F(x+iy)$ を

$$F(x+iy) = \int_a^x f(t+iy)\,dt + i\int_b^y f(a+is)\,ds$$

によって定義する．$F(x+iy)$ は x について偏微分可能で，

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x+iy) = f(x+iy)$$

である．$S(K)=0$ であるから，(A.1) より，

$$\begin{aligned} F(x+iy) &= \int_a^x f(t+iy)\,dt + i\int_b^y f(a+is)\,ds \\ &= \int_a^x f(t+ib)\,dt + i\int_b^y f(x+is)\,ds. \end{aligned}$$

これから，$F(x+iy)$ は y についても偏微分可能で，

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x+iy) = if(x+iy)$$

である．$F(x+iy)=U(x,y)+iV(x,y)$, $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ とかけば，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}U(x,y)=u(x,y), &&\frac{\partial}{\partial x}V(x,y)=v(x,y) \\ &\frac{\partial}{\partial y}U(x,y)=-v(x,y), &&\frac{\partial}{\partial y}V(x,y)=u(x,y). \end{aligned}$$

すなわち，$U(x,y)$, $V(x,y)$ は x,y に関して偏微分可能であり，Cauchy-Riemann の関係式を満たし，偏導関数は連続である．ゆえに，$F(z)$ は z の正則関数であり，

$$F'(z)=\frac{\partial}{\partial x}U(x,y)+i\frac{\partial}{\partial x}V(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)=f(z)$$

である．定理 1.9 より，$F'(z)=f(z)$ は正則である．□

B　無限積について

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ を満たす数列 $\{u_n\}$ が与えられたとき，無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$$

を考える．正確には,

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$$

とおき，数列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束を問題とする．

補題 B.1. 任意の n に対して $a_n \geq 0$ のとき,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \text{ が収束} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束.}$$

[証明]　$e^x \geq 1 + x$ $(x \geq 0)$ であるから，

$$1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{a_k} = e^{\sum_{k=1}^{n} a_k}. \tag{B.1}$$

$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ は単調増加数列であるから，それぞれ上に有界なことと収束することは同値である．(B.1) より，補題の主張を得る．　$\square$

補題 B.2. log を $-\pi < \Im \log z \leq \pi$ に定めるとき，

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) \text{ が収束} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + u_n) \text{ が収束}.$$

[証明]　$s_n = \sum_{k=1}^{n} \log(1 + u_k)$ とおく．$s_n \to s$ とすれば，

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k) = e^{s_n} \to e^s \neq 0$$

である．逆に，$p_n \to p \neq 0$ とする．p の偏角を $-\pi < \arg p \leq \pi$ に定める．$p_n \to p$ であるから，各 p_n の偏角を $-\pi < \arg p_n - \arg p \leq \pi$ に定め直す.

$$\operatorname{Log} p_n = \log |p_n| + i \arg p_n$$

とおく．$e^{\operatorname{Log} p_n} = e^{s_n} = p_n$ であるから，$s_n = \operatorname{Log} p_n + 2\pi i h_n$, $h_n \in \mathbb{Z}$ である．$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ であるから，ある番号 N が存在して，$n \geq N$ について，

$$|\arg(1 + u_{n+1})| < \frac{\pi}{2}, \quad |\arg p_n - \arg p| < \frac{\pi}{2}, \quad |\arg p_{n+1} - \arg p| < \frac{\pi}{2}$$

となる．log を補題の主張のように定めれば，

$$\begin{aligned} 2\pi i(h_{n+1} - h_n) &= (s_{n+1} - \operatorname{Log} p_{n+1}) - (s_n - \operatorname{Log} p_n) \\ &= s_{n+1} - s_n - \operatorname{Log} p_{n+1} + \operatorname{Log} p_n \\ &= \log(1 + u_{n+1}) + (\operatorname{Log} p_n - i \arg p) + (i \arg p - \operatorname{Log} p_n). \end{aligned}$$

両辺の虚部の絶対値をとれば，

$$\begin{aligned} 2\pi|h_{n+1} - h_n| &= |\arg(1 + u_{n+1}) + (\arg p_n - \arg p) + (\arg p - \arg p_n)| \\ &\leq |\arg(1 + u_{n+1})| + |\arg p_n - \arg p| + |\arg p - \arg p_n| \\ &\leq \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

ゆえに，$|h_{n+1} - h_n| \leq \dfrac{3}{4}$ である．左辺は整数であるから，$n \geq N$ のとき，$h_{n+1} = h_n$ である．整数 h_n はある番号から先は一定の値 h であるので，$s_n \to \log p + 2\pi i h$ である．　$\square$

補題 B.3. log を補題 *B.2* の通りとする．

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ が収束} \iff \sum_{n=1}^{\infty}|\log(1+u_n)| \text{ が収束}.$$

[証明]　$\mathbb{C}-(-\infty,0]$ において，$\log z$ は Cauchy-Riemann の関係式を満たすので正則である．したがって，$\log(1+z)$ は $|z|<1$ において正則である．実数 x, $-1<x<1$ については，

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

であるから，一致の定理により，複素数 z, $|z|<1$ に対しても，

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}z^n$$

が成り立つ．

$$g(z)=\frac{\log(1+z)}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}z^{n-1}$$

とおけば，$g(z)$ は $|z|<1$ で正則である．$g(0)=1$ であり，$g(z)$ は $|z|<1$ において零点を持たない．したがって，$|z|\le 1/2$ において，$|g(z)|$ は最小値 A と最大値 B をとる．すなわち，

$$A|z|\le|\log(1+z)|\le B|z|,\quad |z|\le\frac{1}{2}$$

が成り立つ．$u_n\to 0$ より，ある番号 N が存在して，$n\ge N$ のとき，$|u_n|\le 1/2$ である．よって，

$$A\sum_{n=N}^{\infty}|u_n|\le\sum_{n=N}^{\infty}|\log(1+u_n)|\le B\sum_{n=N}^{\infty}|u_n|$$

が成り立つ．補題の主張はこれから直ちにでる．　□

命題 B.4.　*(i)* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ が収束すれば，無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) \tag{B.2}$$

も収束する．このとき，無限積 *(B.2)* は**絶対収束する**という．

(ii) 絶対収束するとき，無限積 *(B.2)* は積の順序の関係なく一定の値に収束する．さらに，分配法則に従って無限積を形式的に無限級数に展開してもよい．

(iii) 絶対収束するとき，因子 $1+u_n$ の中に 0 となるものがなければ，無限積 *(B.2)* も 0 でない．

[証明]　(i) $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ が収束するとする．補題 B.3 より，$\sum_{n=1}^{\infty}|\log(1+u_n)|$ は収束する．したがって，$s=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+u_n)$ も収束する．補題 B.2 の証明により，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ は e^s に収束する．(ii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ の積の順序をかえたものを $\prod_{n=1}^{\infty}(1+v_n)$ とする．そのとき，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$ であり，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\log(1+u_n)|=\sum_{n=1}^{\infty}|\log(1+v_n)|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+u_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+v_n)=s,$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+v_n)=e^s$$

である．(iii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=e^s\neq 0.$ □

参考文献

[1] 梅村浩，楕円関数論，　東京大学出版会，　2000.

[2] 小野孝，オイラーの主題による変奏曲，　実教出版，1980.

[3] 竹之内修・伊藤隆，　π–π の計算 アルキメデスから現代まで–，　共立出版，2007.

[4] 小平邦彦, 複素解析, 岩波書店, 1991.

[5] 大 浦 拓 哉 ，円 周 率 の 公 式 と 計 算 法 ，http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ ooura/pi04.pdf